

第66回 代数学シンポジウム報告集

Zoom によるオンライン開催

2021年8月31日～9月3日

2021年12月31日発行

2021年度 第66回 代数学シンポジウム 報告集

本書は令和3年8月31日から9月3日にZoomによるオンライン開催された第66回代数学シンポジウムの報告集です。

記

日程：2021年8月31日（火）～9月3日（金）

開催方法：Zoomによるオンライン開催¹

(<https://mathsoc.jp/section/algebra/algsympo.html>)

会場責任者：永井 保成

プログラム責任者：[代数幾何] 金沢 篤・尾高 悠志 [環論] 有木 進・下元 数馬

[群論・表現論] 宗政 昭弘・直井 克之 [数論] 安田 正大・水野 義紀

シンポジウム責任者：森脇 淳（連絡責任評議員）

プログラム

8月31日（火）

9:45–10:45 渡邊 究（中央大学・理学院）

接束の正値性

11:00–12:00 馬 昭平（東京工業大学・理学院）

カスプと有理同値

13:30–14:30 伊藤 敦（岡山大学・自然科学学域）

Linear systems on abelian varieties via M-regularity of \mathbb{Q} -twisted sheaves

14:45–15:45 淺井 聰太（大阪大学・情報科学研究科）

傾理論と Grothendieck 群の部屋構造・標準分解

16:00–17:00 中村 力（東京大学・数理科学研究科）

Toward large Cohen-Macaulay representation theory via purity

9月1日（水）

*9:45–10:45 細野 忍（学習院大学・理学部）

周期積分の満たす微分方程式と K3 ラムダ関数

*11:00–12:00 入谷 寛（京都大学・理学研究科）

ガンマ予想とトロピカル幾何

*13:30–14:30 宮崎 誓（熊本大学・先端科学研究所）

Castelnuovo-Mumford 正則量とシジジーに関連する話題について

*14:45–15:45 井上 玲（千葉大学・理学研究院）

クラスター代数とその広がり

16:00–17:00 塙原 紀宏（名古屋大学・多元数理科学研究科）

形式的 dg 代数のクラスター圏とその森田型定理

¹感染症の感染拡大防止のため、予定していた早稲田大学理学院における開催は見送ることになりました。

9月2日（木）

*9:45–10:45 坂内 健一（慶應義塾大学・理工学部／理化学研究所・革新知能統合研究センター）

総実代数体の新谷生成類と同変ポリログ類

*11:00–12:00 関 真一朗（青山学院大学・理工学部）

数体の素元星座定理

*13:30–14:30 加藤 周（京都大学・理学研究科）

アフィン旗多様体の幾何学とその広がり

*14:45–15:45 三枝崎 剛（早稲田大学・基幹理工学部）

符号, 格子と頂点作用素代数におけるレーマー型問題

16:00–17:00 宮本 雅彦（台湾中央研究院・数学研究所／筑波大学名誉教授）

Associativity of fusion products of C_1 -cofinite N -gradable modules of vertex operator algebra

9月3日（金）

9:45–10:45 小寺 諒介（千葉大学大学院・理学研究院）

Affine Yangians and rectangular W-algebras

11:00–12:00 櫻井 太朗（千葉大学大学院・理学研究院）

有限群の指標とシロー部分群

13:30–14:30 広瀬 稔（名古屋大学・高等研究院）

Iterated integrals, motivic Galois groups, and cyclotomic associators

14:45–15:45 松坂 俊輝（名古屋大学・高等研究院）

Triangle modular knots and Rademacher symbols

16:00–17:00 阿部 知行（東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構）

コホモロジー理論の無限化とその応用

「*」の付いた講演は、専門分野以外の方も対象とした、サーベイなどを含む講演です。

目次

渡邊 究	
接束の正値性.....	6
馬 昭平	
カスプと有理同値.....	24
伊藤 敦	
Linear systems on abelian varieties via M-regularity of \mathbb{Q} -twisted sheaves	42
淺井 聰太	
傾理論と Grothendieck 群の部屋構造・標準分解.....	54
中村 力	
Toward large Cohen-Macaulay representation theory via purity	70
細野 忍	
周期積分の満たす微分方程式と K3 ラムダ関数	84
入谷 寛	
Gamma conjecture and tropical geometry	99
宮崎 誓	
Castelnuovo-Mumford 正則量とシジマーに関する話題について	114
井上 玲	
クラスター代数とその広がり	133
埴原 紀宏	
形式的 dg 代数のクラスター圏とその森田型定理	151
坂内 健一	
総実代数体の新谷生成類と同変ポリログ類	164
関 真一朗	
数体の素元星座定理	184
加藤 周	
アフィン旗多様体の幾何学とその広がり	195
三枝崎 剛	
符号, 格子と頂点作用素代数におけるレーマー型問題	209
宮本 雅彦	
VOA の C_1 -余有限 N -gradable 加群の fusion 積の結合律	226
小寺 謙介	
Affine Yangians and rectangular W-algebras	238
櫻井 太朗	
有限群の指標とシロー部分群	253
広瀬 稔	
Iterated integrals, motivic Galois groups, and cyclotomic associators	264
松坂 俊輝	
三角群に関する Rademacher 記号とモジュラー結び目	275
阿部 知行	
コホモロジー理論の無限化とその応用	293

接束の正値性

中央大学・理 工 学 部 渡 邁 究

CONTENTS

1. はじめに	1
2. 準備	2
2.1. 用語と記号	2
2.2. 有理曲線族	3
3. 接束による等質多様体の特徴付け	4
4. 接束の半正値性	6
5. ネフ接束をもつ Fano 多様体に関する CP 予想	7
5.1. Picard 数が 2 以上の場合	8
5.2. Picard 数が 1 の場合	8
6. 一般的な問題設定	10
7. 接束の 2 階外積がネフな非特異射影多様体	11
8. 正標数におけるネフ接束をもつ非特異射影多様体	13
参考文献	15

1. はじめに

X を種数 g のコンパクト Riemann 面, K を X のガウス曲率とする. このとき, 至るところ曲率 K が正になる X はどのようなものだろうか. この問い合わせに対する解答を得るために, 次の Gauss-Bonnet の定理を思い出そう:

$$\frac{1}{2\pi} \int_X K dA = 2 - 2g$$

曲率 K が至るところ正であれば, 上の式の左辺が正の値をとるので, 不等式 $2 - 2g > 0$ を得る. g は非負整数値であるから, $g = 0$ となる. すなわち, X は Riemann 球面 \mathbb{P}^1 と双正則となる. この考察の一般化として, 次の Frankel 予想が提唱された:

予想 1.1 (Frankel 予想 [13]). X を n 次元コンパクト Kähler 多様体とする. X の正則双断面曲率 R が正であれば, X は \mathbb{P}^n と双正則である.

この予想の代数幾何学版が次の Hartshorne 予想である:

代数学シンポジウムにおける講演の機会を下さったプログラム責任者の金沢篤さん, 尾高悠志さん, 会場責任者の永井保成さん, シンポジウム責任者の森脇淳先生に感謝いたします. また, 鈴木拓さんには, 原稿に目を通してください, タイプミスなどを指摘していただきました. この場を借りて御礼申し上げます. 本研究は科学研究費「基盤研究 (C)」(研究課題番号 #21K03170), 「住友財団基礎科学研究助成」, 「稻盛財団助成」のサポートを受けています.

予想 1.2 (Hartshorne 予想 [17, Chapter 3, Problem 2.3]). X を代数閉体上定義された m 次元非特異射影多様体とする. 接束 T_X が豊富であれば, X は \mathbb{P}^m と同型である.

Frankel 予想は Hartshorne 予想から従うことが知られている (例えば, [28, V. Corollary 3.4] 参照). Hartshorne 予想は森により解決された [41]. また, 同時期に森とは独立に, Siu-Yau により Frankel 予想の解析的な証明が与えられた [54]. Frankel 予想や Hartshorne 予想のように接束や曲率の正値性の観点から代数多様体の構造を考察した結果は多々ある. 本稿では特に接束がネフである代数多様体や接束がネフに近い条件を満たす代数多様体の構造に関する種々の結果を紹介する.

2. 準備

2.1. 用語と記号. 以下, 基礎体は標数 $p \geq 0$ の代数閉体 k とする. また, 本稿を通して, [18, 28, 29, 30, 31] の記号や表記を用いる. m 次元射影空間と m 次元非特異 2 次超曲面をそれぞれ \mathbb{P}^m, Q^m と記す.

定義 2.1. X を k 上定義された射影多様体とし, E をその上のベクトル束とする.

- (i) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ が $\mathbb{P}(E)$ 上の豊富な直線束となるとき, E は **豊富**であるという.
- (ii) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ が $\mathbb{P}(E)$ 上のネフ直線束となるとき, E は **ネフ**であるといいう.
- (iii) [12, Definition 1.17] E とその双対 E^\vee がネフのとき (この条件は E と $(\det E)^\vee$ がネフであることと同値である), E は **数値的に平坦**であるといいう.

注意 2.2. [12] ではコンパクト複素多様体 X 上のベクトル束に対して「ネフ」を定義している. その定義は X が射影多様体であれば定義 2.1 (ii) のネフと一致する.

定義 2.3 ([28, IV Definition 3.2]). X を k 上定義された非特異射影多様体とする. また, C を X 上の有理曲線とし, その正規化によって得られる射を $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ とする.

- (i) f^*T_X がネフのとき, 有理曲線 C を **free** といいう.
- (ii) f^*T_X が豊富なとき, 有理曲線 C を **very free** といいう.
- (iii) 反標準因子 $-K_X$ が豊富なとき, X を **Fano 多様体**といいう.
- (iv) X の一般の点を通る有理曲線が存在するとき, X を **单線織 (uniruled)** といいう.
- (v) X の一般の 2 点を通る有理曲線が存在するとき, X を **有理連結 (rationally connected (RC))** といいう.
- (vi) X の一般の 2 点を通る free 有理曲線が存在するとき, X を **自由有理連結 (freely rationally connected (FRC))** といいう.
- (vii) X の一般の 2 点を通る有理曲線の連結鎖が存在するとき, X を **有理鎖連結 (rationally chain connected (RCC))** といいう.

- (viii) X 上に very free 有理曲線が存在するとき, X を分離的有理連結 (separably rationally connected (SRC)) という.¹

注意 2.4. X を非特異射影多様体とする.

- (i) 標数が 0 ならば, X が uniruled であることと X 上に free 有理曲線が存在することは同値である ([28, IV. Theorem 1.9] 参照).
- (ii) Fano \Rightarrow RCC が成立する ([28, V. Theorem 2.13] 参照).
- (iii) SRC \Rightarrow FRC \Rightarrow RC \Rightarrow RCC が成立する.
- (iv) T_X がネフならば, smoothing に関する議論により, RCC \Rightarrow FRC が成立する (例えば, [28, Chapter II. 7.6] を参照).
- (v) 標数が 0 ならば, SRC, RC, RCC は全て同値である ([28, IV. Theorem 3.7, Theorem 3.10.3] 参照).
- (vi) 有理曲線 $C \subset X$ に対しその正規化を $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow C \subset X$ とする. Grothendieck の定理 (例えば [49, Chap. 1, Theorem 2.1.1] 参照) により, ある整数 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$ が存在して,

$$f^*T_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_m)$$

とかける. このとき, C が free (resp. very free) であることと全ての i に対し $a_i \geq 0$ (resp. $a_i > 0$) が成り立つことは同値である.

代数多様体間の非特異射 $f : X \rightarrow Y$ に対し, 任意の (閉点上の) ファイバーが \mathbb{P}^n と同型なとき, f を \mathbb{P}^n 束という (必ずしもベクトル束の射影化として記述できるわけではない).

2.2. 有理曲線族. この小節では, 命題 2.6 と定理 2.7 を除き, X を free 有理曲線をもつ (すなわち, 分離的单線織) 非特異射影多様体とする. X 上の有理曲線のパラメータ空間の正規化を $\text{RatCurves}^n(X)$ とかき ([28, Definition-Proposition II.2.11] 参照), その既約成分 \mathcal{M} を**有理曲線族** (family of rational curves) という. 有理曲線族 \mathcal{M} を一つ固定する. 族 \mathcal{M} によりパラメータ付けられる有理曲線を \mathcal{M} 曲線 (\mathcal{M} -curve) という. \mathcal{M} 曲線はすべて数値的に同値なので, 族 \mathcal{M} に対する反標準次数 $\deg_{(-K_X)} \mathcal{M}$ が定まる: $\deg_{(-K_X)} \mathcal{M} = -K_X \cdot C$ ($[C] \in \mathcal{M}$). 構成法から, \mathcal{M} は普遍族 $p : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ と評価写像 $q : \mathcal{U} \rightarrow X$ をもつ ([28, Theorem II.2.15] 参照):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{q} & X \\ p \downarrow & & \\ \mathcal{M} & & \end{array}$$

定義 2.5. 上記記号のもと, 以下のように用語や記号を定める.

- (i) \mathcal{M} と任意の $x \in X$ に対し $p(q^{-1}(x))$ の正規化を \mathcal{M}_x と記す.
- (ii) 族 \mathcal{M}_x によりパラメータ付けられる有理曲線を \mathcal{M}_x 曲線 (\mathcal{M}_x -curve) という.

¹本来の定義は異なるが, X の非特異性から very free 有理曲線の存在と同値になる ([28, IV. Theorem 3.7]).

- (iii) 全ての \mathcal{M} 曲線の和集合を $\text{Locus}(\mathcal{M}) := \bigcup_{[C] \in \mathcal{M}} C$, 全ての \mathcal{M}_x 曲線の和集合を $\text{Locus}(\mathcal{M}_x) := \bigcup_{[C] \in \mathcal{M}_x} C$ と記す.
- (iv) $q : \mathcal{U} \rightarrow X$ が支配的となるとき, \mathcal{M} を支配的 (dominant) という.
- (v) $q : \mathcal{U} \rightarrow X$ が全射となるとき, \mathcal{M} を被覆族 (covering family) という.
- (vi) 一般の点 $x \in \text{Locus}(\mathcal{M})$ に対し \mathcal{M}_x がスキームとして k 上固有的なとき, \mathcal{M} を局所非分裂 (locally unsplit) という.
- (vii) \mathcal{M} がスキームとして k 上固有的なとき, \mathcal{M} を非分裂 (unsplit) という.
- (viii) 支配的な既約成分のうち反標準次数が最小のものを極小有理成分 (minimal rational component) という. bend-and-break により,

$$\deg_{(-K_X)} \mathcal{M} \leq \dim X + 1$$

となる.

- (ix) \mathcal{M} を非分裂被覆族とする. 2点 $x_1, x_2 \in X$ を結ぶ \mathcal{M} 曲線の連結鎖が存在するとき, $x_1, x_2 \in X$ は \mathcal{M} 同値 (\mathcal{M} -equivalent) であるという.

命題 2.6 ([28, IV Corollary 2.6] 参照). X を非特異射影多様体とし, \mathcal{M} を X 上の局所非分裂有理曲線族とする. このとき一般の点 $x \in \text{Locus}(\mathcal{M})$ に対し, 以下が成立する;

$$\dim \text{Locus}(\mathcal{M}_x) \geq \deg_{(-K_X)} \mathcal{M} + \text{codim}_X \text{Locus}(\mathcal{M}) - 1.$$

定理 2.7 ([28, IV Theorem 4.16] 参照). X を非特異射影多様体とし, \mathcal{M} を X 上の非分裂有理曲線族とする. このとき, X の空でない開集合 X^0 とファイバーが \mathcal{M} 同値類となる射影射 $\varphi : X^0 \rightarrow Z^0$ が存在する. φ を \mathcal{M} に関する rationally chain connected fibration (RCC-fibration) という.

3. 接束による等質多様体の特徴付け

本稿では等質多様体がしばしば現れる. ここでは等質多様体とその周辺の内容についてまとめる.

k を標数 $p \geq 0$ の代数閉体, X を k 上定義された射影多様体とする. X が代数群の推移的作用をもつとき, X を等質多様体という. 本稿では等質多様体とは射影的なものを指す. 等質多様体の構造について次が知られている:

定理 3.1. 等質多様体 X に対し, Abel 多様体 A , 非特異連結線形代数群 G と放物的部分群 P が存在して, $X \cong A \times G/P$ が成立する.

標数 0 のとき, この定理は Borel-Remmert によって示された [3]. このとき, 定理に現れる G/P は有理等質多様体 (有理的である等質多様体) に他ならない. 従って, G は半単純線形代数群としてよく, G/P は印付きディンキン図形を用いて完全に分類される (例えば, [44, 2.2] を参照せよ). 正標数の場合は C. Sancho de Salas により示された [51]. 標数 0 のときと異なり, この場合 P が被約とは限らない. そのことが原因で特殊な現象が起こり得る (例 3.5 をみよ).

射影多様体 X に対し, 自己同型群 $\text{Aut}(X)$ は自己同型関手を表現するスキームとして定義される [36, Theorem 3.7]. 標数 0 かつ X が非特異ならば, $\text{Aut}(X)$

のリー環 $\text{Lie}(\text{Aut}(X))$ は次のようにみなせる：

$$\text{Lie}(\text{Aut}(X)) \cong H^0(X, T_X).$$

これを用いて、等質多様体を接束の観点から特徴付けることができる：

命題 3.2. 標数 0 のとき、射影多様体 X に対し、 X が等質多様体であることと接束 T_X が大域切断により生成されることは同値である。特に、等質多様体の接束はネフである。

証明. G を $\text{Aut}(X)$ の単位元を含む既約成分とする。任意の点 $x \in X$ に対し、軌道写像を考える：

$$\mu_x : G \rightarrow X; g \mapsto gx.$$

単位元 $e \in G$ における μ_x の微分 $d\mu_x : T_e G \rightarrow T_x X$ は X の代数的ベクトル場の x における評価写像に他ならない：

$$\text{ev}_x : H^0(X, T_X) \rightarrow T_x X; v \mapsto v_x.$$

よって、主張が従う。 ■

さらに、Abel 多様体と有理等質多様体は接束の観点から区別することができる。

命題 3.3. 標数 0 のとき、非特異射影多様体 X に対し以下が成立する。

- (i) X が Abel 多様体であることと接束 T_X が自明であることは同値である。
- (ii) X が有理等質多様体ならば、その反標準因子に付随する層 $\mathcal{O}(-K_X)$ は豊富かつ大域切断により生成される。特に、 X は Fano 多様体である。

証明. (i) Abel 多様体の接束が自明であることはよく知られている。例えば、[43, p.42 (iii)] を参照のこと。逆は、例えば [10, Corollary 3.19] から従う。

(ii) 代数群の知識を使わない簡単な証明として、森による証明が知られている。例えば、[28, V. Theorem 1.4] を参照のこと。 ■

系 3.4. 有理等質多様体 G/P はネフ接束をもつ Fano 多様体である。

標数 0 のときは異なり、正標数では様々な現象が起こる。

例 3.5 (非被約な安定化部分群をもつ等質多様体). 基礎体を標数 $p > 0$ の代数閉体とする。 p のべき $q := p^e$ ($e \in \mathbb{Z}_0$) に対し、次の多様体 X_q を考える：

$$X_q := \left\{ ((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_n)) \in \mathbb{P}_1^n \times \mathbb{P}_2^n \mid \sum_{i=0}^n x_i^q y_i = 0 \right\}.$$

ここで、 \mathbb{P}_1^n と \mathbb{P}_2^n は共に n 次元射影空間である。二つを区別するために \mathbb{P}_1^n と \mathbb{P}_2^n と記す。 F^e を e 次絶対 Frobenius 射 $F^e : \mathbb{P}_1^n \rightarrow \mathbb{P}_1^n$ とすると、 $X_q \cong \mathbb{P}(F^{e*}(T_{\mathbb{P}_1^n}(-1)))$ となることに注意する。この X_q は以下のとおりを満たす ([61, Example 2.3] を参照せよ)：

- (i) X_q は非被約な安定化部分群をもつ等質多様体である。
- (ii) X_q が Fano 多様体であることと $q \leq n$ となることは同値である。
- (iii) 接束 T_{X_q} はネフでない。

従って、 $q \leq n$ のとき X_q は接束がネフでない有理等質 Fano 多様体であり、 $q > n$ のとき X_q は Fano でない有理等質多様体である。

例 3.6 (井草の例 [21]). 基礎体を標数 2 の代数閉体とする. A_1, A_2 を Abel 多様体とし, A_1 が 2 ねじれ点 $a \in A_1$ をもつとする. $Y := A_1 \times A_2$ とおき, Y 上の対合 $i(x, y) := (x + a, -y)$ を考える. 基礎体の標数が 2 なので, i は固定点をもたず, 商多様体 $X := Y/\langle i \rangle$ は以下を満たす ([61, Example 2.4] を参照せよ) :

- (i) X は非特異射影多様体である.
- (ii) 接束 T_X は自明である.

従って, X は接束が自明だが等質多様体でない.

例 3.5 と例 3.6 により, 命題 3.2 と命題 3.3 は正標数では一般には成り立たないことが分かる.

4. 接束の半正値性

この節において, 基礎体 k の標数は 0 とする. Frankel 予想の一般化として, 正則双断面曲率が非負であるコンパクト Kähler 多様体を考えることは自然である. 正則双断面曲率が非負であるコンパクト Kähler 多様体の構造定理として, 一般化 Frankel 予想が提唱され, 最終的に Mok により解決された:

定理 4.1 (一般化 Frankel 予想 [39]). 正則双断面曲率が非負であるコンパクト Kähler 多様体の普遍被覆は \mathbb{C}^k と射影空間と階数が 2 以上のエルミート対称空間の積である.

Frankel 予想における曲率の正値性を半正値性に置き換えたのが一般化 Frankel 予想である. 同様に, Hartshorne 予想における接束の正値性を半正値性で置き換えた問題として, ネフ接束をもつ射影多様体の構造を考える. 次の問題は Campana-Peternell により提唱された:

問 4.2 ([4]). 非特異射影多様体 X がネフ接束をもつとする. このとき, X の構造を調べよ.

Campana-Peternell は [4] において, 3 次元以下のネフ接束をもつ多様体を分類した.

例 4.3. 命題 3.2 により, 等質多様体の接束は大域切断により生成されるので, 特にネフである. また, 等質多様体の有限エタール被覆/商もネフ接束をもつ.

また, 例えば $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^n})$ は等質多様体なのでネフ接束をもつが, 定理 4.1 により正則双断面曲率が非負となる Kähler 計量をもたない. 一方, 正則双断面曲率が非負な射影多様体の接束は Griffith 半正なのでネフである (例えば, [31, 6.1.D] 参照). 従って, 非特異射影多様体に対して, 一般化 Frankel 予想より問 4.2 の方が一般的な問題である.

例 4.4. E を橜円曲線 C 上の階数 2 の半安定ベクトル束とする. このとき, $\mathbb{P}(E)$ の接束はネフであるが $\mathbb{P}(E)$ は等質多様体ではない ([4, Theorem 3.1]).

例 4.3 により, 問 4.2 に現れるネフ接束をもつ射影多様体の例として等質多様体が挙げられる. 一方, 例 4.4 により, 等質多様体の有限エタール被覆/商ではないがネフ接束をもつ射影多様体が存在することが分かる. 問 4.2 に関する最も重要な結果として, Demainly-Peternell-Schneider による次の結果が知られている:

定理 4.5 ([12, Main Theorem]). X をネフ接束をもつ非特異射影多様体とする。このとき、以下の条件を満たす X の有限エタール被覆 $\tilde{X} \rightarrow X$ が存在する：

- (i) Albanese 写像 $\alpha : \tilde{X} \rightarrow \text{Alb}(\tilde{X})$ は非特異射である。
- (ii) α のファイバーはネフ接束をもつ Fano 多様体である

注意 4.6. [12] では定理 4.5 を（より一般的な）コンパクト Kähler 多様体に対して証明している。

定理 4.5 により、ネフ接束をもつ多様体の構成要素はネフ接束をもつ Fano 多様体と Abel 多様体であることが分かる。あとは、ネフ接束をもつ Fano 多様体の構造が分かれば、問 4.2 の解答が得られる。ネフ接束をもつ Fano 多様体に関する事柄は次の章において紹介する。ここでは、ネフ接束をもつ射影多様体の収縮射や Kleiman-Mori 錐について知られていることをまとめると、

定理 4.7. X をネフ接束をもつ非特異射影多様体、 $\varphi : X \rightarrow Y$ を K_X 負な端射面の収縮射とする。このとき、以下が成立する：

- (i) 収縮射 $\varphi : X \rightarrow Y$ はネフ接束をもつ非特異射影多様体 Y への非特異射である。
- (ii) 収縮射 $\varphi : X \rightarrow Y$ の任意のファイバー F はネフ接束をもつ Fano 多様体であり、 $\rho_F = \rho_X - \rho_Y$ を満たす。
- (iii) Kleiman-Mori 錐 $\overline{\text{NE}}(X)$ は simplicial である。

証明. (i) は最初に Demailly-Peternell-Schneider [12, Theorem 5.2] においてアナウンスされたが、証明にギャップがあり、Solà Conde-Wiśniewski [55, Theorem 4.4] において示された。(ii) については、例えば [44, Proposition 3.7] をみよ。(iii) は Muñoz-Occhetta-Solá Conde-Watanabe [42, Proposition 4.4] による ([44, Corollary 3.2] にも証明が載っている)。 ■

5. ネフ接束をもつ FANO 多様体に関する CP 予想

この節において、基礎体の標数は 0 とする。この節ではネフ接束をもつ Fano 多様体に関して知られていることをまとめると、

定義 5.1. ネフ接束をもつ非特異 Fano 多様体を CP 多様体という。

予想 5.2 (Campana-Peternell 予想 (CP 予想), [4]). CP 多様体は (有理) 等質多様体である。

この予想に関して以下の事柄が知られている：

定理 5.3. 以下の非特異射影多様体 X に対し CP 予想は成立する：

- (i) $\dim X = 3$ のとき [[4] Campana-Peternell '91].
- (ii) $\dim X = 4$ かつ $\rho(X) > 1$ のとき [[6] Campana-Peternell '93].
- (iii) $\dim X = 4$ かつ $\rho(X) = 1$ のとき [[40] Mok '02, [20] Hwang '06].
- (iv) $\dim X = 5$ かつ $\rho(X) > 1$ のとき [[58] Watanabe '14].
- (v) $\dim X = 5$ かつ $\rho(X) = 1$ のとき [[24] Kanemitsu '17].
- (vi) $\rho(X) > \dim X - 4$ のとき [[60] Watanabe '15].
- (vii) $\rho(X) > \dim X - 5$ のとき [[23] Kanemitsu '16].

- (viii) Fano 余指標が 3 以下のとき [[56] Suzuki-Watanabe '20, [62] Watanabe '21]
- (ix) T_X が big かつ 1-ample のとき [[55] Solá Conde-Wiśniewski, '04].
- (x) X がトーリック多様体のとき [例えば, [15, Proposition 5.3] Fujino-Sato, '09 から従う].
- (xi) $X \subset \mathbb{P}^N$ が完全交叉のとき [[50] Pandharipande, '13].
- (xii) X が horospherical 多様体のとき [[34] Q. Li, '17].

詳細は割愛するが金光による論文 [25] も非常に重要である. 直接 CP 予想には関係ないが, Li の論文 [33] に spherical 多様体のサイクルに関する結果が載っており, spherical 多様体に対して CP 予想を考える際に利用できる. 以下, 定理 5.3 に挙げられた先行結果はどのように得られたか, 基本的な研究方策について説明する. 詳細は [44] を参照されたい.

5.1. Picard 数が 2 以上の場合. 以下の仮定 (*)のもとで, Picard 数が 2 以上の n 次元 CP 多様体をどのように考察するか説明する.

(*) 次元が $n - 1$ 以下の多様体に対して CP 予想が成り立つとする.

X を Picard 数が 2 以上の n 次元 CP 多様体とする. このとき, X は少なくとも 2 つ端射線の収縮射をもつ. その収縮射を $\varphi_i : X \rightarrow Y_i$ ($i = 1, 2$) とかき, φ_i ($i = 1, 2$) のファイバーを F_i とかく.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \varphi_1 \swarrow & & \searrow \varphi_2 \\ Y_1 & & Y_2 \end{array}$$

定理 4.7 により, 次が成り立つ:

- (i) Y_i, F_i ($i = 1, 2$) は CP 多様体である;
- (ii) $\dim Y_i, \dim F_i < \dim X$ ($i = 1, 2$);
- (iii) $\rho_{Y_i} = \rho_X - 1$ かつ $\rho_{F_i} = 1$.

仮定 (*) により, Y_i, F_i ($i = 1, 2$) は有理等質多様体となる. 定理 5.3 の (ii), (iv), (vi), (vii) の証明の方針は同じで, この性質を用いて結果を導いている. ここでは, 簡単のため, $\dim X = 3$ のときにどのように等質性を示すか説明する.

まず, 1 次元の Fano 多様体は \mathbb{P}^1 のみである. また, 2 次元の Fano 多様体は del Pezzo 曲面なので, 2 次元 CP 多様体は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ または \mathbb{P}^2 である (定理 4.7 (i) により \mathbb{P}^2 の blow up はネフ接束をもたないことに注意する). 従って, 上記記号のもと, F_i は \mathbb{P}^1 または \mathbb{P}^2 であり, Y_i は $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2$ または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ となる. これらから, φ_i は \mathbb{P}^1 束か \mathbb{P}^2 束となることも分かる. あとは, それぞれのケースごとに解析を行うことで, X は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ もしくは $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ のいずれかと同型であることが従う.

5.2. Picard 数が 1 の場合. X をピーカル数 1 の CP 多様体とする. $\dim X \leq 2$ なら X は \mathbb{P}^1 か \mathbb{P}^2 と同型なので, $m := \dim X \geq 3$ と仮定する. $\mathcal{M} \subset \text{RatCurves}^n(X)$ を極小有理成分とし, 小節 2.2 と同様に普遍族と評価写像をそれぞれ $p : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ と $q : \mathcal{U} \rightarrow X$ とかく. また, 族 \mathcal{M} に対する反標準次数を d とする.

定理 5.4 ([44, Proposition 2.10] 参照). 上記記号のもと, 以下が成立する.

- (i) \mathcal{M} は $(m+d-3)$ 次元非特異射影多様体である.
- (ii) $p : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ は \mathbb{P}^1 束である.
- (iii) $q : \mathcal{U} \rightarrow X$ は非特異射である.
- (iv) 一般の点 $x \in X$ に対し, \mathcal{M}_x と $q^{-1}(x)$ は同型である.

定理 5.5. 上記記号のもと, 以下が成立する.

- (i) $d \leq m+1$;
- (ii) $d = m+1 \iff X \cong \mathbb{P}^m$;
- (iii) $d = m \iff X \cong Q^m$;
- (iv) $d \geq 3$.

証明. (i) は bend and break から従う. (ii) は [8] (または [27]) から, (iii) は [11] から従う. (iv) を示そう. 定理 5.4 により, $q : \mathcal{U} \rightarrow X$ は相対次元 $d-2$ の非特異射である. よって, $d \geq 2$ となる. さらに, $d=2$ とすると, $q : \mathcal{U} \rightarrow X$ は相対次元 0 の非特異射なので, エタール射となる. X は Fano なので, 単連結である. 従って, q は同型射となる. 一方, X と同型な \mathcal{U} は \mathbb{P}^1 束構造 $p : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ をもつ. 仮定より $\rho_X = 1$ かつ $\dim X \neq 1$ なので, これは矛盾. ■

もう一步話を進めるために, Muñoz-Occhetta-Solá Conde-Watanabe-Wiśniewski による次の結果を紹介する:

定理 5.6. Z を Picard 数が n の非特異射影多様体とする. このとき以下は同値である:

- (i) 相異なる端射線 $R_1, \dots, R_n \subset N_1(Z)$ が存在し, 対応する収縮射がそれぞれ \mathbb{P}^1 束となる.
- (ii) 半単純代数群 G とそのボレル部分群 B が存在し, $Z \cong G/B$ となる.

証明. この結果は [59, 42, 47, 48] において段階的に示された. Z が Fano の場合に [47] で証明を与える, [48] において上記の形に一般化された ([48, Theorem A.1]). ■

これを用いて, Mok [40] と Hwang [20] により示された次の定理を証明しよう:

定理 5.7. $d=3$ ならば, X は等質多様体である.

証明. $d=3$ とすると, $q : \mathcal{U} \rightarrow X$ は相対次元 1 の非特異射である. このとき, 曲線のモジュライ空間の hyperbolicity により, q は \mathbb{P}^1 束となる ([40, Lemma 1.2.2]). いま, $\rho_{\mathcal{U}} = \rho_X + 1 = 2$ であり, \mathcal{U} は相異なる \mathbb{P}^1 束構造を 2 つもつ. 従って, 定理 5.7 により \mathcal{U} は有理等質多様体となる. 有理等質多様体の収縮射による像は再び有理等質多様体である. 従って, X の等質性が従う.

■

定理 5.5 と定理 5.7 により次が従う:

系 5.8. 4 次元以下の多様体に対し, CP 予想は成立する.

5 次元の場合の CP 予想を証明するには $(m, d) = (5, 4)$ の場合を扱えばよい. 金光は [24] において, 非特異射 q の構造を決定し, 定理 5.6 を用いることにより

証明を与えた. このように, Picard 数が 1 の CP 多様体は, 普遍族 $p : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ と評価写像 $q : \mathcal{U} \rightarrow X$ を用いて研究するのが一般的である. X 上の有理曲線の幾何学を用いて, 定理 5.6 の (i) を満たす多様体 $Z \rightarrow X$ を構成することにより, X の等質性を示すという方法が, いまのところ最も有効である. 関連した問題が³ [45, 46] でも扱われていることに注意をしておく.

6. 一般的な問題設定

Demainly-Peternell-Schneider の結果 [12] を元に, 接束や曲率の正値性の観点から, どのような問題が考えられるだろうか. 定理 4.5 はネフ接束をもつ多様体を「有理曲線がたくさんのっている部分」(Fano 多様体) と「有理曲線が(少ししか)のっていない部分」(Abel 多様体) に分けることができるこを意味している. 定理 4.5において、「有理曲線がたくさんのっている部分」が Fano 多様体であることを証明するのは簡単ではない. また, 「有理曲線がたくさんのっている部分」を調べる際には定理 4.7 のように, 収縮射の構造や Kleiman-Mori 錐の様子を調べる必要がある. このような考察から, 以下の問題が自然に生じる:

問 6.1. X を標数 $p \geq 0$ の代数閉体 k 上定義された非特異射影多様体 (もしくは, コンパクト Kähler 多様体やマイルドな特異点をもつ射影多様体) とする. さらに, X の接束 (または曲率) がある種の正値性を満たすとする. このとき, 以下の問題を考えよ:

- (i) X を「有理曲線がたくさんのっている部分」と「有理曲線が(少ししか)のっていない部分」に分解できるか?
- (ii) 「有理曲線がたくさんのっている部分」は有理連結多様体となるか? さらに Fano 多様体となるか?
- (iii) X の収縮射や Kleiman-Mori 錐を (ある程度) 決定できるか?

Hartshorne 予想, 一般化 Frankel 予想, ネフ接束をもつ多様体以外にも, 問 6.1 に関連する様々な研究がある. ここでは, 定理 4.5 の一般化として, 以下の Cao-Höring と細野-岩井-松村の結果を紹介する:

定理 6.2 ([7, Theorem 1.3]). X をネフ反標準因子をもつ非特異射影多様体とする. このとき, 以下の条件を満たす(解析的に)局所自明な非特異射 $\pi : X \rightarrow B$ が存在する:

- π のファイバーは有理連結であり, $K_B \equiv 0$ となる.

さらに, 以下を満たす有限エタール被覆 $X' \rightarrow X$ が存在する:

- (i) $X' \cong Y \times Z$;
- (ii) $K_Y \cong \mathcal{O}_Y$;
- (iii) Albanese 写像 $Z \rightarrow \text{Alb}(Z)$ は F をファイバーとしてもつ(解析的に)局所自明な非特異射である.

注意 6.3. 射影的 klt 対 (X, Δ) に対し, 定理 6.2 の一般化が成り立つことが知られている ([14, 57]).

定理 6.4 ([19, Theorem 1.1]). X を非特異射影多様体とし, その接束 T_X が擬有効とする. このとき, 以下の条件を満たす非特異射 $\pi : X \rightarrow Y$ が存在する:

- (i) Y は Abel 多様体のエタール商である.
- (ii) π の一般ファイバーは有理連結である.
- (iii) π の一般ファイバーの接束は擬有効である.

注意 6.5. ベクトル束の擬有効の定義は文献によって異なることに注意する. 例えば, [19] と [35] における擬有効の定義は異なる.

解析的な結果は色々とあるが, 筆者が不勉強なため文献を網羅することができない. 例えば, [37] やその参考文献を参照されたい. 以下の章では, 問 6.1 に関する結果として, 接束の 2 階外積がネフな非特異射影多様体に関する結果 [63] と正標数の場合の Demainly-Peternell-Schneider 型の定理 [26] について紹介する.

7. 接束の 2 階外積がネフな非特異射影多様体

この章では接束の 2 階外積がネフな非特異射影多様体に関して問 6.1 を考える. 多様体の次元は常に 3 以上とし, 基礎体 k の標数を 0 とする. まず, 関連する先行結果を網羅する.

Campana-Peternell は [4] において, 3 次元以下のネフ接束をもつ多様体を分類した. その次のステップとして, 2 階外積がネフな 3 次元非特異射影多様体を分類した [5] :

定理 7.1. X を 3 次元非特異射影多様体とする. 接束 T_X はネフではないが 2 階外積 $\wedge^2 T_X$ がネフであるとき, X は以下のいずれかと同型である:

- (i) X は \mathbb{P}^3 の 1 点ブローアップである;
- (ii) X は Picard 数 1 かつ Fano 指数が 2 の Fano 多様体である. ただし, 次数 1 のものは除く.

また, 佐藤-趙 [9] は森の結果 [41] の一般化として, 接束の 2 階外積が豊富な非特異射影多様体を分類した:

定理 7.2. X を非特異射影多様体とする. 接束の 2 階外積 $\wedge^2 T_X$ が豊富ならば, X は \mathbb{P}^m または Q^m と同型である.

他にも以下のような場合にそれぞれ分類結果が知られている (以下の (i)-(iv) すべてのケースにおいて, 接束の 2 階外積 $\wedge^2 T_X$ はネフと仮定する):

- (i) Picard 数が 2 以上である 4 次元 Fano 多様体 [[64] Yasutake '12].
- (ii) 双有理収縮射をもつ Fano 多様体 [[65] Yasutake '14].
- (iii) トーリック多様体 [[52] Schmitz '18].
- (iv) 接束の 2 階外積 $\wedge^2 T_X$ が強ネフな射影多様体 [[32] Li-Ou-Yang '19].

これらを踏まえ, [63] において, 接束の 2 階外積がネフな非特異射影多様体に関して問 6.1 を考えた. まず, [63] の主結果を 3 つ紹介する:

定理 7.3. X を接束の 2 階外積がネフな非特異射影多様体とする. このとき, 以下が成立する:

- (i) K_X 負な端射線の双有理収縮射を X がもつならば, X は $\text{Bl}_{\text{pt}}(\mathbb{P}^n)$ と同型である;
- (ii) (i) の場合を除いて, K_X 負な端射線の収縮射は非特異射である.

定理 7.4. X を接束の 2 階外積がネフな非特異射影多様体とする. もし X が有理連結多様体ならば, X は Fano 多様体である. さらに, Kleiman-Mori 錐 $\overline{\text{NE}}(X)$ は simplicial である.

定理 7.5. X を接束の 2 階外積がネフな非特異射影多様体とする. T_X がネフでないならば, X は Fano 多様体である.

これらの定理が接束の 2 階外積がネフな非特異射影多様体に関する問 6.1 への解答を与える. また, 接束がネフならその 2 階外積もネフなので, [12] の一連の結果の一般化とみなすことができる. この結果により, 一つの例外 $\text{Bl}_{\text{pt}}(\mathbb{P}^n)$ を除き, (特に Picard 数が 2 以上のとき) T_X がネフである多様体と $\wedge^2 T_X$ がネフである多様体の性質は非常に似ていると予想される. 実際, 次元が低いときはその予想は正しい (以下の系 7.9 をみよ). 定理 7.3, 7.4, 7.5 の証明の詳細は論文 [63] をみてもらうことにして, ここではなぜ $\wedge^2 T_X$ がネフであることから T_X がネフである多様体と同じような性質が導かれるか説明する. 簡単だが次の補題が鍵となる:

補題 7.6. X を接束の 2 階外積がネフな m 次元非特異射影多様体とする. このとき, もし有理曲線 $C \subset X$ が free でないならば, $-K_X \cdot C \geq m - 1$ となる.

証明. free でない有理曲線 $C \subset X$ に対し, その正規化により定まる射を $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow C \subset X$ とする. このとき, 以下を満たす整数 a_1, \dots, a_m が存在する:

$$f^* T_X \cong \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i) \quad (a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m).$$

C が free でないことと微分 $df : T_{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow f^* T_X$ を考えることにより, $a_m < 0$ と $a_1 \geq 2$ を得る. 一方,

$$\bigwedge^2 f^* T_X \cong \bigoplus_{i>j} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i + a_j)$$

となる. $\bigwedge^2 f^* T_X$ がネフであることから, $a_{m-1} + a_m \geq 0$ を得る. 従って, $a_{m-1} \geq -a_m > 0$ となる. 以上から,

$$-K_X \cdot C = a_1 + (a_2 + \dots + a_{m-2}) + (a_{m-1} + a_m) \geq 2 + (m-3) + 0 = m-1.$$

となり主張が従う. ■

X を接束の 2 階外積がネフな m 次元非特異射影多様体とする. $\det(\bigwedge^2 T_X) = \omega_X^{1-m}$ より, $-K_X$ はネフである. 従って, 定理 6.2 により, 有理連結多様体をファイバーとしてもつ局所自明な非特異射 $\pi : X \rightarrow Y$ が存在し, $-K_Y \equiv 0$ となる. このことから, $-K_X$ が数値的に自明となるか, X が单線織となるかいずれかである. $-K_X$ が数値的に自明ならば, X は Abel 多様体のエタール商となる ([63, Lemma 3.5] 参照). 従って, X が極小有理成分 \mathcal{M} をもつ場合を考えればよい. ここで鍵となるのが次の結果である:

定理 7.7 ([26, Proposition 4.4] 参照). X を非特異射影多様体とする. $\mathcal{M} \subset \text{RatCurves}^n(X)$ を非分裂被覆族とし, 任意の \mathcal{M} 曲線が free だとする. そのとき, \mathcal{M} に関する RCC-fibration $\varphi : X \rightarrow Y$ が存在し, φ はファイバーが既約な非特異射となる.

この定理は定理 4.7 の一般化とみなすことができる。この結果により、 T_X がネフでなくても、非分裂被覆族 \mathcal{M} に対しその任意の \mathcal{M} 曲線が free であれば、 \mathcal{M} 曲線を潰す収縮射の非特異性が従う。

再び X を接束の 2 階外積がネフな m 次元非特異射影多様体とし、 X が極小有理成分 \mathcal{M} をもつとする。このとき、 \mathcal{M} が非分裂でないか非分裂であっても free でない \mathcal{M} 曲線が存在したとすると、補題 7.6 と bend-and-break により、 $m - 1 \leq \deg_{(-K_X)} \mathcal{M} \leq m + 1$ となる。このような場合は例外的で、命題 2.6 や定理 5.5 (ii), (iii) を用いることにより、 X の構造が決定される。従って、極小有理成分 \mathcal{M} が非分裂であり、任意の \mathcal{M} 曲線が free である場合を考えればよい。このときは接束がネフである場合に近い性質を持つので色々と調べることができる、というのが論文 [63] の大雑把なアイデアである。

この節の最後に、定理 7.3, 7.4, 7.5 の系を二つ述べる：

系 7.8. X を接束の 2 階外積がネフな m 次元非特異射影多様体とする。もし X が toroidal spherical ならば、 X は有理等質多様体か $\text{Bl}_{\text{pt}}(\mathbb{P}^m)$ のいずれかと同型である。

系 7.9. X を接束の 2 階外積がネフな m 次元非特異射影多様体とする。また、 $4 \leq m \leq 6$ とする。もし、 T_X がネフでないならば、 X は以下のいずれかと同型である：

- (i) $\text{Bl}_{\text{pt}}(\mathbb{P}^m)$, または
- (ii) Fano 擬指數が $m - 1$ かつ $\rho_X = 1$ を満たす Fano 多様体。

8. 正標数におけるネフ接束をもつ非特異射影多様体

この章では基礎体 k の標数を $p > 0$ とする。このとき、ネフ接束をもつ非特異射影多様体に対して問 6.1 を考える。多様体の次元は常に 3 以上とする。

注意 8.1. 標数 0 の世界と異なり、正標数の世界特有の現象が知られている。この章で扱う内容に大きく関係するのは以下の三つである：

- (i) コホモロジーに関する現象：小平消滅定理や Hodge 対称性は一般に成立しない。
- (ii) 有理連結性に関する現象：SRC, RC, RCC は一般に同値ではない。さらに、非特異 Fano 多様体は RCC となることが知られているが、非特異 Fano 多様体が RC かどうかは未だに分かっていない。
- (iii) 射の非特異性に関する現象：generic smoothness が一般に成立しない。また、コホモロジーの消滅定理が一般には成り立たないため、正標数では端射線に付随する収縮射が存在するか一般には分かっていない。

[26]において本質的に重要かつ証明にオリジナリティがあるのは次の結果である：

定理 8.2 (RCC \Rightarrow SRC). k 上定義された非特異射影多様体 X に対し、 X の接束 T_X がネフとする。このとき、 X が RCC ならば SRC である。従って、 X に対し、RCC, FRC, RC, SRC が同値となる。

詳細は割愛するが、この定理を示すために、Shen の定理 [53] を用いる。ここで、 k 上定義された非特異射影多様体 X に対し、 X の接束 T_X がネフとす

る。このとき, X は RCC とする。背理法を用いるため, X が SRC でないとする。すると, Shen の定理により(正標数における)ある foliation \mathcal{D} (つまり, 連接部分層 $\mathcal{D} \subset T_X$ は saturated で, involutiveかつ p -closed である)が存在する。このとき, foliation \mathcal{D} による商 X/\mathcal{D} が存在する: $X \rightarrow X^{[1]} := X/\mathcal{D}$ 。この商 $X^{[1]}$ は再びネフ接束をもつ RCC 非特異射影多様体となる。この foliation をとる操作を繰り返すことにより, SRC 非特異射影多様体 Y への純非分離射 $X \rightarrow Y$ を構成することができる。さらにこの射の構造を考察することにより, Y 上にある群の作用を構成し矛盾が導かれる。これが大まかなアイデアである。また、この定理の系として次を得る:

系 8.3. k 上定義された非特異射影多様体 X に対し, X の接束 T_X がネフとする。このとき, X が RCC ならば以下が成立する:

- (i) X は代数的単連結である;
- (ii) $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$;
- (iii) 数値的に平坦な X 上のベクトル束は自明である。

注意 8.1 (i) で述べたように, 正標数においてコホモロジーの消滅定理は一般に成り立たないが, いくつかの議論は系 8.3 により, 置き換えることができる。ここで, k 上定義された非特異射影多様体 X に対し, X の接束 T_X がネフとする。このとき, K_X 負な端射線 $R \subset \overline{\text{NE}}(X)$ に対し, R に含まれる反標準次数が最小の有理曲線を C とする。また, $[C]$ を含む極小有理成分を M とおく。このとき, 仮定から M は非分裂被覆族となる。そこで, M に関する RCC-fibration を考え, 定理 8.2 と系 8.3 を用いることにより, 次の結果を得ることができる:

定理 8.4. k 上定義された非特異射影多様体 X に対し, X の接束 T_X がネフとする。このとき, K_X 負な端射線 $R \subset \overline{\text{NE}}(X)$ に対し, R の収縮射 $f : X \rightarrow Y$ が存在し, 以下が成立する:

- (i) f は非特異射である;
- (ii) f の任意のファイバーはネフ接束をもつ非特異 SRC Fano 多様体である;
- (iii) Y はネフ接束をもつ非特異射影多様体である。

さらに, X が Fano 多様体ならば, Kleimann-Mori 錐 $\overline{\text{NE}}(X)$ は simplicial である。

この定理を用いて, K_X 負な端射線を潰していくことにより, 正標数の閉体上定義されたネフ接束をもつ非特異射影多様体に対して問 6.1 の解答を得る:

定理 8.5. k 上定義された非特異射影多様体 X に対し, X の接束 T_X がネフとする。このとき, 以下を満たす非特異収縮射 $\varphi : X \rightarrow M$ が存在する:

- (i) φ は MRCC fibration²である;
- (ii) φ の任意のファイバーはネフ接束をもつ非特異 SRC Fano 多様体である;
- (iii) T_M は数値的に平坦である。(特に, M は有理曲線を含まない。)

この結果, 正標数におけるネフ接束をもつ非特異射影多様体の構造研究は次の問題に帰着される:

²[28, IV. Definition 5.1.2] 参照

問 8.6. k 上定義された非特異射影多様体 X に対し, X の接束 T_X がネフとする.

- (i) X が Fano ならば, X は半単純線形代数群 G とその放物的部分群 P の商 G/P となるか?
- (ii) T_X が数値的に平坦ならば, X は Abel 多様体のエタール商となるか?

注意 8.7. 問 8.6 (i) は $\dim X = 3$ もしくは完全交叉多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ ならば成立する [61, 16]. しかし, 4 次元以上では未解決である. また, 問 8.6 (ii) は標数 0 では Beauville-Bogomolov 分解から従うが, 正標数では未解決である. 接束が自明な場合でさえも一般には解決されていない ([38, 22] 参照).

最後に定理 8.5 の応用を述べる.

定義 8.8. X を k 上定義された射影多様体, $W_2(k)$ を長さ 2 の Witt 環とする.

- (i) $\tilde{X} \times_{W_2(k)} k \cong X$ を満たす $W_2(k)$ 上の平坦スキーム \tilde{X} を (p^2 を法とした) X の持ち上げ (lifting of X (modulo p^2)) という.
- (ii) (i) の記号のもと, \tilde{X} の Frobenius 射 $F_{\tilde{X}}$ の X への制限が X の Frobenius 射 F_X と一致するとする. そのような \tilde{X} が存在するとき, X を F-liftable という.

F-liftable 多様体については, 例えは [2, 1] を参照されたい. [2, Proposition 6.3.2]において, 次が示された:

命題 8.9. X をネフ接束をもつピカール数 1 の非特異射影多様体とする. もし X が F-liftable ならば, X は射影空間 \mathbb{P}^m と同型である.

この結果と定理 8.4, 8.5 を合わせることにより, 次の系を得る:

系 8.10. k 上定義された非特異射影多様体 X に対し, X の接束 T_X がネフとする. もし X が F-liftable ならば, 以下を満たす K_X 負な非特異収縮射 $\varphi : X \rightarrow M$ が存在する:

- (i) M は ordinary Abel 多様体のエタール商である;
- (ii) φ の任意のファイバーは射影空間の積と同型である.

この章の内容は元の論文 [26] 以外に [66] により詳しく紹介されている.

参考文献

- [1] Piotr Achinger, Jakub Witaszek, and Maciej Zdanowicz. Global Frobenius liftability II. to appear in Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, Preprint arXiv:2102.02788.
- [2] Piotr Achinger, Jakub Witaszek, and Maciej Zdanowicz. Global Frobenius liftability I. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 23(8):2601–2648, 2021.
- [3] Armand Borel and Reinhold Remmert. Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 145:429–439, 1961/1962.
- [4] Frédéric Campana and Thomas Peternell. Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective. *Math. Ann.*, 289(1):169–187, 1991.
- [5] Frédéric Campana and Thomas Peternell. On the second exterior power of tangent bundles of threefolds. *Compositio Math.*, 83(3):329–346, 1992.

- [6] Frédéric Campana and Thomas Peternell. 4-folds with numerically effective tangent bundles and second Betti numbers greater than one. *Manuscripta Math.*, 79(3-4):225–238, 1993.
- [7] Junyan Cao and Andreas Höring. A decomposition theorem for projective manifolds with nef anticanonical bundle. *J. Algebraic Geom.*, 28(3):567–597, 2019.
- [8] Koji Cho, Yoichi Miyaoka, and Nicholas I. Shepherd-Barron. Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds. In *Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)*, volume 35 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 1–88. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.
- [9] Koji Cho and Ei-ichi Sato. Smooth projective varieties with the ample vector bundle $\bigwedge^2 T_X$ in any characteristic. *J. Math. Kyoto Univ.*, 35(1):1–33, 1995.
- [10] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [11] Thomas Dedieu and Andreas Höring. Numerical characterisation of quadrics. *Algebr. Geom.*, 4(1):120–135, 2017.
- [12] Jean-Pierre Demailly, Thomas Peternell, and Michael Schneider. Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles. *J. Algebraic Geom.*, 3(2):295–345, 1994.
- [13] Theodore Frankel. Manifolds with positive curvature. *Pacific J. Math.*, 11:165–174, 1961.
- [14] Campana Frédéric, Junyan Cao, and Shin-ichi Matsumura. Projective klt pairs with nef anti-canonical divisor. to appear in Algebraic Geometry, Preprint arXiv:1910.06471.
- [15] Osamu Fujino and Hiroshi Sato. Smooth projective toric varieties whose nontrivial nef line bundles are big. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 85(7):89–94, 2009.
- [16] Katsuhisa Furukawa. Convex separably rationally connected complete intersections. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(9):3657–3669, 2016.
- [17] Robin Hartshorne. *Ample subvarieties of algebraic varieties*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 156. Springer-Verlag, Berlin, 1970. Notes written in collaboration with C. Musili.
- [18] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [19] Genki Hosono, Masataka Iwai, and Shin-ichi Matsumura. On projective manifolds with pseudo-effective tangent bundle. to appear in Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, Preprint arXiv:1908.06421.
- [20] Jun-Muk Hwang. Rigidity of rational homogeneous spaces. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 613–626. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [21] Jun-ichi Igusa. On some problems in abstract algebraic geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 41:964–967, 1955.
- [22] Kirti Joshi. On varieties with trivial tangent bundle in characteristic $p > 0$. *Nagoya Math. J.*, 242:35–51, 2021.
- [23] Akihiro Kanemitsu. Fano n -folds with nef tangent bundle and Picard number greater than $n - 5$. *Math. Z.*, 284(1-2):195–208, 2016.
- [24] Akihiro Kanemitsu. Fano 5-folds with nef tangent bundles. *Math. Res. Lett.*, 24(5):1453–1475, 2017.
- [25] Akihiro Kanemitsu. Extremal rays and nefness of tangent bundles. *Michigan Math. J.*, 68(2):301–322, 2019.
- [26] Akihiro Kanemitsu and Kiwamu Watanabe. Projective varieties with nef tangent bundle in positive characteristic. Preprint arXiv:2012.09419 .
- [27] Stefan Kebekus. Characterizing the projective space after Cho, Miyaoka and Shepherd-Barron. In *Complex geometry (Göttingen, 2000)*, pages 147–155. Springer, Berlin, 2002.
- [28] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*

[*Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics*]. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

- [29] János Kollar and Shigefumi Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, volume 134 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original.
- [30] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series.
- [31] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.
- [32] Duo Li, Wenhao Ou, and Xiaokui Yang. On projective varieties with strictly nef tangent bundles. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 128:140–151, 2019.
- [33] Qifeng Li. Pseudo-effective and nef cones on spherical varieties. *Math. Z.*, 280(3-4):945–979, 2015.
- [34] Qifeng Li. Smooth projective horospherical varieties with nef tangent bundles. *Indiana Univ. Math. J.*, 66(6):1879–1893, 2017.
- [35] Jie Liu, Feng Shao, and Andreas Höring. Examples of fano manifolds with non-pseudoeffective tangent bundle. Preprint arXiv:2003.09476.
- [36] Hideyuki Matsumura and Frans J. Oort. Representability of group functors, and automorphisms of algebraic schemes. *Invent. Math.*, 4:1–25, 1967.
- [37] Shin-ichi Matsumura. Open problems on structure of positively curved projective varieties. to appear in the Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse, Preprint.
- [38] V. B. Mehta and V. Srinivas. Varieties in positive characteristic with trivial tangent bundle. *Compositio Math.*, 64(2):191–212, 1987. With an appendix by Srinivas and M. V. Nori.
- [39] Ngaiming Mok. The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature. *J. Differential Geom.*, 27(2):179–214, 1988.
- [40] Ngaiming Mok. On Fano manifolds with nef tangent bundles admitting 1-dimensional varieties of minimal rational tangents. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(7):2639–2658 (electronic), 2002.
- [41] Shigefumi Mori. Projective manifolds with ample tangent bundles. *Ann. of Math. (2)*, 110(3):593–606, 1979.
- [42] Roberto Muñoz, Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe. Rational curves, Dynkin diagrams and Fano manifolds with nef tangent bundle. *Math. Ann.*, 361(3-4):583–609, 2015.
- [43] David Mumford. *Abelian varieties*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London, 1970.
- [44] Roberto Muñoz, Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, Kiwamu Watanabe, and Jarosław A. Wiśniewski. A survey on the Campana-Peternell conjecture. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 47:127–185, 2015.
- [45] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe. A characterization of symplectic Grassmannians. *Math. Z.*, 286(3-4):1421–1433, 2017.
- [46] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe. Characterizing the homogeneous variety $F_4(4)$. *Math. Nachr.*, 291(14-15):2334–2346, 2018.

- [47] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, Kiwamu Watanabe, and Jarosław A. Wiśniewski. Fano manifolds whose elementary contractions are smooth \mathbb{P}^1 -fibrations: a geometric characterization of flag varieties. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5), 17(2):573–607, 2017.
- [48] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Jarosław A. Wiśniewski. Flag bundles on Fano manifolds. *J. Math. Pures Appl.* (9), 106(4):651–669, 2016.
- [49] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler. *Vector bundles on complex projective spaces*. Progress in Mathematics, 3. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.
- [50] R. Pandharipande. Convex rationally connected varieties. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(5):1539–1543, 2013.
- [51] Carlos Sancho de Salas. Complete homogeneous varieties: structure and classification. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(9):3651–3667, 2003.
- [52] David Schmitz. On exterior powers of the tangent bundle on toric varieties. Preprint arXiv:1811.02603.
- [53] Mingmin Shen. Foliations and rational connectedness in positive characteristic. *J. Algebraic Geom.*, 19(3):531–553, 2010.
- [54] Yum Tong Siu and Shing Tung Yau. Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature. *Invent. Math.*, 59(2):189–204, 1980.
- [55] Luis E. Solá Conde and Jarosław A. Wiśniewski. On manifolds whose tangent bundle is big and 1-ample. *Proc. London Math. Soc.* (3), 89(2):273–290, 2004.
- [56] Taku Suzuki and Kiwamu Watanabe. Varieties with nef diagonal. *Internat. J. Math.*, 31(2):2050011, 21, 2020.
- [57] Juanyong Wang and Shin-ichi Matsumura. Structure theorem for projective klt pairs with nef anti-canonical divisor. Preprint arXiv:2105.14308.
- [58] Kiwamu Watanabe. Fano 5-folds with nef tangent bundles and Picard numbers greater than one. *Math. Z.*, 276(1-2):39–49, 2014.
- [59] Kiwamu Watanabe. \mathbb{P}^1 -bundles admitting another smooth morphism of relative dimension one. *J. Algebra*, 414:105–119, 2014.
- [60] Kiwamu Watanabe. Fano manifolds with nef tangent bundle and large Picard number. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 91(6):89–94, 2015.
- [61] Kiwamu Watanabe. Low-dimensional projective manifolds with nef tangent bundle in positive characteristic. *Comm. Algebra*, 45(9):3768–3777, 2017.
- [62] Kiwamu Watanabe. Fano manifolds of coindex three admitting nef tangent bundle. *Geom. Dedicata*, 210:165–178, 2021.
- [63] Kiwamu Watanabe. Positivity of the second exterior power of the tangent bundles. *Adv. Math.*, 385:Paper No. 107757, 27, 2021.
- [64] Kazunori Yasutake. On the second exterior power of tangent bundles of fano fourfolds with picard number $\rho(X) \geq 2$. Preprint arXiv:1212.0685, 2012.
- [65] Kazunori Yasutake. On the second and third exterior power of tangent bundles of fano manifolds with birational contractions. Preprint arXiv:1403.5304, 2014.
- [66] 金光秋博. ネフな接束をもつ正標数の射影多様体. 都の西北代数幾何学シンポジウム「接束の正値性とその周辺」報告集, 2021.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE AND ENGINEERING, CHUO UNIVERSITY. 1-13-27 KASUGA, BUNKYO-KU, TOKYO 112-8551, JAPAN
Email address: watanabe@math.chuo-u.ac.jp

カスフ[°]と有理同値

馬 研平(東工大)

モジュラー多様体とチャウ群はどちらも古典的にして深く、豊かな数学的对象である。それらの研究が大きく発展してきたのに比べて、その明白な交叉点の一つ、モジュラー多様体のチャウ群についての研究は意外にも少ない。特に、モジュラー多様体のコホモロジーが活発に研究されてきたのと比べると、その差は印象的である。

こういうことを書く機会がないので思わず書き出しが少しだげになってしまったかもしれないが、この講演は何か夢を語るものではなく、「境界からの粋子」に関するワンポイントの研究報告である。

この「点」が「線」や「面」につながっていくかどうかは、現時点ではまだ云々できない。今後、大自然に謙虚に向向き、いく他はない。

アイヒラーは次のような言葉を残している：

“数算には5つの演算がある。加減乗除、そしてモジュラー形式。”

この名言のファンの1人として、モジュラー多様体のチャウ群もまた、未開拓地で豊かな大自然であると信じたい。

* コロナショックが長引く中、シボジウムの開催にご尽力下さった世話を人の皆様に感謝いたします。

構成

§1 1) : Manin-Drinfeld の定理

§2 Baily-Borel コンパクト化

§3 トロイダルコンパクト化

§1. 1) : Manin-Drinfeld の定理

$P \in SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群とし、

$$X_P := (\#H \cup P^1(\mathbb{Q})) / P \quad (\# : \text{上半平面})$$

を P が定まるコンパクト化されたモジュラー曲線とする。

コンパクト化の際につけ加えられる境界点、すなはち $P^1(\mathbb{Q}) / P$ に対応する点たちをカスコ⁰と呼ぶ。カスコ⁰は X_P の最も目立つ点である。1970年代に Manin と Drinfeld は次の事実を発見した。

定理 (Manin [Man], Drinfeld [Dri])

$P, Q \in X_P$ の 2つのカスコ⁰とする。

この時 因子数 $[P] - [Q] \in \text{Pic}^0 X_P$ は有限位数。

言い換えると、1つのカスケードを基点にしてアーベルレトコビ推め込み
 $X_P \hookrightarrow JX_P$ をすると、他のカスケードはヤツビアン JX_P の
 torsion 点にうつるといふことである。（複数 0 の場合は考慮から
 除外してよい。）

- (1) Manin-Drinfeld の定理の証明は 2> 知りたい 3
 (Manin-Drinfeld, Elkik) が、いずれもベッケ作用素を用いる。
 ここで「合同部分群」という条件が必要になる。
- (2) 非合同部分群に対してこの主張が成り立たないような例は
 見つかっていない。成り立つ例はいくつか知りたいようである。
- (3) Manin-Drinfeld の定理は次の研究を促した。

A モジュラー単元 (modular unit)

すなはち 2>の カスケード $P \neq Q$ に対して

$$\text{div}(F) = NP - NQ$$

となるようなモジュラー函数 F の具体的構成 ($[KL]$ など)。
 モジュラー単元はいろいろ実論的応用があるようである
 ($[KL]$, $[Bei]$ など)。

B カス⁰因子類群 (cuspidal divisor class group)

ちなみに カス⁰たちの差 $[P] - [Q]$ で生成される $\text{Pic}^0 X_P$ の
部分群の決定。

A と B は 密接にいる。

(4) 極めて個人的な見解だが、Manin-Drinfeld の定理の
主張自体は、たとえ 19 世紀末に発見(予想)されていたとしても
異和感は少ない。証明となると ヘッケ作用素を用いるのが
もう少し後になるかもしれないが、例えばもし「クラインとフリッケが
最初にこの現象に気づいた」とか「ヘッケが発見/証明した」などと
言われたとしてもあまり異和感はないのではないか。

—— こんな教科書に載っている定理が 1970 年代まで
発見されていなかったとは、現代数学はすごいぶん発展したように
感じられるが、案外身近な所にまだ発見されていないことがごくごく
多いのかもしれない ——

Manin-Drinfeld の定理を初めて勉強した時、こう感じたのを覚えてる。

さて、今日お話ししたいのは次のトピックである。

① 今日 高次元モジュラー多様体に対して、代数サイクルの観点から Manin-Drinfeld の定理の一般化をみたい。

2次元以上では、モジュラー多様体の代数多様体とのコンパクト化は次の2つが知られてる。

① Baily-Borel コンパクト化 (佐武, Baily-Borel [BB])

特徴：

- canonical に構成される
- 境界での特異性は高い
- 境界の余次元は大きい

② トロイダルコンパクト化 (Ash-Mumford-Rapoport-Tai [AMRT])

特徴：

- 構成には扇の選択が必要で、canonical ではない
- (\square : neat の時) 非特異なコンパクト化が得られる
- 境界は因子

常にトロイダルコンパクト化から Baily-Borel コンパクト化への射がある。
トロイダルコンパクト化は Baily-Borel コンパクト化の特異点解消あるいは
それに近いものと思うことができる。どちらもモジュラー形式と相性がよい。

これらの説明を経て、今日お話ししたいことをもう少し具体的に書くことができる。

(今日) 古典的なモジュラー多様体の Bruylants-Borel コンパクト化
およびトロイダルコンパクト化に対して、ある種の境界サクレ
たちがチャウ群(有理 or 整)において有理同値であることを
示す。

古典的というのは概ね「古典領域の算術商」ということであり、
名前がついているモジュラー多様体(Siegel, Hilbert, Picard,
Hermitian, quaternionic)は大体カバーされている。

以下では専らシーゲルモジュラー多様体の場合に説明する。
(この選択に深い意味はない。)

§2. Baily-Borel コンパクト化

シーゲルモジュラー多様体の佐武コンパクト化に対して Manin-Drinfeld の定理の一般化を説明する ([馬1])。※歴史的経緯からこの場合を Baily-Borel コンパクト化といったり佐武コンパクト化と呼ばれる。

(設定)

Λ : ランク $2g > 2$ のシプレクトック格子

$Sp(\Lambda)$: Λ のシプレクトック群

$\Gamma \subset Sp(\Lambda)$: 指数有限の部分群

とする。この時、モジュラー曲線の場合 ($g=1$) に連れて、 Γ は常に全同部分群となる。(Mennicke, Bass-Lazard-Serre)

LG_Λ を $\Lambda_{\mathbb{C}}$ の g 次元 isotropic 部分空間たちのなす Lagrangian グラスマンとする。シーゲル上半空間は LG_Λ の稠密集合

$$\mathcal{D} = D_\Lambda \subset LG_\Lambda$$

とい定義される。より正確には、isotropic 部分空間 V であって、

V 上の自然なエイント形式が正定値にならむなどの locus である。

よく見るモデル $\{z \in \text{Sym}^2 \mathbb{C}^g \mid \text{Im } z > 0\}$ とは異なり、上のモデルだと $z_{ij} z_{ji}$ が対等に見えるので、今の目的に適している。

一つのカスケードを構立せたい時はこのモデル (tube領域表示) が適している。

$$Y = Y_P := \mathcal{D}/P$$

が P から定まる Siegel モジュラ- 多様体である。($\frac{1}{2}g(g+1)$ 次元)

Y の 佐武コンパクト化は 集合としては

$$X^{bb} := (\mathcal{D}_0 \cup \bigcup_I \mathcal{D}_I) / P$$

として定義される。ここで

— I は A_0 の isotropic 部分空間 全体 を動く

— \mathcal{D}_I は シフレクトイック 空間 E/I から定まる Siegel 上半空間
(I に対応する有理境界成分)

— $\mathcal{D}_0 \cup \bigcup_I \mathcal{D}_I$ には “佐武佐相” を入れる

佐武-Baily-Borel 理論より X^{bb} は 正規射影多様体 となり、
 Y はこの Zariski 闭集合 となる。各境界成分 \mathcal{D}_I の X^{bb} の像の
閉包も ここでは カスコと呼ぶこととする。

定理 ([馬1])

$Z_1, Z_2 \subset X^{bb}$ 同じ次元 ($=: k$) の カスコ

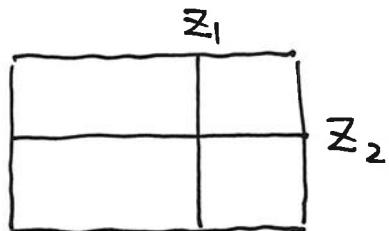
$\Rightarrow \mathbb{Q}[Z_1] = \mathbb{Q}[Z_2] \text{ in } CH_k(X^{bb})_{\mathbb{Q}}$

(1) 以下のタイプのモジュラー多様体に対しては同様の結果が成り立つ：

- $O(2, n)$, $n \geq 3$ (直交型モジュラー多様体)
- $H(p, q)$ (ユニタリ型モジュラー多様体)
- ピルベルトモジュラー多様体

(2) Witt 指数 2 の $O(2, 2)$ に対してはこの結果は成り立たない。

この場合 モジュラー曲面は典型的には 2つのモジュラー曲線の直積である。



Z_1 ：垂直な 1 次元カスプ⁰

Z_2 ：水平な 1 次元カスプ⁰

とすると、ユホモロジーレベルで $Z_1 \times Z_2$ となる。

(3) 上の結果より、モジュラー単元の高次元類似が高次チャウ群の元として得られる。より正確には、 Σ の最高次元 ($= \frac{1}{2}g(g-1)$) のカスプ⁰のペアに対して、 Σ の高次チャウ群 $CH_{\frac{1}{2}g(g-1)}(\Sigma, 1)$ のキリ⁰ 単元が定まる。このことは高次チャウ群の局所化完全系⁰からわかるが、上の定理の証明を見れば、1変数モジュラー単元が⁰ある程度具体的に記述することもできる。
ちなみにカスプ⁰で最高次元ではない時は、同様の構成をしても本質的にキリ⁰ 単元は得られない。

(4) 証明は次元に関する帰納法を使う。
帰納法の出発点が Manin-Drinfeld の定理である。
アイデアはシンプルで、2つのカスケードより低い次元の
シグマモジュラー多様体あるいはその直積のチャインで
つなぎ、帰納的に有理同値を作っていくというものである。
議論の実体は初等的な線形代数であり、帰納法の
出発点 (Manin-Drinfeld の定理) が最も非自明である
と言える。

§3 トロイダルコンパクト化

Baily-Borel コンパクト化に対することがわかるものの、次の点が気になる。

(反省)

特異多様体のチャウ群はやはり難しい。

交叉積、アベルヤコビ写像といった基本的な道具が
特異点集合で破綻する。

考へていようやくしか 特異点集合に含まれていなければ
まだやうやうがあるのかもしれないが、よりにおいてカスコで特異 ...

そこでトロイダルコンパクト化で考へてみることにする。

ここで次の選択が非自明である:

どんな境界サイクルを考えるか?

といふのは、一般には境界因子^{••}たちはコホモジーレベルですでに
線形独立になっていることが多く、境界因子に対しては
Mann-Drinfeld の定理の類似はもはや成り立たない。

Baily-Borel コンパクト化とは状況が異なる。

そこで 0 サイクルに着目してみる。

(あくまでも個人的な印象だが、代数サイクルのとつきやすさは
因子 \rightsquigarrow 0 サイクル \rightsquigarrow 余次元 2 サイクル \rightsquigarrow 1 サイクル \rightsquigarrow ...
の順番のように思えることが時々ある。常にこうとは限らないとは思うが。)

引き続き ジーゲルモジュラ-多様体 Y を考えることにして、

Y のトロイダルコンパクト化 X^{tor} をいつとる、

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & X^{\text{tor}} \\ & \curvearrowright & \downarrow \pi \\ & \curvearrowright & X^{\text{bb}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P & X^{\text{tor}} & X^{\text{tor}} \\ \downarrow & & \\ * & * & X^{\text{bb}} \end{array}$$

(定理の図)

という状況である、

* : 0次元カスコ

定理 ([馬2])

$$P, Q \in X^{\text{tor}}$$

$\pi(P), \pi(Q) \in X^{\text{bb}}$ は 0次元カスコ⁰ とする。(異なってもよい)

$$\Rightarrow [P] = [Q] \text{ in } \text{CH}_0(X^{\text{tor}})$$

(1) この定理のポイントは、①係数どこかで直積の形で有理同値が成立しているという点である。これはモジュラー曲線の場合 (Mann-Drinfeld の定理) とは対照的である。というのは、モジュラー曲線に對しては、種類(0ではない限り)異なる 2 点が直積同値になることは決してないのに、上の結果は成り立たない。

ある意味、高次元になると(この点では) 状況がシンプルになる。

(2) チャウ群 $\mathrm{CH}_0(X^{\mathrm{tor}})$ このものは一般には無限次元である。
 といふのは、 X^{tor} は一般にはウェイト $n+1$ のカスプ形式に
 対応して標準形式を持つので、Mumford の無限次元性定理
 が適用できるからである。

従って $\mathrm{CH}_0(X^{\mathrm{tor}})$ 全体を記述するといふのは思ひもよらぬことだが、
 それでも境界の一部からの寄与についてはこのようなはつきりした
 ことが言える。という趣旨の結果である。

(3) 次のタイプのモジュラー多様体に対しても同じ結果が成り立つ：

- ヒルベルトモジュラー多様体 (カスプは 0 次元のみ)
- $O(2, n)$, $n \geq 3$ (直交型モジュラー多様体)
- $H(n, n)$, $n \geq 2$ (Hermitian モジュラー多様体)
- $SO^+(4n)$, $n \geq 2$ (quaternionic モジュラー多様体)

下3つ (IV 型, $I_{n,n}$ 型, II_{2n} 型) を除く場合 (III 型) を
 合わせると、領域としては

「tube 領域モデルを持つような古典領域」

と特徴づけられる。

(4) $H(1, n)$ の場合、すなはち ピカールモジュラー 多様体
(別名 ボール商) に対してはこの結果は成立しない。

- 各境界因子がアーベル多様体
- アルバネーゼ多様体が非自明

という 2 点で後述の証明が機能しないし、実際に境界のサイクル
が有理同値にならない例もある。

それでも “特殊境界点” と呼ぶものを定義し (境界アーベル多様体
たちの torsion 点全体をなす)、2つの特殊境界点の差が
 $CH_0(X^{\text{tor}})$ で torsion であることを示せよ。

ある意味ピカールモジュラー 多様体 に対しては キウ群的な
cuspidal class group が生き残りつつ、むしろ面白いケースと
言えるかもしれない。

(5) Witt 指数 2 の $O(2, 2)$ に対しては上の結果は成立しない。

というのは、2つのモジュラー曲線 X_1, X_2 に対して、その直積
 $X_1 \times X_2$ のアルバネーゼ写像

$$A\text{lb}_{X_1 \times X_2} = AJ_{X_1} \times AJ_{X_2} : X_1 \times X_2 \rightarrow JX_1 \times JX_2$$

は X_1, X_2 が種数 > 0 の時 単射 ながらある。

(6) ヒルベルトモジュラー曲面が K3 曲面のブローバンフ⁰になればいいことである。K3 曲面の CH_0 には Beauville-Voisin 類と呼ばれる 特別な 0 サイクルがある ([BV])。この時

$$[\text{境界 } 0 \text{ サイクル}] = \text{Beauville-Voisin 類} \quad \text{in } \mathrm{CH}_0(X^{\text{tor}})$$

となる。且つ 0 サイクル類は一致している。

最後に定理の証明を紹介して終えた。

(証明の粗筋)

適当な reduction で X^{tor} は smooth projective としてよい。

(1) $\pi(P) = \pi(Q)$ の場合



$\pi^{-1}\pi(P) \subset X^{\text{tor}}$ はトーリック多様体のチャイン

(ここで tube 領域であるという性質を使う)

→ P と Q を 有理曲線のチャインで結ぶ

→ $[P] = [Q]$

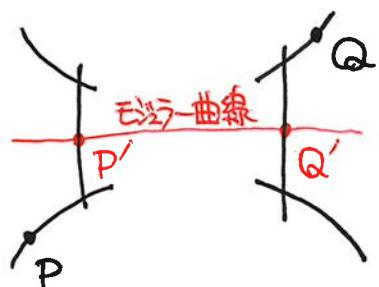
(2) $\pi(P) \neq \pi(Q)$ の場合

$\pi(P)$ と $\pi(Q)$ を モジュラー曲線のチャインで結ぶ。

このモジュラー曲線たちを X^{tor} にリフトする。

ステッフ⁰(1) と Manin-Drinfeld の定理を組み合わせると

$[P] - [Q]$ が torsion であることがわかる。



左図で説明すると、

$$[P] - [Q] \stackrel{(1)}{=} [P'] - [Q']$$

↑
Manin-Drinfeld など
torsion

以上より $[P] - [Q]$ が torsion ということまでわかった。

次の2つの定理を使う。

Roitman の定理 ([Roi])

X : なめらかな射影多様体 に対して、

$\text{CH}_0(X)$ の torsion パート $\text{CH}_0(X)_{\text{tor}}$ 上では

アルベーネー写像 $\text{CH}_0(X)_{\text{tor}} \rightarrow \text{Alb}(X)$ は单射

定理 (Margulis [Mar], Weissauer, ...) —————

$$H^1(X^{\text{tor}}) = 0 \text{, } \Rightarrow \text{Alb}(X^{\text{tor}}) = 0$$

この2つの深い定理より、 $\text{CH}_0(X^{\text{tor}})$ が torsion-free であることが
従う。また $[P] = [Q]$ であると結論づけられる。



最後にまた反省

2つの大道具を組み合わせて $[P] = [Q]$ となることはわかったが、
具体的に P と Q が どう 有理同値なのは謎である。

参考文献

- [AMRT] Ash, A.; Mumford, D.; Rapoport, M.; Tai, Y. "Smooth compactifications of locally symmetric varieties" (2nd ed) CUP, 2010
- [BB] Baily, W.; Borel, A. "Compactifications of arithmetic quotients of bounded symmetric domains" Ann. Math 84 (1966)
- [Bei] Beilinson, A. "Higher regulators and values of L-functions" J. Soviet Math. 30 (1985)
- [BV] Beauville, A.; Voisin, C. "On the Chow ring of a K3 surface" JAG 13 (2004)
- [Dri] Drinfeld, V. "Two theorems on modular curves" Funct. Anal. App 7 (1973)
- [KL] Kubert, D.; Lang, S. "Modular units" Springer, 1981
- [馬1] Ma, S. "Rational equivalence of cusps" Ann. K-Theory 5 (2020)
- [馬2] — "Zero-cycles over zero-dimensional cusps" arXiv: 2103.02871
- [Man] Manin, J. "Parabolic points and zeta functions of modular curves" Math. USSR Izv. 6 (1972)
- [Mar] Margulis, G. "Discrete subgroups of semisimple Lie groups" Springer, 1991
- [Roi] Rottman, A. "The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence" Ann. Math 111 (1980)

Linear systems on abelian varieties via M-regularity of \mathbb{Q} -twisted sheaves

伊藤 敦 *

概要

アーベル多様体上の豊富な直線束 L に対し, $|L^{\otimes 2}|$ は基底点自由, $|L^{\otimes 3}|$ は射影正規などの良い性質が成り立つことが知られている。Pareschi-Popa はアーベル多様体上の連接層の M-正則性という概念を導入し, 上記の結果の一般化として $|L^{\otimes p+3}|$ は (N_p) という性質を満たすことなどを示した。Pareschi-Popa の結果は $|L|$ 自身の基底点自由性, 射影正規性, (N_p) については適用できなかったが, 最近 Jiang-Pareschi が M-正則性を \mathbb{Q} 捻れ連接層に拡張したことで $|L|$ 自身の性質を M-正則性を用いて調べることができるようになった。本稿ではこの話題に関する最近の進展を紹介する。

1 導入

本稿では断らない限り多様体などは代数閉体 $K = \overline{K}$ 上定義されているものとする。

偏極アーベル多様体 X 上の豊富な直線束 A に対し,

- (a) $A^{\otimes 2}$ は基底点自由,
- (b) $A^{\otimes 3}$ は非常に豊富 (Lefschetz),

ということはよく知られている。他にも 1990 年代前半までに以下の結果が知られていた。^{*1}

- (b)' A が固定因子 (fixed divisor) を持たなければ $A^{\otimes 2}$ は非常に豊富 (大渕 [Ohb87]),
- (c) $A^{\otimes 3}$ は射影正規 (小泉 [Koi76]),
- (d) $A^{\otimes 3}$ が定める埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ に対し, X の齊次イデアル I_X は 2 次式と 3 次式で生成される (Mumford [Mum66], Kempf [Kem89]),
- (d)' A が基底点自由ならば, $A^{\otimes 2}$ が定める埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ に対し, X の齊次イデアル I_X は 2 次式と 3 次式で生成される (Khaled [Kha92]),
- (e) $m \geq 4$ ならば $A^{\otimes m}$ が定める埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ に対し, X の齊次イデアル I_X は 2 次式で生成される (Mumford [Mum66], Kempf [Kem89]).

* 岡山大学自然科学研究科 ito-atsushi@okayama-u.ac.jp

^{*1} これらの結果のいくつかには標数に関する適当な仮定がついていたが, 本稿で解説する結果を用いると任意標数で成り立つことがわかる。

(c) と (e) の一般化として, Lazarsfeld は以下の予想を立てた.

予想 1.1 (Lazarsfeld 予想). 偏極アーベル多様体 (X, A) と整数 $p \geq 0$ に対し, $A^{\otimes p+3}$ は性質 (N_p) を満たす.*²

ただし性質 $\{(N_p)\}_{p \geq 0}$ は, 射影代数多様体 Y 上の豊富な直線束 H に対して定義される正値性の条件列であり, p が大きいほど条件が強くなる.*³ 例えば

- $(N_0) \Leftrightarrow H$ が射影正規,
- $(N_1) \Leftrightarrow (N_0)$ かつ $|H|$ で Y を射影空間に埋め込んだときの齊次イデアルが 2 次式で生成される,

である. また $(N_{-1}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} H$ が基底点自由, と定義すると都合が良いので, 以降 (N_p) は $p \geq -1$ に対して考える. すると, Lazarsfeld 予想の $p = -1, 0, 1$ の場合はそれぞれ (a), (c), (e) に他ならないことがわかる.

Pareschi [Par00] は, 偏極アーベル多様体 (X, A) と X 上のベクトル束 \mathcal{F} に対し, 自然な写像

$$H^0(X, A^{\otimes k}) \otimes H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(A^{\otimes k} \otimes \mathcal{F})$$

が全射になるための判定法 (適当なコホモロジーが消えるという条件) を与え, それを用いて Lazarsfeld 予想を標数 0 上で肯定的に解決した. その後 Pareschi-Popa [PP03] はアーベル多様体上の連接層に対し M-正則性という概念を導入して Pareschi の判定法を改良し, (a)~(e), Lazarsfeld 予想などの既知の結果の一般化を与えた.

最近, Jiang-Pareschi [JP20] が M-正則性を偏極アーベル多様体 (X, A) 上の \mathbb{Q} 捻れ連接層 $\mathcal{F}\langle tA \rangle := \mathcal{F} \otimes tA$ (形式的なテンソル積) に対して拡張したこと, アーベル多様体上の直線束の線形系をより詳しく調べることができるようになった. 本稿ではこの話題に関する最近の進展を解説する.

*² アーベル多様体とは限らない \mathbb{C} 上の滑らかな偏極代数多様体 (Y, H) に対しては, 「 $m \geq p + \dim X + 2$ ならば $K_Y + mL$ は (N_p) を満たすか?」という向井による問い合わせがある. $p = 0$ の場合, この問い合わせは「 $m \geq \dim X + 2$ ならば $K_Y + mL$ は射影正規か?」となり, 藤田予想の very ampleness の部分「 $m \geq \dim X + 2$ ならば $K_Y + mL$ は very ample」よりも強い主張である. 向井の問い合わせは $\dim Y = 1$ の場合は [Gre84] より従うが, 筆者の知る限り $\dim Y = 2, p = 0$ の場合でも未解決である.

*³ 豊富な直線束 H が性質 (N_p) を満たすとは, 次数付き $S_H = \bigoplus_{m \geq 0} \text{Sym}^m H^0(H)$ 加群としての切断環 $R_H = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(H^{\otimes m})$ の極小自由分解を

$$\cdots \rightarrow E_p \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow R_H \rightarrow 0, \quad E_i \simeq \bigoplus_j S_H(-a_{ij}).$$

とするとき, 任意の $1 \leq i \leq p$ と j に対し $E_0 = S_H$ かつ $a_{ij} = i + 1$ が成り立つことと定義される. この自由分解が極小であることから $a_{ij} \geq i + 1$ は常に成り立つので, (N_p) という条件は R_H の p 次までのシジジーができるだけ簡単な状況になっている, ということを意味している.

謝辞

第 66 回代数学シンポジウムにおける講演の機会をくださった世話人の皆様に感謝申し上げます。本稿で解説した筆者の研究は科研費（17K14162）の助成を受けています。

2 M-正則性

M-正則性とは、Pareschi-Popa [PP03] により導入されたアーベル多様体上の連接層に対する概念であり、射影空間上の Castelnuovo-Mumford 正則性の類似とみなせる。Castelnuovo-Mumford 正則性は適當な高次のコホモロジーが消えることで定義されるが、M-正則性も以下のように適當な高次のコホモロジーを用いて定義される。

定義 2.1. アーベル多様体 X 上の連接層 \mathcal{F} と $i \geq 0$ に対し、

$$V^i(\mathcal{F}) = \{\alpha \in \widehat{X} := \text{Pic}^0(X) \mid h^i(\mathcal{F} \otimes \alpha) \neq 0\}$$

とする。このとき

- \mathcal{F} が **GV** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $i > 0$ に対し $\text{codim}_{\widehat{X}} V^i(\mathcal{F}) \geq i$ ([PP11a]) ,
- \mathcal{F} が **M-正則** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $i > 0$ に対し $\text{codim}_{\widehat{X}} V^i(\mathcal{F}) > i$ ([PP03]) ,
- \mathcal{F} が **IT(0)** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $i > 0$ に対し $V^i(\mathcal{F}) = \emptyset$ ([Muk81])

と定める。^{*4} 定義より GV が最も弱く、IT(0) が最も強い条件である。

例 2.2. X をアーベル多様体、 L を X 上の直線束、 $I_o \subset \mathcal{O}_X$ を原点 $o \in X$ に対応する極大イデアルとする。このとき

- (1) L が GV $\Leftrightarrow L$ がネフ、 L が M-正則 $\Leftrightarrow L$ が IT(0) $\Leftrightarrow L$ が豊富.
- (2) L が豊富なら $I_o \otimes L$ は GV. さらに

$$\begin{aligned} I_o \otimes L \text{ が M-正則} &\Leftrightarrow |L| \text{ が固定因子を持たない}, \\ I_o \otimes L \text{ が IT(0)} &\Leftrightarrow L \text{ が基底点自由}. \end{aligned}$$

定理 2.3 (M-正則性判定法^{*5})。偏極アーベル多様体 (X, A) と X 上の連接層 \mathcal{F} に対し、

- (1) $\mathcal{F} \otimes A^{-1}$ が M-正則 $\Rightarrow \mathcal{F}$ は大域生成,
- (2) $\mathcal{F} \otimes A^{-2}$ が M-正則 $\Rightarrow k \geq 2$ に対し $H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(A^{\otimes k}) \rightarrow H^0(\mathcal{F} \otimes A^{\otimes k})$ は全射。^{*6}

^{*4} GV, M-正則, IT(0) はそれぞれ generic vanishing, 向井正則, Index Theorem with index 0 の略。

^{*5} [PP03, PP11b] ではデータ-正則性判定法と呼ばれている。[PP03] の本来の M-正則性判定法は、ある部分多様体 $Y \subset X$ 上の直線束 A と連接層 \mathcal{F} で、 X 上の連接層として $A, \mathcal{F} \otimes A^{-1}$ がどちらも M-正則ならば \mathcal{F} は大域生成、というものである。

^{*6} $k = 1$ の場合は一般には成り立たない。 A が主偏極の場合 $h^0(A) = 1$ なので、例えば $h^0(\mathcal{F}) < h^0(\mathcal{F} \otimes A)$ ならば全射にはなりえない。

注 2.4 (Castelnuovo-Mumford 正則性). 射影空間 \mathbb{P}^n 上の連接層 \mathcal{G} が 0-正則とは、任意の $i > 0$ に対し $h^i(\mathcal{G}(-i)) = 0$ が成り立つことであった。定理 2.3 は Castelnuovo-Mumford 正則性に関する以下の結果の類似とみなせる： \mathbb{P}^n 上の連接層 \mathcal{G} が 0-正則ならば、

- (1) \mathcal{G} は大域生成、
- (2) $k \geq 0$ に対し $H^0(\mathcal{G}) \otimes H^0(\mathcal{O}(k)) \rightarrow H^0(\mathcal{G}(k))$ は全射。

例 2.5. (X, A) を偏極アーベル多様体、 $L = A^{\otimes m}$ とする。

- (1) $m \geq 2$ ならば $L \otimes A^{-1} = A^{\otimes m-1}$ は豊富なので M-正則である。したがって定理 2.3 (1) より $L = A^{\otimes m}$ は $m \geq 2$ ならば大域生成、つまり基底点自由であるという第 1 節の (a) が得られる。
- (2) $m \geq 3$ ならば $L \otimes A^{-2} = A^{\otimes m-2}$ は豊富なので M-正則である。したがって定理 2.3 (2) より $k \geq 2$ に対し $H^0(A^{\otimes m}) \otimes H^0(A^{\otimes k}) \rightarrow H^0(A^{\otimes m+k})$ は全射である。特に $k = mk'$ ($k' \geq 1$) の場合を考えると、 $m \geq 3$ ならば $L = A^{\otimes m}$ は射影正規であるという第 1 節の (c) が得られる。

Pareschi は M-正則性判定法の元になった判定法⁷を用いて Lazarsfeld 予想 ($A^{\otimes p+3}$ は (N_p) を満たす) を標数 0 上で肯定的に解決した。M-正則性判定法を用いると、Lazarsfeld 予想だけではなく次の定理も示すことができる。⁸

定理 2.6 ([PP04]). 偏極アーベル多様体 (X, A) に対し、⁹ A が固定因子を持たないとする。このとき

- (1) $p \geq 1$ に対し、 $\text{char}(K)$ が $p+1$ と $p+2$ を割り切らなければ、 $A^{\otimes p+2}$ は性質 (N_p) を満たす。
- (2) $\text{char}(K) \neq 2, 3$ ならば、 $A^{\otimes 3}$ による埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ の齊次イデアルは 2 次式で生成される。また第 1 節の (b)' より $A^{\otimes 2}$ は非常に豊富であるが、もし $A^{\otimes 2}$ が射影正規ならば¹⁰ $A^{\otimes 2}$ による埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ の齊次イデアルは 2 次式と 3 次式で生成される。

第 1 節の (a)~(e) についても、(標数に多少仮定はつくものの) M-正則性を用いて証明することができる [PP04]。

⁷ 大まかに言うと、定理 2.3 (2) の $\mathcal{F} \otimes A^{-2}$ が M-正則という仮定を IT(0) に強めたもの。

⁸ 第 1 節の (b)', (d)' は A に適当な条件を仮定すると (b), (d) の $A^{\otimes m}$ の m を $m-1$ に減らすことができる、という主張であった。定理 2.6 は、 A が固定因子を持たないと仮定すると Lazarsfeld 予想と (e) において A の指数を一つ減らすことができるということを主張している。

⁹ 筆者が確認した限り [PP04] には明記されていないようだが、 $p \geq 1$ の仮定は必要である。実際 $p = 0$ の場合は、固定因子を持たない A で $A^{\otimes 2}$ が $(N_0) =$ 射影正規でないような例が存在する。

¹⁰ [PP04, p170, Corollary] には書いていないが、 $A^{\otimes 2}$ が射影正規という仮定は必要である。実際、固定因子を持たない A で $A^{\otimes 2}$ による埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ の齊次イデアルが 2 次式と 4 次式で生成されるような例が存在する。

3 \mathbb{Q} 捻れ連接層の M-正則性

最近 Jiang-Pareschi [JP20] は, GV, M-正則, IT(0) という概念を \mathbb{Q} 捻れ連接層に対して拡張した:

定義 3.1. 偏極アーベル多様体 (X, L) 上の \mathbb{Q} 捻れ連接層^{*11} $\mathcal{F}\langle tL \rangle := \mathcal{F} \otimes tL$ (形式的なテンソル積) に対し, $\mathcal{F}\langle tL \rangle$ が GV, M-正則, IT(0) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mu_b^* \mathcal{F} \otimes L^{\otimes ab}$ が GV, M-正則, IT(0).

ただし $t = \frac{a}{b}$ は t の分数表記であり, $\mu_b : X \rightarrow X$ は b 倍写像である.

注 3.2. $\mu_b^* L \equiv L^{\otimes b^2}$ なので, $\mu_b^* \mathcal{F} \otimes L^{\otimes ab}$ は $\mathcal{F}\langle tL \rangle = \mathcal{F} \otimes \frac{a}{b} L$ の μ_b による引き戻しとみなすことができる. また M-正則などの性質は同種による引き戻しで不变なので, 上の定義は $t = \frac{a}{b}$ の表記によらない.

定義 3.3 ([JP20]). 偏極アーベル多様体 (X, L) に対し,

$$\beta(L) = \beta(X, L) := \inf\{t \in \mathbb{Q} \mid I_o\langle tL \rangle \text{ は IT}(0)\}$$

を (X, L) の基底点自由性閾値 (basepoint-freeness threshold) とよぶ.^{*12 *13 *14}

X 上の連接層 \mathcal{F} に対し,

- $\mathcal{F}\langle t_0 L \rangle$ が GV \Leftrightarrow 任意の $t > t_0$ に対し $\mathcal{F}\langle tL \rangle$ は IT(0),
- $\mathcal{F}\langle t_0 L \rangle$ が IT(0) \Leftrightarrow 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し $\mathcal{F}\langle(t_0 - \varepsilon)L \rangle$ が IT(0)

が成り立つ [JP20]. これと例 2.2 から, $\beta(X, L)$ に関する以下の性質が得られる:

命題 3.4 ([JP20]). 偏極アーベル多様体 (X, L) に対し以下が成り立つ.

- (1) $0 < \beta(X, L) \leq 1$. さらに $\beta(X, L) < 1 \Leftrightarrow L$ が基底点自由,^{*15}
- (2) $I_o\langle tL \rangle$ が GV $\Leftrightarrow \beta(X, L) \leq t$,
- (3) $I_o\langle tL \rangle$ が IT(0) $\Leftrightarrow \beta(X, L) < t$.

^{*11} [JP20] ではより一般に \mathcal{F} が $D^b(X)$ の元である場合に定義されている.

^{*12} 定義より $\beta(X, L)$ は実数である. 本稿執筆時点で $\beta(X, L)$ が計算できている例ではすべて有理数であるが, 一般に無理数になりうるかどうかは知られていない.

^{*13} IT(0) などの性質は $\alpha \in \hat{X}$ をテンソルしても変わらない. したがって $\beta(X, L \otimes \alpha) = \beta(X, L)$ が成り立つ, すなわち $\beta(L)$ は L の数値的同値類に対して定まる.

^{*14} IT(0) とは適当な高次のコホモロジーが消えることであるから, 「 $\beta(X, L)$ が小さい \Leftrightarrow 小さい t で $I_o\langle tL \rangle$ の高次コホモロジーが消える $\Leftrightarrow L$ の正値性が大きい」となり, $\beta(X, L)$ は L の正値性を測る不変量とみなせる. 実際, 直線束の正値性を測る不変量であるセシャドリ定数 $\varepsilon(X, L)$ との間に適当な不等式や類似の関係がある [Ito20a].

^{*15} 基底点自由性閾値という名前はこの性質に由来する. なおこの名前は Caucci [Cau20] による.

定義より, 整数 $m \geq 1$ に対し $\beta(L^{\otimes m}) = m^{-1} \beta(L)$ が従う. よって豊富な \mathbb{Q} 因子のクラス $l \in N^1(X)_{\mathbb{Q}}$ に対し $\beta(l) := m \beta(ml)$ (ただし $ml \in N^1(X)$) と定義できる. すると有理数 $t > 0$ に対し $\beta(L) < t \Leftrightarrow \beta(tL) < 1$ が成り立つの, $\beta(L) < t$ は “ \mathbb{Q} 直線束 tL が基底点自由” という条件だとみなすことができる.

$\beta(L)$ が小さければ L は (N_p) を満たす, という以下の定理は標数 0 かつ $p = -1, 0$ の場合は [JP20], 一般の場合は [Cau20] で証明された:

定理 3.5 ([JP20], [Cau20]). (X, L) を偏極アーベル多様体, $p \geq -1$ とする. このとき $\beta(X, L) < \frac{1}{p+2}$ (すなわち $I_o\langle \frac{1}{p+2}L \rangle$ が IT(0)) ならば L は性質 (N_p) を満たす.

定理 3.5 の証明のスケッチ. $p = -1$ の場合は命題 3.4 (1) より従う. よって基底点自由な L に対して $p \geq 0$ の場合を示せばよい. このとき自然な全射 $H^0(X, L) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow L$ が存在するが, その核 M_L を用いてこの定理は以下のように証明される:

$$\begin{aligned} L \text{ は } (N_p) \text{ をみたす} &\stackrel{(i)}{\iff} \text{任意の } i, l > 0 \text{ に対し } H^i(M_L^{\otimes p+1} \otimes L^{\otimes l}) = 0 \\ &\stackrel{(ii)}{\iff} M_L^{\otimes p+1} \otimes L \text{ が IT(0)} \\ &\stackrel{(iii)}{\iff} M_L\langle \frac{1}{p+1}L \rangle \text{ が IT(0)} \\ &\stackrel{(iv)}{\iff} I_o\langle \frac{1}{p+2}L \rangle \text{ が IT(0)}. \end{aligned}$$

なお (i)~(iv) については

- (i) 標数 0 ではよく知られていたが, Caucci が任意標数でも成り立つことを示した.
- (ii) IT(0) の定義と 「IT(0) \otimes GV = IT(0)」¹⁶ [PP11b] より従う.
- (iii) $M_L^{\otimes p+1} \otimes L = (M_L\langle \frac{1}{p+1}L \rangle)^{\otimes p+1}$ と 「IT(0) \otimes GV = IT(0)」 より従う.
- (iv) Fourier–向井変換を用いて示される.

なお $M_L\langle \frac{1}{p+1}L \rangle$ と $I_o\langle \frac{1}{p+2}L \rangle$ で分母が異なっているがこれは誤植ではなく, 一般の $0 < t < 1$ に対し, $I_o\langle tL \rangle$ が GV, M-正則, IT(0) $\Leftrightarrow M_L\langle \frac{t}{1-t}L \rangle$ が GV, M-正則, IT(0), が成り立つことによる [JP20]. \square

定理 3.5 は Lazarsfeld 予想の精密化とみなすことができる. 実際偏極アーベル多様体 (X, A) に対し,

$$\beta(A^{\otimes p+3}) = \frac{1}{p+3}\beta(A) \leq \frac{1}{p+3} < \frac{1}{p+2}$$

より定理 3.5 から $A^{\otimes p+3}$ が (N_p) をみたすことがわかる. とくに Lazarsfeld 予想は任意標数で成り立つ.

また同様の証明で齊次イデアルの定義式 (より一般に高次のシジジー) の次数を評価することができ, 例えば $\beta(X, L) < \frac{1}{2}$ ならば L による埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ の齊次イデアルは 2 次式と 3 次式で生成されることがわかる.

前節で述べたように, Pareschi による Lazarsfeld 予想の証明は M-正則性判定法を用いて一般化, 精密化された (定理 2.3, 2.6). したがって \mathbb{Q} 捏れ連接層に関する M-正則性判定法を考えることで定理 3.5 を一般化, 精密化できないか? という問い合わせられる. 実際これは以下の定理 3.6, 3.7 により可能である.

¹⁶ 正確には, 局所自由層 \mathcal{E} が IT(0), 連接層 \mathcal{F} が GV ならば $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ は IT(0), という主張である. $\mathcal{E}\langle sL \rangle \otimes \mathcal{F}\langle tL \rangle := (\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})\langle (s+t)L \rangle$ と定義すれば, 同様の主張が \mathbb{Q} 捏れ連接層に対しても成り立つ.

定理 3.6 (\mathbb{Q} 捏れ連接層を用いた M-正則性判定法 [Ito21b]). 偏極アーベル多様体 (X, L) に対し, $t \geq \beta(X, L)$ となる $t \in \mathbb{Q}$ をとる.^{*17} このとき X 上の連接層 \mathcal{F} に対し以下が成り立つ.

- (1) $\mathcal{F}\langle -tL \rangle$ が M-正則 $\Rightarrow \mathcal{F}$ は大域生成,
- (2) $t < 1$ かつ $\mathcal{F}\langle -\frac{t}{1-t}L \rangle$ が M-正則 $\Rightarrow H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(L) \rightarrow H^0(\mathcal{F} \otimes L)$ は全射.

定理 3.6 (1) で $L = A, t = 1$ とすると定理 2.3 (1) が得られる. また定理 3.6 (2) で $L = A^{\otimes k}, t = \frac{1}{2}$ とすれば定理 2.3 (2) が得られる. したがって定理 3.6 は $t \geq \beta(X, L)$ となる $t \in \mathbb{Q}$ を考えることで定理 2.3 を精密化したものになっている. 小さい t が取れれば, すなわち $\beta(X, L)$ が小さければ (1), (2) の条件は弱くなることに注意する.

定理 3.6 を用いると, $p \geq 1$ のときは定理 3.5 の $I_o\langle \frac{1}{p+2}L \rangle$ が IT(0) という仮定を M-正則に弱めることができる, という以下の定理が示せる. これは定理 2.6 の一般化にもなっている.

定理 3.7. (X, L) を偏極アーベル多様体, $p \geq 1$ とする. このとき $I_o\langle \frac{1}{p+2}L \rangle$ が M-正則ならば L は性質 (N_p) を満たす.

定理 3.7 の証明のスケッチ. 証明は基本的に定理 3.5 のそれと同じである. 実際定理 3.5 の証明 (i), (ii) は同じで, (iv) は「 $I_o\langle \frac{1}{p+2}L \rangle$ が M-正則 $\Leftrightarrow M_L\langle \frac{1}{p+1}L \rangle$ が M-正則」に置き換えればよい. したがって「(iii) $M_L\langle \frac{1}{p+1}L \rangle$ が IT(0) $\Rightarrow M_L^{\otimes p+1} \otimes L$ が IT(0)」を

$$(iii)' \quad p \geq 1 \text{かつ } M_L\langle \frac{1}{p+1}L \rangle \text{ が M-正則 } \Rightarrow M_L^{\otimes p+1} \otimes L \text{ が IT(0)} \quad ^{*18}$$

に置き換えれば定理 3.7 が従う. (iii)' は定理 3.6 を用いて示すことができる. \square

$I_o \otimes A$ が M-正則 $\Leftrightarrow A$ が固定因子を持たない, であったことを思い出すと, 定理 3.7 から定理 2.6 が従う. 定理 3.5 と同様に定理 3.7 も任意標数で成り立つの, Lazarsfeld の予想と同様に定理 2.6 の標数に関する仮定もはずせることがわかる.

4 $I_o\langle tL \rangle$ はいつ GV, M-正則, IT(0) か?

定理 3.5, 3.6, 3.7 を適用するには, $I_o\langle tL \rangle$ がいつ GV, M-正則, IT(0) になるかを知る必要がある. この節ではこの問題について知られていることを解説する.

この節では断らない限り K の標数は 0 を仮定する.

^{*17} つまり $I_o\langle tL \rangle$ が GV となる $t \in \mathbb{Q}$ をとる. $\beta(X, L)$ が有理数ならば $t = \beta(X, L)$ とすればよい.

^{*18} 一般に「M-正則 \otimes M-正則 = M-正則」は [PP11b] により示されているが, ここでは $M_L\langle \frac{1}{p+1}L \rangle$ を $p+1 \geq 2$ 回テンソルした $M_L^{\otimes p+1} \otimes L$ が IT(0) になることを示す必要がある. (iii)' は $p=0$ の場合は成り立たないので, ここで $p \geq 1$ という仮定を使っている.

4.1 $\beta(X, L)$ と部分アーベル多様体との交点数

藤田の基底点自由性予想は、滑らかな射影代数多様体 Y 上の豊富な直線束 H に対し、 $m \geq \dim Y + 1$ ならば $K_Y + mL$ は基底点自由である、というものである。この一般化として Kollar による以下の予想がある：

予想 4.1 ([Kol93]). 滑らかな n 次元射影代数多様体 Y 上の豊富な直線束 H と $y \in Y$ に対し、

$$(H^n) > n^n \quad \text{かつ} \quad \text{任意の部分代数多様体 } y \in Z \subset Y \text{ に対し } (H^{\dim Z}.Z) \geq n^{\dim Z}$$

ならば $K_Y + H$ は y で基底点自由である。

藤田基底点自由性予想は $\dim Y \leq 5$ の場合に、予想 4.1 は $\dim X \leq 3$ の場合に成り立つことがわかっている [Rei88, EL93, Hel99, Kaw97, YZ20]。

一方で、偏極アーベル曲面の場合は以下が成り立つ。

定理 4.2 ([KL19, Ito18]). (X, L) を偏極アーベル曲面、 $p \geq -1$ とする。^{*19} $(L^2) > 4(p+2)^2$ ならば以下は同値である：

- (1) L は (N_p) をみたす。
- (2) 任意の楕円曲線 $C \subset X$ に対し $(L.C) > p+2$ 。

予想 4.1 と定理 4.2 から、筆者は以下の問い合わせ^{*20}をたてた：

問 4.3 ([Ito18]). (X, L) を偏極アーベル多様体、 $p \geq 0$ に対し、 $B = \frac{1}{p+2}L$ とおく。このとき任意の部分アーベル多様体 $\{o\} \neq Z \subset X$ に対し $(B^{\dim Z}.Z) > (\dim Z)^{\dim Z}$ ならば L は (N_p) をみたすか？

この問い合わせと定理 3.5 から、Caucci は以下の問い合わせをたてた：

問 4.4 ([Cau20]). (X, L) を偏極アーベル多様体、 $t > 0$ に対し、 $B_t = tL$ とおく。任意の部分アーベル多様体 $\{o\} \neq Z \subset X$ に対し $(B_t^{\dim Z}.Z) > (\dim Z)^{\dim Z}$ ならば $\beta(X, L) < t$ が成り立つか（つまり $I_o(tL)$ は IT(0) か）？

定理 3.5 より、 $t = \frac{1}{p+2}$ の場合を考えると問 4.4 の答えが肯定的ならば問 4.3 の答えもそうであることがわかる。また定理 4.2 の証明から、 $\dim X \leq 2$ ならば問 4.4 の答えは肯定的であることが従う。問 4.4 に関しては以下のことがわかっている。

^{*19} [KL19, Ito18] では $p \geq 0$ の場合に示されているが、 $p = -1$ の場合も同様の証明で成り立つことがわかる。もしくは [Rei88] からも従う。

^{*20} 予想 4.3 を予想 4.1 と比較すると、(i) 予想 4.1 の $\geq n^{\dim Z}$ が $> (\dim Z)^{\dim Z}$ になっている、(ii) Z として部分アーベル多様体のみを考えている、という違いがある。

定理 4.5. (1) $\dim X = 3$ ならば問 4.4 は正しい [Ito20a].

(2) $(B_t^{\dim Z} \cdot Z) > (\dim Z)^{\dim Z}$ を $(B_t^{\dim Z} \cdot Z) > (2 \dim Z)^{\dim Z}$ に置き換えれば問 4.4 は正しい [Jia21].

定理 4.5 (1) で $p = -1$ とすると, 以下の系が得られる.

系 4.6. (X, L) を 3 次元偏極アーベル多様体で $\dim H^0(X, L) \geq 5$ であるとする. このとき L が基底点自由であることと, 任意のアーベル曲面 $S \subset X$ と任意の楕円曲線 $C \subset X$ に対し $(L^2 \cdot S) \geq 6, (L \cdot C) \geq 2$ をみたすことは同値である.*²¹

4.2 一般の (general な) 偏極アーベル多様体 (X, L)

g 次元偏極アーベル多様体 (X, L) に対し, (X, L) の型と呼ばれる $d_1|d_2|\cdots|d_g$ をみたす自然数の列 (d_1, \dots, d_g) が定まる. 型 (d_1, \dots, d_g) を一つ固定すると, (適当な意味で) その型の g 次元偏極アーベル多様体 (X, L) をパラメetrizeする既約なモジュライが存在する. したがって, (d_1, \dots, d_g) 型の一般的な (general な) (X, L) , を考えることができる.

$\beta(X, L)$ は上半連続性を持つ, すなわち偏極アーベル多様体の族 $\{(X_t, L_t)\}$ に対し $t \mapsto \beta(X, L)$ は Zariski 位相に関して上半連続であるので [Ito20b], 一般的 (X, L) に対しては $\beta(X, L)$ の良い上界が期待できる. 実際以下の結果が知られている.

定理 4.7 ([Jia21]). (X, L) を (d_1, \dots, d_g) 型の g 次元偏極アーベル多様体, $p \geq -1$ とする. このとき以下の 3 条件を満たすならば $\beta(X, L) < \frac{1}{p+2}$ が成り立つ. 特に L は (N_p) を満たす:

- (1) $d_1 \cdots d_g > \frac{g^g}{g!} (p+2)^g$,
- (2) $1 \leq i \leq g-1$ に対し $d_i \leq \frac{g}{g-i} (p+2)$,
- (3) $1 \leq i \leq g$ に対し, $\dim_{\mathbb{Q}} H^{i,i}(X, \mathbb{Q}) = 1$. ただし $H^{i,i}(X, \mathbb{Q}) := H^{i,i}(X) \cap H^{2i}(X, \mathbb{Q})$ は余次元 i の Hodge 類全体のなすベクトル空間である.*²²

定理 4.8 ([Ito20b]). $(1, \dots, 1, d)$ 型の一般的 g 次元偏極アーベル多様体と整数 $m \geq 1$ に対し以下が成り立つ.

- (1) $d \geq m^g \Leftrightarrow \beta(X, L) \leq \frac{1}{m}$, つまり $I_o\langle \frac{1}{m}L \rangle$ が GV.
- (2) $d \geq m^g + \cdots + m + 1 \Rightarrow \beta(X, L) < \frac{1}{m}$, つまり $I_o\langle \frac{1}{m}L \rangle$ が IT(0). *²³ *²⁴ *²⁵

*²¹ L が基底点自由ならば $(L^2 \cdot S) \geq 6, (L \cdot C) \geq 2$ がなりたつことは簡単にわかる.

*²² 非常に一般的 (X, L) はこの仮定を満たす.

*²³ (2) については [Ito21a] で解説している.

*²⁴ \Leftarrow は成り立たない. 実際 $g=2$ の場合, $d=11 < 3^2 + 3 + 1$ のとき次の定理 4.9 により $\beta(L) < \frac{1}{3}$ である. また $g=2, d=12$ ならば $\beta(L) = \frac{1}{3}$ なので [Ito20b], (1) のような「 $d \geq f(m, g)$ (ある m と g の関数) $\Leftrightarrow \beta(L) < \frac{1}{m}$ 」の形の主張は成り立たないことがわかる.

*²⁵ 特に $p=0$ の場合を考えると, Fuentes García [FG05] の予想 「 $(1, \dots, 1, d)$ 型の一般的 g 次元偏極アーベル多様体 (X, L) に対し, L が射影正規 $\Leftrightarrow d \geq 2^{g+1} - 1$ 」が成り立つことがいえる.

筆者は定理 4.8 といいくつかの既存の結果から、 $(1, \dots, 1, d)$ 型の一般の g 次元偏極アーベル多様体に対し

$$d > m^g \Leftrightarrow I_o\langle \frac{1}{m}L \rangle \text{ が M-正則}^{*26}$$

が成り立つか？という問い合わせたが [Ito21b]，2 次元の場合は最近 Rojas により肯定的に解決された。なおこの Rojas による結果は任意標数で成り立つ：

定理 4.9 ([Roj21]). (X, L) を $(1, d)$ 型の偏極アーベル曲面とし、 X 上の任意の因子 D に対し $2d | (L \cdot D)$ であるとする（例えば X のピカール数が 1 ならばよい）。このとき以下が成り立つ。

- (1) d が平方数ならば $I_o\langle \frac{1}{\sqrt{d}}L \rangle$ は GV だが M-正則ではない。
- (2) d が平方数でないならば、 $I_o\langle \frac{2y_0}{x_0-1}L \rangle$ は M-正則である。ただし (x_0, y_0) はペル方程式 $x^2 - 4dy^2 = 1$ の最小整数解である。

とくに整数 $m \geq 1$ に対し、 $d > m^2 \Leftrightarrow I_o\langle \frac{1}{m}L \rangle$ は M-正則、が成り立つ。

参考文献

- [Cau20] Federico Caucci, *The basepoint-freeness threshold and syzygies of abelian varieties*, Algebra Number Theory **14** (2020), no. 4, 947–960. MR 4114062
- [EL93] Lawrence Ein and Robert Lazarsfeld, *Global generation of pluricanonical and adjoint linear series on smooth projective threefolds*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 4, 875–903. MR 1207013
- [FG05] Luis Fuentes García, *Some results about the projective normality of abelian varieties*, Arch. Math. (Basel) **85** (2005), no. 5, 409–418. MR 2181770
- [Gre84] Mark L. Green, *Koszul cohomology and the geometry of projective varieties*, J. Differential Geom. **19** (1984), no. 1, 125–171. MR 739785
- [Hel99] Stefan Helmke, *On global generation of adjoint linear systems*, Math. Ann. **313** (1999), no. 4, 635–652. MR 1686947
- [Ito18] Atsushi Ito, *A remark on higher syzygies on abelian surfaces*, Comm. Algebra **46** (2018), no. 12, 5342–5347. MR 3923760
- [Ito20a] ———, *Basepoint-freeness thresholds and higher syzygies on abelian threefolds*, arXiv:2008.10272v2, 2020.
- [Ito20b] ———, *Higher syzygies on general polarized abelian varieties of type $(1, \dots, 1, d)$* , arXiv:2011.09687, 2020.

*26 \Leftarrow が成り立つことはわかっている。

- [Ito21a] ———, *Linear systems on general polarized abelian varieties of type $(1, \dots, 1, d)$* , 都の西北代数幾何学シンポジウム 2021 報告集, 2021.
- [Ito21b] ———, *M-regularity of \mathbb{Q} -twisted sheaves and its application to linear systems on abelian varieties*, arXiv:2102.12175, 2021.
- [Jia21] Zhi Jiang, *Cohomological rank functions and syzygies of abelian varieties*, Mathematische Zeitschrift (2021).
- [JP20] Zhi Jiang and Giuseppe Pareschi, *Cohomological rank functions on abelian varieties*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **53** (2020), no. 4, 815–846. MR 4157109
- [Kaw97] Yujiro Kawamata, *On Fujita’s freeness conjecture for 3-folds and 4-folds*, Math. Ann. **308** (1997), no. 3, 491–505. MR 1457742
- [Kem89] George R. Kempf, *Linear systems on abelian varieties*, Amer. J. Math. **111** (1989), no. 1, 65–94. MR 980300
- [Kha92] Abdelhamid Khaled, *Équations définissant des variétés abéliennes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315** (1992), no. 5, 571–576. MR 1181294
- [KL19] Alex Küronya and Victor Lozovanu, *A Reider-type theorem for higher syzygies on abelian surfaces*, Algebr. Geom. **6** (2019), no. 5, 548–570. MR 4009173
- [Koi76] Shoji Koizumi, *Theta relations and projective normality of Abelian varieties*, Amer. J. Math. **98** (1976), no. 4, 865–889. MR 480543
- [Kol93] János Kollár, *Effective base point freeness*, Math. Ann. **296** (1993), no. 4, 595–605. MR 1233485
- [Muk81] Shigeru Mukai, *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 153–175. MR 607081
- [Mum66] D. Mumford, *On the equations defining abelian varieties. I*, Invent. Math. **1** (1966), 287–354. MR 204427
- [Ohb87] Akira Ohbuchi, *Some remarks on ample line bundles on abelian varieties*, Manuscripta Math. **57** (1987), no. 2, 225–238. MR 871633
- [Par00] Giuseppe Pareschi, *Syzygies of abelian varieties*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), no. 3, 651–664. MR 1758758
- [PP03] Giuseppe Pareschi and Mihnea Popa, *Regularity on abelian varieties I*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 2, 285–302. MR 1949161
- [PP04] ———, *Regularity on abelian varieties II. Basic results on linear series and defining equations*, J. Algebraic Geom. **13** (2004), no. 1, 167–193. MR 2008719
- [PP11a] ———, *GV-sheaves, Fourier-Mukai transform, and generic vanishing*, Amer. J. Math. **133** (2011), no. 1, 235–271. MR 2752940
- [PP11b] ———, *Regularity on abelian varieties III: relationship with generic vanishing and applications*, Grassmannians, moduli spaces and vector bundles, Clay Math. Proc., vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 141–167. MR 2807853

- [Rei88] Igor Reider, *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 2, 309–316. MR 932299
- [Roj21] Andrés Rojas, *The basepoint-freeness threshold of a very general abelian surface*, arXiv:2107.01896, 2021.
- [YZ20] Fei Ye and Zhixian Zhu, *On Fujita’s freeness conjecture in dimension 5*, Adv. Math. **371** (2020), 107210, 56 pp. MR 4108218

傾理論と Grothendieck 群の部屋構造・標準分解

淺井 聰太 (大阪大学情報科学研究科)

本稿は、「第 66 回代数学シンポジウム」において、2021 年 8 月 31 日に私が講演した内容の報告である。大部分は私の論文 [As] に記された結果に関するものであり、一部は伊山修氏（東京大学）との現在進行中の共同研究に基づく。

1 導入

私の主な研究分野は、有限次元多元環の表現論であり、これは、体 K 上の有限次元多元環 A について、有限次元加群圏 $\text{mod } A$ やその有界導來圏 $D^b(\text{mod } A)$ などの圏を用いて、多元環 A の性質を調べる分野である。そのため、有限次元多元環の表現論において、非同型な多元環が何らかの圏論的性質を共有するための条件を求めるることは、基本的な問い合わせである。

以下、 A, B を体 K 上の有限次元多元環とする。

まず、有限次元加群圏 $\text{mod } A, \text{mod } B$ が圏として同値であるとき、 A と B は森田同値 (Morita equivalent) であるという。 A と B が森田同値であることは、有限次元射影加群圏 $\text{proj } A, \text{proj } B$ の間に圏同値が存在するという条件で特徴付けられる。森田同値を制御するものとして、森田射影生成加群 (Morita progenerator) があり、これは射影加群 $P \in \text{proj } A$ で任意の直既約射影加群が P の直和因子であるようなものを指す。

圏同値 $F: \text{proj } A \rightarrow \text{proj } B$ が存在するとき、 $F(P) \cong B$ となる射影加群 $P \in \text{proj } A$ をとれば、これは森田射影生成加群であり、自己準同型環 $\text{End}_A(P)$ は B と多元環として同型である。逆に、森田射影生成加群 $P \in \text{proj } A$ について、 $B := \text{End}_A(P)$ とすれば、圏同値 $\text{Hom}_A(P, ?): \text{proj } A \rightarrow \text{proj } B$ が得られる。

例えば、 n 次正方行列全体がなす環 $\text{Mat}_n(K)$ ($n \geq 1$) は、体 K 自身と森田同値である。 $\text{Mat}_n(K)$ が単純環であることは、Wedderburn–Artin の定理から得られる、よく知られた事実であるが、その証明を表現論の観点から一般化したものが森田同値であるともいえる。

ただ、 A, B が森田同値になる場合はごく限られており、これだけでは不便である。そこで、Rickard [Ri] は、 A と B が導來同値 (derived equivalent) であるという条件を、有界導來圏 $D^b(\text{mod } A)$ と $D^b(\text{mod } B)$ が圏同値であるということとして導入した。Rickard は、有界ホモトピー圏 $K^b(\text{proj } A)$ に属す複体 $T \in K^b(\text{proj } A)$ で、特定の条件を満たすものを傾複体 (tilting complex) と呼び、 A と B が導來同値であることは、傾複体 $T \in K^b(\text{proj } A)$ で $\text{End}_{K^b(\text{proj } A)}(T)$ が B と同型となるようなものが存在することと同値であることを証明した。Rickard の導來同値は、Brenner–Butler [BB] による古典的傾理論を一般化したものもある。

さらに、傾複体よりも緩い概念として、Keller–Vossieck [KV] による準傾複体 (silting complex) $T \in K^b(\text{proj } A)$ がある。この場合、 A と $B := \text{End}_{K^b(\text{proj } A)}(T)$ が導來同値になるとは限らない^{*1}が、準傾複体に付隨する $D^b(\text{mod } A)$ の t 構造^{*2}の心が $\text{mod } B$ と圈同値になる [IY] などの関連性は残っている。

準傾複体を考える利点としては、変異という操作が準傾複体の範囲で自由に行えるということが、挙げられる。より正確には、準傾複体 $T, T' \in K^b(\text{proj } A)$ が、ただ一つの直既約因子を除いて同型であるとき、 T' は T の変異 (mutation) であるといい、準傾複体 T の任意の直既約因子について、その直既約因子を失うような変異 $T' \in K^b(\text{proj } A)$ が存在する。この事実は、Aihara–Iyama [AI] によって証明された。さらに、2 項準傾複体の範囲では、各直既約因子に関する変異は一意的であることが、Adachi–Iyama–Reiten [AIR] で得られている。

さて、上記いずれの場合でも、有限次元射影加群圏の Grothendieck 群の同型 $K_0(\text{proj } A) \cong K_0(\text{proj } B)$ が誘導される。Grothendieck 群 $K_0(\text{proj } A)$ は、非同型な直既約射影加群たち全体 P_1, P_2, \dots, P_n が定める元 $[P_1], [P_2], \dots, [P_n]$ を、標準的な基底として持つ自由アーベル群である [H]。一方、 $T \in 2\text{-silt } A$ の非同型な直既約因子たち全体 T_1, T_2, \dots, T_m が定める元 $[T_1], [T_2], \dots, [T_m] \in K_0(\text{proj } A)$ もまた、 $K_0(\text{proj } A)$ の基底であることが、Aihara–Iyama [AI] によって示されている。特に、自由アーベル群の階数の一意性から、 $m = n$ ではなくてはならず、準傾複体の非同型な直既約因子の個数は一定である。

そこで、実 Grothendieck 群 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}} := K_0(\text{proj } A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ において、基本的 2 項準傾複体 $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i \in 2\text{-silt } A$ (各 T_i は直既約) に付隨する錐 $C^+(T), C(T)$ を、

$$C^+(T) := \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_{>0}[T_i], \quad C(T) := \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_{\geq 0}[T_i]$$

で定義する。ここで、基本的 (basic) とは $i \neq j$ のとき $T_i \not\cong T_j$ であるという意味である。

錐 $C(T)$ たちは、非同型な 2 項準傾複体の分類に有用である。なぜならば、非同型な 2 項準傾複体 T, T' について、 $C^+(T) \cap C(T') = \emptyset$ である、つまり、非同型な 2 項準傾複体の錐同士は内部では決して交わらないということが、Demonet–Iyama–Jasso [DIJ] の結果として、得られているからである。

また、2 項準傾複体の錐は King [Ki] による加群 $M \in \text{mod } A$ の安定性条件 (stability condition) とも関連する。この安定性条件は、 M の商加群の次元ベクトルに関する、 θ に依存した線型不等式であり、[Ki] で簇表現のモジュライ空間の構成に用いられた。さらに、

^{*1} 微分次数付き多元環 (DG 多元環) $\mathcal{E} := \mathcal{E}nd_{K^b(\text{proj } A)}(T)$ を考えると、 \mathcal{E} の有限次元導來圏が $D^b(\text{mod } A)$ と圈同値になる [Ke, KY]。 T が傾複体であれば DG 多元環として \mathcal{E} と B は擬同型である。

^{*2} t 構造そのものは Beilinson–Bernstein–Deligne [BBD] により定義された。準傾複体に付隨する t 構造は Koenig–Yang [KY] が導入した。

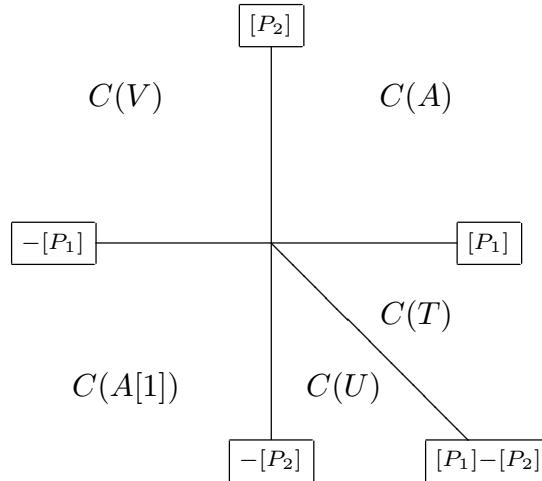
Baumann–Kamnitzer–Tingley [BKT] は、前射影的多元環の場合に錐と安定性条件の関係を考えることで、量子群の結晶基底の研究を行った。

錐の例を簡単な多元環の場合を見てみよう。

例 1.1 $A := K(1 \rightarrow 2)$ とするとき、

$$\begin{aligned} A &= (0 \rightarrow P_1) \oplus (0 \rightarrow P_2), \\ T &= (0 \rightarrow P_1) \oplus (P_2 \rightarrow P_1), \\ U &= (P_2 \rightarrow 0) \oplus (P_2 \rightarrow P_1), \\ V &= (P_1 \rightarrow 0) \oplus (0 \rightarrow P_2), \\ A[1] &= (P_1 \rightarrow 0) \oplus (P_2 \rightarrow 0) \end{aligned}$$

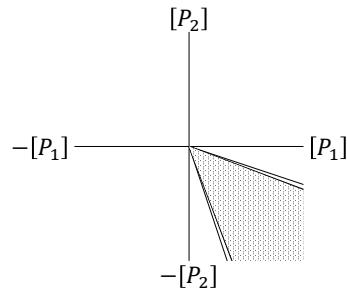
は、すべて 2 項準傾複体となる。これら 5 つの 2 項準傾複体について、錐 $C(T)$ を実 Grothendieck 群 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ に表示すると、



となり、錐たちが実 Grothendieck 群を埋め尽くしていることがわかる。ゆえに、上記のほかに基本的 2 項準傾複体は存在しない。

この例から、基本的 2 項準傾複体に付随する錐 $C(T)$ を用いて、実 Grothendieck 群 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造を定めるという発想は、自然なものである。ただし、錐 $C(T)$ たちは実 Grothendieck 群 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ 全体を覆うとは限らないため、このままでは不完全である。そこで、錐の代わりに、加群の安定性条件を用いて、実 Grothendieck 群 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造を導入する。この部屋構造は、錐が定める部屋構造の壁を増やしたものであり、錐の内部 $C^+(T)$ はどちらの部屋構造においても、部屋であることが、Brüstle–Smith–Treffinger [BST] によって示されている。以降、本稿では、安定性条件による部屋構造のみを考える。

例えば、 $A = K(1 \rightrightarrows 2)$ である場合には、 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造の概形は以下のようになる。



ここで、右下の網掛け部分には、壁たちが稠密に存在するため、この部分には部屋は存在せず、よって、2項準傾複体の錐も存在しない。一方、すべての部屋は、2項準傾複体の錐として実現されている。

このような、「部屋がすべて2項準傾複体に対応する錐で尽くされる」という現象は、いかなる有限次元多元環についても、成立する。これを本稿での主結果とし、本文中でより詳しく解説する。

定理 1.2 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造における部屋は、必ず $C^+(T)$ ($T \in \text{2-silt } A$) の形に書ける。

安定性条件による部屋構造は、ほかの組合せ論的構造とも関連がある。例えば、 Q が非輪状な有限簇であり、 A が道多元環 KQ であるとき、 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造は、簇 Q の団散乱図形 (cluster scattering diagram) に一致することを、Bridgeland [B] が示している。また、 A が Dynkin 型前射影的多元環ならば、 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋構造は、対応する Weyl 群が定める部屋構造に一致する。これは、Mizuno [M] の結果である。

設定

本稿では、 K を体とし、 A を有限次元 K 多元環とする。 \mathcal{C} が完全圏あるいは三角圏であるとき、その Grothendieck 群を $K_0(\mathcal{C})$ と記す。また、 $K_0(\mathcal{C})_{\mathbb{R}} := K_0(\mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおき、これを実 Grothendieck 群という。 $\text{proj } A$ を有限次元射影 A 加群全体の圏とし、 $\mathbf{K}^b(\text{proj } A)$ を $\text{proj } A$ 上の有界複体のホモトピー圏とする。このとき、 $K_0(\text{proj } A)$ と $K_0(\mathbf{K}^b(\text{proj } A))$ は自然に同一視され、直既約射影加群の同型類全体 P_1, P_2, \dots, P_n が定める元をアーベル群の基底として持つ。同様に、 $\text{mod } A$ を有限次元 A 加群全体の圏とし、 $\mathbf{D}^b(\text{mod } A)$ を $\text{mod } A$ 上の有界複体の導来圏とすると、 $K_0(\text{mod } A) \cong K_0(\mathbf{D}^b(\text{mod } A))$ は、単純加群の同型類全体 S_1, S_2, \dots, S_n が定める元をアーベル群の基底として持つ。後の都合上、任意の i について全射 $P_i \rightarrow S_i$ が存在するように、添え字を付け替えておく。

2 準備

まず、Euler 形式の定義を復習する。

定義 2.1 Euler 形式 (Euler form) とは、 \mathbb{Z} 双線型形式

$$\langle !, ? \rangle : K_0(\mathsf{proj} A) \times K_0(\mathsf{mod} A) \rightarrow \mathbb{Z}$$

で、任意の $T \in K^b(\mathsf{proj} A)$ と $X \in D^b(\mathsf{mod} A)$ について、

$$\langle T, X \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim_K \mathsf{Hom}_{D^b(\mathsf{mod} A)}(T, X[k])$$

という式を満たすという条件で定まるもののこととする。

当然ながら、Euler 形式は実 Grothendieck 群へ拡張できる。上の定義そのものよりも、次の事実が重要である。

命題 2.2 $K_0(\mathsf{proj} A)$ の基底 $(P_i)_{i=1}^n$ と $K_0(\mathsf{mod} A)$ の基底 $(S_i)_{i=1}^n$ は、Euler 形式に関して正のスカラー倍を除く双対基底である。より正確には、任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し、

$$\langle P_i, S_j \rangle = \begin{cases} \dim_K \mathsf{End}_A(S_j) & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

したがって、 $K_0(\mathsf{proj} A)_{\mathbb{R}}$ は $K_0(\mathsf{mod} A)_{\mathbb{R}}$ の双対 \mathbb{R} 線型空間とみなすことができる。各 $\theta \in K_0(\mathsf{proj} A)_{\mathbb{R}}$ が誘導する \mathbb{R} 線型形式 $\langle \theta, ? \rangle : K_0(\mathsf{mod} A)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ を考えることができ、これも θ という記号で表す。

3 部屋構造

この章では安定性条件による部屋構造について調べる。まず、部屋構造の定義を述べるために、King [Ki] による安定性条件を記す。

定義 3.1 [Ki, Definition 1.1] $\theta \in K_0(\mathsf{proj} A)_{\mathbb{R}}$, $M \in \mathsf{mod} A$ とする。

- (1) M が θ 半安定 (θ -semistable) であるとは、 $\theta(M) = 0$ かつ M の任意の商加群 N に對し $\theta(N) \geq 0$ であることとする。
- (2) M が θ 安定 (θ -stable) であるとは、 $\theta(M) = 0$ かつ $M \neq 0$, M に對し $\theta(N) > 0$ であることとする。
- (3) 部分圏 $\mathcal{W}_\theta \subset \mathsf{mod} A$ を θ 半安定な加群全体と定め、これを θ 半安定部分圏 (θ -semistable subcategory) と呼ぶ。

半安定部分圏の基本的な性質をいくつか挙げる。

注意 3.2 $\theta \in K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ とする。

- (1) \mathcal{W}_θ は $\text{mod } A$ の広大部分圏である。つまり、 \mathcal{W}_θ は核、余核、拡大をとる操作で閉じている。
- (2) [Ru, HR] \mathcal{W}_θ は長さ有限のアーベル圏であり、Jordan–Hölder の性質が成立する。
- (3) M が \mathcal{W}_θ の単純対象であるということは、 M が θ 安定な加群であることと同値である。このとき、 M は煉瓦 (brick)、すなわち $\text{End}_A(M)$ が斜体であるような加群となる。

安定性条件を用いた壁の定義は以下の通りである。

定義 3.3 $M \in \text{mod } A$ を 0 でない加群とする。このとき壁 (wall) $\Theta_M \subset K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ を、

$$\Theta_M := \{\theta \in K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}} \mid M \in \mathcal{W}_\theta\} \subset \text{Ker}\langle !, M \rangle$$

で定める。

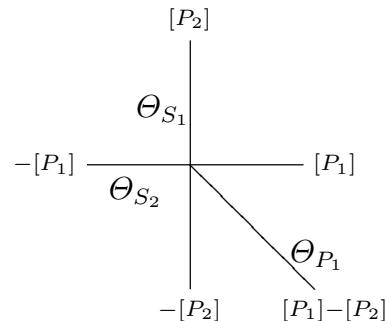
$\Theta_M \subset K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ は、 M の商加群の組成因子に依存する、有限個の線型不等式で決定される部分集合であるから、Euclid 空間 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ 内の有理多面錐である。特に、壁 Θ_M の次元 $\dim \Theta_M$ を定義することができる。

定義上は、0 でないすべての加群について壁を考えているが、部屋構造を考えるにあたっては無駄が多い。例えば、 $\Theta_{M \oplus N} = \Theta_M \cap \Theta_N$ となることから、直既約な加群のみを考えれば、部屋構造は決まる。より強く、次の性質が成り立つ。

補題 3.4 [As, Proposition 2.8] $M \in \text{mod } A$ を 0 でない加群とする。このとき、煉瓦 S で $\dim \Theta_S = n - 1$ かつ $\Theta_S \supset \Theta_M$ のものが存在する。

つまり、煉瓦の同型類全体がなす集合を $\text{brick } A$ と書けば、煉瓦に対する壁 Θ_S ($S \in \text{brick } A$) のみで、部屋構造を知るには十分である。この方針で、簡単な例を見よう。

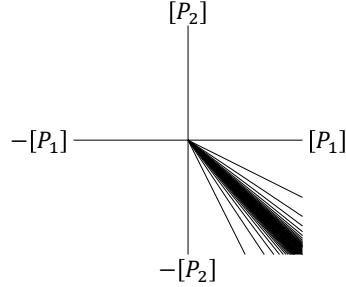
定義 3.5 (1) A を道多元環 $K(1 \rightarrow 2)$ とする。このとき煉瓦は S_2, P_1, S_1 の 3 つであり、その各々に対する壁は以下のようになる。



(2) $A = K(1 \rightrightarrows 2)$ とする。この場合、極大な壁は、

- $\mathbb{R}[P_1], \mathbb{R}[P_2]$;
- $\mathbb{R}_{\geq 0}((i+1)[P_1] - i[P_2]), \mathbb{R}_{\geq 0}(i[P_1] - (i+1)[P_2])$ ($i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$);
- $\mathbb{R}_{\geq 0}([P_1] - [P_2])$

で与えられ、部屋構造は以下のようになる。

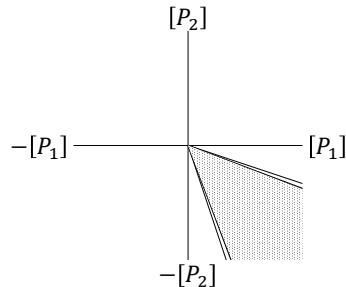


特に無限個の部屋が存在することがわかる。

(3) $A = K(1 \rightrightarrows 2)$ とする。数列 $(s_i)_{i=0}^{\infty}$ を、 $s_0 := 0, s_1 := 1, s_i := 3s_{i-1} - s_{i-2}$ ($i \geq 2$) で定める^{*3}と、極大な壁は、

- $\mathbb{R}[P_1], \mathbb{R}[P_2]$;
- $\mathbb{R}_{\geq 0}(s_{i+1}[P_1] - s_i[P_2]), \mathbb{R}_{\geq 0}(s_i[P_1] - s_{i+1}[P_2])$ ($i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$),
- $\mathbb{R}_{\geq 0}([P_1] - q[P_2])$ ($q \in \mathbb{Q} \cap ((3 - \sqrt{5})/2, (3 + \sqrt{5})/2)$)

であり、部屋構造は以下の通りである。



かなり見づらいが、この場合でも、無限個の部屋が存在する。一方、網掛け部分には壁が稠密に存在するため、ここには部屋はない。

^{*3} フィボナッチ数列の項を 1 個飛ばしにした数列になる。下に現れる $(3 \pm \sqrt{5})/2$ は、黄金比の 2 乗とその逆数であることに注意されたい。

ここまで部屋という言葉を図から判断してきたが、その正確な定義は次のようになる。

定義 3.6 [BST, Definition 3.3] 以下のように定義する。

- (1) 部分集合 $\text{Wall} \subset K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ を、すべての Θ_M の和集合 $\bigcup_{M \in \text{mod } A \setminus \{0\}} \Theta_M$ と定める。これは $\bigcup_{S \in \text{brick } A} \Theta_S$ にも一致する。
- (2) $C \subset K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ を部分集合とする。このとき、 C が $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の部屋 (chamber) であるとは、 C が開集合 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}} \setminus \overline{\text{Wall}}$ の連結成分であることと定める。また、 $\text{Chamber}(A)$ で全ての部屋からなる集合を表す。

定義から、すべての部屋の和集合 $\bigcup_{C \in \text{Chamber}(A)} C$ は、閉包 $\overline{\text{Wall}}$ の補集合である。ゆえに、 $\theta \in K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ について、 θ が属す部屋が存在することは、 θ の開近傍で壁と一切交わらないものがとれることが必要十分である。

4 数値的ねじれ対

前章で定義した部屋構造について、より詳しく調べるため、Baumann–Kamnitzer–Tingley による数値的ねじれ対を用いる。

定義 4.1 [BKT, Subsection 3.1] 任意の $\theta \in K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ に対し、数値的ねじれ対 (numerical torsion pair) $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta), (\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$ を、

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{T}}_\theta &:= \{M \in \text{mod } A \mid \text{任意の商加群 } N \text{ に対し } \theta(N) \geq 0\}, \\ \mathcal{F}_\theta &:= \{M \in \text{mod } A \mid \text{任意の部分加群 } L \neq 0 \text{ に対し } \theta(L) < 0\}, \\ \mathcal{T}_\theta &:= \{M \in \text{mod } A \mid \text{任意の商加群 } N \neq 0 \text{ に対し } \theta(N) > 0\}, \\ \overline{\mathcal{F}}_\theta &:= \{M \in \text{mod } A \mid \text{任意の部分加群 } L \text{ に対し } \theta(L) \leq 0\}\end{aligned}$$

で定義する。

定義から明らかに $\mathcal{W}_\theta = \overline{\mathcal{T}}_\theta \cap \overline{\mathcal{F}}_\theta$ である。

上記の 2 種類の数値的ねじれ対を用いて、 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ に次の同値関係を入れる。

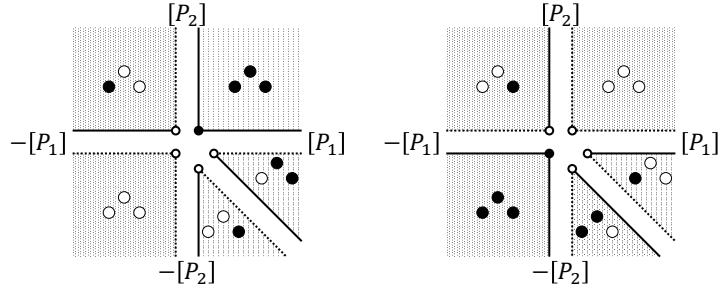
定義 4.2 $\theta, \theta' \in K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ が TF 同値 (TF equivalent) であるとは、 $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta) = (\overline{\mathcal{T}}_{\theta'}, \mathcal{F}_{\theta'})$ かつ $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta) = (\mathcal{T}_{\theta'}, \overline{\mathcal{F}}_{\theta'})$ であることと定める。

当然ながら、ねじれ対の定義から、 $\overline{\mathcal{T}}_\theta = \overline{\mathcal{T}}_{\theta'}$ かつ $\overline{\mathcal{F}}_\theta = \overline{\mathcal{F}}_{\theta'}$ であれば、 θ と θ' は TF 同値となる。

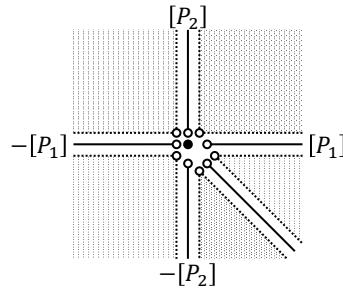
簡単な例で TF 同値類を決定してみる。

例 4.3 $A = K(1 \rightarrow 2)$ とする。このとき直既約加群の同型類は、 $\frac{P_1}{S_2}, \frac{S_1}{S_1}$ の 3 つであ

る^{*4}。 $\overline{\mathcal{T}}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta$ とともに、直和因子をとる操作について閉じていることから、各直既約加群がおののおのの部分圏に属しているか否かを、属す加群は・で、そうでない加群は○で置き換えて表示することで、 $\overline{\mathcal{T}}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta$ を表す。この表示法のもとで、 $\overline{\mathcal{T}}_\theta$ と $\overline{\mathcal{F}}_\theta$ の分布はそれぞれ以下のようになる。



両者は、おおむね似たような分割の形になっているが、境界部分については、かなり異なつており、結果として、TF 同値類は下の図の 11 個である。



上の例で得た TF 同値類は、部屋構造とよく似た図だと思う読者もいるであろう。これは一般的に成り立つ事実であり、定式化すると以下のようになる。なお、 $[\theta, \theta']$ は θ と θ' を結ぶ線分のことである。

定理 4.4 [As, Theorem 2.17] 異なる元 $\theta, \theta' \in K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ に対して、次は同値である。

- (a) θ と θ' は TF 同値である。
- (b) 線分 $[\theta, \theta']$ 上の各点 θ'' に対し、 $\mathcal{W}_{\theta''}$ は一定である。
- (c) 煉瓦 $S \in \text{brick } A$ で $[\theta, \theta']$ が Θ_S とただ一点で交わるものは存在しない。

また、部屋構造における部屋についても、TF 同値類を用いて特徴付けが可能である。TF_n(A) で内部が空でないような TF 同値類全体の集合とする。

^{*4} このような形に並べているのは、Auslander-Reiten 箱がこの形だからである。

系 4.5 [As, Corollary 2.21] 全单射 $\text{Chamber}(A) \rightarrow \text{TF}_n(A)$ が、部屋 C を C を含む唯一の TF 同値類に写すという対応で定まる。

次の章で実はこれが恒等写像であることを 2 項準傾複体を用いて示す。

5 2 項準傾複体の錐

この章では、内部が空でない TF 同値類を得る方法として、 $K^b(\text{proj } A)$ の 2 項準傾複体を用いる。

$U \in K^b(\text{proj } A)$ とするとき、 U が 2 項 (2-term) であるとは、 U が -1 番目と 0 番目の項以外は 0 であるような複体 $P^{-1} \rightarrow P^0$ に $K^b(\text{proj } A)$ で同型であることを指す。また、 U が基本的 (basic) であるとは、 U の直既約因子たちが互いに非同型であることをいい、このとき、 $|U|$ で U の直既約因子の個数を表す。

定義 5.1 [KV] U を 2 項複体とする。

- (1) U が 2 項前準傾複体 (2-term presilting complex) であるとは、 $\text{Hom}_{K^b(\text{proj } A)}(U, U[k]) = 0$ である^{*5} ことと定める。2-presilt A で基本的 2 項前準傾複体の同型類すべてがなす集合を表す。
- (2) U が 2 項準傾複体 (2-term silting complex) であるとは、 U が 2 項前準傾複体で、かつ、 U は直和因子と三角形をとる操作で $K^b(\text{proj } A)$ 全体を生成することと定める。2-presilt A で基本的 2 項準傾複体の同型類すべてがなす集合を表す。

2 項前準傾複体と 2 項準傾複体の間には、以下のような重要な関係がある。

命題 5.2 $U \in 2\text{-presilt } A$ とする。

- (1) [Ai, Proposition 2.16] U はある $T \in 2\text{-silt } A$ の直和因子である。
- (2) [AIR, Proposition 3.3] $U \in 2\text{-silt } A$ は $|U| = n$ と同値である。

Grothendieck 群と 2 項前準傾複体の間にも、強い関係がある。

命題 5.3 [AI, Theorem 2.27] $U = \bigoplus_{i=1}^m U_i \in 2\text{-presilt } A$ が基本的 2 項前準傾複体の直既約分解であるとき、 $[U_1], [U_2], \dots, [U_m] \in K_0(\text{proj } A)$ は \mathbb{R} 線型独立である。さらに $U \in 2\text{-silt } A$ であれば、これらは $K_0(\text{proj } A)$ の \mathbb{Z} 基底である。

そこで、2 項前準傾複体に付随する錐を次のように定義する。

^{*5} 実際には $k = 1$ のみ確かめればよい。

定義 5.4 $U = \bigoplus_{i=1}^m U_i \in 2\text{-presilt } A$ が基本的 2 項前準傾複体の直既約分解とする。このとき、 U に対する錐 $C^+(U), C(U) \subset K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ を、

$$C^+(U) := \sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{>0}[U_i], \quad C(U) := \sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{\geq 0}[U_i]$$

である。

どちらの錐も $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ において m 次元の錐である。

2 項前準傾複体の錐同士の共通部分は、その 2 項前準傾複体の共通直和因子を表す。

命題 5.5 [DIJ, Theorem 6.5, Corollary 6.7] $U, U' \in 2\text{-presilt } A$ の最大の共通直和因子が U'' であれば、 $C(U) \cap C(U') = C(U'')$ である。

特に、 $T, T' \in 2\text{-silt } A$ が非同型であれば、 $C^+(T) \cap C(T') = \emptyset$ となる。

例 5.6 例 1.1 の状況で、 U と T の最大の共通直和因子は、 $P_2 \rightarrow P_1$ であり、これは Grothendieck 群の $[P_1] - [P_2] \in K_0(\text{proj } A)$ という元を与える。一方、 $C(T) \cap C(U) = \mathbb{R}_{\geq 0}([P_1] - [P_2]) = C(P_2 \rightarrow P_1)$ である。

以降、2 項前準傾複体の錐が TF 同値類であることを示す。そのために、2 項前準傾複体が Grothendieck 群とは無関係に定めるねじれ対を用意する。

定義 5.7 [AS, Theorem 5.10] $U \in 2\text{-presilt } A$ とする。このとき、 $\text{mod } A$ の関手的有限なねじれ対 $(\overline{\mathcal{T}}_U, \mathcal{F}_U), (\mathcal{T}_U, \overline{\mathcal{F}}_U)$ を、

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{T}}_U &:= \{M \in \text{mod } A \mid \text{Hom}_A(M, H^{-1}(\nu U)) = 0\}, \\ \mathcal{F}_U &:= \{M \in \text{mod } A \mid \text{単射 } M \rightarrow H^{-1}(\nu U)^{\oplus s} \text{ が存在}\}, \\ \mathcal{T}_U &:= \{M \in \text{mod } A \mid \text{全射 } H^0(U)^{\oplus s} \rightarrow M \text{ が存在}\}, \\ \overline{\mathcal{F}}_U &:= \{M \in \text{mod } A \mid \text{Hom}_A(H^0(U), M) = 0\} \end{aligned}$$

で定義できる。また、 $\mathcal{T}_U \subset \overline{\mathcal{T}}_U$ かつ $\mathcal{F}_U \subset \overline{\mathcal{F}}_U$ となる。

関手的有限なねじれ対の定義はここでは述べないが、上の方法ですべての関手的有限なねじれ対を得ることができる。

定理 5.8 [AIR, Theorems 2.7, 3.2] 全単射

$$\begin{aligned} 2\text{-silt } A &\rightarrow \{\text{関手的有限ねじれ類}\}, & T &\mapsto \overline{\mathcal{T}}_T = \mathcal{T}_T, \\ 2\text{-silt } A &\rightarrow \{\text{関手的有限ねじれ自由類}\}, & T &\mapsto \overline{\mathcal{F}}_T = \mathcal{F}_T \end{aligned}$$

が存在する。

以上の前提のもとで、次の結果が成り立つ。

命題 5.9 [Y, Proposition 3.3][BST, Proposition 3.27] $U \in 2\text{-presilt } A$ かつ $\theta \in C^+(U)$ とすると、 $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta) = (\overline{\mathcal{T}}_U, \mathcal{F}_U)$ かつ $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta) = (\mathcal{T}_U, \overline{\mathcal{F}}_U)$ となる。

したがって、2項前準傾複体の錐はあるTF同値類に含まれることがわかる。彼らの証明を見直すことで、実際にこの錐がTF同値類であることを、私は得た。

命題 5.10 [As, Proposition 3.11] $U \in 2\text{-presilt } A$ とすると、 $C^+(U)$ はTF同値類であり、 $\theta \in C^+(U)$ は、 $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta) = (\overline{\mathcal{T}}_U, \mathcal{F}_U)$ かつ $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta) = (\mathcal{T}_U, \overline{\mathcal{F}}_U)$ と同値である。

特に、 $T \in 2\text{-silt } A$ の錐 $C^+(T)$ は内部が空でないTF同値類であり、また開集合である。ゆえに、 $C^+(T)$ は部屋である。そして、逆に部屋は必ずこの方法で得られるというのが、本稿での私の主結果である。

定理 5.11 [As, Theorem 3.17] $K_0(\mathsf{proj } A)_\mathbb{R}$ の部分集合として、

$$\coprod_{T \in 2\text{-silt } A} C^+(T) = K_0(\mathsf{proj } A)_\mathbb{R} \setminus \overline{\mathsf{Wall}}$$

であり、左辺は連結成分への分解である。さらに、全单射 $2\text{-silt } A \rightarrow \mathsf{Chamber}(A)$ が、 $T \mapsto C^+(T)$ で与えられる。

これより、部屋は必ず $C^+(T)$ ($T \in 2\text{-silt } A$) の形なのでTF同値類である。ゆえに全单射 $\mathsf{Chamber}(A) \rightarrow \mathsf{TF}_n(A)$ は実は单なる恒等写像であり、 $\{C^+(T) \mid T \in 2\text{-silt } A\} = \mathsf{Chamber}(A) = \mathsf{TF}_n(A)$ となる。

このように部屋については2項準傾複体の錐で完全に特徴付けられる。一方で、2項前準傾複体の錐まで含めて考えても、すべてのTF同値類が得られるとは限らない。

定理 5.12 [ZZ] 次は同値である。

- (a) $K_0(\mathsf{proj } A)_\mathbb{R} = \bigcup_{U \in 2\text{-presilt } A} C^+(U)$ である。
- (b) $2\text{-presilt } A$ は有限集合である。

上の条件を満たすような多元環 A は τ 傾有限 (τ -tilting finite) であるといわれる。そうでない多元環は多くあり、そのような場合に錐以外のTF同値類を得ることが、次の目標である。

6 標準分解とTF同値類

この章の内容は、伊山修氏（東京大学）との進行中の共同研究に基づく。代数多様体を用いた議論を行うため、ここからは K は代数閉体と仮定する。

定義 6.1 [DF, Definition 1.1] $\theta \in K_0(\text{proj } A)$ とする。

- (1) 射影加群 $P_0^\theta, P_1^\theta \in \text{proj } A$ を、 $\theta = [P_0^\theta] - [P_1^\theta]$ であり、かつ、 $P_0^\theta, P_1^\theta \in \text{proj } A$ が共通な直既約因子を持たないように定める（同型を除いて一意的である）。
- (2) $\text{Hom}(\theta) := \text{Hom}_A(P_1^\theta, P_0^\theta)$ とおき、これを θ の表示空間 (presentation space) と呼ぶ。 $\text{Hom}(\theta)$ を代数多様体とみなし、Zariski 位相を考える。
- (3) 各 $f \in \text{Hom}(\theta)$ に対し、2 項複体 $P_f \in \mathbf{K}^b(\text{proj } A)$ を、 $P_f := (P_1^\theta \xrightarrow{f} P_0^\theta)$ で定める。

$\text{Hom}(\theta)$ は既約な代数多様体であり、その空でない開集合上のすべての元について成り立つ性質のことを、一般の元について成り立つ性質と呼ぶ。以下はその一例である。

注意 6.2 [P, Lemma 2.16] U が基本的とは限らない 2 項前準傾複体ならば、一般的 $f \in \text{Hom}([U])$ に対し、 $P_f \cong U$ となる。

一般的 $f \in \text{Hom}(\theta)$ に対して、2 項複体 $P_f \in \mathbf{K}^b(\text{proj } A)$ がどう直和分解されるかをもとに、Derksen–Fei は、Grothendieck 群の元の直和を導入した。

定義 6.3 [DF, Definition 4.3] $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \in K_0(\text{proj } A)$ とする。

- (1) $\bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ という記号を、一般的各元 $f \in \text{Hom}(\sum_{i=1}^m \theta_i)$ に対し、 $f_i \in \text{Hom}(\theta_i)$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$) で、 $P_f \cong \bigoplus_{i=1}^m P_{f_i}$ となるようなものが存在することと定める。このとき、 $\sum_{i=1}^m \theta_i = \bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ とも書く。
- (2) θ が直既約 (indecomposable) であるとは、一般的 $f \in \text{Hom}(\theta)$ に対し、 $P_f \in \mathbf{K}^b(\text{proj } A)$ が直既約であることをいう。

Grothendieck 群の元の直和可能性は、以下のように特徴付けられる。

命題 6.4 [DF, Corollary 4.2, Theorem 4.4] $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \in K_0(\text{proj } A)$ とする。このとき、直和 $\bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ が成立することは、任意の異なる $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対し、組 $(f, f') \in \text{Hom}(\theta_i) \times \text{Hom}(\theta_j)$ で、

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\text{proj } A)}(P_f, P_{f'}[1]) = 0, \quad \text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\text{proj } A)}(P_{f'}, P_f[1]) = 0$$

となるものが存在することと同値である。

ゆえに、 $\bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ は、任意の異なる $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ について $\theta_i \oplus \theta_j$ であることと、同値である。つまり、 $K_0(\text{proj } A)$ において、3 つ以上の元の直和可能性は、その中のどの 2 つの元も直和可能であることと言い換えられる。

以上を元に、 $K_0(\text{proj } A)$ の任意の元の標準分解を定義する。

定義 6.5 [DF, Definition 4.3] $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \in K_0(\text{proj } A)$ かつ $\theta = \bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ であるとす

る。このとき、 $\theta = \bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ が θ の標準分解 (canonical decomposition) であるとは、各 i について θ_i が直既約であることを指す。

以下は標準分解の基本定理である。

定理 6.6 [DF, Theorem 4.4][P, Theorem 2.7] 任意の $\theta \in K_0(\text{proj } A)$ は必ず標準分解をもち、それは並び替えを除いて一意的である。

Grothendieck 群の元の直和と数値的ねじれ対には、以下の関係がある。この結果は、私と伊山氏が Laurent Demonet 氏と名古屋大学で会話をした際に得た。

命題 6.7 $K_0(\text{proj } A)$ において直和 $\theta = \bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ が成立していると仮定する。このとき、 $\eta \in \sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{>0} \theta_i \subset K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ ならば、

$$\overline{\mathcal{T}}_\eta = \bigcap_{i=1}^m \overline{\mathcal{T}}_{\theta_i}, \quad \overline{\mathcal{F}}_\eta = \bigcap_{i=1}^m \overline{\mathcal{F}}_{\theta_i}$$

となり、特にいずれも一定である。

ゆえに、 $\theta = \bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ が標準分解であれば、 $\sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{>0} \theta_i$ はある一つの TF 同値類に含まれることは確定する。問題はこれが本当に TF 同値類に一致するかどうかである。

今のところ我々は、以下の状況で、標準分解から TF 同値類を構成できることを得ている。

定理 6.8 A が以下の条件の少なくともいずれかを満たすと仮定する。

- (a) 任意の $\theta \in K_0(\text{proj } A)$ が $\theta \oplus \theta$ を満たす。
- (b) A が非輪状な環 Q の多元環である。

このとき、 $\theta = \bigoplus_{i=1}^m \theta_i$ が標準分解であれば、 $\sum_{i=1}^m \mathbb{R}_{>0} \theta_i$ は TF 同値類そのものである。

上の条件下では、TF 同値類は標準分解の $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ への拡張であるともいえる。なお、条件 (a) は A が有限表現型あるいは順表現型であれば必ず満たされることが、[GLFS, PY] により示されている。

謝辞

今回、代数学シンポジウムにおける貴重な講演機会を私にくださった、プログラム責任者の有木進先生と下元数馬先生、またシンポジウム責任者の森脇淳先生に、心より感謝いたします。また、代数学シンポジウムの運営に携わったすべての方々にも、感謝の意を表します。

今回の講演のもとになった研究に関し、私は JSPS 科研費 JP16J02249, JP19K14500, JP20J00088 の助成を受けております。これらに加えて、伊山修氏との共同研究については、

伊山氏が JSPS 科研費 JP15H05738, JP16H03923, JP18K03209 の助成を受けております。

参考文献

- [AIR] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ -tilting theory*, Compos. Math. **150** (2014), no. 3, 415–452.
- [Ai] T. Aihara, *Tilting-connected symmetric algebras*, Algebr. Represent. Theor. **16** (2013), Issue 3, 873–894.
- [AI] T. Aihara, O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, J. Lond. Math. Soc. (2) **85** (2012), 633–668.
- [As] S. Asai, *The wall-chamber structures of the real Grothendieck groups*, Adv. Math. **381** (2021), 107615, <https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.107615>.
- [AS] M. Auslander, S. O. Smalø, *Almost split sequences in subcategories*, J. Algebra **69** (1981), no. 2, 426–454.
- [BKT] P. Baumann, J. Kamnitzer, P. Tingley, *Affine Mirković-Vilonen polytopes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **120** (2014), 113–205.
- [BB] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers* (French), Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), 5–171, Astérisque, 100, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [BB] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalizations of the Bernštejn Gel’fand Ponomarev reflection functors*, Representation theory, II, 103–169, Lecture Notes in Math., **832**, Springer, Berlin-New York, 1980.
- [B] T. Bridgeland, *Scattering diagrams, Hall algebras and stability conditions*, Algebr. Geom. **4** (2017), no. 5, 523–561.
- [BST] T. Brüstle, D. Smith, H. Treffinger, *Wall and Chamber Structure for finite-dimensional Algebras*, Adv. Math. **354** (2019), 106746, <https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106746>.
- [DIJ] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso, *τ -tilting finite algebras, bricks, and g-vectors*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2019, Issue 3, 852–892.
- [DF] H. Derksen, J. Fei, *General presentations of algebras*, Adv. Math. **278** (2015), 210–237.
- [GLFS] C. Geiss, D. Labardini-Fragoso, J. Schröer, *Schemes of modules over gentle algebras and laminations of surfaces*, arXiv:2005.01073v2.
- [H] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119,

- Cambridge University Press, 1988.
- [HR] S. Hassoun, S. Roy, *Admissible intersection and sum property*, arXiv:1906.03246v3.
- [IY] O. Iyama, D. Yang, *Silting reduction and Calabi–Yau reduction of triangulated categories*, Trans. Amer. Math. Soc., **370** (2018), no. 11, 7861–7898.
- [Ke] B. Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27**, no. 1 (1994), 63–102.
- [KV] B. Keller, D. Vossieck, *Aisles in derived categories*, Deuxième Contact Franco-Belge en Algèbre (Faulx-les-Tombes, 1987), Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A **40** (1988), no. 2, 239–253.
- [Ki] A. D. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **45** (1994), no. 180, 515–530.
- [KY] S. Koenig, D. Yang, *Silting objects, simple-minded collections, t-structures and co-t-structures for finite-dimensional algebras*, Doc. Math. **19** (2014), 403–438.
- [M] Y. Mizuno, *Classifying τ -tilting modules over preprojective algebras of Dynkin type*, Math. Z. **277**, no. 3–4 (2014), 665–690.
- [P] P.-G. Plamondon, *Generic bases for cluster algebras from the cluster category*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2013, Issue 10, 2368–2420.
- [PY] P.-G. Plamondon, T. Yurikusa, with an appendix by B. Keller, *Tame algebras have dense g-vector fans*, Int. Math. Res. Not., rnab105, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnab105>.
- [Ri] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 3, 436–456.
- [Ru] A. Rudakov, *Stability for an abelian category*, J. Algebra **197** (1997), Issue 1, 231–245.
- [Y] T. Yurikusa, *Wide subcategories are semistable*, Doc. Math. **23** (2018), 35–47.
- [ZZ] A. Zimmermann, A. Zvonareva, Talk in ‘Algèbres amassées et théories des représentations’, at Université de Caen, November 2017.

Toward large Cohen–Macaulay representation theory via purity

中村 力^{*}
(東京大学大学院数理科学研究科)

概要

最初に純移入加群や Ziegler スペクトラム、定義可能部分圏について、背景も含めて簡単な解説を行う。これらの理論の簡単な応用として、balanced big Cohen–Macaulay 加群に関する興味深い結果を紹介する。後半では Puninski による無限生成 Cohen–Macaulay 表現の試みを非可換の文脈へと拡張しつつ、理論的な裏付けを与えるための定式化および結果を紹介する。

1 導入

本稿を通して、環は結合的かつ単位元を持つものとする。環 A 上の右加群の単射 $L \rightarrow M$ が純 (pure) であるとは、任意の左加群 N に対して、誘導される射 $L \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N$ が単射であることで定義される。右加群 P が純移入的 (pure-injective) であるとは、全ての右加群の純単射 $L \rightarrow M$ に対して、誘導される射 $\text{Hom}_A(M, P) \rightarrow \text{Hom}_A(L, P)$ が全射であることをいう。定義により任意の移入加群は純移入加群である。もともとはアーベル群の文脈において、純移入群よりも先に代数的コンパクト性と呼ばれる概念が考えられていた。環 A 上の右加群 M が代数的コンパクト (algebraically compact) であるとは、任意の添字集合 I と J 、 M の任意の元の族 $(m_j)_{j \in J}$ 、そして A の任意の元の族 $(a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ であって各 i について有限個の j を除いて $a_{ij} = 0$ を満たすものから定まる連立一次方程式

$$\sum_{j \in J} a_{ij} X_j = m_i \quad (i \in I)$$

に対して、解となる M の元の族 $(x_i)_{i \in I}$ が存在するという条件で定められる。この定義は A 加群 M だけに依存するにも関わらず、圏論的に次のように特徴付けられる：

$$M \text{ が純移入的} \Leftrightarrow M \text{ が代数的コンパクト}.$$

この一般の環上の加群に対する事実は Warfield [War69] で示されている。アーベル群の場合を含めた歴史的事実については Warfield の論文の他に Huisgen-Zimmermann [HZ00] が詳しい。

加群論的な観点の一つとして純移入加群は、完全余ねじれ対 (perfect cotorsion pair) を余生成 (cogenerate) してくれるという意味で有り難いと言える ([GT12, Corollary 6.22]). また、Beligiannis [Bel00] と Krause [Kra00] の（独立した）仕事によって、コンパクト生成三角圏の対象について純移入性を論じることができる。このことは、(非コンパクトな対象も扱う) 準傾理論の発展に大きく寄与している (例えば [MV18], [AH19], [LV20], [Lak20] を参照)。三角圏における純性について詳しくは述べないが、本稿の結果の一つでも、この概念を介して紹介する結果がある。

^{*}ntsutomu@ms.u-tokyo.ac.jp

代数的コンパクト性に基づいた仕事として最も強調されるべきなのは, Ziegler [Zie84] による加群に対するモデル理論的研究であろう. 特に彼は, 直既約な代数的コンパクト加群の同型類が(小さい)集合をなし, さらには自然な位相が入ることを証明した. この位相空間は **Ziegler スペクトラム**と呼ばれる(第2節参照).

一般に無限生成加群を含める場合には, 直既約加群の同型類は有限次元代数上であっても集合を為すとは限らない([Sim05, Theorem 3.1]). この意味で Ziegler スペクトラムは無限生成表現を考える上で理にかなった範囲を提供してくれる. 実際, あるクラスの有限次元多元環に対しては直既約な純移入加群の同型類が分類されている([PP16]). この分類の中で有限生成加群に付け足す必要があるのが, Prüfer 加群, adic 加群, generic 加群と呼ばれるものである. 最後の generic 加群と呼ばれるものは, 非有限生成な直既約加群であって, その End 環上で長さ有限であるものを指し, Crawley-Boevey [CB91] によって導入された. 彼は代数閉体上の有限次元代数の tame 表現型を generic 加群を用いて特徴付けている.

可換環論へ視点を変えてみると, 環の純拡大(純単射な環準同型)を考えることは基本的かつ重要なことである(例えば[HR74], [Hoc77], [FW89], [HH90]を参照). 特に近年 André [And18] によって肯定的に解決された直和因子予想は, 正則局所環 R からの可換環の拡大 $R \subseteq S$ であって S が R 加群として有限生成なものが与えられたとき, これが純拡大であることを示すことと同値であり, André の仕事でもこの観点を念頭に置いていた. その André の論文では任意の可換ネーター局所環 R 上の big Cohen–Macaulay 加群の存在性も示されている(R が体を含む場合は Hochster [Hoc75] による). 純単射が意識される状況下であれば, 純移入加群というクラスに着目した研究が big Cohen–Macaulay (big CM) 加群の理論の周辺に, ある程度存在してもよさそうなものである. しかし実際には(純移入性が暗に機能している場面はあっても), big CM 加群の研究周辺において純移入性を強調した比較的古い文献として挙げることができるのは, Griffith[Gri98] による small CM 加群の存在性に関する論文ぐらいでなかろうか.

筆者の研究の動機になっているのは, Puninski [Pun18] による Ziegler spectrum を用いた無限生成 CM 表現の試みである. 一次元の超曲面の可算 CM 表現型の分類に基づき, A_∞ 型と D_∞ 型の場合に, “直既約な純移入 CM 加群で非有限生成なもの”を, (おそらく学生であった) Los との共著論文 [LP19] と合わせて分類している. これらの研究は, 特別な場合としては上手く行ったのであるが, 理論として発展させようとすると, 非有限生成な直既約純移入加群の CM 加群を扱う理由とも言える結果が不足している. 本稿では, Artin 代数の場合を参考にしながら, この点を補う結果を紹介させて頂きたい.

残念ながら, 筆者がこれらの論文に気づいた時には, Puninski は既に 55 歳の若さで他界されていた(2017 年). 彼の残した研究を, 少しでも前に進めることができれば幸いである.

2 Ziegler スペクトラムと定義可能部分圏

A を任意の環とし, $\text{Mod } A$ で全ての右 A 加群のなす圏を, $\text{mod } A$ で全ての有限表示な右 A 加群のなす圏を表す. また, A の Ziegler スペクトラムを Zg_A で表す. 定義により, これは集合としては直既約な純移入右 A 加群の同型類で構成される. 本稿では, Zg_A の位相は関手圏を使うものを採用する([Pre09, Corollary 10.2.45] 参照). $\text{mod } A$ からアーベル群の圏 Ab への加法的関手のなすアーベル圏を $(\text{mod } A, \text{Ab})$ で表す. 関手 $F \in (\text{mod } A, \text{Ab})$ が有限表示であるとは, $\text{mod } A$ における射 $f : L \rightarrow M$ と $(\text{mod } A, \text{Ab})$ における完全列

$$\text{Hom}_A(M, -) \xrightarrow{\text{Hom}_A(f, -)} \text{Hom}_A(L, -) \rightarrow F \rightarrow 0$$

が存在することをいう. $\text{fp}(\text{mod } A, \text{Ab})$ で有限表示関手のなす $(\text{mod } A, \text{Ab})$ の部分圏を表す. これも自然にアーベル圏になる ([Pre09, Proposition 10.2.4]). 有限表示関手 $F \in \text{fp}(\text{mod } A, \text{Ab})$ が与えられたとき, それを直極限と可換になるように関手 $\vec{F} : \text{Mod } A \rightarrow \text{Ab}$ へと (同型を除いて) 一意的に拡張することができる. 実際には, 有限表示 $\text{Hom}_A(M, -) \rightarrow \text{Hom}_A(L, -) \rightarrow F \rightarrow 0$ が与えられたとき, $N \in \text{Mod } A$ に対して $\vec{F}(N)$ を射 $\text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(L, N)$ の余核で与えればよい. 各 $F \in \text{fp}(\text{mod } A, \text{Ab})$ に対して

$$(F) := \{N \in \text{Zg}_A \mid \vec{F}(N) \neq 0\}$$

と定めると, Ziegler スペクトラム Zg_A の開基底は $\{(F) \mid F \in \text{fp}(\text{mod } A, \text{Ab})\}$ で与えられる. $\vec{F}(N)$ は $N \in \text{Zg}_A$ の代表元を代入していると解釈せよ. 以下でも同様の記法はしばしば用いられる (例えば定理 1 の $\bigoplus_{N \in C} N$ は C の各点の代表元を選んで $\text{Mod } A$ の中で直和を取ったもと解釈されたい).

Ziegler スペクトラムの位相の意味を理解する上で重要な事実の一つに, 加群圏 $\text{Mod } A$ の部分圏との対応がある. 部分圏 $\mathcal{X} \subseteq \text{Mod } A$ が定義可能 (definable) であるとは, \mathcal{X} が $\text{Mod } A$ における無限直積, 直極限, そして純部分群 (pure submodule) について閉じていることをいう. 最後の条件は, $M \in \mathcal{X}$ であって $\text{Mod } A$ における純単射 $L \hookrightarrow M$ が存在したとき, $L \in \mathcal{X}$ が成り立つことを意味する. ここで採用したものは定義可能部分圏の特徴付けであり, もともとはモデル理論の言葉で定義される ([Pre09, Theorem 3.4.7] 参照). さて, 加群 $M \in \text{Mod } A$ が与えられたとき, $\langle M \rangle$ で M を含む最小の定義可能部分圏を表すこととする. 実は任意の定義可能部分圏はこの形で表すことができる ([Pre09, Corollary 5.1.4]). 次の定理は本質的に Ziegler [Zie84] によって示された ([Pre09, Corollary 5.1.6] 参照).

定理 1 Zg_A の閉集合 C に対して $\text{Mod } A$ の定義可能部分圏 $\langle \bigoplus_{N \in C} N \rangle$ を定める対応は, 順序同型写像

$$\{\text{Zg}_A \text{ の閉集合}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Mod } A \text{ の定義可能部分圏}\}$$

を引き起こす. 逆写像は $\mathcal{X} \mapsto \text{Zg}_A(\mathcal{X}) := \{N \in \text{Zg}_A \mid N \in \mathcal{X}\}$ で与えられる.

定義可能部分圏の典型的な例は, 左ネーター環上の移入左加群全体や平坦右加群全体である ([Pre09, Theorems 3.4.24 and 3.4.28] 参照).

3 Balanced big Cohen–Macaulay 加群

R を d 次元の可換ネーター局所環, \mathfrak{m} をその極大イデアルとする. また, M を R 加群とする. R のパラメータ系であって M 正則列になるものが存在するとき, M は **big Cohen–Macaulay** であるという. 用語の復習をすると, R のパラメータ系 (system of parameters) とは, \mathfrak{m} の元の列 $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_d$ であって, 剩余加群 $R/(x_1, \dots, x_d)$ の長さが有限になるものをいう. また, \mathbf{x} が M 正則列 (M -regular sequence) であるとは, 全ての i ($1 \leq i \leq d$) に対して x_i が $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ の非零因子であり ($i = 1$ のときは $(x_1, \dots, x_{i-1})M = 0$ と見なす), さらに $M/(x_1, \dots, x_d)M \neq 0$ が成り立つことである. 最後の零にならないという条件を除いた場合は, \mathbf{x} は弱 M 正則列と呼ばれる.

以降, Cohen–Macaulay を CM と略記する. もし R 加群 M が有限生成かつ big CM であれば, **small CM** と呼ばれる. 第 1 節で述べたように, 任意の可換ネーター局所環 R は big CM 加群を持つことが知られているが, small CM 加群の存在性は未解決である ([Hoc17] 参照). もし R 加群

M に対して R の任意のパラメータ系が M 正則列になつていれば, M は **balanced big CM** であると呼ばれる. Big CM 加群の \mathfrak{m} 進完備化は balanced big CM 加群である ([BH98, Corollary 8.5.3]). したがつて, 任意の可換ネーター局所環 R は balanced big CM 加群を持つ. また, 任意の small CM 加群が balanced big CM であることは基本的である ([Eis95, Proposition 21.9]). Small CM 加群は **maximal CM** とも呼ばれ, これも伝統的な用語であるが, 表現論の文脈では便宜上, maximal CM 加群に零加群を含めることがしばしばある. 本稿ではこの慣習に従い, maximal CM 加群は small CM 加群または零加群を意味するものとする.

Holm [Hol17] に倣つて, R の任意のパラメータ系が弱 M 正則列になつてゐる R 加群 M のことを **weak balanced big CM** と呼ぶ. また, $wbbCM R$ で全ての weak balanced big CM 加群のなす $Mod R$ の部分圏を表す. R が CM 局所環 (すなわち R 加群として small CM) であつて, 双対化複体とみなせる R 加群 (標準加群) を持つという仮定のもとで, [Hol17, Theorem D] の証明は, $wbbCM R$ が直積と直極限と純部分加群で閉じていることを述べている. つまり $wbbCM R$ は $Mod R$ の定義可能部分圏である.

しかし, 定義可能部分圏かどうかということだけに限れば, 特別な仮定が無くても証明できる.

命題 2 R を可換ネーター局所環とする. $wbbCM R$ は $Mod R$ の定義可能部分圏である.

この事実と定理 1, そして Hochster と André による (balanced) big CM 加群の存在性を組み合わせると, 次を導くことができる.

定理 3 任意の可換ネーター局所環は直既約かつ純移入的な balanced big CM 加群を持つ.

この定理は本稿の後半では用いないが, 直既約性に絞つても知られていなかつた事実であると思われ, Ziegler スペクトラムの理論の応用として注目に値するので述べさせて頂いた.

さて, 本稿の後半の目的を具体的にしていこう. CM 局所環上の maximal CM 加群の表現論 (例えば [Yos90], [LW12] を参照) の無限生成版を思い描いてゐる訳であるが, Puninski のやり方では何かが足りないのであった. 一つの課題は [Pun18, Question 10.2] に表れてゐる. 彼の無限生成 CM 加群の定義 (第 4 節参照) では, 幕級数環 $k[[x, y]]$ のような, これ以上ない綺麗な環であつても, 非自明な CM 加群の存在を否定しきれなかつたのである. もしそうなつてしまふと, 特異点の表現論的研究という観点から離れてしまう. これを避けるために, 全ての maximal CM 加群を含む “適切” な無限生成加群のクラス \mathcal{X} を考え, 次の状況を実現したい:

(A) R が正則 $\Leftrightarrow \mathcal{X}$ の全ての直既約な純移入加群が “自然なもの” しか存在しない.

しかし (A) だけでは正則性を測るに留まり, 無限生成を取り出す必要がない. 実際, CM 局所環が正則であることは, 全ての maximal CM 加群が射影的であることと同値であることがよく知られている. もう少し, 表現論的に期待できる無限生成の理論を考えるには, 何をすべきだろうか?

これを説明するには, 古典的な場合を振り返る必要がある. Artin 代数 A とは (非可換) 環 A であつて, その中心 C が環として artinian かつ A が C 加群として有限生成であることをいうのであつた. また, A が有限表現型であるとは, 直既約な有限生成右 A 加群が同型を除いて高々有限個だけ存在することを意味する.

定理 4 A を Artin 代数とするとき, 次の条件は同値である.

- (1) A は有限表現型.
- (2) 任意の右 A 加群は有限生成 A 加群の直和で表される.

(3) 全ての直既約かつ純移入的な右 A 加群は有限生成である.

この定理の証明は Prest の本の [Pre09, §5.3.4] に書かれており, Ziegler スペクトラムの位相的情報が有用に機能している. もし “かつ純移入的” を (3) から除けば, 上の定理は Ringel と太刀川 [RT74] そして Auslander [Aus76] による結果である. 第 1 節でも述べたが, 一般の直既約右 A 加群の同型類は集合をなすとは限らないが, 直既約かつ純移入的な A 加群の同型類は集合をなす. そのため, (3) はかなり範囲を絞ることが出来ていると言える. この事実は大切な系からわかる.

系 5 A を Artin 代数とするとき, 次の条件は同値である.

- (i) A は無限表現型.
- (ii) 直既約かつ純移入的な右 A 加群で非有限生成なものが存在する.

この結果は, 無限表現型を持つ Artin 代数の研究において, 純移入加群というクラスに関心を持たせる動機を与えるものである.

さて, Puninski の試みに残るもう一つの課題は, 上の系に相当する結果が CM 表現には存在しなかったことである. 本稿ではこの課題を解決する結果を報告することを目標とする:

(B) 系 5 の CM 表現版を与えるよ.

次の節では整環上の CM 表現を視野に入れるために, まず非可換環を扱う状況へと移行し, そして (A) について取り組む. (B) についてはその次の節で論じる.

4 平坦余ねじれ加群の分類と Govorov–Lazard 型定理

R を可換ネーター環とする. 環 A に対して環準同型 $R \rightarrow A$ が備わっており, その像が A の中に含まれ, かつ A が R 加群として有限生成であるとき, A は Noether R 代数であるという.

R を CM 環 (つまり, R の全ての極大イデアル \mathfrak{m} に対して局所化 $R_{\mathfrak{m}}$ が CM 局所環), A を Noether R 代数とする. R の全ての極大イデアル \mathfrak{m} に対して局所化 $A_{\mathfrak{m}} = A \otimes_R R_{\mathfrak{m}}$ が $R_{\mathfrak{m}}$ 加群として maximal CM であるとき, A を R 整環 (R -order) と呼ぶ ([Aus78, Aus86, CR81, IW14] 参照). A が R 整環であるとき, 有限生成 A 加群 M が maximal CM であるとは, R の全ての極大イデアル \mathfrak{m} に対して, $M_{\mathfrak{m}}$ が $R_{\mathfrak{m}}$ 加群として maximal CM であることで定義する. また, 全ての maximal CM 加群のなす $\text{Mod } A$ の部分圏を $\text{CM } A$ で表す. R が局所環であって A 加群 M が R 加群として small CM であるときは, M を small CM A 加群と呼ぶ.

可換ネーター局所環 (R, \mathfrak{m}) 上の加群 M に対して M の深さ (depth) は次で定義される.

$$\text{depth}_R M := \inf\{i \mid \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M) \neq 0\}.$$

ただし, $\{i \mid \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M) \neq 0\} = \emptyset$ の場合は $\text{depth}_R M = \infty$ と解釈する. 有限生成加群に対する正則列と深さのよく知られた関係 ([Mat89, Theorem 16.7]) によって次の等式が成り立つ:

$$\text{CM } A = \{M \in \text{mod } A \mid \text{depth}_{R_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \geq \dim R_{\mathfrak{m}} \ \forall \mathfrak{m} \in \text{Max } R\}.$$

ここで $\dim R_{\mathfrak{m}}$ は $R_{\mathfrak{m}}$ の Krull 次元を, $\text{Max } R$ で R の全ての極大イデアルの集合を表す.

我々の目的のために次の用語を導入しよう.

定義 6 R を CM 環, A を R 整環とする. A の右 A 加群 M が $\operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \geq \dim R_{\mathfrak{p}}$ を R の全ての素イデアルに対して満たすとき, M を large CM A 加群と呼ぶ. 全ての large CM A 加群のなす $\operatorname{Mod} A$ の部分圏を $\operatorname{LCM} A$ で表す.

有限生成加群に対する深さの基本的事実 ([BH98, Proposition 2.1.3(b)]) から, 次の等式が従う:

$$\operatorname{CM} A = \operatorname{mod} A \cap \operatorname{LCM} A.$$

さらに, 一般の加群に対する深さの性質を丁寧に考察すると, 次を示すことができる.

命題 7 R を CM 環, A を R 整環とする. $\operatorname{LCM} A$ は $\operatorname{Mod} A$ の定義可能部分圏である.

上の命題については, R が CM 環であることや A が R 整環という仮定は本質的ではない. 特に, 任意の可換ネーター環 R に対して $\operatorname{LCM} R := \{M \in \operatorname{Mod} R \mid \operatorname{depth}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \geq \dim R_{\mathfrak{p}} \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R\}$ と定めると, $\operatorname{LCM} R$ は $\operatorname{Mod} R$ の定義可能部分圏になる. また, R が局所環である場合に, $\operatorname{wbbCM} R \subseteq \operatorname{LCM} R$ が成り立つ. 等号が成り立つ特徴づけも与えられるが, ここでは割愛する. 例えば R が CM 局所環であれば十分である. また, R が一次元であっても等号が成立する. 実は, Puninski が CM 加群とみなした定義可能部分圏は $\mathcal{C} := \{M \in \operatorname{Mod} R \mid \operatorname{depth}_R M \geq \dim R\}$ であり, Krull 次元が 1 以下ではこのクラスも $\operatorname{wbbCM} R$ も $\operatorname{LCM} R$ も全て一致することが可換環論の基本的な議論で確認ができる. 2 次元以上になると, 例えば高さ 1 の素イデアル \mathfrak{p} に対して移入包絡 $E_R(R/\mathfrak{p})$ が \mathcal{C} に入ってしまうので, \mathcal{C} は大きすぎる印象がある. Puninski と Holm の仕事に動機付けられ, $\operatorname{wbbCM} R$ と比較しながら, \mathcal{C} について調べている論文もある ([Bir20]).

話をもとに戻そう. 命題 7 は定理 1 によって A の Ziegler スペクトラム Zg_A の閉集合 $\{M \in \operatorname{Zg}_A \mid M \in \operatorname{LCM} A\}$ を与える. この閉集合を $\operatorname{Zg}_A(\operatorname{LCM})$ で表そう. R 整環 A に対して包含関係 $\operatorname{Flat} A \subseteq \operatorname{LCM} A$ を確認することは難しくない. また, $\operatorname{Flat} A$ も $\operatorname{Mod} A$ の定義可能部分圏なので, 定理 1 によって閉集合 $\operatorname{Zg}_A(\operatorname{Flat}) := \{M \in \operatorname{Zg}_A \mid M \in \operatorname{LCM} A\}$ が与えられる. さらにこの定理 1 の主張から, 包含関係

$$\operatorname{Zg}_A(\operatorname{Flat}) \subseteq \operatorname{Zg}_A(\operatorname{LCM})$$

を得る. この左辺が完全に分類できることを説明しよう.

環 A 上の加群 M が余ねじれ(cotorsion)であるとは, 全ての平坦 A 加群 F に対して $\operatorname{Ext}_A^1(F, M) = 0$ が成り立つことで定義される. Enochs [Eno84] は平坦余ねじれ加群(flat cotorsion module)の構造定理を任意の可換ネーター環上で与えている. 筆者と神田遼氏との共同研究 [KN21] では, この構造定理を任意のネーター代数へと拡張した. この帰結として, 直既約な平坦余ねじれ加群の分類が得られる. また, ネーター代数上では加群が平坦かつ余ねじれであることと平坦かつ純移入的であることは同値であることに留意されたい ([EJ00, Lemma 5.3.23], [Xu96, Lemma 3.2.3]). したがって, A が R 整環であるときに $\operatorname{Zg}_A(\operatorname{Flat})$ は直既約な平坦余ねじれ加群の同型類のなす集合である.

神田氏との分類結果を正確に述べるために準備をしよう. R を可換ネーター環, A を Noether R 代数とし, その構造を与える写像を $\varphi: R \rightarrow A$ で表す. A の真の(両側)イデアル P が, 任意の元 $a, b \in A$ に対して条件 $aAb \subseteq P$ が $a \in P$ または $b \in P$ を導くとき, P は素イデアルであると呼ばれる. $\operatorname{Spec} A$ で A の素イデアル全体の集合を表す. このとき, 次の全単射の存在が知られている:

$$\operatorname{Spec} A \xrightarrow{\sim} \{ \text{直既約右移入 } A \text{ 加群} \}/\cong$$

この対応は $P \in \text{Spec } A$ に対して, A/P の移入包絡 $E_A(A/P)$ の直既約因子 $I_A(P)$ を対応させる
ことで与えられる. さて, $P \in \text{Spec } A$ に対して

$$T_A(P) := \text{Hom}_R(I_{A^{\text{op}}}(P), E_R(R/\mathfrak{p}))$$

と定める. ただし, A^{op} は A の反転環 (opposite ring) を表し, $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(P)$ である. \mathfrak{p} は R の素
イデアルになっていることが確認できる.

定理 8 ([KN21, Corollary 6.2]) R を可換ネーター環, A を Noether R 代数とする. 対応 $P \mapsto$
 $T_A(P)$ は次の全単射を引き起こす:

$$\text{Spec } A \xrightarrow{\sim} \{ \text{直既約平坦余ねじれ右 } A \text{ 加群} \}/\cong$$

例 9 ([KN21, Example 6.3]) A を可換ネーター環 R 上の 2×2 下三角行列環とする. つまり

$$A = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}.$$

各 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ に対して

$$P_1(\mathfrak{p}) := \begin{pmatrix} \mathfrak{p} & 0 \\ R & R \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P_2(\mathfrak{p}) := \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & \mathfrak{p} \end{pmatrix}$$

と定める. このとき

$$\text{Spec } A = \{P_1(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec } R\} \sqcup \{P_2(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec } R\}$$

が成り立つ. さらに,

$$T_A(P_1(\mathfrak{p})) = \left(\widehat{R}_{\mathfrak{p}} \quad 0 \right) \quad \text{and} \quad T_A(P_2(\mathfrak{p})) = \left(\widehat{R}_{\mathfrak{p}} \quad \widehat{R}_{\mathfrak{p}} \right)$$

と表すことができる. ただし $\widehat{R}_{\mathfrak{p}} := \varprojlim_{n \geq 1} R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}}$.

系 10 R を CM 環, A を R 整環とする. 自然な全単射

$$\text{Zg}_A(\text{Flat}) \cong \{T_A(P) \mid P \in \text{Spec } A\}$$

が存在する.

この系によって, 閉集合の包含関係 $\text{Zg}_A(\text{Flat}) \subseteq \text{Zg}_A(\text{LCM})$ の左辺は理解できたことになる. この等号が成り立つときを特徴づけよう. R 整環が**非特異** (non-singular) であるとは R の全ての極大イデアル \mathfrak{m} に対して, $A_{\mathfrak{m}}$ の大域次元が $\dim R_{\mathfrak{m}}$ と一致することで定義される.

定理 11 ([Nak21b]) R を Krull 次元有限な CM 環で標準加群を持つとし, A を R 整環とする.

(1) M を A 加群とするとき, 次が成り立つ:

M が large CMA 加群 $\Leftrightarrow M$ は maximal CMA 加群の直極限.

(2) A が非特異 $\Leftrightarrow \text{Flat } A = \text{LCM } A$.

$R = A$ で R が標準加群を持つ CM 局所環の場合には、(1) は Holm [Hol17, Theorem B] が証明している。我々の設定でも証明の大きな方針はそれほど変わらず、 ω_R を R の標準加群としたとき、 A の $\omega_A := \text{Hom}_R(A, \omega_R)$ による自明拡大環と Gorenstein 平坦加群の概念を介することが鍵である。しかし、実際には同じように進まない部分が幾つかあり、神田氏との共同研究 [KN21] で整理された平坦余ねじれ加群に対する事実などを丁寧に組み合わせる必要がある。また、 R が CM 局所環の場合には $\text{wbbCM } R = \text{LCM } R$ が成り立つため、 $R = A$ で R が標準加群を持つ CM 局所環の場合には、(2) も本質的に Holm [Hol17, Proposition 4.9] が示している。

(1) の事実を記号的に表せば、 $\varinjlim \text{CM } A = \text{LCM } A$ と書ける。これは Govorov–Lazard 型の定理が成り立っていると言える。Govorov–Lazard の定理は、 $\varinjlim \text{proj } A = \text{Flat } A$ を主張するものであり、他の同様の事実としては $\varinjlim \text{mod } A = \text{Mod } A$ が挙げられる。

(2) は (1) を用いながら次のように導かれる。まず A が非特異である場合は、 $\text{proj } A = \text{CM } A$ が成り立つ ([IW14, Proposition 2.17])。従って (1) と Govorov–Lazard の定理により $\text{Flat } A = \text{LCM } A$ を得る。逆に $\text{Flat } A = \text{LCM } A$ であれば、 $\text{mod } A \cap \text{Flat } A = \text{proj } A$ かつ $\text{mod } A \cap \text{LCM } A = \text{CM } A$ から $\text{proj } A = \text{CM } A$ を得るので、 A は非特異である ([IW14, Proposition 2.17])。

系 12 R を Krull 次元有限な CM 環で標準加群を持つとし、 A を R 整環とする。このとき次が成り立つ：

$$A \text{ が非特異} \Leftrightarrow \text{Zg}_A(\text{Flat}) = \text{Zg}_A(\text{LCM}).$$

もし $R = A$ であれば、 A が非特異であることは R が正則であることを意味する。したがって、第 3 節で (A) として述べた課題は、系 10 と系 12 によって $\mathcal{X} = \text{LCM } A$ とすることで自然に解決されることが分かる。

5 無限 CM 表現型と直既約純移入 balanced big CM 加群

この節では (R, \mathfrak{m}) を完備な Gorenstein 局所環とする（つまり \mathfrak{m} 進完備な可換ネーター局所環 R であって R 加群としての移入次元が有限になるもの）。Gorenstein 局所環は CM 局所環である ([Mat89, Theorem 18.1])。 R 整環 A が **Gorenstein** であるとは、 $\text{Hom}_R(A, R)$ が右 A 加群として射影的であることで定義される。この条件は A が Iwanaga–Gorenstein であることを導く ([IW14, Lemma 2.1] 参照)，逆は一般には成り立たない。 R を完備にしておく理由は Krull–Schmidt 性を含めて幾つかあり、特に Matlis 双対によって全ての有限生成 A 加群が純移入的になることは、我々の観点としては重要である。

Gorenstein R 整環 A 上の右 A 加群 M が **Gorenstein 射影加群** であるとは、 $\text{Ext}_A^i(M, P) = 0$ が全ての射影 A 加群 P と $i \geq 1$ に対して成り立つことで特徴付けられる ([EJ11, Corollary 11.5.3])。Gorenstein 射影加群のなす $\text{Mod } A$ の部分圏を $\text{GProj } A$ で表す。 $\text{GProj } A$ は Frobenius 圈であって、射影的かつ移入的対象は射影 A 加群で与えられる（例えば [Pér16, Corollary 11.2.6] または [Che11, Proposition 3.1 and p. 207] を参照）。したがって、差を取って射影 A 加群を経由する任意の 2 つの射を同一視することで安定圏 $\underline{\text{GProj }} A$ が得られ、これは三角圏の構造を自然に持つ ([Hap88, §2])。 $\underline{\text{GProj }} A$ の対象は $\text{GProj } A$ と同じものである。また、 $\underline{\text{GProj }} A$ はコンパクト生成三角圏になつており、そのコンパクト対象は有限生成な Gorenstein 射影 A 加群で与えられる（例えば [Che11, Theorem 4.1] 参照）。Beligiannis [Bel00] と Krause [Kra00] の仕事によって、コンパクト生成三角圏に対しても（直既約な純移入対象によって構成される）Ziegler スペクトラムを定義することができる。これも小さい集合をなし、関手圏を通して自然な位相が入る。

これらの事実および Rosanna Laking 氏 ([Nak21a] の appendix を執筆) の結果を用いながら, 以下の定理を証明した. Gorenstein R 整環 A に対して, 直既約な small CM A 加群が同型を除いて高々有限個存在するとき, A は**有限 CM 表現型**を持つという.

定理 13 ([Nak21a]) A を Gorenstein R 整環とする. 次が同値である.

- (1) A は有限 CM 表現型を持つ.
- (2) 全ての Gorenstein 射影 A 加群は有限生成 Gorenstein 射影加群の直極限として表せる.
- (3) 安定圏 $\underline{\text{GProj}} A$ の全ての直既約な純移入的対象はコンパクトである.

(1) と (2) の同値性は $R = A$ の場合を扱っている Beligiannis [Bel11, Theorem 4.20] の部分的な一般化である. また, (1) と (2) の同値性は Psaroudakis と Rump の最近の結果 [PR22, Corollary 5.14] からも導くことができる. 彼らの結果はかなり一般的な視点から展開した理論の帰結であり, Rump のもう一つの仕事 [Rum21] に本質的に依存していることに言及しておく.

もう少し既存の結果に言及しておこう. Chen は [Che08, Main theorem] Iwanaga–Gorenstein Artin 代数に対して, 直既約な有限生成 Gorenstein 射影加群が同型を除いて高々有限個であることと, 条件 (2) が同値であることを示している. 我々の R を artinian にした場合, Gorenstein R 整環は準 Frobenius R 代数(ネーターかつ自己移入的)になる. この場合の定理 13 は, 定理 4 と Krause [Kra00, Proposition 1.16] から導くことができる. R が artinian でない場合は, 定理 13 の (3) は新しい特徴づけであり, これが一番重要な点である. 実際, 我々は次の同値性を得る(無限 CM 表現型は有限 CM 表現型の否定を意味する):

A は無限 CM 表現型を持つ $\Leftrightarrow \underline{\text{GProj}} A$ に直既約な純移入的対象で非コンパクトなものが存在.

系 5 の CM 版を与えるためには, あと何が足りないのであろうか. 実はこの足りない部分は割と大きい. 問題の本質は, 無限生成射影 A 加群が, 一般には加群としては純移入的にならないことである. これが原因で安定圏 $\underline{\text{GProj}} A$ から加群圏 $\text{Mod } A$ に直接戻ってくることがほぼ絶望的になる. しかし直接戻ってこれないとはいえ, $\underline{\text{GProj}} A$ を平坦余ねじれ加群に対応する別の安定圏に圏同値で移すことが可能である ([CET21] 参照). ここで状況は良くなるが, そこから最後まで議論を詰めるのは(筆者の認識では) かなり大変である. これ以上は技術的になってしまふので, 本稿では説明を省略し, 以下の結果に辿りつくことが可能であることを報告するに留める. A 上の加群 M が R 加群として balanced big CM であるとき, M を balanced big CM A 加群と呼ぶ.

定理 14 ([Nak21c]) A を Gorenstein R 整環とする. このとき次が同値である.

1. A は有限 CM 表現型を持つ.
2. 全ての直既約な純移入 balanced big CM A 加群が有限生成である.

定理 13 はこの結果に至るために必要であったことに言及しておく. 定理 14 から直ちに次が従う:

A は無限 CM 表現型を持つ \Leftrightarrow 直既約な純移入 balanced big CM 加群で非有限生成なものが存在.

これで第 3 節で (B) として述べた課題に対する一つの回答を与えたといえる.

Gorenstein 整環は自己移入的なアルティン代数の拡張であったが, 読者によつては遺伝的(大域次元が 1) なアルティン代数の拡張はどうなのかなと思うかもしれない. 実際には, 環の大域次元が有限の場合は Gorenstein 射影加群が射影加群のみになるため, 安定圏は自明になつてしまつとい

う事情がある。したがって、別の角度からの取り組みが必要になる。 A を R 整環するとき、 A が非孤立特異点を持つとは、 R の極大イデアル \mathfrak{m} 以外の素イデアル $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ が存在して、 $A_{\mathfrak{p}}$ の大域次元が $\dim R_{\mathfrak{p}}$ より真に大きくなることで定義される。

定理 15 A を大域次元有限の R 整環とする。もし A が非孤立特異点を持つば、直既約な純移入 balanced big Cohen–Macaulay A 加群で非有限生成なものが存在する。

この定理に関しては具体例を見てみよう。 A が非孤立特異点を持つときは、 A は無限 CM 表現型になることに注意されたい ([Aus86, §10, Theorem], [Yos90, Theorem 4.22] 参照)。

例 16 k を体とし、 R を一変数の幕級数環 $k[[x]]$ とする。 Q で R の商体を表し、 R 整環

$$A := \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}.$$

を考える。 $\dim Q = 0$ であるが $A_{(0)} = A \otimes_R Q$ の大域次元は 1 なので、 A は非孤立特異点を持つ。非射影的な直既約 small CM 右 A 加群のリストは、同型を除いて

$$\begin{pmatrix} R & (x^n) \\ R & (x^n) \end{pmatrix}, \quad \frac{\begin{pmatrix} R & R \\ R & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} R & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix}}$$

で与えられる ($n \geq 1$)。直既約な純移入的 balanced big CMA 加群で非有限生成なものは、例えば $\begin{pmatrix} Q & (x^n) \\ Q & (x^n) \end{pmatrix}$ ($n \geq 1$) で与えられ、これらは全て平坦 (余ねじれ) ではない。つまり、 $Zg_A(\text{LCM}) \setminus Zg_A(\text{Flat})$ の点になっている。

上のリストで $Zg_A(\text{LCM}) \setminus Zg_A(\text{Flat})$ の balanced big CM の点が全て尽くされているかは、まだわかっていない。それでも上の例は、Puninski の研究を非可換化したことで自然に見つかるものとして意義がある。今後は定理 14 の対偶に関する具体例の構成が優先的な課題となる。

定理 14 によって一応は、Puninski の残した研究に対する理論的裏付けを部分的に与えることができた。彼と共に著者のさらなる考察は、Ringel [Rin00, Rin11] が特定の有限次元代数に対して導入した “Auslander–Reiten quilt” と呼ばれる概念へと向けられている ([Pun18], [LP19])。Auslander–Reiten quilt は、直既約かつ純移入的な非有限生成加群を加えながら Auslander–Reiten quiver の連結成分同士の関係を理解しやすいように編み込むものであり、無限生成表現論の興味深い方向性と言える。Puninski 達は Auslander–Reiten quilt の無限生成 CM 表現における類似物を具体的な状況で構成しており、これを Ringel の場合と統一した理論として解釈できるようにすることは、筆者にとって今後の課題の一つである。

謝辞

第 66 回代数学シンポジウムでの講演の機会を与えてくださった責任者の先生方に、心より感謝申し上げます。本研究の一部は JSPS 特別研究員奨励費 JP20J01865 の助成を受けています。

参考文献

- [AH19] Lidia Angeleri Hügel. Silting objects. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 51(4):658–690, 2019.

- [And18] Yves André. La conjecture du facteur direct. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 127:71–93, 2018.
- [Aus76] Maurice Auslander. Large modules over artin algebras. In *Algebra, topology, and category theory: A collection of papers in honor of Samuel Eilenberg*, pages 1–17. Academic Press, New York, 1976.
- [Aus78] Maurice Auslander. Functors and morphisms determined by objects. In *Representation theory of algebras (Proc. Conf., Temple Univ., Philadelphia, Pa., 1976)*, volume 37 of *Lecture Notes in Pure Appl. Math.*, pages 1–244, 1978.
- [Aus86] Maurice Auslander. Isolated singularities and existence of almost split sequences. In *Representation theory II (Ottawa, Ont., 1984)*, volume 1178 of *Lecture Notes in Math.*, pages 194–242. Springer, Berlin, 1986.
- [Bel00] Apostolos Beligiannis. The homological theory of contravariantly finite subcategories: Auslander-Buchweitz contexts, Gorenstein categories and (co-)stabilization. *Comm. Algebra*, 28(10):4547–4596, 2000.
- [Bel11] Apostolos Beligiannis. On algebras of finite Cohen-Macaulay type. *Adv. Math.*, 226(2), 2011.
- [BH98] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, revised edition, 1998.
- [Bir20] Isaac Bird. Two definable subcategories of maximal Cohen-Macaulay modules. *J. Pure Appl. Algebra*, 224(6):106250, 22 pages, 2020.
- [CB91] William Crawley-Boevey. Tame algebras and generic modules. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 63(2):241–265, 1991.
- [CET21] Lars Winther Christensen, Sergio Estrada, and Peder Thompson. The stable category of Gorenstein flat sheaves on a noetherian scheme. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 149(2):525–538, 2021.
- [Che08] Xiao-Wu Chen. An Auslander-type result for Gorenstein-projective modules. *Adv. Math.*, 218(6):2043–2050, 2008.
- [Che11] Xiao-Wu Chen. Relative singularity categories and Gorenstein-projective modules. *Math. Nachr.*, 284(2-3):199–212, 2011.
- [CR81] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Methods of representation theory: With applications to finite groups and orders. Volume I*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

- [EJ00] Edgar E. Enochs and Overtoun M. G. Jenda. *Relative homological algebra*, volume 30 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.
- [EJ11] Edgar E. Enochs and Overtoun M. G. Jenda. *Relative homological algebra: Volume 1*, volume 30 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, second revised and extended edition, 2011.
- [Eno84] Edgar Enochs. Flat covers and flat cotorsion modules. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 92(2):179–184, 1984.
- [FW89] Richard Fedder and Kei-ichi Watanabe. A characterization of F -regularity in terms of F -purity. In *Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987)*, volume 15 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 227–245. Springer, New York, 1989.
- [Gri98] Phillip Griffith. On the splitting of big Cohen-Macaulay modules. *J. Pure Appl. Algebra*, 128(3):251–279, 1998.
- [GT12] Rüdiger Göbel and Jan Trlifaj. *Approximations and endomorphism algebras of modules: Volume 1 – Approximations*, volume 41 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, second revised and extended edition, 2012.
- [Hap88] Dieter Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [HH90] Melvin Hochster and Craig Huneke. Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(1):31–116, 1990.
- [Hoc75] Melvin Hochster. *Topics in the homological theory of modules over commutative rings*. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 24. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.
- [Hoc77] Melvin Hochster. Cyclic purity versus purity in excellent Noetherian rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 231(2):463–488, 1977.
- [Hoc17] Melvin Hochster. Homological conjectures and \lim Cohen-Macaulay sequences. In *Homological and computational methods in commutative algebra*, volume 20 of *Springer INdAM Ser.*, pages 173–197. Springer, Cham, 2017.
- [Hol17] Henrik Holm. The structure of balanced big Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings. *Glasg. Math. J.*, 59(3):549–561, 2017.
- [HR74] Melvin Hochster and Joel L. Roberts. Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. *Advances in Math.*, 13:115–175, 1974.
- [HZ00] Birge Huisgen-Zimmermann. Purity, algebraic compactness, direct sum decompositions, and representation type. In *Infinite length modules (Bielefeld, 1998)*, Trends Math., pages 331–367. Birkhäuser, Basel, 2000.

- [IW14] Osamu Iyama and Michael Wemyss. Maximal modifications and Auslander–Reiten duality for non-isolated singularities. *Invent. Math.*, 197(3):521–586, 2014.
- [KN21] Ryo Kanda and Tsutomu Nakamura. Flat cotorsion modules over Noether algebras. 2021. arXiv:2108.03153.
- [Kra00] Henning Krause. Smashing subcategories and the telescope conjecture—an algebraic approach. *Invent. Math.*, 139(1):99–133, 2000.
- [Lak20] Rosanna Laking. Purity in compactly generated derivators and t-structures with Grothendieck hearts. *Math. Z.*, 295(3-4):1615–1641, 2020.
- [LP19] Inna Los and Gena Puninski. The Ziegler spectrum of the D -infinity plane singularity. *Colloq. Math.*, 157(1):35–63, 2019.
- [LV20] Rosanna Laking and Jorge Vitória. Definability and approximations in triangulated categories. *Pacific J. Math.*, 306(2):557–586, 2020.
- [LW12] Graham J. Leuschke and Roger Wiegand. *Cohen–Macaulay representations*, volume 181 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, translated from the Japanese by M. Reid, second edition, 1989.
- [MV18] Frederik Marks and Jorge Vitória. Silting and cosilting classes in derived categories. *J. Algebra*, 501:526–544, 2018.
- [Nak21a] Tsutomu Nakamura. Indecomposable pure-injective objects in stable categories of Gorenstein-projective modules over Gorenstein orders (with an appendix by Rosanna Laking), in preparation.
- [Nak21b] Tsutomu Nakamura. Large Cohen–Macaulay modules and weak balanced big Cohen–Macaulay modules, in preparation.
- [Nak21c] Tsutomu Nakamura. Large Cohen–Macaulay modules and Ziegler spectra of stable categories, in preparation.
- [Pér16] Marco A. Pérez. *Introduction to Abelian model structures and Gorenstein homological dimensions*. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [PP16] Gena Puninski and Mike Prest. Ringel’s conjecture for domestic string algebras. *Math. Z.*, 282(1-2):61–77, 2016.
- [PR22] Chrysostomos Psaroudakis and Wolfgang Rump. Exact categories, big Cohen–Macaulay modules and finite representation type. *J. Pure Appl. Algebra*, 226(4):106891, 30 pages, 2022.

- [Pre09] Mike Prest. *Purity, spectra and localisation*, volume 121 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [Pun18] Gena Puninski. The Ziegler spectrum and Ringel’s quilt of the A -infinity plane curve singularity. *Algebr. Represent. Theory*, 21(2):419–446, 2018.
- [Rin00] Claus Michael Ringel. Infinite length modules. Some examples as introduction. In *Infinite length modules (Bielefeld, 1998)*, Trends Math., pages 1–73. Birkhäuser, Basel, 2000.
- [Rin11] Claus Michael Ringel. The minimal representation-infinite algebras which are special biserial. In *Representations of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 501–560. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.
- [RT74] Claus Michael Ringel and Hiroyuki Tachikawa. QF – 3 rings. *J. Reine Angew. Math.*, 272:49–72, 1974.
- [Rum21] Wolfgang Rump. Exact krull–schmidt categories with finitely many indecomposables. *Math. Z.*, 2021. <https://doi.org/10.1007/s00209-021-02710-0>.
- [Sim05] Daniel Simson. On Corner type endo-wild algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 202(1–3):118–132, 2005.
- [War69] R. B. Warfield, Jr. Purity and algebraic compactness for modules. *Pacific J. Math.*, 28(3):699–719, 1969.
- [Xu96] Jinzhong Xu. *Flat covers of modules*, volume 1634 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Yos90] Yuji Yoshino. *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, volume 146 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Zie84] Martin Ziegler. Model theory of modules. *Ann. Pure Appl. Logic*, 26(2):149–213, 1984.

周期積分の満たす微分方程式と K3 ラムダ関数

細野 忍 (学習院大学)

1 はじめに

楕円曲線のアーベル微分を 1 サイクルで積分したものが (楕円曲線の) 周期積分であるが, 楕円曲線の族を考えると, 周期積分は族のパラメーター空間上の多価関数となる. 2 つの独立な整サイクルに関する周期積分は周期行列を定めて, またそれらの比は上半平面に値を取る周期写像を定める. 従って周期写像はパラメーター空間上の多価関数となるが, その多価性は上半平面の分割として”綺麗に”表現される. ルジャンドル族と呼ばれる特別な (或いは自然な) 族から得られる上半平面の分割は, 上半平面のモジュラー関数であるラムダ関数を定めるが, これについてはテータ関数を用いた非常に具体的な表示が古くから知られている.

一般に, 多価関数の持つ多価性を (適当な領域を見つけてその) 領域の分割によって実現することは, 「一意化問題」などと呼ばれている. 多価関数を多価写像に置き換えて考えることは自然な拡張と考えられるが, 吉田正章氏の著書 [16] では, ルジャンドル族の拡張である K3 曲面の族について, その周期写像の多価性とその一意化問題に関する吉田正章氏と共同研究者らによる一連の美しい成果がまとめられている. このような設定では, 古典的な楕円ラムダ関数は, K3 曲面の周期領域上に定義される保型関数に拡張されるがこれを標題では「K3 ラムダ関数」と呼んだ. しかしながら, 文献 [16] とその参考文献においては, K3 ラムダ関数の定義と存在 (あるいは特徴付け) は示されているのであるが, その具体的な表示は与えられていなかった.

講演では, 1990 年代に筆者らが [7, 8] において別の動機から整備した周期積分が満たす微分方程式と解の構成法をこの問題に当てはめることによって, 「K3 ラムダ関数の具体的な表示」を与えることが出来たので, その結果を報告した. 詳細な計算は, 既に発表済みの論文 [9, 10] に委ねることにして, 以下ではその結果を中心にして概略をまとめることにする.

2 ルジャンドル族と楕円ラムダ関数

2.1 ルジャンドル族

射影直線 \mathbb{P}^1 の 4 点で分岐する 2 重被覆は楕円曲線を定める. 4 点のアフィン座標を a_1, a_2, a_3, a_4 を表すとき, 2 重被覆は

$$y^2 = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)$$

によって表される. ここで 4 点が \mathbb{P}^1 上を動くとすると, 4 点の配置空間 \mathcal{M}_4 上に楕円曲線の族が得られ, これをルジャンドル族と呼んでいる. 4 点配置の空間 \mathcal{M}_4 は, 非調和比

$$x = \frac{(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)} = \frac{[a_2 a_3][a_1 a_4]}{[a_1 a_3][a_2 a_4]}, \quad ([a_i a_j] := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_i & a_j \end{vmatrix}) \quad (2.1)$$

をアフィン座標とする射影直線 \mathbb{P}^1 に自然にコンパクト化されるので、ルジャンドル族は \mathbb{P}^1 上の族である。族の $x \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上のファイバーを E_x と表し、さらに起点 $x_o \in \mathbb{P}^1$ を定めるとき、この族の周期積分は

$$\int_{\gamma} \frac{dx}{y} = \int_{\gamma} \frac{dx}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}} \quad (\gamma \in H_1(E_{x_o}, \mathbb{Z}))$$

と表され、 \mathbb{P}^1 上の多価関数 $w_{\gamma}(x)$ を定める。ルジャンドル族は、古くからこの周期積分の満たす微分方程式と共に調べられて多くの古典的な結果が知られている。例えば、周期積分は微分方程式

$$\{\theta_x^2 - x(\theta_x + \frac{1}{2})^2\}w(x) = 0, \quad (\theta_x := x \frac{d}{dx}) \quad (2.2)$$

の整解(モノドロミーが整となるような解)として特徴づけられ、それらの比として周期写像 $\tau = \frac{w_1(x)}{w_0(x)}$ が定められる。周期写像は周期領域としての上半平面 \mathbb{H}_+ への写像

$$\mathcal{P} : \mathcal{M}_4 \rightarrow \mathbb{H}_+, \quad x \mapsto [w_0(x), w_1(x)] = [1, \tau(x)] \quad (2.3)$$

を定める。さらに、周期写像の多価性は上半平面への主合同部分群 $\Gamma(2) \subset \Gamma := \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ の作用として表現されて、多価性が \mathbb{H}_+ の分割によって表現されることになる。このことから、関係式 $\tau = \frac{w_1(x)}{w_0(x)}$ の逆関係 $x = \lambda(\tau)$ は \mathbb{H}_+ 上の $\Gamma(2)$ に関するモジュラー関数を定めることになる。

2.2 構円ラムダ関数とその性質

上半平面 \mathbb{H}_+ 上の正則関数としてテータ関数が存在する：

$$\theta_2(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(m+\frac{1}{2})^2}, \quad \theta_3(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}, \quad \theta_4(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \quad (q = e^{\pi i \tau}).$$

これらの関数のべき $\theta_2(\tau)^4, \theta_3(\tau)^4, \theta_4(\tau)^4$ は $\Gamma(2)$ に関してウエイトが 2 のモジュラー形式となり、 $\Gamma(2)$ に関するモジュラー形式の成す環 $M_{\Gamma(2)}$ を生成する。 $M_{\Gamma(2)}$ は関係式 $\theta_2(\tau)^4 - \theta_3(\tau)^4 + \theta_4(\tau)^4 = 0$ の下で次数付き環となっていて、これに対応する射影多様体が \mathcal{M}_4 のコンパクト化 \mathbb{P}^1 に一致している。

構円ラムダ関数について次の性質が古典的に知られている；

1. $\lambda(\tau)$ はテータ関数で表されて $\tau = i\infty$ において次の q 展開を持つ

$$\lambda(t) = \frac{\theta_2(\tau)^4}{\theta_3(\tau)^4} = 16q - 128q^2 + 704q^3 - 3072q^4 + \dots \quad (2.4)$$

2. 3 次の対称群への同型 $\Gamma/\Gamma(2) \simeq S_3$ が成り立ち、 $g \in \Gamma$ の作用 $\tau \mapsto g \cdot \tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ のもとで

$$\begin{array}{ccccccc} e & (12) & (23) & (23)(12) & (12)(23) & (13) \\ \lambda & \frac{1}{\lambda} & \frac{\lambda}{\lambda-1} & 1-\frac{1}{\lambda} & \frac{1}{1-\lambda} & 1-\lambda \end{array} \quad (2.5)$$

のように変換する。ここで (ij) は互換を表し、 $\Gamma/\Gamma(2) \simeq S_3$ のもとで対応する S_3 の元を表す。

3. 微分方程式 (2.2) の正則解である超幾何級数 $w_0(x)$ に $x = \lambda(\tau)$ を代入すると

$$w_0(\lambda(\tau))^2 = \theta_3(\tau)^4, \quad \left(w_0(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})^2} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})^2}{\Gamma(n+1)} x^n \right) \quad (2.6)$$

が成り立つ。

注意 2.1. (1) 性質 2 では, 対称群 S_3 が $\Gamma/\Gamma(2)$ への同型を通して現れている. 一方で, 非調和比 $x = \frac{(a_2-a_3)(a_1-a_4)}{(a_1-a_3)(a_2-a_4)}$ へ 4 点の置換として S_4 が作用するが, 固定化群 ($\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) による剩余として S_3 が現れて, $x = \lambda(\tau)$ の関係の下で (2.5) と同じ作用が得られる. (2) 性質 3 は, 周期積分 $w_0(x)$ がホッジ直線束の切断を表していることに由来している.

ルジャンドル族を K3 曲面の族に拡張して, 上の 3 つの性質 1 ~ 3 について対応する具体的な表式を書き出すことが 90 年代に吉田正章氏を中心とする共同研究者たちによって試みられた. 詳細な研究がなされた (文献 [16] 参照) が, 明示的な表示にまでは至っていなかった. 微分方程式の変数空間のコンパクト化とその特異点解消および局所解の構成に関する部分が不足していたためであるように思われる. 一方で, 同じく 90 年代にミラー対称性の研究から, 微分方程式系の変数空間のコンパクト化とその特異点解消と局所解の構成に関する研究が深められた (文献 [7, 8] 参照). 当時から 20 年以上が経過してしまったが, 文献 [9, 10] において, これらの 2 つを合わせることによって 3 つの性質 1 ~ 3 に対応する非常に具体的な結果が得られた.

3 K3 曲面への拡張

3.1 6 直線で分岐する 2 重被覆型 K3 曲面の族

射影直線の一般の位置にある 4 点で分岐する 2 重被覆は, 楕円曲線を定めた. これを拡張して射影平面 \mathbb{P}^2 で一般的な配置にある 6 本の直線で分岐する曲面を考えると, 曲面は直線の交点に対応する 15 点で A_1 型の特異点を持つ. これらの特異点を blow up して得られる曲面は非特異な K3 曲面を定める. こうして, 6 本の直線の配置空間をパラメータとする K3 曲面の族が得られるが, この族はルジャンドル族の 2 次元への拡張と考えられ, そのような視点から 90 年代に深く調べられたのであった [12]. 射影平面 \mathbb{P}^2 の直線は双対な点で表現できるので, 同一視 $\mathbb{P}^2 \equiv (\mathbb{P}^2)^*$ の下で, 6 本の直線の配置空間を 6 点配置空間として \mathcal{M}_6 と表すことにする. 上に定める K3 曲面の族は \mathcal{M}_6 上の族であるが, これを \mathcal{M}_6 上 2 重被覆型 K3 曲面の族と呼び $\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_6$ と表すことにする.

\mathcal{M}_6 上 2 重被覆型 K3 曲面の族の性質については, 非常に多くのことが調べられているが, 以下ではそのいくつかの結果のみをまとめることにする.

命題 3.1. 一般の点 $x \in \mathcal{M}_6$ に対する, 族 $\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_6$ のファイバー X_x を X 表すと, X の超越格子 (transcendental lattice) $T_X \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ について次の同型が成り立つ:

$$T_X \simeq U(2)^{\oplus 2} \oplus A_1^{\oplus 2}$$

ここで, $U(2) = \left(\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $A_1 = (\mathbb{Z}, (-2))$ は順に階数 2, 1 の格子を表す.

上の命題の K3 曲面 X について, そのピカール格子 P_X を $P_X := (T_X)^\perp$ (in $H^2(X, \mathbb{Z})$) と定める. このとき, T_X の定める周期領域

$$\mathcal{D}(T_X) := \{[w] \in \mathbb{P}(T_X \otimes \mathbb{C}) \mid w \cdot w = 0, w \cdot \bar{w} > 0\}^+$$

は $P_X \subset P_Y$ を満たす X の変形族 $\{Y\}$ のパラメータ空間である. ここで, 条件 $w \cdot w = 0, w \cdot \bar{w} > 0$ を満たす領域は 2 つの連結成分を持つことが分かるので, そのうちの 1 つをとって $D(T_X)$ としている. 命題の T_X の

場合、周期領域について複素 4 次元領域 \mathbb{H}_2 への同型 $D(T_X) \simeq \mathbb{H}_2$,

$$\mathbb{H}_2 := \{W \in Mat(2, \mathbb{C}) \mid (\overline{W} - W)/2i > 0\},$$

が知られている [11]. 領域 \mathbb{H}_2 の元 W が複素対称行列であるときには、 \mathbb{H}_2 は Siegel 上半空間 \mathfrak{h}_2 に一致するので、自然に $\mathbb{H}_2 \supset \mathfrak{h}_2$ が成り立っている。 \mathbb{H}_2 がルジヤンドル族に対する \mathbb{H}_+ の拡張になっていると予想されるが、その様子は周期積分と周期写像を定義すると見えて来る。

\mathbb{P}^2 の 6 点配置を具体的に

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

と表す。また、族 $\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_6$ に起点 $x_o \in \mathcal{M}_6$ を定めてファイバー $X_o := X_{x_o}$ 上の 2 次の（超越）サイクル $C \in H_2(X_o, \mathbb{Z})$ を定める。このとき、

定義 3.2. 6 点配置 A に対応する K3 曲面 X_A の（正則 2 形式に関する）周期積分を以下のように表す：

$$\bar{w}_C(A) = \int_C \frac{d\mu}{\sqrt{\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\ell_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdots \ell_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}}, \quad (\ell_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = a_{i1}\mathbf{x} + a_{i2}\mathbf{y} + a_{i3}\mathbf{z}) \quad (3.1)$$

ここで、 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ は \mathbb{P}^2 の齊次座標、また $d\mu := \mathbf{x}dy \wedge \mathbf{z} - \mathbf{y}dx \wedge \mathbf{z} + \mathbf{z}dx \wedge \mathbf{y}$ と定める。

$T_{X_o} \simeq U(2)^{\oplus 2} \oplus A_1^{\oplus 2} \subset H^2(X_o, \mathbb{Z})$ に基底を b_0, \dots, b_5 定めて、超越サイクル C がこれらに双対になるように C_0, \dots, C_6 を定める。このとき、周期写像 $\mathcal{P} : \mathcal{M}_6 \rightarrow \mathcal{D}(T_X)$ は

$$\mathcal{P}(A) = [\bar{w}_0(A)b_0 + \dots + \bar{w}_{C_5}(A)b_5] \quad (3.2)$$

によって定められるが、これはルジヤンドル族の周期写像 (2.3) の一般化を与える。また、周期写像は多価関数であるが、その多価性を表すモノドロミー群は自然に周期領域の対称性

$$\mathcal{G} = \{g \in O(T_X, \mathbb{Z}) \mid H(g) > 0\}$$

の部分群となる。ここで、 $H(g) = (g_{11}+g_{12})(g_{33}+g_{34}) - (g_{13}+g_{14})(g_{31}+g_{32})$ とする [11]。同型 $\mathcal{D}(T_X) \simeq \mathbb{H}_2$ の下で、周期領域の対称性 \mathcal{G} は離散群

$$\Gamma := \{g \in PGL(4, \mathbb{Z}[i]) \mid {}^t\bar{g}Jg = J\} \quad (J := \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix})$$

の \mathbb{H}_2 への作用 $W \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot W = (CW + D)^{-1}(AW + B)$ で表される。

命題 3.3. (1) 周期写像のモノドロミーが定める群は次で与えられる：

$$\mathcal{G}(2) = \{g \in \mathcal{G} \mid g = E_6 \text{ mod } 2\}$$

(2) 同型 $\mathcal{D}(T_X) \simeq \mathbb{H}_2$ の下で $\mathcal{G}(2)$ の作用は、 \mathbb{H}_2 への部分群 $\Gamma_M(1+i) \subset \Gamma$ 作用で表される。

ここで部分群 $\Gamma_M(1+i)$ の詳細は文献 [11, 12] に委ねることとするが、この群の \mathbb{H}_2 への作用が、ルジヤンドル族の場合の $\Gamma(2)$ の上半平面 \mathbb{H}_+ に対応している。

3.2 周期積分の満たす微分方程式

周期積分が微分方程式系の解として表されるのはルジャンドル族の場合と同様である。

命題 3.4. 周期積分 $\bar{w}(a) := \bar{w}(A)(3.1)$ は次の $G(3,6)$ 型の Aomoto-Gel'fand 系を満たす：

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{i=0}^2 a_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \bar{w}(a) = -\frac{1}{2} \bar{w}(a) \quad (1 \leq j \leq 6), \quad \text{(ii)} \quad \sum_{j=1}^6 a_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{kj}} \bar{w}(a) = -\delta_{ik} \bar{w}(a) \quad (1 \leq i \leq 3), \\ \text{(iii)} \quad & \frac{\partial^2}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} \bar{w}(a) = \frac{\partial^2}{\partial a_{il} \partial a_{kj}} \bar{w}(a) \quad (1 \leq i, k \leq 3, 1 \leq j, l \leq 6). \end{aligned} \quad (3.3)$$

命題の導出は、直接の計算から導かれる。特に (i),(ii) の 1 階の微分演算子は周期積分 $\bar{w}(A)$ の対称性

$$\bar{w}(A) = \bar{w}(g.A.t) \quad (g \in GL(3, \mathbb{C}), t \in (\mathbb{C}^*)^6)$$

を無限小作用として表現することから導かれる。 (iii) は、恒等式 $\frac{1}{\sqrt{\ell_1 \dots \ell_6}} \frac{1}{\ell_i \ell_l} (\mathbf{x}_j \mathbf{x}_l - \mathbf{x}_l \mathbf{x}_j) = 0$ を微分表現したものに他ならない。以下では、文献 [16] に従って、上の微分方程式系を $E(3,6)$ 微分方程式系と呼ぶことにする。

上記の微分方程式系は 70 年代に Aomoto, Gel'fand [1, 2, 4, 5] によって考察されたもので、変数として (n, m) 行列 $A = (a_{ij})$ を用いることからグラスマン $G(n, m)$ 型の Aomoto-Gel'fand 系と呼ばれている。しかしながら、(i),(ii) の 1 次の微分演算子に表現される非可換な群作用のために、扱いがそれ程容易ではない。特に、変数空間のコンパクト化に関して未だに一般論は出来上がってないようと思われる。80 年代に入ると、(i),(ii) の非可換性を代数的トーラスにしてしまった微分方程式系が Gel'fand, Zelvenski によって考察された。この場合、Gel'fand, Kapranov, Zelevinski によって微分方程式系の変数空間のコンパクト化の一般論が展開できることが示されて、Gel'fand-Kapranov-Zelevinski (GKZ) 方程式系 [6] と呼ばれている。90 年代になると、カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性が発見されて、GKZ 方程式系の（モノドロミー性質で特徴づけられる特別な境界点での）局所解の構成法について一般的手法が整備された [7, 8]。

後に記述するように、Aomoto-Gel'fand 方程式系と GKZ 方程式系の局所的な関係は当初から議論されて知られていたが、論文 [9] では、これを全局的な視点から考察して 90 年代の発展と合わせることを行った。議論の多くは 2 重被覆型 K3 曲面の場合に現れる $E(3,6)$ 微分方程式系に限られるが、こうした全局的な考察から K3 ラムダ関数の具体的な表示が得されることになる。

4 変数空間のコンパクト化とモジュライ空間のコンパクト化

2 重被覆型 K3 曲面の族 $\mathfrak{X} \rightarrow M_6$ の周期積分は $E(3,6)$ 微分方程式系 (3.3) によって特徴づけられる。このとき、楕円ラムダ関数のカスプ点 ($\tau = i\infty$) における q -展開の構成を手がかりにすると、対応する K3 ラムダ関数の構成には、微分方程式系の変数空間の適当なコンパクト化を見つけて、そこで目的に叶った境界点を記述する必要があることが分かる。族のパラメーター空間のコンパクト化には色々なものが知られているが、それらが必要とする変数空間のコンパクト化に一致することは限らない。

4.1 点配置空間の GIT コンパクト化

既に述べたように、本稿では \mathbb{P}^2 と $(\mathbb{P}^2)^*$ を同一視することにする。この同一視の下、2重被覆型 K3 曲面の族 $\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_6$ のパラメーター空間 \mathcal{M}_6 は \mathbb{P}^2 の 6 点配置の空間となる。 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ と表して、6 点を \mathbb{C}^3 の列ベクトルで表示して

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix}$$

と表す。このとき、 \mathbb{P}^2 の自己同型を表す $GL(3, \mathbb{C})$ が左から作用し、また、射影化 $\mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ を表す $(\mathbb{C}^*)^6$ が対角行列として右から作用する。こうして 6 点配置の空間として商 $\mathbb{C}^{3 \times 6}/GL(3, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^*)^6$ を考えることになる。この商を GIT(Geometric Invariant Theory) 商として定義することが文献 [3] に詳しく記述されている。

GIT 商では、群作用に関する半不変式を用いて商を定義する。今の場合、

$$\begin{aligned} Y_0 &= Y_0(A) = [1 2 3][4 5 6], \quad Y_3 = Y_3(A) = [1 3 4][2 5 6], \\ Y_1 &= Y_1(A) = [1 2 4][3 5 6], \quad Y_4 = Y_4(A) = [1 3 5][2 4 6], \\ Y_2 &= Y_2(A) = [1 2 5][3 4 6], \quad Y_5 = Y_5(A) = [1 2 3][1 4 5][2 4 6][3 5 6] - [1 2 4][1 3 5][2 3 6][4 5 6] \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} Y_6 &= [1 2 6][3 4 5], \quad Y_8 = [1 4 6][2 3 5], \quad Y_{10} = [1 4 5][2 3 6], \\ Y_7 &= [1 3 6][2 4 5], \quad Y_9 = [1 5 6][2 3 4] \end{aligned}$$

によって与えられる。ここで、 $[i j k] := \det(\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k)$ と定める。 Y_5 は次数 2 と数えて、その他は次数 1 と次数を付与するとき、全ての次数の半不変式がこれらで生成されることが示される [3]。このような次数付き環 $\mathbb{C}[Y_0, \dots, Y_{10}]$ の Proj が GIT 商の定義であった。今の場合、半不変式の間に $(G(3, 6)$ の Plücker 関係式を表す) 関係式

$$\begin{aligned} Y_0 - Y_1 + Y_2 - Y_6 &= 0, \quad Y_0 - Y_6 + Y_7 - Y_{10} = 0, \\ Y_2 - Y_3 - Y_7 + Y_8 &= 0, \quad Y_2 - Y_3 - Y_6 + Y_9 = 0, \\ Y_3 - Y_4 + Y_6 + Y_{10} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

があるために、 Y_6, \dots, Y_{10} は消去されて

$$\text{Proj } \mathbb{C}[Y_0, \dots, Y_{10}] = \{Y_5^2 = F_4(Y_0, \dots, Y_4)\} \subset \mathbb{P}(1^5, 2) \tag{4.2}$$

となる。ここで、 $F_4 = (Y_0 Y_s + Y_2 Y_3 - Y_1 Y_4)^2 + 4 Y_0 Y_1 Y_4 Y_s$ であり、また、 Y_0, \dots, Y_4, Y_5 を齊次座標とする重み付き射影空間を $\mathbb{P}(1^5, 2)$ と表した。(4.2) は、4 次式 $F_4 = 0$ で分岐する \mathbb{P}^4 の 2 重被覆であるが、ファン多様体の研究で Coble 4 様体として知られているものに一致している。GIT 商によるコンパクト化は 6 点配置の空間 \mathcal{M}_6 の 1 つの自然なコンパクト化である。

4.2 Baily-Borel-Satake コンパクト化

周期写像 $\mathcal{P} : \mathcal{M}_6 \rightarrow \mathbb{H}_2$ は多価写像であるが、その多価性を表すモノドロミーは \mathbb{H}_2 に作用する離散群 $\Gamma_M(1+i)[12]$ で表されている。この離散群はルジャンドル族の場合に現れた主合同部分群 $\Gamma(2)$ に対応するもので、 \mathbb{H}_2 上のモジュラー形式を定める。このモジュラー形式の成す(次数付き)環に関して

$$M_{\Gamma_M(1+i)} = \mathbb{Q}[\Theta_1(W)^2, \dots, \Theta_{10}(W)^2, \Theta(W)] \tag{4.3}$$

ということが知られている [11]. ここで, $\Theta_k(W)$ ($1 \leq k \leq 10$) は \mathbb{H}_2 上のテータ関数

$$\Theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (W) := \sum_{n \in \mathbb{Z}[i]^2} \exp \left(\pi i \left(\overline{t(n+a)} W(n+a) + 2\operatorname{Re}(t\bar{b}n) \right) \right) \quad (4.4)$$

で零でないものを順に番号付けしたもので, それらの 2 乗はモジュラ一群 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_M(1+i)$ の下で

$$\Theta_k(g_\sigma \cdot W)^2 = |CW + D|^2 \Theta_k(W)^2$$

のようにウエイト 2 で変換する [11, §3.1]. これに対し, $\Theta(W)$ はウエイト 4 のモジュラ一型式で

$$\Theta(W)^2 = \frac{3 \cdot 5^2}{2^6} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{10} \Theta_i(W)^4 \right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{10} \Theta_i(W)^8 \right\} \quad (4.5)$$

の関係を満たす. この次数付き環 (4.3) の Proj は, 商 $\Gamma_M(1+i) \setminus \mathbb{H}_2$ のコンパクト化 $\overline{\Gamma_M(1+i) \setminus \mathbb{H}_2}^{\text{BBS}}$ を定めるもので, Baily-Borel-Satake(BBS) コンパクト化に他ならない. $M_{\Gamma_M(1+i)}$ において, ウエイト 2 のテータ関数には (4.1) に対応する線形関係が存在することに注意すると, (4.2) に現れた齊次 4 次式 F_4 を用いて

$$\operatorname{Proj} \mathbb{C}[\Theta_1(W)^2, \dots, \Theta_{10}(W)^2, \Theta(W)] = \{\Theta^2 = F_4(\Theta_1^2, \dots, \Theta_5^2)\} \subset \mathbb{P}(1^5, 2)$$

のように表現され, ここに (4.2) と同じ Coble 4 様体が現れる. また, Baily-Borel-Satake コンパクト化に現れる境界点の集合は, 格子理論に基づいた一般的な記述が存在するが, 以下の命題の性質 (1), (2) は, 例え文獻 [15] に詳しく記述されている.

命題 4.1. 2つのコンパクト化 $\mathcal{M}_6^{\text{GIT}}$ と $\overline{\Gamma_M(1+i) \setminus \mathbb{H}_2}^{\text{BBS}}$ は同型で, 特異点集合について次が成り立つ;

1. $\mathcal{M}_6^{\text{GIT}}$ の特異点集合は 15 本の射影直線とそれらの交点 (15 点) から成り, 射影直線にそって A_1 型の特異点を持つ.
2. 上の 15 本の射影直線と 15 個の交点は, BBS コンパクト化で加える境界点の集合に一致する.

4.3 Aomoto-Gel'fand 系の変数空間のコンパクト化

上の 2 つの小節で, \mathcal{M}_6 の 2 つの自然なコンパクト化が同型であることをまとめた. これはルジヤンドル族 \mathcal{M}_4 の場合でも成り立つことで, そのような背景があつて 2 重被覆型 K3 曲面の族 $\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_6$ が 90 年代に深く研究されたのであった. 一方で, これらのコンパクト化が K3 ラムダ関数の定義に適したものであるかは明らかではない. 結論から述べると, K3 ラムダ関数の定義に適したコンパクト化は, 周期積分が満たす微分方程式系の変数空間のコンパクト化から現れる. そして, 2 重被覆型 K3 曲面の族 $\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_6$ の場合は, $\mathcal{M}_6^{\text{GIT}} \simeq \overline{\Gamma_M(1+i) \setminus \mathbb{H}_2}^{\text{BBS}}$ の”良い特異点解消”に一致することが判明する.

4.4 変数空間のコンパクト化とモジュライ空間のコンパクト化 (1)

Aomoto-Gel'fand 系の変数である 3×6 行列 A の最初の 3 列が 1 次独立である場合を考えると, 適当な $GL(3, \mathbb{C})$ の変換の下で,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 & b_1 & c_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_0 & b_2 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & b_0 & c_2 \end{pmatrix}$$

のような形に出来て、変数は 9 個のアフィン変数に制限される。さらに、このような A_0 の形を保つ条件下で、左から $(\mathbb{C}^*)^3 \subset GL(3, \mathbb{C})$ 、右から $(\mathbb{C}^*)^6$ が作用する。

$$T = \{(g, t) \subset (\mathbb{C}^*)^3 \times (\mathbb{C}^*)^6 \mid g.A_0.t = A_0\}$$

が 9 個のアフィン変数に作用する群となる。 $T \simeq (\mathbb{C}^*)^5$ であることが分かり、従ってこのような A_0 で表される変数空間（の開集合）は商 \mathbb{C}^9/T で表される。

行列 A において 1 次独立である 3 つの列ベクトルの位置を取り替えれば、変数空間すべてを覆うことが出来ることは明らかであるが、貼りあわせから大局的な様子を復元するのはそれ程自明ではない。しかし、 $E(3, 6)$ の場合は、前述の 2 つのモジュライ空間と関係を付けることによって大局的な様子が浮かび上がってくる。

商 \mathbb{C}^9/T を GIT 商として定めるとトーリック多様体が現れる一方で、Aomoto-Gel'fand 微分方程式系は対応する点配置 \mathcal{A} が定める GKZ 微分方程式系 (\mathcal{A} 超幾何微分方程式系) に特殊化する [2, 14]。適当な基底を定めるとき、点配置は

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

のように決められる [9, §2.4.b]。GKZ 方程式系は、このようなトーラスの群作用を表す点配置 \mathcal{A} に対して定められる微分方程式系で、今の場合 (3.3) の (i), (ii) で表された $GL(3, \mathbb{C})$ の無限小作用を（変数 $A = (a_{ij})$ を上の A_0 に特殊化することによって）部分群 $T \subset GL(3, \mathbb{C})$ へ縮小したものに一致する。さらに、変数空間のコンパクト化が \mathcal{A} から決まる射影的トーリック多様体 $\mathbb{P}_{Sec\mathcal{A}}$ で綺麗に与えられることが知られている [6]。ここで、 $Sec\mathcal{A}$ は二次扇 (secondary fan) と呼ばれる（射影的な）扇を表す。二次扇の詳細は省略するが、 $\mathbb{P}_{Sec\mathcal{A}}$ は適当な指標 $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ の下での GIT 商 $\mathbb{C}^9 //_{\chi} T$ に一致するものである。

命題 4.2. 点集合 \mathcal{A} を上の通りとするとき次が成り立つ：

1. 変数 $A = (a_{ij})$ を A_0 に特殊化するとき、 $E(3, 6)$ 微分方程式系は \mathcal{A} 超幾何微分方程式系に特殊化する。
2. \mathcal{A} 超幾何微分方程式系の変数空間のコンパクト化 $\mathbb{P}_{Sec\mathcal{A}}$ の特異点は 6 点から成り、特異点のタイプはすべて局所的に

$$\{(x_{ij}) \in \mathbb{A}^{2 \times 3} \mid \text{rank} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \leq 1\} \quad (4.6)$$

の原点 \bar{o} に現れる特異点で表される。

3. 特異点 \bar{o} に関する図 1 のような小特異点解消 (small resolution) が存在する。
4. 上の 6 点の特異点を解消するトーリックかつ小特異点解消 $\tilde{\mathbb{P}}_{Sec\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{P}_{Sec\mathcal{A}}$ が存在する。

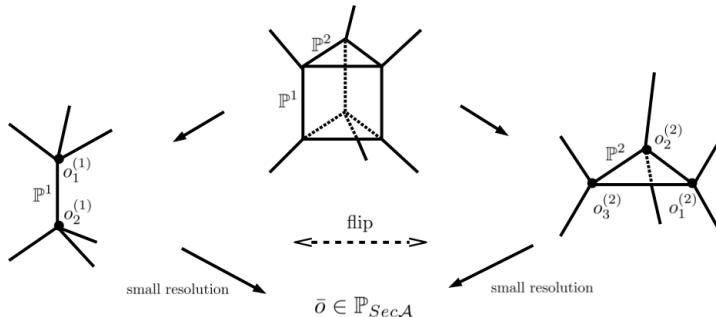


図 1. $\bar{o} \in \mathbb{P}_{Sec\mathcal{A}}$ の小特異点解消とその flip

\mathbb{P}^2 の 3 点配置を $A = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$ に対して、3 成分ベクトルの外積 \times を用いて

$$A^* = (a_2 \times a_3 a_3 \times a_1 a_1 \times a_2 a_4 a_5 a_6)$$

と定めると A^* の各列ベクトルへの $GL(3, \mathbb{C})$ の表現が $\mathbf{3}^*$ 表現と $\mathbf{3}$ 表現が混在することになる。幾何学的には、 A^* は \mathbb{P}^2 上の 3 直線と 3 点の配置を定めると解釈できるので、これらの配置を表すモジュライ空間を $\mathcal{M}_{3,3}$ と表す。 $\mathbb{C}^{3 \times 6}$ の GIT 商として調べると、

$$\mathcal{M}_{3,3}^{GIT} = \{X_0 X_1 X_2 - X_3 X_4 X_5 = 0\} \subset \mathbb{P}^5$$

のようなトーリック多様体が得られている [3]。次の命題にまとめるように、変数空間のコンパクト化 \mathbb{P}_{SecA} を 2 次扇を用いて調べると $\mathcal{M}_{3,3}^{GIT}$ との関係が現れる [9, Lemma 4.5]。さらに、対応 $A \mapsto A^*$ から \mathcal{M}_6^{GIT} は $\mathcal{M}_{3,3}^{GIT}$ に双有理であることが分かる。

命題 4.3. 変数空間 \mathbb{P}_{SecA} の特異点について次が成り立つ：

1. $\mathcal{M}_{3,3}$ を上のトーリック多様体とするとき、トーリック blow down $\mathbb{P}_{SecA} \rightarrow \mathcal{M}_{3,3}$ が存在する。
2. 双有理写像 $\mathcal{M}_{3,3} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_6^{GIT}$ が存在する。

微分方程式系 $E(3, 6)$ のパラメータ $A = (a_{ij})$ が A_0 のような形を取ると、GKZ 方程式系の変数空間のコンパクト化 \mathbb{P}_{SecA} と、その小特異点解消 $\tilde{\mathbb{P}}_{SecA}$ を A_0 の形のデータを書き添えて $\mathbb{P}_{SecA}^{123}, \tilde{\mathbb{P}}_{SecA}^{123}$ などと表すことにする。グラスマン多様体のアフィン座標と同じように、 $E(3, 6)$ のパラメータ空間はこれら $\tilde{\mathbb{P}}_{SecA}^{ijk}$ 全てで覆い尽くされる。また、GKZ 方程式系の性質から各 $\tilde{\mathbb{P}}_{SecA}^{ijk}$ のトーリック因子の交点として表されるすべての境界点について、それらを原点にする局所解が構成出来るので、 $\tilde{\mathbb{P}}_{SecA}^{ijk}$ の和空間が、微分方程式系 $E(3, 6)$ の変数空間のコンパクト化として期待されるものと言える。さらに命題 4.3 から、6 点配置のモジュライ空間 \mathcal{M}_6^{GIT} との関係を見ることが出来る。

命題 4.4. 次が成り立つ：

$$\mathcal{M}_6^{GIT} = \bigcup_{1 \leq i < j < k \leq 6} \left\{ \text{Zariski open set of } \mathbb{P}_{SecA}^{ijk} \right\}. \quad (4.7)$$

ここで、各々の \mathbb{P}_{SecA}^{ijk} の特異点解消 $\tilde{\mathbb{P}}_{SecA}^{ijk}$ を考えれば \mathcal{M}_6^{GIT} の特異点の解消が得られて、また、2 次扇に基づく構成からそれは微分方程式の解の構成という視点から望ましい性質を持つものであることが分かる。以上の考察からは、 $\tilde{\mathbb{P}}_{SecA}^{ijk}$ (の Zariski 開集合) がどうのように貼り合っているのか、その大局的な様子は良く分からぬが、命題 4.1 にまとめた \mathcal{M}_6^{GIT} の特異点の配置と合わせることによって大局的な記述が得られるこことになる [9]。

4.5 変数空間のコンパクト化とモジュライ空間のコンパクト化 (2)

6 点配置空間のコンパクト化 \mathcal{M}_6^{GIT} の特異点については命題 4.1 にまとめた。一方で、双有理写像 $\mathcal{M}_{3,3} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_6^{GIT}$ を手がかりに、特異点が局所的にトーリック多様体として表されることが分かる。

命題 4.5. \mathcal{M}_6^{GIT} は点特異点を原点とするアフィン座標系で局所的に超平面

$$M_0 = \{xyz = uv\} \subset \mathbb{C}^5$$

で表される。ここで、 M_0 は x, y, z 各座標軸を含みかつ各座標軸にそって A_1 型の特異点を持つ。

M_0 の 3 軸にそった A_1 特異点が命題 4.1 の射影直線にそった特異点で、交点である原点が 15 個の交点の 1 つを表す。次の命題 [9, Prop.5.2] は、トリック特異点解消 $\widetilde{\mathbb{P}}_{Sec\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{P}_{Sec\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{M}_{3,3}(- \dashrightarrow \mathcal{M}_6^{GIT})$ を $M_0 = \{xyz = uv\}$ の原点 O の近くで、射影幾何学的に再現したものである。

命題 4.6. 次のようにして \mathcal{M}_6^{GIT} の特異点解消が得られる：

1. A_1 型特異点を持った 15 本の射影直線 L_i それぞれに沿って blow up を行う。このとき、例外因子は L_i 上の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 束で (M_0 の原点 O に対応する) 交点 $L_i \cap L_j \cap L_k$ において特異ファイバー $\mathbb{P}^2 \amalg \mathbb{P}^2$ (図 2 参照) を持つ。
2. 上の特異ファイバー $\mathbb{P}^2 \amalg \mathbb{P}^2$ 内の射影直線 ℓ 上の 2 点 ($p_1 = o, p_2 = \infty$) に特異点があり、それを中心いて blow up すると \mathcal{M}_6^{GIT} の特異点解消が得られる。また、このときの例外因子について $D_{p_i} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ($i = 1, 2$) が成り立つ。

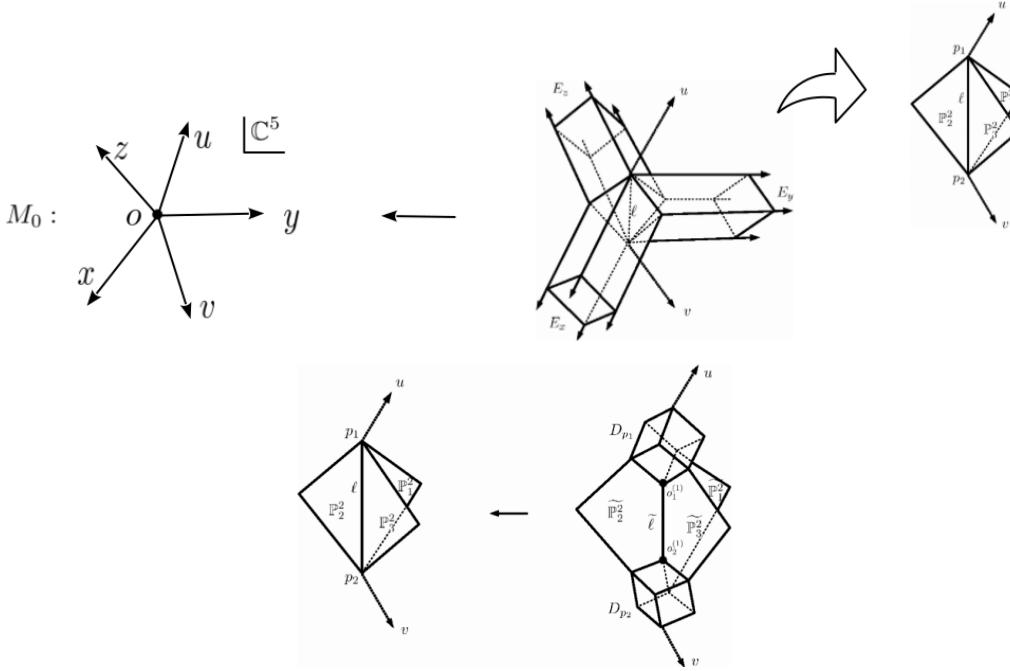


図 2. $M_0 = \{xyz = uv\}$ の特異点解消。下図では射影直線 ℓ の近傍を拡大している。

図 2 は、上の特異点解消を $M_0 = \{xyz = uv\}$ を描いて局所的に図示したものである。 x, y, z に沿った blow up の例外集合を E_x, E_y, E_z と表し、それらが原点 O のファイバーで交わる様子を描いている。 E_x, E_y, E_z とそれらの交わりに現れる射影直線 ℓ の固有変換を $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z, \tilde{\ell}$ と表す。 $\tilde{\ell}$ と 2 つの因子 D_{p_1}, D_{p_2} が作る配置が、図 1 の左に現れる small resolution に同定されるものである ($\tilde{\ell}$ を図 1 の \mathbb{P}^1 に一致させる)。図 1 は $\mathbb{P}_{Sec\mathcal{A}}$ に現れる特異点の解消を表し、各因子の交点において微分方程式系の解が構成されているので、こうして、K3 ラムダ関数が定義される特別な境界点が $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z, D_{p_1}, D_{p_2}$ の交点に現れることになる [9, 10]。このような特別な境界点は、各因子周りのモノドロミー性質によって特徴付けられ、ミラー対称性の研究において深く調べられた [7, 8] large complex structure limit (LCSL) に一致している。

定理 4.7. \mathcal{M}_6^{GIT} の特異点解消を局所的に表した図 2において、因子の交点

$$o_i^{(1)} = \tilde{E}_x \cap \tilde{E}_y \cap \tilde{E}_z \cap D_{p_i} \quad (i = 1, 2)$$

は上述の LCSL である。また、flip で得られる $o_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, 3$) もすべて LCSL である。

境界点 LCSL の詳細は省略するが、その点での局所解を構成すると 1 つの正則解がありその他の解はすべて境界因子 $D_k = \{x_k = 0\}$ にそって対数的な特異点を含む、と言う性質で特徴付けられる境界点である。

上の定理で \mathcal{M}_6^{GIT} の特異点の解消が得られているが、図 1 で局所的に表されているように 15 点で flip の自由度だけ決まっていない。これに関して、次の定理が示される [9]。

定理 4.8. \mathcal{M}_6^{GIT} の代数的な特異点解消は、射影直線の交点として現れる 15 点の上で

(i) すべて $o_i^{(1)}$ 型の特異点解消である、あるいは (ii) すべて $o_k^{(2)}$ 型の特異点解消である、の何れかである。前者の特異点解消を $\tilde{\mathcal{M}}_6$ と表し、後者を $\tilde{\mathcal{M}}_6^+$ と表す。

5 K3 ラムダ関数

$E(3, 6)$ 微分方程式系の変数空間の大局的な様子が分かったので、LCSL と呼んだ特別な境界点で解の構成を行うことが出来る。ルジャンドル族の場合、LCSL は \mathcal{M}_4 上の 3 点 $x = 0, 1, \infty$ に現れているが、これらの点は対称性 (2.5) の下で関係するので、3 点の内の 1 点を選んで微分方程式の局所解を構成して周期写像 $\tau(x)$ (2.3) を表し、その逆関係としてラムダ関数 $\lambda(\tau)$ を定めれば良かった。今の場合 flip が存在する分だけ幾分複雑になっているが、K3 ラムダ関数の記述も同様に実行できる。

5.1 λ_{K3} 関数

$E(3, 6)$ 微分方程式系の変数空間の特異点解消として $\tilde{\mathcal{M}}_6$ を採用する場合、定理 4.7 に記述する境界点のうちの 1 つ $o_1^{(1)}$ を選ぶこととする。 $o_1^{(1)}$ を中心とする複素座標近傍を $\mathbb{C}_{z_1, z_2, z_3, z_4}^4$ と表し

$$z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0, z_4 = 0$$

が順に境界因子 $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z, D_{p_1}$ を表すように取る。命題 4.3 の双有理写像の下で、二次扇 $Sec\mathcal{A}$ との関係を付けて、変数 z_1, z_2, z_3, z_4 が

$$z_1 = -\frac{a_1 c_1}{a_0 c_2}, z_2 = -\frac{a_1 b_1}{a_2 b_0}, z_3 = -\frac{b_1 c_1}{b_2 c_0}, z_4 = \frac{a_2 b_2 c_2}{a_1 b_1 c_1} \quad (5.1)$$

のようにパラメータ $A = (a_{ij})$ の特殊化 A_0 と関係するような $o_1^{(1)}$ を取ることが出きる [10]。このとき $o_1^{(1)}$ が、微分方程式系 $E(3, 6)$ の特別な境界点 (LCSL) であることが以下のように確かめられる。

命題 5.1. $\mathbb{C}_{z_1, z_2, z_3, z_4}^4$ 原点に於いて、 $E(3, 6)$ の局所解は

$$\begin{cases} w_0(z) = 1 + (\text{power series in } z), & w^{(2)}(z) = w_0(z) \sum M_{jk} (\log z_j)(\log z_k) + \dots \\ w_k(z) = w_0(z) \log \frac{z_k}{c_k} + (\text{power series in } z) & (k = 1, \dots, 4; (c_1, c_2, c_3, c_4) = (4, 4, 4, 1)) \end{cases}$$

のようにな形で求められる。ここで、 M_{jk} は定数でその具体形は [10, Lemma4.7] 参照。

これらの局所解の詳細な記述は文献 [10, §4] に委ねるが、モノドロミー性質と 2 次の関係式 (period relation) を手がかりに解の整基底を決定し、そこから T_x の整基底 $\{\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_5\}$ を同定すると周期写像 $\mathcal{P} : \widetilde{\mathcal{M}}_6 \rightarrow \mathcal{D}(T_X)$ が

$$\mathcal{P}(z) = \left[w_0 \tilde{b}_0 + \frac{2}{2\pi i} w_1(z) \tilde{b}_1 + \dots + \frac{2}{2\pi i} w_4(z) \tilde{b}_4 + \frac{1}{(2\pi i)^2} (w^{(2)}(z) + \pi^2 w_0(z)) \tilde{b}_5 \right] \quad (5.2)$$

のように具体的に表現される (このとき、 $M_{ij} = (\tilde{b}_i, \tilde{b}_j)$ が成り立っている)。ルジャンドル族の周期写像 (2.3) にならって、

$$t_k = \frac{2}{2\pi i} \frac{w_k(x)}{w_0(x)} = \log \frac{z_k}{c_k} + (\text{power series in } z)$$

と定めると (t_1, \dots, t_4) が周期領域 $\mathbb{H}_2 \simeq \mathcal{D}(T_X)$ の整基底 $\{\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_5\}$ に対する正則座標を定める。上の関係式を

$$Q_k = e^{\pi i t_k} = \frac{1}{c_k} z_k (1 + (\text{power series in } z))$$

z_1, \dots, z_4 について解き返した $z_k = z_k(Q_1, \dots, Q_4)$ は文献 [7, 8] でミラー写像と呼ばれるものに一致し、今の場合これが **K3 ラムダ関数** の定義を与える。

命題 5.2. (1) 上述の K3 ラムダ関数を $z_k(Q_1, \dots, Q_4) =: \lambda_k(Q)$ と表すとき、次のような正べきの Q -展開が得られる：

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4Q_1 + 8Q_1^2 + (12Q_1^3 - 8Q_1Q_2Q_4 - 8Q_1Q_3Q_4) + 16(Q_1^4 - 2Q_1^2Q_2Q_4 - 2Q_1^2Q_3Q_4 + Q_1Q_2Q_3Q_4) + \dots \\ \lambda_2 &= 4Q_2 + 8Q_2^2 + (12Q_2^3 - 8Q_1Q_2Q_4 - 8Q_2Q_3Q_4) + 16(Q_2^4 - 2Q_1Q_2^2Q_4 - 2Q_2^2Q_3Q_4 + Q_1Q_2Q_3Q_4) + \dots \\ \lambda_3 &= 4Q_3 + 8Q_3^2 + (12Q_3^3 - 8Q_1Q_3Q_4 - 8Q_2Q_3Q_4) + 16(Q_3^4 - 2Q_1Q_3^2Q_4 - 2Q_2Q_3^2Q_4 + Q_1Q_2Q_3Q_4) + \dots \\ \lambda_4 &= Q_4 - 2(Q_1 + Q_2 + Q_3)Q_4 + \{(Q_1^2 + \dots + Q_3^2)Q_4 + 2(Q_1 + \dots + Q_3)Q_4^2 + 4(Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_3Q_1)Q_4\} + \dots \end{aligned}$$

(2) また、正則解 $w_0(z)$ に K3 ラムダ関数 $z_k = \lambda_k(Q)$ を代入して次の Q -展開が得られる：

$$w_0(\lambda)^2 = 1 + 8(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3)Q_4 - 32Q_1Q_2Q_3Q_4 + 8(Q_1 + Q_2 + Q_3 - 4Q_4)Q_1Q_2Q_3Q_4 + \dots$$

周期写像 (3.2) は $T_{X_o} \simeq U(2)^{\oplus 2} \oplus A_1^{\oplus 2}$ に定める基底 $\{b_0, \dots, b_5\}$ に対応するもので、これが定める周期領域 $\mathbb{H}_2 \simeq \mathcal{D}(T_X)$ の正則座標 (t_1, t_2, t_3, t_4) は $q_k = e^{i\pi t_k}$ によって上の Q_k とは別の q -展開のパラメータを定める。この q -展開はテータ関数の定義と

$$q_1 = e^{\pi i w_{11}}, q_2 = e^{\pi i w_{22}}, q_3 q_4 = e^{\pi i (w_{12} + w_{21})}, \frac{q_3}{q_4} = e^{-\pi (w_{12} - w_{21})}; W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2$$

の関係にある [11]。この整基底と 微分方程式の局所解から読み取った T_X の整基底 $\{\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_5\}$ を関係付けることから [10, §5]、2 つの展開パラメータは

$$q_1 = Q_1Q_2Q_3Q_4, q_2 = Q_2Q_3Q_4, q_3 = Q_3Q_4, q_4 = -Q_4 \quad (5.3)$$

の関係にあることが示される。次の結果は論文 [10] の主結果である：

定理 5.3. $\Theta_i(q)$ ($i = 1, \dots, 10$) および $\tilde{\Theta} = \frac{4}{15} \Theta(q)$ を、それぞれテータ関数 (4.4), (4.5) のパラメータ q_k による表示とする。このとき、関係式 (5.3) の下で

1. K3 ラムダ関数は

$$\begin{aligned}\lambda_1(Q) &= \frac{\Theta_3(q)^2 + \Theta_9(q)^2 - \omega_0(\lambda)^2}{\omega_0(\lambda)^2 - \Theta_7(q)^2}, & \lambda_2(Q) &= \frac{\Theta_3(q)^2 + \Theta_9(q)^2 - \omega_0(\lambda)^2}{\omega_0(\lambda)^2 - \Theta_9(q)^2}, \\ \lambda_3(Q) &= \frac{(\omega_0(\lambda)^2 - \Theta_7(q)^2)(\omega_0(\lambda)^2 - \Theta_9(q)^2)}{\omega_0(\lambda)^2(\Theta_4(q)^2 + \Theta_9(q)^2 - \omega_0(\lambda)^2)}, & \lambda_4(Q) &= \frac{\Theta_4(q)^2 + \Theta_9(q)^2 - \omega_0(\lambda)^2}{\Theta_3(q)^2 + \Theta_9(q)^2 - \omega_0(\lambda)^2}\end{aligned}$$

と表される. ここで, $\omega_0(\lambda)^2$ は以下の 2 で定めるモジュラー形式を表す.

2. 原点 $o_1^{(1)}$ で現れる正則解は超幾何級数

$$\begin{aligned}\omega_0(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4 \geq 0} c(n_1, n_2, n_3, n_4) z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3} z_4^{n_4} \\ c(n_1, \dots, n_4) &:= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})^3} \frac{\Gamma(n_1 + \frac{1}{2}) \Gamma(n_2 + \frac{1}{2}) \Gamma(n_3 + \frac{1}{2})}{\prod_{i=1}^3 \Gamma(n_4 - n_i + 1) \cdot \prod_{1 \leq j < k \leq 3} \Gamma(n_j + n_k - n_4 + 1)}\end{aligned}$$

で表されて, さらに次の関係式を満たす

$$\omega_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^2 = \frac{1}{2\Theta_8(q)^2} \left\{ \Theta_7(q)^2 \Theta_8(q)^2 - \Theta_{10}(q)^2 \Theta_5(q)^2 + \Theta_6(q)^2 \Theta_9(q)^2 - \tilde{\Theta}(q) \right\}.$$

この定理の結果 1,2 はそれぞれ, 楕円ラムダ関数の性質 (2.4),(2.6) に対応するものである. 性質 (2.5) に対応して, $\Gamma_T/\Gamma_M(1+i) \simeq S_6 \times \mathbb{Z}_2$ という関係が成り立ち [11, §1.2], また, \mathbb{Z}_2 は 10 個のテータ関数に自明に作用することが示される [11, Lemmda 2.1.2],[10, Appendix A] ので, $\Gamma_T/\Gamma_M(1+i)$ に由来する S_6 がテータ関数を通じて λ -関数に作用する. 一方で, 6 点配置を表す 3×6 行列 A に右から自然に S_6 が作用する. 周期写像 $\mathcal{P} : \mathcal{M}_6 \rightarrow \mathbb{H}_6$ はこれら 2 つの群作用に対して同変であることが示されている [11]. これらのことから, ラムダ関数 $x_k = \lambda_k$ を行列 A_0 の行列成分で表す関係式 (5.1) と A_0 への S_6 の作用を手がかりに, K3 ラムダ関数 λ_k への $\Gamma_T/\Gamma_M(1+i)$ の作用が決められる.

A_0 へ列の置換として $\sigma \in S_6$ を作用させると A_0 の形は保たれないが, 同時に $h_\sigma \in GL(3, \mathbb{C})$ による左からの作用を考えて次のような変換を実現する :

$$A_0 \mapsto A_0^\sigma := h_\sigma \cdot A_0 \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2^\sigma & b_1^\sigma & c_0^\sigma \\ 0 & 1 & 0 & a_0^\sigma & b_2^\sigma & c_1^\sigma \\ 0 & 0 & 1 & a_1^\sigma & b_0^\sigma & c_2^\sigma \end{pmatrix}$$

この変換によって, (5.1) 式 $z_k(A_0)$ は対応する $a_i^\sigma, b_i^\sigma, c_i^\sigma$ の有理式 $z_k(A_0^\sigma)$ に変換する. この手続きで, 途中の h_σ は一意には決まらないが有理式 $z_k(A_0^\sigma)$ は T -不変性であるので, σ に対して一意に決まっていることに注意する. $z_k(A_0^\sigma)$ について以下の性質が確かめられる.

命題 5.4. $z_k(A_0^\sigma)$ は $z_k(A_0)$ の有理式で表される.

以下に具体的な $\sigma \in S_6$ に対して幾つか例を示しておく.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$z_1^\sigma = \frac{1}{z_1}, \quad z_2^\sigma = -z_2 z_3 z_4, \quad z_3^\sigma = \frac{1}{z_1 z_4}, \quad z_4^\sigma = \frac{z_1}{z_3}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$z_1^\sigma = -\frac{z_2}{1+z_2}, \quad z_2^\sigma = -\frac{1-z_1 z_3 z_4}{1+z_1 z_4}, \quad z_3^\sigma = -\frac{1-z_1 z_3 z_4}{1+z_3 z_4}, \quad z_4^\sigma = -\frac{(1+z_1 z_4)(z+z_3 z_4)}{1-z_1 z_3 z_4}$$

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right)$$

$$z_1^\sigma = -\frac{(1+z_1)z_2(1+z_3)z_4}{(1+z_2z_4)(1-z_1z_3z_4)}, \quad z_2^\sigma = -\frac{z_1(1+z_2)(1+z_3)z_4}{(1+z_1z_4)(1-z_2z_3z_4)},$$

$$z_3^\sigma = -\frac{(1+z_1)(1+z_2)z_3z_4}{(1-z_1z_2z_4)(1+z_3z_4)}, \quad z_4^\sigma = \frac{(1+z_1z_4)(1+z_2z_4)(1+z_3z_4)}{(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3)z_4}.$$

上の命題は、橢円ラムダ関数の性質 (2.5) を K3 ラムダ関数 $z_k = \lambda_k$ へ一般化するものである。

5.2 λ_{K3}^+ 関数

前小節では、 $\widetilde{\mathcal{M}}_6$ の点 $o_1^{(1)}$ を原点とする複素座標近傍を $\mathbb{C}_{z_1, z_2, z_3, z_4}^4$ から K3 ラムダ関数 $\lambda_{K3} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ を定めた。 $\widetilde{\mathcal{M}}_6$ の flip $\widetilde{\mathcal{M}}_6^+$ では、 $o_i^{(1)} (i=1, 2)$ に対して 3 点 $o_k^{(2)} (k=1, 2, 3)$ の境界点が存在する。3 点の中で図 1 に表す $o_1^{(2)}$ を選択して、それを中心とする複素座標近傍を $\mathbb{C}_{\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4}^4$ と表すとき

$$\tilde{z}_1 = z_1, \quad \tilde{z}_2 = z_1z_4, \quad \tilde{z}_3 = z_2/z_1, \quad \tilde{z}_4 = z_3/z_1$$

の関係がある [10, Appendix F]。前節と同様に、この点 $o_1^{(2)}$ を Q -展開の原点とする K3 ラムダ関数 $\lambda_{K3}^+ = (\lambda_1^+, \lambda_2^+, \lambda_3^+, \lambda_4^+)$ が定義される [10]。K3 ラムダ関数 λ_{K3} と同様にテータ関数によって表されるが、 λ_{K3}^+ は $E(3, 6)$ 微分方程式系の変数空間の異なる特異点解消から定義されており λ_{K3} とは別の定義を与えていると見なされるべきであろう。詳細は文献 [10] を参照されたい。

6 まとめ

以上、論文 [9, 10] で得られた K3 ラムダ関数の背景と概略を、周期積分の満たす微分方程式とその変数空間のコンパクト化、という視点からまとめた。このような視点に立つと一般の $G(n, m)$ 型の Aomoto-Gel'fand 微分方程式系について、その変数空間のコンパクト化と大局的な記述という問題が見えて来るように思われる。 $E(3, 6)$ 微分方程式系の場合、(1) 2 重被覆型 K3 曲面の族 $\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{M}_6$ のパラメータ空間のコンパクト化 $\mathcal{M}_6^{GIT} \simeq \overline{\Gamma_M(1+i) \setminus \mathbb{H}_2}^{\text{BBS}}$ の記述が簡明に出来る、(2) \mathcal{M}_6^{GIT} が GKZ 方程式系に基づくコンパクト化 \mathbb{P}_{SecA}^{ijk} の被覆で表される ((4.7) 式)、以上 2 つの事実があつて変数空間の大局的な記述が可能となった。一般的 $G(n, m)$ 型の Aomoto-Gel'fand 微分方程式系の場合には、「微分方程式系の変数空間が GKZ 方程式系に基づくコンパクト化 $\mathbb{P}_{SecA}^{i_1 i_2 \dots i_n}$ の (Zariski 開集合) 被覆で表される」ということ以外に大局的な記述への手がかりはないように思われる。今の所あまりよいアイデアはないが、問題として以下に記録して置きたいと思う。

問題. $G(n, m)$ 型の Aomoto-Gel'fand 微分方程式系の変数空間を被覆する $\mathbb{P}_{SecA}^{i_1 i_2 \dots i_n}$ (の Zariski 開集合) について、それらの貼り合わせの様子を記述して変数空間の大局的な定義を与えよ。

謝辞. 本稿の結果は高木寛通氏 (学習院大学), Bong Lian 氏 (Brandeis 大), S.-T. Yau 氏 (Harvard 大) との共同研究に基づいている。共同研究の実施に関し、ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] K. Aomoto, *On the structure of integrals of power products of linear functions*, Sci. Papers, Coll. Gen. Education, Univ. Tokyo, 27(1977), 49–61.
- [2] K. Aomoto and M. Kita, *Theory of Hypergeometric Functions*, Springer Monograph in Mathematics, Springer (2011).
- [3] I. Dolgachev and D. Ortland, Points Sets in Projective Space and Theta Functions, Astérisque, vol.165, 1989.
- [4] I.M. Gel'fand and S.I. Gel'fand, *Generalized Hypergeometric equations*, Soviet Math. Dokl. 33, (1986), 643–646.
- [5] I.M. Gel'fand and M.I. Graev, Hypergeometric functions associated with the Grassmannian $G_{3,6}$, Soviet Math. Dokl. 35 (1987) 298–303.
- [6] I.M. Gel'fand, A. V. Zelevinski, and M.M. Kapranov, *Equations of hypergeometric type and toric varieties*, Funktsional Anal. i. Prilozhen. 23 (1989), 12–26; English transl. Functional Anal. Appl. 23(1989), 94–106.
- [7] S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen and S.-T. Yau, *Mirror Symmetry, Mirror Map and Applications to complete Intersection Calabi-Yau Spaces*, Nucl. Phys. B433(1995)501–554.
- [8] S. Hosono, B.H. Lian and S.-T. Yau, *GKZ-Generalized hypergeometric systems in mirror symmetry of Calabi-Yau hypersurfaces*, Commun. Math. Phys. 182 (1996) 535–577.
- [9] S. Hosono, B.H. Lian, H. Takagi and S.-T. Yau, K3 surfaces from configurations of six lines in \mathbb{P}^2 and mirror symmetry I, Commun. Number Theory Phys. 14 (2020), no. 4, 739783.
- [10] S. Hosono, B.H. Lian, and S.-T. Yau, K3 surfaces from configurations of six lines in \mathbb{P}^2 and mirror symmetry II — λ_{K3} -functions—, International Math. Res. Notice, IMRN 2021, no. 17, 1323113281.
- [11] K. Matsumoto, Theta functions on the bounded symmetric domain of type $I_{2,2}$ and the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces, Math. Ann. 295 (1993) 383–409.
- [12] K. Matsumoto, T. Sasaki and M. Yoshida, *The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the hypergeometric function of type E(3, 6)*, Internat. J. Math. vol.3, No.1 (1992) 1 –164.
- [13] E. Reuvers, *Moduli spaces of configurations*, Ph.D. thesis (Radboud University, 2006), http://www.ru.nl/imapp/research_0/ph_d_research/
- [14] J. Sekiguchi and N. Takayama, *Compactifications of the configuration space of six points of the projective plane and fundamental solutions of the hypergeometric system of type (3,6)*, Tohoku Math. J. (2) Volume 49, Number 3 (1997), 379-413.
- [15] G. van der Geer, On the Geometry of a Siegel Modular Threefold, Math. Ann. 260 (1982) 317–350.
- [16] M. Yoshida, *Hypergeometric Functions, My Love – Modular Interpretations of Configuration Spaces*–, Springer, 1997.

GAMMA CONJECTURE AND TROPICAL GEOMETRY

HIROSHI IRITANI

ABSTRACT. Hodge-theoretic mirror symmetry for a Calabi-Yau mirror pair says that the variation of Hodge structure arising from quantum cohomology of a Calabi-Yau manifold and that arising from deformation of complex structures on the dual Calabi-Yau manifold can be identified with each other, and it has been conjectured ($\widehat{\Gamma}$ -conjecture) that the $\widehat{\Gamma}$ -integral structure [10] in quantum cohomology corresponds to a natural integral structure on the mirror side. Here the $\widehat{\Gamma}$ -integral structure is defined via the topological K -group and the $\widehat{\Gamma}$ -class, a characteristic class with transcendental coefficients containing the Riemann ζ -values. In this article, we explain an approach to the $\widehat{\Gamma}$ -conjecture using tropical geometry and observe that the Riemann ζ -values arise as error terms of tropicalization in the computation of mirror periods. This is based on joint work [1] with Abouzaid, Ganatra and Sheridan.

1. MIRROR SYMMETRY

Mirror symmetry is a conjectural duality between symplectic and complex geometry. It roughly speaking predicts that symplectic topology on a symplectic manifold Y “corresponds” (or equivalent) to complex geometry on another complex manifold Z . Then Z is called a mirror of Y and vice versa. In this article, we consider two kinds of mirror correspondences: Calabi-Yau mirror pairs and Fano/LG mirror pairs.

Calabi-Yau mirror pairs:

$$(Y, (-\log t)\omega) \longleftrightarrow (Z_t, \Omega_t)_{t \in \Delta^*}$$

In the left-hand side, we consider a Calabi-Yau manifold Y equipped with a Kähler form ω whose cohomology class is integral: they give a family $(Y, (-\log t)\omega)$ of symplectic manifolds parametrized by small $t > 0$. On the right-hand side we consider a family of Calabi-Yau manifolds Z_t of the same dimension equipped with a holomorphic volume form Ω_t . The family $\{Z_t\}$ maximally degenerates at $t = 0$ in a suitable sense: the monodromy M on $H_{\text{prim}}^n(Z_t)$ is maximally unipotent (i.e. $(M - \text{id})^n \neq 0, (M - \text{id})^{n+1} = 0$ for $n = \dim Z_t$) and the limiting mixed Hodge structure is of Hodge-Tate type (see [2]). The limit point $t = 0$ is called the large complex structure limit.

Fano/LG mirror pairs:

$$F \longleftrightarrow W: (\mathbb{C}^\times)^n \rightarrow \mathbb{C}$$

In the left-hand side we consider a Fano manifold F (or a monotone symplectic manifold), i.e. $c_1(F)$ is represented by a positive $(1, 1)$ -form, which gives a symplectic form. In the right-hand side we consider a Landau-Ginzburg model, a Laurent polynomial function W on the algebraic torus $(\mathbb{C}^\times)^n$ with $n = \dim F$.

Date: 19 December 2021.

On the complex geometry side, we consider (exponential) periods, namely, integrals of the following form

$$\begin{aligned} \int_{C_t \subset Z_t} \Omega_t & \quad \text{for an } n\text{-cycle } C_t \text{ (for Calabi-Yau mirrors)} \\ \int_{\Gamma} e^{-tW} \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n} & \quad \text{for a not necessarily compact } n\text{-cycle } \Gamma \text{ (for Fano mirrors)} \end{aligned}$$

Under mirror symmetry, they should yield solutions to the quantum differential equation on the symplectic side, which is defined by counting rational curves (the genus-zero Gromov-Witten invariants). In the Calabi-Yau case, the mirror correspondence can be formulated as an isomorphism of variation of Hodge structure (VHS) as given in Table 1.

TABLE 1. Mirror correspondence on the level of VHS (see e.g. [11]). Here $\{\phi_i\}$ is a basis of $H_{\text{alg}}^{1,1}(X)$ and $\tau = \sum_{i=1}^r \tau^i \phi_i$.

	symplectic side	complex side
bundle	$\left(\bigoplus_p H_{\text{alg}}^{p,p}(Y) \right) \times H_{\text{alg}}^{1,1}(Y) \rightarrow H_{\text{alg}}^{1,1}(Y)$	$\bigcup_t H_{\text{prim}}^n(Z_t) \rightarrow \Delta^*$
connection	quantum connection $\nabla = d + \sum_{i=1}^r (\phi_i \star \tau) d\tau^i$	Gauss-Manin connection ∇^{GM}
filtration	$F^p = \bigoplus_{k \leq n-p} H_{\text{alg}}^{k,k}(Y)$	$F^p = \bigoplus_{k \geq p} H_{\text{prim}}^{n-k,k}(Z_t)$
polarization	$(2\pi i)^n \int_Y ((-1)^{\deg/2} \alpha) \cup \beta$	$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_X \alpha \cup \beta$
\mathbb{Z} -structure	$\widehat{\Gamma}$ -integral structure $K_{\text{alg}}^0(X) \rightarrow \bigoplus_k H_{\text{alg}}^{k,k}(X)$, $V \mapsto \widehat{\Gamma}_X(2\pi i)^{\deg/2} \text{ch}(V)$	$H^n(Z_t, \mathbb{Z})$

Remark 1.1. In Table 1, we restrict our attention to the algebraic part of cohomology in the symplectic side, and the primitive part of the middle cohomology in the complex side. The $\widehat{\Gamma}$ -integral structure is also restricted to the K -group of algebraic vector bundles. We do not know much about Hodge-theoretic mirror symmetry beyond these parts. On the symplectic side, we can naturally define the $\widehat{\Gamma}$ -integral structure corresponding to the topological K -group [10], so it might be possible to consider an integral structure on the complex side corresponding to the topological K -group as well. A conjectural isomorphism $K_{\text{top}}^*(Y) \cong K_{\text{top}}^*(Z)$ has been discussed in the literature [21].

2. THE $\widehat{\Gamma}$ -CLASS

Let X be an almost complex manifold. We write the total Chern class of the tangent bundle TX as

$$c(TX) = (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \cdots (1 + \delta_n)$$

where $\delta_1, \dots, \delta_n$ are virtual cohomology classes called the *Chern roots*. Each δ_i may not exist as a cohomology class, but any symmetric functions in $\delta_1, \dots, \delta_n$ can be written as polynomials in $c_1(TX), \dots, c_n(TX)$ and make sense as cohomology classes. The $\widehat{\Gamma}$ -class of X is defined to be

$$\widehat{\Gamma}_X = \Gamma(1 + \delta_1) \cdots \Gamma(1 + \delta_n) \in H^*(X, \mathbb{R})$$

where $\Gamma(1+x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt / t$ is the Euler Γ -function. By the Taylor expansion of the $\widehat{\Gamma}$ -function, we can think of the right-hand side as a symmetric power series of $\delta_1, \dots, \delta_n$: then the right-hand side makes sense as a cohomology class of X . The $\widehat{\Gamma}$ -function $\Gamma(1+x)$ has simple poles at $x = -1, -2, -3, \dots$ and it has the following infinite product expansion:

$$\Gamma(1+x) = \frac{e^{-\gamma x}}{\prod_{n \geq 0} (1 + x/n) e^{-x/n}}$$

where $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n)$. This can be calculated as

$$\begin{aligned} \Gamma(1+x) &= e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\log(1+\frac{x}{n}) + \frac{x}{n}} \\ &= e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \exp \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{x^k}{n^k} \right) \\ &= \exp \left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} x^k \right) \end{aligned}$$

where $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ is the value of the Riemann ζ -function. Hence the $\widehat{\Gamma}$ -class can be written as

$$\widehat{\Gamma}_X = \exp \left(-\gamma c_1(X) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{(k-1)!} \text{ch}_k(TX) \right)$$

Remark 2.1. The $\widehat{\Gamma}$ -class has the following geometric interpretation. We consider a free loop space LX equipped with the S^1 -action rotating loops. We also consider the set X of constant loops in LX . Then the $\widehat{\Gamma}$ -class can be interpreted as a regularization of the S^1 -equivariant Euler class of the positive normal bundle \mathcal{N}_+ of X in LX [15, 4]; here positive means the positive weight part as an S^1 -representation. We have

$$(2\pi)^{n/2} z^{n-\frac{\deg}{2}} z^{c_1(X)} \widehat{\Gamma}_X \sim e_{S^1}(\mathcal{N}_+) = \frac{1}{\prod_i \prod_{k \geq 0} (\delta_i + kz)}.$$

3. MIRROR SYMMETRIC $\widehat{\Gamma}$ -CONJECTURE

The mirror symmetric $\widehat{\Gamma}$ -conjecture roughly speaking says that the $\widehat{\Gamma}$ -integral structure [10] on the symplectic side should correspond to a natural integral structure on the complex side. In this article, we do not discuss Hodge-theoretic mirror symmetry with integral structure anymore (we do not even give the definition of quantum cohomology or the $\widehat{\Gamma}$ -integral structure on it): we refer the reader to e.g. [12, 3, 11]. Instead, we discuss a more concrete conjecture, “mirror symmetric $\widehat{\Gamma}$ -conjecture” stated in terms of (exponential) periods. This problem is more of a topological nature, and does not involve counting rational curves.

The mirror symmetric $\widehat{\Gamma}$ -conjecture originates from Hosono’s conjecture [9], which says that mirror periods equal the pairing of certain explicit hypergeometric series with the Chern classes of vector bundles, for Batyrev mirror pairs of Calabi-Yau hypersurfaces. By taking the asymptotics of Hosono’s conjecture at the large complex structure limit, we arrive at the following conjecture.

Calabi-Yau case: Let $(Y, (-\log t)\omega)$ and (Z_t, Ω_t) be a Calabi-Yau mirror pair as above.

For a certain family of n -cycles $C_t \subset Z_t$, we have a K -theory class V on Y such that

$$(1) \quad \int_{C_t \subset Z_t} \Omega_t = \int_Y t^{-\omega} \widehat{\Gamma}_Y(2\pi i)^{\deg/2} \operatorname{ch}(V) + O(t^\epsilon)$$

as $t \rightarrow +0$, where $\epsilon > 0$ is a positive real number.

Fano/LG case: Let F and $W: (\mathbb{C}^\times)^n \rightarrow \mathbb{C}$ be a Fano/LG mirror pair as above. For a certain (possibly noncompact) n -cycle $\Gamma \subset (\mathbb{C}^\times)^n$, we have a K -theory class V on F such that

$$(2) \quad \int_\Gamma e^{-tW} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_1 \cdots x_n} = \int_F t^{-c_1(F)} \widehat{\Gamma}_F(2\pi i)^{\deg/2} \operatorname{ch}(V) + O(t^\epsilon)$$

as $t \rightarrow +0$, where $\epsilon > 0$ is a positive real number.

This conjecture has been verified for (weak) Fano toric orbifolds and certain complete intersections in them, for some choices of V and cycles C_t (or Γ), see [10, 11]. The paper [1] gives another proof for Batyrev mirror pairs based on the SYZ picture and tropical geometry.

Remark 3.1. (A) This conjecture is closely related to homological mirror symmetry (with symplectic side and complex side interchanged). Homological mirror symmetry predicts that the derived category of coherent sheaf on one side should be equivalent to the Fukaya (or Fukaya-Seidel) category of the other side:

$$\begin{aligned} D^b \operatorname{Coh}(Y) &\cong D^b \operatorname{Fuk}(Z_t) && \text{for Calabi-Yau mirror pairs} \\ D^b \operatorname{Coh}(F) &\cong D^b \operatorname{FS}(W) && \text{for Fano/LG mirror pairs} \end{aligned}$$

We expect that the K -classes V and the cycles C_t (or Γ) in the above conjecture should correspond to each other under homological mirror symmetry. Namely, when V comes from a coherent sheaf $\mathcal{V} \in D^b \operatorname{Coh}(Y)$ or $D^b \operatorname{Coh}(F)$, the cycle C_t (or Γ) should be the Lagrangian submanifold \mathcal{L} mirror to \mathcal{V} .

(B) The categorical equivalence in homological mirror symmetry is given only up to auto-equivalences, and hence the correspondence in (A) is ambiguous. In this conjecture, more precisely, we should consider the equivalence induced from Strominger-Yau-Zaslow (SYZ) dual torus fibrations (see [19, 6, 7]). The SYZ conjecture says that (in the Calabi-Yau case) we have special Lagrangian torus fibrations¹ $p_1: Y \rightarrow B$, $p_2: Z_t \rightarrow B$ with singularities

$$\begin{array}{ccc} Y & & Z_t \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

that are dual to each other, where B is a real n -dimensional manifold homeomorphic to a sphere. Here Y and Z_t are equipped with Ricci-flat Kähler metrics. It is expected that Z_t converges², as $t \rightarrow 0$, to the base B in the sense of Gromov-Hausdorff topology (where we normalize the metric so that the diameter is constant). The SYZ fibrations should induce

¹For tropical computation of periods, we do not need Ricci-flat metrics or special Lagrangian fibrations: we only need a weaker version as in the Gross-Siebert program [8].

²Likewise, we can consider a maximal degeneration of complex structures on Y , which corresponds under mirror symmetry to the large-radius limit for the Kähler (symplectic) structure on Z_t , and the complex degeneration induces the collapse $Y \rightarrow B$. When we take into account both the symplectic and complex structures, we should consider a mirror pair $(Y_s, (-\log t)\omega_Y) \leftrightarrow (Z_t, (-\log s)\omega_Z)$ of maximally degenerating families.

categorical equivalences as above³, and it is expected that a Lagrangian section of $p_2: Z_t \rightarrow B$ corresponds to a line bundle on Y . In particular, if we take a Lagrangian section $C_{0,t}$ (or Γ_0) corresponding to the structure sheaf, we have

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_{C_{0,t} \subset Z_t} \Omega_t &= \int_Y t^{-\omega} \widehat{\Gamma}_Y + O(t^\epsilon) \quad (\text{in the Calabi-Yau case}) \\ \int_{\Gamma_0} e^{-tW} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_1 \cdots x_n} &= \int_F t^{-c_1(F)} \widehat{\Gamma}_F + O(t^\epsilon) \quad (\text{in the Fano case}) \end{aligned}$$

as $t \rightarrow +0$. In examples such as Batyrev mirrors, $C_{0,t}$ arises as a “positive real locus”. In the Fano case, we expect that $\Gamma_0 = (\mathbb{R}_{>0})^n$.

When V is the class of the structure sheaf of a point, the corresponding cycle should be a fibre $p_2^{-1}(b)$ of the SYZ fibration $p_2: Z_t \rightarrow B$ in the Calabi-Yau case, and the compact torus $(S^1)^n \subset (\mathbb{C}^\times)^n$ in the Fano case. Since $\text{ch}(V) = [\text{pt}]$ in this case, we do not see nontrivial components of the $\widehat{\Gamma}$ -class in the asymptotics of the corresponding (exponential) periods. Tonkonog [20] showed that the exponential period $\int_{(S^1)^n} e^{-tW} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_1 \cdots x_n}$ of $(S^1)^n$ is a generating series of gravitational descendants of F (the pairing of the J -function and $[\text{pt}]$), when one chooses a monotone Lagrangian submanifold L in F and defines W by counting holomorphic discs with boundaries in L . See also (C) below.

(C) The above conjectures (1), (2), (3) say that the $\widehat{\Gamma}$ -class appears in the asymptotics of (exponential) periods of the mirror in the large complex structure limit $t \rightarrow 0$. The leading asymptotics are polynomials in $\log t$. The information of curve counting is contained in the higher order terms in t , which are exponentially small compared to the asymptotic part. If we include all the higher-order terms, the right-hand side in the conjecture should become

$$\begin{aligned} \int_Y J_Y(\omega \log t, -1) \cup \widehat{\Gamma}_Y(2\pi i)^{\deg/2} \text{ch}(V) &\quad (\text{in the Calabi-Yau case}) \\ \int_F J_F(c_1(F) \log t, -1) \cup \widehat{\Gamma}_F(2\pi i)^{\deg/2} \text{ch}(V) &\quad (\text{in the Fano case}) \end{aligned}$$

where $J_X(\tau, z)$ is the small J -function

$$J_X(\tau, z) = e^{\tau/z} \left(1 + \sum_i \sum_{d \in H_2(X, \mathbb{Z})} \left\langle \frac{\phi^i}{z(z - \psi)} \right\rangle e^{\langle \tau, d \rangle} \phi_i \right)$$

defined in terms of gravitational Gromov-Witten invariants (see [4, 3, 12] for the notation). In the Calabi-Yau case, we need to normalize the volume form Ω_t by a Hodge-theoretic condition, as discussed in [2]; we also need to assume that the parameter t of the mirror family $\{Z_t\}$ is normalized so that the mirror map is trivial $\tau = \omega \log t$.

Example 3.2. Let Y be a Calabi-Yau 3-fold. The asymptotic part of the first equation of (3) takes the form:

$$\int_Y t^{-\omega} \widehat{\Gamma} = (-\log t)^3 \underbrace{\int_Y \frac{\omega^3}{3!}}_{\text{volume of } Y} - (-\log t) \zeta(2) \int_Y \omega \cup c_2(Y) - \zeta(3) \underbrace{\int_Y c_3(Y)}_{\text{Euler number}}$$

Note that the leading term is the symplectic volume of $(Y, (-\log t)\omega)$.

³More precisely, the categorical equivalence would be given up to the twist by a line bundle, and the ambiguity would be fixed by choosing a Lagrangian section that corresponds to the structure sheaf.

Example 3.3. Let F be the projective space \mathbb{P}^n and let Y be a degree $n+1$ Calabi-Yau hypersurface in $F = \mathbb{P}^n$. The mirror of F is given by the Laurent polynomial

$$W = x_1 + \cdots + x_n + \frac{1}{x_1 \cdots x_n}$$

and the mirror of Y is given by a Calabi-Yau compactification Z_t of the fibre $W^{-1}(1/t)$ equipped with the holomorphic volume form

$$\Omega_t = \left. \frac{\frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}}{t \cdot dW} \right|_{W^{-1}(1/t)}.$$

The mirror symmetric $\widehat{\Gamma}$ -conjecture for these mirror pairs holds when V is the structure sheaf and the cycle is the positive real locus [10, 11]. We have

$$\begin{aligned} \int_{Z_t \cap (\mathbb{R}_{>0})^n} \Omega_t &= \int_Y t^{-c_1(F)} \widehat{\Gamma}_Y + O(t^\epsilon) \\ \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} e^{-tW} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_1 \cdots x_n} &= \int_F t^{-c_1(F)} \widehat{\Gamma}_F + O(t^\epsilon) \end{aligned}$$

for any ϵ with $0 < \epsilon < n+1$. The higher order term can be also given explicitly as hypergeometric series. We remark that the exponential period in the second line can be written as a Fourier transform of the period in the first line. (The first identity was obtained from the second one by inverse Fourier transformation in [11].)

Remark 3.4. The $\widehat{\Gamma}$ -conjecture for Fano manifolds [4] proposed by Galkin, Golyshev and the author does not rely on mirror symmetry (although it sometimes follows from the mirror symmetric $\widehat{\Gamma}$ -conjecture). It is formulated purely in terms of quantum cohomology of a Fano manifold. The $\widehat{\Gamma}$ -conjecture in [4] is related to the Stokes structure of the quantum connection.

4. PERIODS VIA TROPICAL GEOMETRY

We explain how to compute the asymptotics (3) of periods using tropical geometry. Firstly we see that the term

$$(-\log t)^n \int_Y \frac{\omega^n}{n!}$$

should appear as the leading term of the period $\int_{C_{0,t}} \Omega_t$ using the SYZ picture. Away from the discriminant locus (the singular locus of the fibration), the base B is equipped with a \mathbb{Z} -affine structure (i.e. an atlas as a topological manifold such that every coordinate change is \mathbb{Z} -affine linear, that is, belongs to $GL(n; \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n$) and the SYZ dual fibrations are locally modelled on

$$\begin{array}{ccc} T^*B/\Lambda^* & & TB/\Lambda \\ & \searrow^{p_1} & \swarrow^{p_2} \\ & B & \end{array}$$

where $\Lambda \subset TB$ is the lattice defined by the \mathbb{Z} -affine structure. Let x_1, \dots, x_n be \mathbb{Z} -affine local coordinates on B . Then the symplectic form on T^*B/Λ^* is given by $(-\log t)\omega = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j^*$ and the holomorphic volume form on TB/Λ is given by $\Omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$

with $z_j = x_j + iy_j$, where y_j^* are fibre coordinates on T^*B dual to dx_j and y_j are fibre coordinates on TB dual to $\partial/\partial x_j$. Hence we have

$$p_{1*} \left(\frac{((-\log t)\omega)^n}{n!} \right) = \text{affine volume form } dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \text{ on } B = s^*\Omega$$

where s is a section of p_2 . From this we expect the leading asymptotics:

$$\int_{C_{0,t}} \Omega_t \sim (-\log t)^n \int_Y \frac{\omega^n}{n!} \quad \text{as } t \rightarrow +0.$$

The error term of this approximation arises from the discriminant locus of the SYZ fibration.

We explain that tropicalization gives an approximate SYZ(-like) fibration and how we can compute periods tropically by means of example.

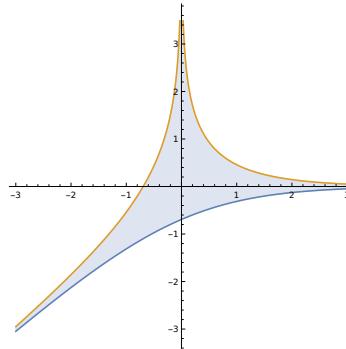


FIGURE 1. Amoeba

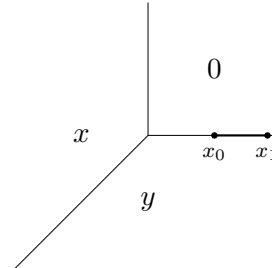


FIGURE 2. Tropical amoeba

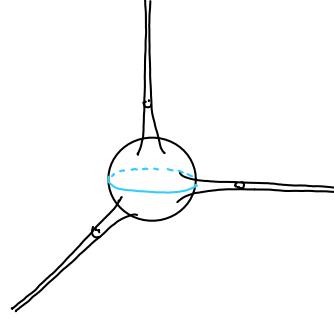
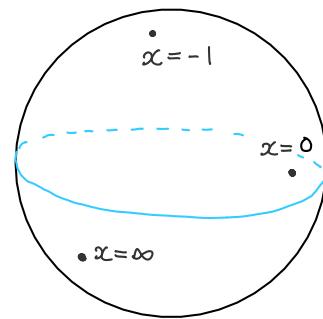


FIGURE 3. Pair of pants (\mathbb{P}^1 minus three points, on the left) and stretching the neck (on the right)

Example 4.1. We start with a simple example of tropicalization. Consider the variety

$$P = \{(X, Y) \in (\mathbb{C}^\times)^2 : X + Y + 1 = 0\}.$$

This is \mathbb{P}^1 minus three points, and is called a ‘pair of pants’. We consider the family of maps for $t > 0$:

$$\text{Log}_t: P \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (X, Y) \mapsto (x, y) = (\log_t |x|, \log_t |y|).$$

The image of the map is called amoeba. In this example, the image is determined by the triangle inequality $|X| - 1 \leq |Y| = |X + 1| \leq |X| + 1 \Leftrightarrow |t^x - 1| \leq t^y \leq |t^x + 1| \Leftrightarrow \log_t(1 + t^x) \leq y \leq \log_t|1 - t^x|$. See Figure 1. If we take the limit $t \rightarrow 0$, this approaches to the tropical amoeba (tropical variety) in Figure 2. It is given by the singular locus of the piecewise linear function $\min(x, y, 0)$. We can think of Log_t as an approximate torus fibration of P over

the tropical amoeba. For example, the fibre at $(x_0, 0)$ (with $x_0 > 0$) is approximately the circle $|X| = t^{x_0}$, $Y = -1$. Most of the points on P go very close to the origin, and three ‘neck’ neighbourhoods of the missing points $X = 0$, $X = -1$, $X = \infty$ are stretched to semi-infinite cylinders (see Figure 3). The integral of a holomorphic 1-form

$$\Omega = \frac{\frac{dX}{X} \wedge \frac{dY}{Y}}{d(X + Y + 1)} \Big|_{X+Y+1=0}$$

on a section over the interval $[x_0, x_1]$ in the x -axis is approximately the length of the interval multiplied by $(-\log t)$.

$$\int_{[x_0, x_1]} s^* \Omega \approx \int_{[x_0, x_1]} \frac{dX}{XY} \Big|_{X=t^x, Y=-1} = (-\log t)(x_1 - x_0).$$

Example 4.2. Next we consider a tropicalization of an elliptic curve. Let E_t be the affine elliptic curve:

$$E_t = \{(X, Y) \in (\mathbb{C}^\times)^2 : t(X + Y + \frac{1}{XY}) = 1\}$$

This is a compact elliptic curve minus 3 points. The limit of $\text{Log}_t(E_t)$ as $t \rightarrow 0$ (tropical amoeba) and the approximate torus fibration are depicted in Figure 4. The tropical amoeba is the singular locus of $\min(0, x + 1, y + 1, 1 - x - y)$. We see from this picture that E is composed of three ‘pairs of pants’ in the previous example. This is an instance of pairs-of-pants decomposition by Mikhalkin [16]. The approximate fibration given by Log_t is “singular” at three vertices, but we can make it a smooth fibration by adding three missing points (at infinity) to E_t and contracting the unbounded edges by a linear projection around each vertex. For example, around the vertex $(-1, -1)$ of the tropical amoeba, we can use the projection $x - y = \log_t |X| - \log_t |Y|$ along the ray $\mathbb{R}_{\geq 0}(-1, -1)$ to define the fibration. Then we get a smooth S^1 -fibration over the boundary $\partial\Delta^2 \cong S^1$ of the 2-simplex (shown in blue colour).

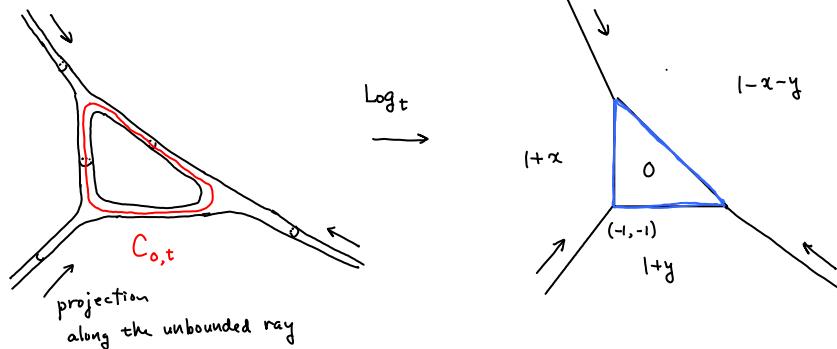


FIGURE 4. Tropical elliptic curve

The integral of the holomorphic 1-form

$$\Omega_t = \frac{d \log X \wedge d \log Y}{d(t(X + Y + 1/(XY)))} \Big|_{E_t}$$

over the compact cycle $C_{0,t}$ (shown in Figure 4) is asymptotically the same as the affine length ($= 9 = 3 \times 3$) of the cycle in the tropical base (shown in blue colour) multiplied by $(-\log t)$. This elliptic curve E_t is mirror to a cubic curve Y in \mathbb{P}^2 . A precise choice of the cubic curve Y does not matter, but Y can be for example:

$$Y_s = \{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{P}^2 : s(z_0^3 + z_1^3 + z_2^3) + z_0 z_1 z_2 = 0\}.$$

The dual SYZ fibration for Y_s is approximately given by the restriction of the moment mapping $\mu: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (with respect to the anticanonical class $-K_{\mathbb{P}^2}$ on \mathbb{P}^2) to Y_s .

$$\mu([z_0, z_1, z_2]) = \left(\frac{3|z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{3|z_2|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2} \right)$$

Note that the image of μ is the 2-simplex $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3\}$ and $\mu(Y_s)$ approaches its boundary as $s \rightarrow 0$. The affine length of the tropical cycle equals the symplectic volume $\int_{Y_s} c_1(\mathbb{P}^2) = 9$.

Example 4.3. Now we consider the case where the SYZ fibration has singularities. In dimension two, the following local model of singularities appears in the Gross-Siebert program (see [5, 14]).

$$\begin{aligned} Z &= \{(X_1, X_2, Y) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^\times : X_1 X_2 = 1 + Y\} = \mathbb{C}_x^2 \setminus \{X_1 X_2 = 1\} = \mathbb{P}^2 \setminus (\text{line} \cup \text{conic}) \\ \Omega &= \frac{d \log X_1 \wedge d \log X_2 \wedge d \log Y}{d \left(\frac{1+Y}{X_1 X_2} \right)} = \frac{dX_1 dX_2}{1 - X_1 X_2} = \frac{dX_1}{X_1} \wedge \frac{dY}{Y} = \frac{dX_2}{X_2} \wedge \frac{dY}{Y} \\ \omega &= \frac{i}{2} (dX_1 \wedge d\overline{X_1} + dX_2 \wedge d\overline{X_2}) \end{aligned}$$

This is a log CY variety, in the sense that Ω has log poles along the boundary divisor $\mathbb{P}^2 \setminus Z = \text{line} \cup \text{conic}$. The Lagrangian⁴ torus fibration on Z is given as follows. We first consider the symplectic reduction by the S^1 -action $(X_1, X_2, Y) \mapsto (e^{i\theta} X_1, e^{-i\theta} X_2, Y)$ at the level λ . The symplectic reduction is identified with the Y -plane \mathbb{C}^\times .

$$\{(X_1, X_2, Y) \in Z : |X_1|^2 - |X_2|^2 = \lambda\} / S^1 \cong \{Y \in \mathbb{C}^\times\}$$

By pulling back the standard Lagrangian torus fibration $\{|Y| = r\}_{r>0}$ on \mathbb{C}^\times , we see that Z is foliated by the family of Lagrangian tori

$$T_{\lambda,r} = \{(X_1, X_2, Y) \in Z : |X_1|^2 - |X_2|^2 = \lambda, |Y| = r\}$$

parametrized by $\lambda \in \mathbb{R}$ and $r > 0$. This gives a torus fibration on Z . Here $T_{0,1}$ is a unique singular fibre (pinched torus) with singularity at $(0, 0, -1) \in T_{0,1}$.

We compare this fibration with the tropicalization map

$$\text{Log}_t: Z \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (X_1, X_2, Y) \mapsto (\log_t |X_1|, \log_t |X_2|, \log_t |Y|)$$

for $0 < t \ll 1$. The last coordinate $\log_t |Y|$ is constant on $T_{\lambda,r}$, but the first two $\log_t |X_1|$, $\log_t |X_2|$ are not. We see however that the map Log_t approximates the torus fibration away from the singularity $X_1 = X_2 = 0$, i.e. away from the region where both $|X_1|$ and $|X_2|$ are small. When we set $x_1 = \log_t |X_1|$, $x_2 = \log_t |X_2|$, $y = \log_t |Y|$, for positive $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |y| > \epsilon &\implies x_i \approx \frac{1}{2} \log_t \left(\frac{\pm\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4r^2}}{2} \right) \text{ on } T_{\lambda,r} \\ x_1 < x_2 - \epsilon &\implies |X_1| \gg |X_2| \implies x_1 \approx \frac{1}{2} \log_t |\lambda| \text{ on } T_{\lambda,r} \\ x_2 < x_1 - \epsilon &\implies |X_2| \gg |X_1| \implies x_2 \approx \frac{1}{2} \log_t |\lambda| \text{ on } T_{\lambda,r}. \end{aligned}$$

The image $\text{Log}_t(Z)$ is approximated by the tropical amoeba, which is the singular locus of $\min(0, x_1 + x_2, y)$, as in Figure 5. From this picture we can see that the above three regions

⁴This is not special Lagrangian since $\Omega \wedge \bar{\Omega}$ is not a constant multiple of ω^2 . But we have $\omega|_{T_{r,\lambda}} = 0$ and $\text{Im } \Omega|_{T_{r,\lambda}} = 0$. Therefore the base of the torus fibration has a \mathbb{Z} -affine structure (complex affine structure) defined by fluxes of $\text{Im } \Omega$.

$(|y| > \epsilon)$, $(x_1 < x_2 - \epsilon)$, $(x_2 < x_1 - \epsilon)$ cover the region away from the singularity or the origin $(x_1, x_2, y) = (0, 0, 0)$. Therefore

the map (x_1, y) approximates the torus fibration in the region $(|y| > \epsilon) \cup (x_1 < x_2 - \epsilon)$;

the map (x_2, y) approximates the torus fibration in the region $(|y| > \epsilon) \cup (x_2 < x_1 - \epsilon)$.

Moreover these maps define (approximately) affine-linear coordinates in the respective regions. The map (x_i, y) contracts the face $(x_1 + x_2 \geq 0 = y)$ to the line $y = 0$ and send the union $(x_1 + x_2 = \min(0, y))$ of the other two faces isomorphically to \mathbb{R}^2 . These coordinates (x_1, y) , (x_2, y) are glued together as in Figure 6: the base of the Lagrangian fibration has the focus-focus singularity with monodromy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (see [14, 22]).

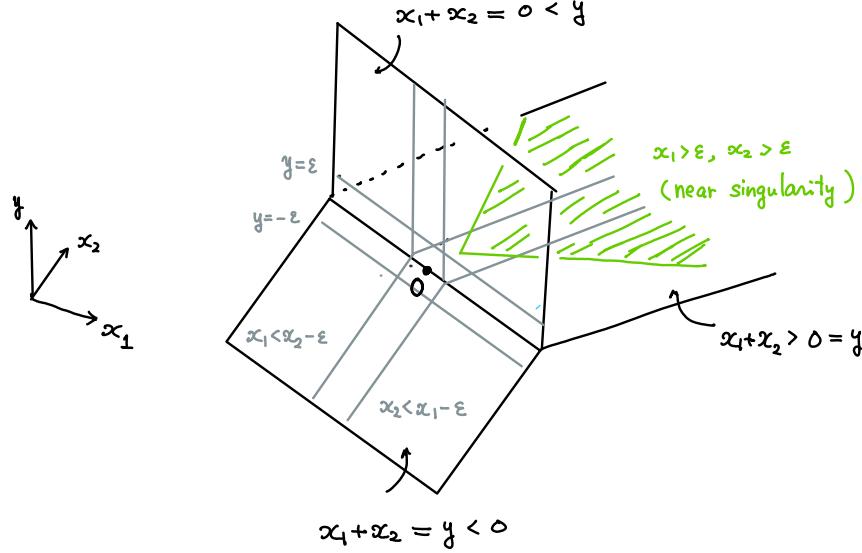


FIGURE 5. Tropical amoeba of Z

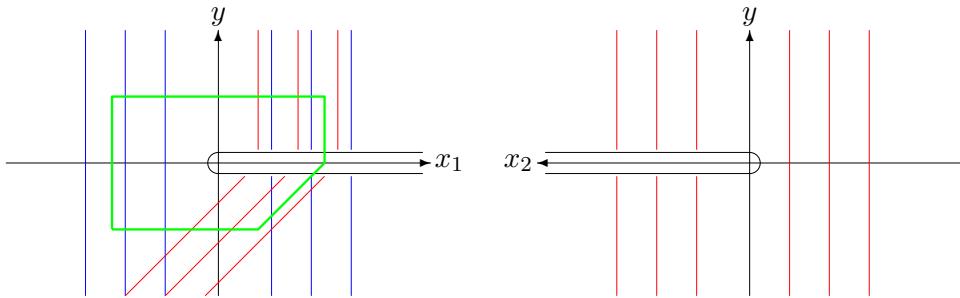


FIGURE 6. Two approximately affine-linear charts (x_i, y) . Each chart (x_i, y) is affine-linear away from the positive x_i -axis. The coordinate change between the charts is given by $x_1 + x_2 = \min(0, y)$. The green line shows the polytope corresponding to R .

Let $C \subset Z$ be the positive-real cycle given by $X_1 > 0, X_2 > 0, Y > 0$. The cycle C is homeomorphic to the image $\text{Log}_t(C) \subset \mathbb{R}^3$ under the map Log_t :

$$\text{Log}_t(C) = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = \log_t(1 + t^y)\}$$

The image $\text{Log}_t(C)$ is very close to the union ($x_1 + x_2 = \min(0, y)$) of two faces of the tropical amoeba. We now compute the period of C with respect to the holomorphic volume form Ω . The volume form Ω restricted to C can be identified with the affine area form in the coordinates (x_i, y) :

$$\Omega|_C = (-\log t)^2 dx_1 \wedge dy = (-\log t)^2 dx_2 \wedge dy.$$

To make the computation finite, we consider the integral over the finite region R delimited by the affine-linear equations (with a_1, a_2, b positive constant):

$$R = \{(X_1, X_2, Y) \in C : x_1 \leq -a_1, x_2 \leq -a_2, -b \leq y \leq b\}$$

The corresponding polytope in the affine chart is shown in green colour in Figure 6. The affine area of this polytope is $2(a_1 + a_2)b - b^2/2$. On the other hand, the actual shape of R in the coordinate (x_1, y) slightly differs from this polytope because of the error in tropicalization, see Figure 7. We have

$$\begin{aligned} \int_{R \subset C} \Omega &= \int_{\substack{x_1+x_2=\log_t(1+t^y) \\ x_i \geq -a_i, |y| \leq b}} (-\log t)^2 dx_1 dy \\ &= (-\log t)^2 \int_{-b}^b (a_2 + \log_t(1 + t^y) - (-a_1)) dy \\ &= (-\log t)^2 \left(\int_{-b}^b (a_1 + a_2 + \min(0, y)) dy - \int_{-b}^b (-\log_t(1 + t^y) + \min(0, y)) dy \right) \\ &= (-\log t)^2 (\text{area of the polytope}) - \zeta(2) + O(t^b). \end{aligned}$$

where $\zeta(2)$ arises from the ‘error in tropicalization’ integral (area of the blue region):

$$(4) \quad \zeta(2) = (-\log t)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (-\log_t(1 + t^y) + \min(0, y)) dy.$$

This means that the singularity contributes $-\zeta(2)$ to the period integral.

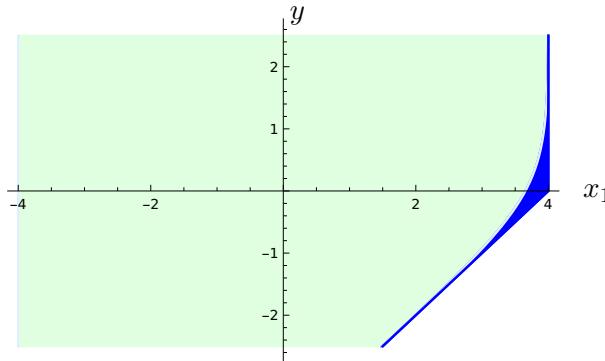


FIGURE 7. The region R in coordinates (x_1, y) . It is given by $-a_1 \leq x_1 \leq a_2 + \log_t(1 + t^y)$, $|y| \leq b$. This differs from the green polytope in Figure 6 by the blue region.

Example 4.4. Let (Z_t, Ω_t) be the family of affine K3 surfaces

$$Z_t = \{(W_1, W_2, W_3) \in (\mathbb{C}^\times)^3 : t(W_1 + W_2 + W_3 + \frac{1}{W_1 W_2 W_3}) = 1\}$$

$$\Omega_t = \frac{d \log W_1 \wedge d \log W_2 \wedge d \log W_3}{d(t(W_1 + W_2 + W_3 + \frac{1}{W_1 W_2 W_3}))}$$

This can be compactified to a K3 surface \overline{Z}_t so that Ω_t extends to a nowhere vanishing holomorphic 2-form. This family is mirror to a quartic K3 surface $Y \subset \mathbb{P}^3$ equipped with a symplectic form in the class $(-\log t)c_1(\mathbb{P}^3)$. The tropical amoeba of Z_t is given by the singular locus of $\min(w_1 + 1, w_2 + 1, w_3 + 1, 1 - w_1 - w_2 - w_3, 0)$ as in Figure 8. Observe that the compact chamber

$$\Delta = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : w_1 \geq -1, w_2 \geq -1, w_3 \geq -1, w_1 + w_2 + w_3 \leq 1\}$$

bounded by the tropical amoeba is the same as the moment polytope of \mathbb{P}^3 with respect to $c_1(\mathbb{P}^3)$. By collapsing⁵ all the unbounded faces of the tropical amoeba (not contained in Δ), we should get a torus fibration on \overline{Z}_t over the sphere $\partial\Delta \cong S^2$. This fibration has singularities, since there is no uniform direction to collapse the unbounded faces, unlike the case of Example 4.2. (In fact, we have many ways to collapse, yielding different fibration structures on \overline{Z}_t .)

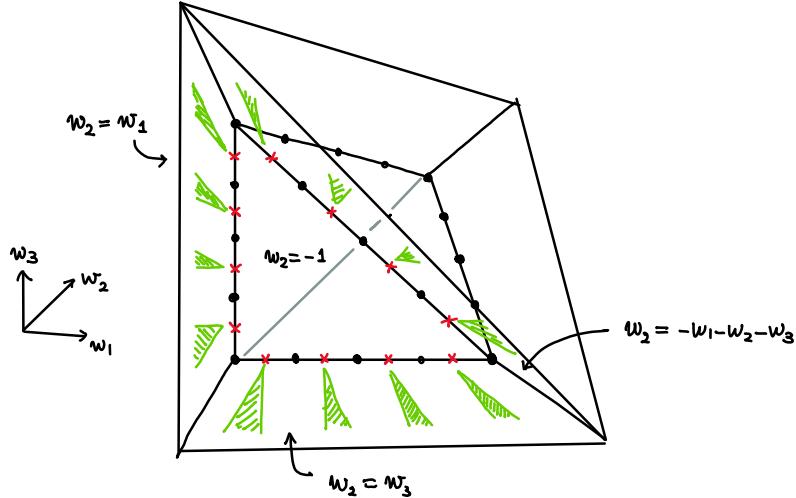


FIGURE 8. Tropical K3 surface. This is composed of the boundary of the 3-simplex Δ and 6 unbounded faces. The green regions are the Log_t -images of neighbourhoods of singularities (as in Figure 5) and the red crosses represent singular points of the affine structure on $\partial\Delta$.

As before, we consider the period of the positive real cycle $C_t = \{(W_1, W_2, W_3) \in Z_t : W_1 > 0, W_2 > 0, W_3 > 0\}$. It is homeomorphic to its image under Log_t :

$$\text{Log}_t(C_t) = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : t^{w_1+1} + t^{w_2+1} + t^{w_3+1} + t^{1-w_1-w_2-w_3} = 1\}.$$

As $t \rightarrow +0$, $\text{Log}_t(C_t)$ rapidly approaches $\partial\Delta$. We compute the period integral locally over the tropical base $\partial\Delta$, reducing the computation to the local model from Example 4.3. Since

⁵See [22] for collapsing tropical hypersurfaces.

the fibration has 24 singular points (see below), we expect to have the following asymptotics

$$(5) \quad \int_{C_t} \Omega_t = (-\log t)^2 (\text{affine area of } \partial\Delta) - 24\zeta(2) + O(t^\epsilon).$$

The number $-24\zeta(2)$ also arises from the $\widehat{\Gamma}$ -class of a quartic Y : $\int_Y \widehat{\Gamma}_Y = -\zeta(2) \int_Y c_2(Y)$. We shall explain the details below. We introduce a \mathbb{Z} -affine structure (with singularities) on $\partial\Delta$ as follows (see [8]).

- on the interior of 2-dimensional faces of $\partial\Delta$, we consider the subspace affine structure;
- on a neighbourhood of a lattice point v on edges (1-dimensional face) of $\partial\Delta$, we consider the affine structure induced from the projection $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\langle v \rangle$ and;
- we need to have a singularity (shown in red cross) somewhere between adjacent lattice points v_1, v_2 on an edge because the affine structures induced by the projections $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\langle v_i \rangle$, $i = 1, 2$ are not compatible with each other; we have 4 singularities on each edge, and thus $24 = 4 \times 6$ singularities in total.

The reason for this affine structure is as follows. Near the interior of the 2-dimensional face given by ($w_1 = -1$) for example, the cycle $C_t \cong \text{Log}_t(C_t)$ is approximated by the affine-linear subspace

$$t^{w_1+1} \approx 1$$

since the other terms $t^{w_2+1}, t^{w_3+1}, t^{1-w_1-w_2-w_3}$ are much smaller than t^{w_1+1} , and the volume form $\Omega_t|_{C_t}$ is approximated by the affine volume form (multiplied by $(-\log t)^2$):

$$\begin{aligned} \Omega_t|_{C_t} &= \frac{d \log t^{w_1+1} \wedge d \log t^{w_2+1} \wedge d \log t^{w_3+1}}{d(t^{w_1+1} + t^{w_2+1} + t^{w_3+1} + t^{1-w_1-w_2-w_3})} \\ &\approx \frac{(-\log t)^3 dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3}{d(t^{w_1+1})} \quad (\text{near the face } (w_1 = -1) \cap \Delta) \\ &= (-\log t)^2 dw_2 \wedge dw_3. \end{aligned}$$

Next, around the interior of the edge given by ($w_1 = w_2 = -1$) for example, the cycle C_t is approximated by

$$(6) \quad t^{w_1+1} + t^{w_2+1} \approx 1$$

since the other terms $t^{w_3+1}, t^{1-w_1-w_2-w_3}$ are exponentially small. The volume form $\Omega_t|_{C_t}$ is similarly approximated by the affine volume form on $\mathbb{R}^2/\langle v \rangle$ for a lattice point v on the edge.

$$\Omega_t|_{C_t} \approx \frac{(-\log t)^3 dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3}{d(t^{w_1+1} + t^{w_2+1})} = (-\log t)^2 (\text{affine volume form on } \mathbb{R}^3/\langle v \rangle).$$

In fact, if we complete v to a \mathbb{Z} -basis $v = v_1, v_2, v_3$ of \mathbb{Z}^3 and write (a_1, a_2, a_3) for the linear coordinates on \mathbb{R}^3 dual to (v_1, v_2, v_3) , we have $w_i(a_1 v) = -a_i$; thus $\frac{\partial w_1}{\partial a_1} = \frac{\partial w_2}{\partial a_1} = -1$ and

$$\begin{aligned} \frac{(-\log t)^3 dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3}{d(t^{w_1+1} + t^{w_2+1})} &= \frac{(-\log t)^3 da_1 \wedge da_2 \wedge da_3}{d(t^{w_1+1} + t^{w_2+1})} \\ &= \frac{(-\log t)^3 da_2 \wedge da_3}{\partial(t^{w_1+1} + t^{w_2+1})/\partial a_1} = (-\log t)^2 da_2 \wedge da_3. \end{aligned}$$

Note that the affine structure depends on the choice of v , but the volume form does not. Finally, around the vertex $v = (-1, -1, -1)$ of $\partial\Delta$, C_t is approximated by

$$t^{w_1+1} + t^{w_2+1} + t^{w_3+1} \approx 1$$

and $\Omega_t|_{C_t}$ is also approximated by the affine volume form on $\mathbb{R}^3/\langle v \rangle$.

We next examine the cycle C_t near the singularity. Let v_1, v_2 be adjacent lattice points on the edge $w_1 = w_2 = -1$. Choose an integral vector v_3 such that (v_1, v_2, v_3) is a \mathbb{Z} -basis of \mathbb{Z}^3 and let (a_1, a_2, a_3) be the linear coordinates on \mathbb{R}^3 dual to (v_1, v_2, v_3) . We may assume that v_3 is parallel to the face $w_1 = -1$ (i.e. $w_1(v_3) = 0$) by adding a linear combination of v_1 and v_2 if necessary. The coordinates w_1, w_2, w_3 can then be written as a \mathbb{Z} -linear combination of a_1, a_2, a_3 ; examining the values at v_1, v_2, v_3 we find that the coordinate change is of the form:

$$\begin{aligned} w_1 &= -a_1 - a_2 \\ w_2 &= -a_1 - a_2 + ma_3 \\ w_3 &= ja_1 + ka_2 + la_3 \end{aligned}$$

for some $j, k, l, m \in \mathbb{Z}$. Moreover, since $w_1 - w_2$ is a non-zero primitive covector, we have $m = \pm 1$. By flipping the sign of a_3 (or equivalently v_3), we may assume that $m = 1$. Recall from (6) that C_t is given by $t^{w_1+1} + t^{w_2+1} \approx 1$ around the edge. This can be rewritten as:

$$1 + t^{a_3} \approx t^{a_1+a_2-1} = t^{a_1-\frac{1}{2}} \cdot t^{a_2-\frac{1}{2}}.$$

Setting $X_1 = t^{a_1-\frac{1}{2}}$, $X_2 = t^{a_2-\frac{1}{2}}$, $Y = t^{a_3}$, this equation can be identified with the local model from Example 4.3. The holomorphic volume form $(-\log t)^2 da_1 \wedge da_2 = d\log X_1 \wedge d\log Y$ is also the same as in Example 4.3. If we introduce a Lagrangian fibration near $\{v_1, v_2\}$ by locally identifying Z_t with the local model in Example 4.3 by this identification (i.e. $W_1 = (tX_1X_2)^{-1}$, $W_2 = Y(tX_1X_2)^{-1}$, $W_3 = X_1^jX_2^kY^lt^{(j+k)/2}$), we see that the singularity appears at $(a_1, a_2, a_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ on the base, which corresponds to the mid-point of v_1 and v_2 . At each singular point, we have the error term $-\zeta(2)$ as we saw in Example 4.3 and arrive at the asymptotics (5).

We note that the choice of an (approximate) torus fibration, in particular, the choice of positions of singularities on $\partial\Delta$ has certain arbitrariness in the above discussion. We introduced singularities on $\partial\Delta$ for the purpose of computing periods (and we had to since we cannot cover $\partial\Delta$ by compatible affine charts) and the error terms in tropical approximation occurred from those singularities.

Example 4.5. We have seen that $\zeta(2)$ arises from 2-dimensional singularities through the ‘error in tropicalization’ integral (4). In dimension three, $\zeta(3)$ arises from the following ‘error in tropicalization’ integrals (see [1, Eqn (22), Proposition 4.5]):

$$\zeta(3) = \frac{1}{2}(-\log t)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left((\log_t(1+t^y))^2 - (\min(0, y))^2 \right) dy$$

and

$$\begin{aligned} (-\log t)^3 \int_U &(-\log_t(1+t^{y_1} + t^{y_2}) + \min(0, y_1, y_2)) dy_1 dy_2 \\ &= (-\log t)\ell\zeta(2) + \chi_U(0)\zeta(3) + O(1/(-\log t)) \end{aligned}$$

where U is a bounded domain in \mathbb{R}^2 such that ∂U intersects every stratum of the tropical curve $L = \text{Sing}(\min(0, y_1, y_2))$ transversally, ℓ is the total affine length of $U \cap L$ and

$$\chi_U(0) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \in U, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Remark 4.6. In dimension one, the relationship between periods and affine-length of tropical curves was studied in [17, 13]. For toric Calabi-Yau hypersurfaces, the relationship between periods and the radiance obstruction was studied in [22]. Ruddat and Siebert [18] computed

periods of cycles fibered over 1-dimensional curves on the SYZ base, in the framework of Gross-Siebert program.

REFERENCES

- [1] Mohammed Abouzaid, Sheel Ganatra, Hiroshi Iritani, Nick Sheridan, *The Gamma and the Strominger-Yau-Zaslow conjecture: a tropical approach to periods*, arXiv:1809.02177, Geometry & Topology 24 (2020) 2547–2602
- [2] Pierre Deligne, *Local behavior of Hodge structures at infinity*, Mirror symmetry, II, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 683–699.
- [3] Sergey Galkin and Hiroshi Iritani, *Gamma conjecture via mirror symmetry*, In Primitive forms and related subjects, Kavli IPMU 2014, 55–115, Adv. Stud. Pure Math. 83 (2019)
- [4] Sergey Galkin, Vasily Golyshev and Hiroshi Iritani, *Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: Gamma conjectures*, Duke Math. J. 165 (2016), no. 11, 2005–2077.
- [5] Mark Gross, *Special Lagrangian Fibers I: Topology* arXiv:alg-geom/9710006
- [6] Mark Gross, *The Strominger-Yau-Zaslow conjecture: From torus fibrations to degenerations*. arXiv:0802.3407.
- [7] Mark Gross, *Mirror Symmetry and the Strominger-Yau-Zaslow conjecture*. arXiv:1212.4220.
- [8] Mark Gross and Bernd Siebert, *From real affine geometry to complex geometry*. Ann. of Math. (2) 174 (2011) 1301–1428.
- [9] Shinobu Hosono, *Central charges, symplectic forms, and hypergeometric series in local mirror symmetry*, Mirror symmetry. V, pp.405–439, AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [10] Hiroshi Iritani, *An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds*. Adv. Math. 222 (2009), no. 3, 1016–1079.
- [11] Hiroshi Iritani, *Quantum cohomology and periods* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 61 (2011), 2909–2958.
- [12] 入谷 寛, 量子コホモロジーのガンマ構造について (On the Gamma structure of quantum cohomology), 数学, 第 68 卷, 第 4 号 (2016) 337–360.
- [13] Shinsuke Iwao, *Integration over tropical plane curves and ultradiscretization*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no.1, 112–148.
- [14] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman, *Affine structures and nonArchimedean analytic spaces*, The unity of mathematics, Progr. Math., vol.244, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, 321–385.
- [15] Rongmin Lu, The $\hat{\Gamma}$ -genus and a regularization of an S^1 -equivariant Euler class, J. Phys. A 41 (2008), no. 42, 425204 (13pp).
- [16] Grigory Mikhalkin, *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces*, Topology, 43 (2004), no.5, 1035–1065.
- [17] Grigory Mikhalkin and Ilia Zharkov, *Tropical curves, their Jacobians and theta functions, Curves and abelian varieties*. Contemp. Math., vol.465, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 203–230
- [18] Helge Ruddat and Bernd Siebert, *Period integrals from wall structures via tropical cycles, canonical coordinates in mirror symmetry and analyticity of toric degenerations* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 132 (2020), 1–82.
- [19] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow, *Mirror symmetry is T duality*, Nuclear Phys. B 479 (1996), no. 12, 243–259.
- [20] Dmitry Tonkonog, *String topology with gravitational descendants, and periods of Landau-Ginzburg potentials*. arXiv:1801.06921
- [21] David Treuman, *Complex K-theory of mirror pairs*. arXiv:1909.03018.
- [22] Yuto Yamamoto, *Periods of tropical Calabi-Yau hypersurfaces*. arXiv:1806.04239.

Email address: `iritani@math.kyoto-u.ac.jp`

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY, KITASHIRAKAWA-OIWAKE-CHO, SAKYO-KU, KYOTO, 606-8502, JAPAN

Castelnuovo-Mumford 正則量とシジギーに関する話題について

宮崎 誓 (Chikashi Miyazaki)

熊本大学大学院先端科学研究所（理学系）
cmiyazak@educ.kumamoto-u.ac.jp

1 Introduction

本論文は多項式イデアルのシジギーに関する Castelnuovo-Mumford 正則量について、その上限を記述する問題についての概説である。Castelnuovo-Mumford 正則量の基礎から始め、Eisenbud-Goto 予想をめぐる話を解説し、正則量上限を中心とした射影多様体の分類にも触れる。正則量の手法をベクトル束の分裂問題に応用することも述べる。

射影多様体の定義方程式（定義イデアル）の複雑さは「シジギー」によって表され、Hilbert のシジギー定理により、有限な極小自由分解が確定する。Castelnuovo-Mumford 正則量はシジギーに関する不变量であり、Mumford[46] が Castelnuovo のアイディアに基づいて定義した。1980 年代において、Eisenbud-Goto 予想 ([15, 20]) が提唱された。本論文は、1980 年代以降の歴史に沿って、Castelnuovo-Mumford 正則量の概説を行う。

1980 年代において、Gruson-Lazarsfeld-Peskine の記念碑的な論文 [19] がある。射影曲線の美しい結果はそれ以降の研究のモデルにもなっている。Bayer-Mumford の概説 [7] はその後の発展に指針を与えた。曲面における Pinkham, Lazarsfeld[27] の手法は、1990 年代以降には、Mather 理論 [33] を用いる Kwak[25], Chiarli-Chiantini-Greco[13] による 14 次元以下の非特異射影多様体に対して Eisenbud-Goto 予想が弱い意味で解決したことにもつながる。

さて、Eisenbud-Goto の論文 [15]においては Cohen-Macaulay 多様体（座標環が CM）の場合の予想の成立にも触れている。この論文に触発されて、Stückrad-Vogel[57] は、Griffiths-Harris の Uniform Position Lemma(cf. [2]) を用いて、0 次元の問題に持ち込み、1980 年代までに可換環論において発展した Buchsbaum 環の理論を Eisenbud-Goto 予想の研究に応用し、良い性質の環についての正則量上限を得た。この手法は、Hoa-Miyazaki[21], Nagel-Schenzel[49] の 1990 年代の結果に受け継がれる。これらの総説をしながら、2010 年前後での講演者による Castelnuovo-Mumford 正則量と Buchsbaum 多様体の分類の研究 [40, 41] に触れる。

トーリック多様体の場合、 $\text{codim } X = 2$ のとき、Peeva-Sturmfels[54] が $\text{reg } X \leq \deg X - 1$ が成り立つことを示している。Bayer-Peeva-Sturmfels[8] に始まる Scarf 複体、Cellular

複体の研究については、Sturmfels の講義録 [38] を概説書として挙げたい。

Eisenbud-Goto 予想の根本的解決は、現在の見地からは、2010 年頃まで停滞してきたとも言えかねない。2010 年以降の目覚ましい発展は、Noma[52], Kwak-Park[26] による非特異射影多様体での \mathcal{O}_X -regularity についての Eisenbud-Goto 予想の解決がまず頭に浮かぶ。Generic Projection や Double Point Divisor の手法に基づくものである。

最も衝撃的だったのは McCullough-Peeva による予想の否定的解決 [36] である。証明の手法においても極めて興味深い。Rees-like Algebra を用いてイデアルを変形すること、および、重み付き同次多項式を通常の同次多項式に変形することを用いて、反例を構成するという方法を用いている。これらの最近の結果 (cf. [37]) を俯瞰し、証明のポイントなどにも触れる。

最後に、Castelnuovo-Mumford 正則量の手法の射影空間のベクトル束の分裂問題への応用を述べる。有名な射影空間上のベクトル束の Horrocks 判定法についての 4 つの証明を述べ、ベクトル束の代数的研究についてシジギー論的手法を考えたい。

代数学シンポジウムでのサーベイ講演の機会を与えていただいた森脇淳先生、下元数馬先生に深く感謝します。解説書を含めた文献をできるだけ引用し、深く学びたい読者の参考になるように心がけました。

2 Castelnuovo-Mumford Regularity Basics

この章では、Castelnuovo-Mumford 正則量の基本的な事項を述べる。詳しい解説は、Bayer-Mumford[7], Eisenbud[16], Lazarsfeld[28] を参考にされたい。

この論文を通して、次の記号を用いる。 k を代数閉体とし、 $S = k[x_0, \dots, x_n]$ を多項式環とし、 $\mathfrak{m} = S_+ = (x_0, \dots, x_n)$ と書く。射影空間を $\mathbb{P}^n = \text{Proj } S$ とおく。

定義・命題 2.1 (Mumford[46]). \mathbb{P}^n 上の連接層 \mathcal{F} 、整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対して、 \mathcal{F} が ‘ m -regular’ であるとは、任意の $i \geq 1$ に対して、

$$H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-i)) = 0$$

が成り立つときにいう。これは、 $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(j)) = 0, i \geq 1, i+j \geq m$ と同値であり、 \mathcal{F} が ‘ m -regular’ であれば、 $\mathcal{F}(m)$ が大域生成であることはよく知られている。

連接層 \mathcal{F} の Castelnuovo-Mumford 正則量を $\text{reg } \mathcal{F} := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{F} \text{ is } m\text{-regular}\}$ と定義する。また、射影スキーム $X \subseteq \mathbb{P}^n$ の Castelnuovo-Mumford 正則量を $\text{reg } X := \text{reg } \mathcal{I}_X$ と定義する。

命題 2.1 の証明の概略. 連接層 \mathcal{F} が m -regular であれば、 $(m+1)$ -regular であること、および、 $\Gamma(\mathcal{F}(m)) \otimes \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}(m+1))$ が全射となることが、 n についての帰納法で示される。

そこで、 $\ell \gg 0$ のとき、 $\Gamma(\mathcal{F}(\ell)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{F}(\ell)$ が全射となることを用いて、 $\Gamma(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{F}(m)$ が全射、つまり、 $\mathcal{F}(m)$ が大域生成であることを得る。□

注意 2.2. Castelnuovo-Mumford 正則量の定義はいくつかの方向に拡張されている。例えば、多重射影空間、重み付き射影空間、グラスマン多様体、大域生成の豊富な直線束などである。その場合、上記の性質が保たれているかは、 \mathbb{P}^n 上での証明を見直すとわかる。(cf. [29])

さて、環と加群を用いて定義をする。

定義 2.3. 多項式環 S 上の有限生成次数加群 M をとる。このとき、 $i = 0, \dots, n+1$ に対して、 $a_i(M) = \max\{\ell \in \mathbb{Z} | [H_m^i(M)]_\ell \neq 0\}$ と定義する。さらに、 $\text{reg } M = \max\{a_i + i | i = 0, \dots, n+1\}$ を M の Castelnuovo-Mumford 正則量と定義し、 $\text{maxdeg}(M)$ を M の最小の生成元の最大次数と定義する。

注意 2.4. 射影スキーム $X \subseteq \mathbb{P}^n$ の定義イデアルを $I := \Gamma_* \mathcal{I}_X = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_X(\ell))$ とし、座標環を $R := S/I$ とすると、 $\text{maxdeg}(I) \leq \text{reg } I$ が成り立ち、 $\text{reg } X = \text{reg } \mathcal{I}_X = \text{reg } R + 1 = \text{reg } I$ となる。

さて、 I の次数 S 加群としての最小自由分解を考える。シジジー定理により、有限性が言え、中山の補題により、

$$0 \rightarrow F_s \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow I \rightarrow 0$$

が同型の除いて一意的に定まる。ここで、 $F_i = \bigoplus_j S(-\alpha_{i,j})$ は次数自由 S 加群であり、写像 $F_{i+1} \rightarrow F_i$ は齊次多項式の行列で表される。

定理 2.5 (cf. [7, 15]). $\text{reg } X = \max_{i,j} \{\alpha_{i,j} - i\}$

この定理は「Castelnuovo-Mumford 正則量は、定義方程式の複雑さを量る」ということを表している。この言い方は「よくある決まる文句」でもあり、「完全交叉」が「最も複雑」で、「最小次数の多様体」が「最も複雑でない」ことにもなるので、注意すべきである。次の言い換えは非常に面白い。

命題 2.6 (cf. [15]). 次数 S 加群 M が m -regular であることの必要十分条件は $M_{\geq m} := \bigoplus_{\ell \geq m} M_\ell$ が m 線形な自由分解を持つ、つまり、 $M_{\geq m}$ の極小自由分解が

$$0 \rightarrow F_s \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M_{\geq m} \rightarrow 0,$$

となることである。ただし、 $F_i = \bigoplus S(-m-i)$, $i = 0, \dots, s$ は次数自由 S 加群である。

証明の概略. 短完全列 $0 \rightarrow M_{\geq m} \rightarrow M \rightarrow M/M_{\geq m} \rightarrow 0$ より、完全列

$$0 \rightarrow H_m^0(M_{\geq m}) \rightarrow H_m^0(M) \rightarrow M/M_{\geq m} \rightarrow H_m^1(M_{\geq m}) \rightarrow H_m^1(M) \rightarrow 0$$

および $H_m^i(M_{\geq m}) \cong H_m^i(M)$, $i \geq 2$ を得る。これより、 $M_{\geq m}$ が m -regular であることは容易にわかる。□

注意 2.7. Lazarsfeld[28] にも解説されている。 $\mathcal{F}(m)$ の大域生成を用いて、完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m) \rightarrow \mathcal{F}(m) \rightarrow 0,$$

をつくると、 \mathcal{F}_1 は $(m+1)$ -regular になる。これを繰り返すと、(有限とは限らない) 線形な自由分解

$$\cdots \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m-2) \rightarrow \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m-1) \rightarrow \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

が得られる。この場合は、大域切断を取っても、完全性は保たれる。

定義 2.8. 有限生成次数 S 加群 M の極小自由分解を \mathbf{F}_\bullet と書き、 $F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{ij}}$ とする
と、 $\beta_{ij} = \dim_k [\mathrm{Tor}_i^S(M, k)]_j$ となる。この β_{ij} を Betti 数と呼ぶ。Betti table とは $\beta_{i,i+j}$
を (i, j) の場所に書いたものである。Betti table の例は (2.10), (2.11) を見よ。

注意 2.9. 有限生成次数 S 加群 M の射影次元、Castelnuovo-Mumford 正則量は Betti 数
を用いて、 $\mathrm{proj.dim}_S M = \max\{i | \beta_{ij} \neq 0\}$, $\mathrm{reg} M = \max\{j | \beta_{i,i+j} \neq 0\}$ と書ける。また、
 M の Poincaré 級数 M は $P(M, t) = \sum_i h_M(i) t^i = \frac{\sum_i (-1)^i \beta_{ij} t^j}{(1-t)^{n+1}}$ と表される。

例 2.10. $X \subseteq \mathbb{P}^n$ を (d_1, \dots, d_r) の完全交叉とすると、極小自由分解は

$$0 \rightarrow S(-d_1 - \dots - d_r) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{j=1, \dots, r} S(-d_j) \rightarrow S \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

$I = (f_1, \dots, f_r)$ の定義方程式からなる Koszul 複体である。したがって、 $\mathrm{reg} X = d_1 + \dots + d_r - r + 1$ となる。特に、 $r = 2$, $\deg f_1 = 2$, $\deg f_2 = 3$ のとき、Betti table は

	0	1	2
0	1	-	-
1	-	-	-
2	-	1	-
3	-	1	-
4	-	-	1

となり、 $\mathrm{reg} X = 4$ がわかる。

例 2.11. C を $\mathbb{P}^1 \ni (s : t) \mapsto (s^3 : s^2t : st^2 : t^3) \in \mathbb{P}^3$ で定義される 3 次の有理正規曲線と
する。曲線 C の定義イデアル $I(\subset S = k[x, y, z, w])$ は行列 $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{bmatrix}$ の 2×2 小
行列式で定義される。

ここで、 $f = yw - z^2$, $g = yz - xw$, $h = xz - y^2$ とおく。すると、 $I = (f, g, h)$ の極小
自由分解は

$$0 \rightarrow S(-3) \oplus S(-3) \xrightarrow{t^A} S(-2) \oplus S(-2) \oplus S(-2) \xrightarrow{[f \ g \ h]} S \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

となり、 $\mathrm{reg} C = 2$ が言える。

また、Betti table は

	0	1	2
0	1	-	-
1	-	-	-
2	-	3	2

となる。

射影スキーム $X(\subset \mathbb{P}^n)$ は、 $\mathrm{reg} X \geq 1$ を満たすが、非退化、つまり、 X がどの超平面
にも含まれていないときは、 $\mathrm{reg} X \geq 2$ である。

予想 2.12 (Eisenbud-Goto Conjecture). 非退化射影多様体 $X(\subset \mathbb{P}^n)$ に対して、 $\mathrm{reg} X \leq \deg X - \mathrm{codim} X + 1$ が成立する。

注意 2.13. Eisenbud-Goto 予想の右辺も 2 以上であり、 $\deg X = \mathrm{codim} X + 1$ のときは、
最小次数の多様体と呼ばれ、2 次超曲面、Veronese 曲面、有理正規スクロール、もしくは、
これらの錐になることが知られている。また、右辺は、 $\Delta(X, \mathcal{O}_X(1)) + 2$ とも書け、予想
を大域生成の豊富な直線束に拡張できる。

例 2.14. X が「既約」および「被約」の条件は必要であり、次のような例がある。

1. \mathbb{P}^3 の捩れの位置にある直線を $I = (x, y) \cap (z, w) = (xz, xw, yz, yw) \subset k[x, y, z, w]$ とする。
2. \mathbb{P}^3 の 2 重直線を $I = (xw - yz, x^2, xy, y^2) \subset k[x, y, z, w]$ とする。

いずれも $\text{reg } I = \deg S/I = \text{ht } I = 2$ となる。

3 Gruson-Lazarsfeld-Peskine の論文

この章では、有名な Gruson-Lazarsfeld-Peskine の論文の筋書きを述べる。ここでは触れないが、原論文では正則量上限の射影曲線と割線の関係にページを割いている。これは、その後の Noma[50, 51] の結果に発展する。

定理 3.1 ([19]). $\text{reg } C \leq d + 2 - n$ が成り立つ。等号が成立するのは、次のいずれかの場合である。

1. $d = n$ 、つまり、 C は有理正規曲線
2. $d = n + 1$
3. $d > n + 1$, でかつ C が $(d + 2 - n)$ -secant line を持つ。

定理 3.2 ([19]). 非退化射影曲線 $C \subseteq \mathbb{P}^n$, $\deg C = d$ が、有理曲線でも橢円正規曲線でもないとき、 $\text{reg } C \leq d + 1 - n$ が成り立つ。

補題 3.3. 曲線 C の正規化を $p : \tilde{C} \rightarrow C \subseteq \mathbb{P}^n$ とし、 $\mathcal{M} = p^*\Omega_{\mathbb{P}^n}(1)$ とおく。 C 上の直線束 \mathcal{A} に対して、 $H^1(\tilde{C}, \wedge^2 \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}) = 0$ であれば、 $\text{reg } C \leq h^0(\mathcal{A})$ が成立する。

補題 3.4. $d = \deg p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ とおく。 $h^0(\mathcal{A}) = d + 2 - n$ および $h^1(\wedge^2 \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}) = 0$. を満たす豊富な直線束 $\mathcal{A} \in \text{Pic } C$ が存在する。

証明の概略. $p : \tilde{C} \rightarrow C \subseteq \mathbb{P}^n$ のグラフを $\Gamma \subset \tilde{C} \times \mathbb{P}^n$ とする。射影をそれぞれ $\pi : \tilde{C} \times \mathbb{P}^n \rightarrow \tilde{C}$, $f : \tilde{C} \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ と書き、 $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(1) = p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \subseteq H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(1))$ とおく。次の完全列は Euler 列のそれぞれの引き戻しである。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \pi^*\mathcal{M} & \rightarrow & V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C} \times \mathbb{P}^n} & \rightarrow & \pi^*\mathcal{O}_{\tilde{C}}(1) \rightarrow 0 \\ & & & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & f^*\Omega_{\mathbb{P}^n}(1) & \rightarrow & V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C} \times \mathbb{P}^n} & \rightarrow & f^*\mathcal{O}_{\tilde{C}}(1) \rightarrow 0, \end{array}$$

すると、 p のグラフ $\Gamma (\subseteq \tilde{C} \times \mathbb{P}^n)$ は $\pi^*\mathcal{M} \rightarrow f^*\mathcal{O}_C(1)$ で定義され、完全列

$$\pi^*\mathcal{M} \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C} \times \mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma} \rightarrow 0.$$

を得る。ここで、 $\cdot \otimes \pi^*\mathcal{A}$ を取り、Koszul 分解を考えると、

$$\pi^*(\wedge^2 \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}) \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2) \rightarrow \pi^*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}) \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \rightarrow \pi^*\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma} \otimes \pi^*\mathcal{A} \rightarrow 0.$$

となり、これより完全列

$$H^0(\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{u} H^0(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow p_* \mathcal{A} \rightarrow 0.$$

が得られる。ここで、 $\mathcal{J}(\subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ を $p_* \mathcal{A}$ の Fitting イデアル、即ち、 $\mathcal{J} = \text{Im}(\wedge^{n_0} u)$, $n_0 = h^0(\mathcal{A})$ とする。もちろん、 $\text{Supp } p_* \mathcal{A} = C$ である。

このようにして、 u の Eagon-Northcott 複体

$$\cdots \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n_0 - 2)^\oplus \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n_0 - 1)^\oplus \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n_0)^\oplus \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{J} \rightarrow 0$$

が得られる。ここで ε は全射であり、この複体は C の外では完全であるので、 \mathcal{J} が n_0 -regular、即ち、 \mathcal{I}_X が n_0 -regular であることが言える。□

GLP 論文の解説は、Eisenbud[16] にも書かれている。さらに、Ein の講義をまとめた [14], Lecture 24 の証明法は、2 次元以上での Lazarsfeld の方法を射影曲線にも適用した方でわかりやすい。Eagon-Northcott 複体については、Bruns-Vetter[10] が分かりやすい。ただし、代数幾何の手法がわかり、簡単に済ませたいのであれば、Ein が簡明な解説を述べている。

命題 3.5 ([14], Lecture 24). スキーム X 上のベクトル束 \mathcal{E}, \mathcal{F} , ($\text{rank } \mathcal{E} = e, \text{rank } \mathcal{F} = f$) の写像 $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ に対して、次の複体

$$0 \rightarrow \wedge^e \mathcal{E} \otimes S^{e-f}(\mathcal{F}^*) \rightarrow \cdots \rightarrow \wedge^{f+1} \mathcal{E} \otimes S^1(\mathcal{F}^*) \rightarrow \wedge^f \mathcal{E} \rightarrow \wedge^f \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

が得られ、これを *Eagon-Northcott* 複体という。 $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ が全射のとき、*Eagon-Northcott* 複体は完全列である。

4 Lazarsfeld の構成法と Generic Projection Method

Eisenbud-Goto 予想への試みは、GLP 論文 [19] 以降は、Lazarsfeld の構成法 [27] でなされてきた。Kwak[25] が Mather 理論を取り入れ、3 次元についても弱い意味で成立することを示すまでには、長い年月がかかった。この方法は最終的に Chiantini-Chiarli-Greco[13] によって次の形の定理になった。この章では、その筋書きを述べる。

定理 4.1. 非退化で非特異な射影多様体 $X(\subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N)$ に対して、 $n = \dim X \leq 14$ であれば、 $\text{reg } X \leq \deg X - \text{codim } X + 1 + (n - 2)(n - 1)/2$ が成立する。

証明の概略を述べよう。一般射影 (generic projection) を $p : X(\subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ とし、座標変換により、 $p((x_0 : \cdots : x_{n+1} : x_{n+2} : \cdots : x_N)) = (x_0 : \cdots : x_{n+1})$ と書く。 p は ‘generic’ なので、各ファイバーは有限である。ここで標準的な写像を次のように定める。

- $\psi_0 : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow p_* \mathcal{O}_X$: a canonical map
- $\psi_1 = \sum_{n+2 \leq j \leq N} \phi_{x_j} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^\oplus \rightarrow p_* \mathcal{O}_X$, where $\phi_{x_j} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{x_j} p_* \mathcal{O}_X$
- $\psi_2 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq N} \phi_{x_i x_j} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)^\oplus \rightarrow p_* \mathcal{O}_X$, where $\phi_{x_i x_j} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2) \xrightarrow{x_i x_j} p_* \mathcal{O}_X$

これらの写像の和を $w = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 : \mathcal{G} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^\oplus \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)^\oplus \rightarrow p_* \mathcal{O}_X$ とすると、次の補題が得られる。

補題 4.2. $\mathcal{F} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}}(-3) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}}(-n)$ とおく。全射 $v : \mathcal{F} \rightarrow p_* \mathcal{O}_X$ が存在し、 $v|_{\mathcal{G}} = w$ を満たすとする。そのとき、 $\text{reg } X \leq d - N + n + 1 + (n - 1)(n - 2)/2$ が得られる。

補題 4.3. If $p : X(\subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ が ‘good’ であれば、全射 $\mathcal{F} \rightarrow p_* \mathcal{O}_X$ が存在する。

定義 4.4. 射影 $p : X(\subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ に対して、局所閉集合 $S_j = \{z \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1} \mid \deg p^{-1}(z) = j\}$ とおく。射影 p が ‘good’ であるとは $\dim S_j \leq \max\{-1, n - j + 1\}$ for all j のときと言ふ。

定理 4.5 (Mather 理論 [33]). $n = \dim X \leq 14$ であれば、 p は ‘good’ である。

注意 4.6. Behesti-Eisenbud[9] によると、Lazarsfeld による「一般射影 $p : X(\subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ のファイバーの次数 $\deg p^{-1}(z)$, $n = \dim X$ が指數関数的に大きくなりうる」ということの証明が書かれている。このことは、「一般射影を用いる Eisenbud-Goto 予想へのアプローチ」は高次元ではなかなかうまくはいかないことを示唆している。

5 Noma, Kwak-Park による \mathcal{O}_X -regularity 予想の解決

Eisenbud-Goto 予想において、非退化射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して、 $\text{reg } X = \text{reg } \mathcal{I}_X \leq \deg X - \text{codim } X + 1$ が示したいことである。これは、 $m = \deg X - \text{codim } X + 1$ とおくとき、(1) $H^1(\mathcal{I}_X(m-1)) = 0$ および (2) $H^i(\mathcal{I}_X(m-i)) = 0$, $i \geq 2$ の 2 つを示すことと同じである。つまり、次と同値である。

- (1) $X \subset \mathbb{P}^N$ が $(m-1)$ -normal であること、つまり、 $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m-1)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X(m-1))$ が全射であること
- (2) $\text{reg } \mathcal{O}_X \leq m-1$.

Noma, Kwak-Park は上記の (2) についての結果を得た。ここでは概略だけ述べるが、証明を理解するためには、原論文の参考文献から読まなければならない。

定理 5.1 ([52, 26]). 標数 ℓ の代数閉体 k 上の非退化で非特異な射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して、 \mathcal{O}_X は $(\deg X - \text{codim } X)$ -regular である。

証明の概略. $n = \dim X$, $d = \deg X$, $c = \text{codim } X = N - n$ とおく。 X の一般的な位置にある $N - n - 1$ 個の点からの内点射影 (inner projection) $p : X(\subset \mathbb{P}^N) \cdots \rightarrow \bar{X}(\subset \mathbb{P}^{n+1})$ をとる。このとき、 $\deg \bar{X} = d - c + 1$ である。

この内点射影の Double Point Divisor を (cf. [7, Appendix Section 3,4])

$$D_{\text{inn}} = -K_X + (d - n - c - 1)H.$$

とすると、 D_{inn} は semiample であり、小平消滅定理を用いると、 $\text{reg } \mathcal{O}_X \leq d - c$ を得る。
□

6 Buchsbaum 環の手法からのアプローチと射影多様体の分類

本章は、Buchsbaum 環の研究の手法が Castelnuovo-Mumford 正則量の上限の問題に応用されたトピックスであり、著者も手がけてきた分野である。正則量を Castelnuovo 型の不等式に現れる $[(\deg X - 1)/\operatorname{codim} X]$ の式を用いて上限を求め、その上限を満たす射影多様体を分類することを行う。

定義 6.1. 射影スキーム $X \subset \mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$ 、ただし S は多項式環で $\mathfrak{m} = S_+$ とする。

1. X が ACM であるとは、 $H^i(\mathcal{I}_X(\ell)) = 0$ $1 \leq i \leq \dim X$, $\ell \in \mathbb{Z}$ のときにいう。
2. X が Buchsbaum であるとは、 $\dim X \cap L = \dim X - \operatorname{codim} L$ を満たすすべての r -平面 L に対して、 $\mathfrak{m}H_*^i(\mathcal{I}_{X \cap L}) = 0$, $1 \leq i \leq \dim X \cap L$ が成り立つときをいう。

次の定理が初期の結果である。

定理 6.2 (Eisenbud-Goto[15]). 非退化射影多様体 X が ACM であるとき、 $\operatorname{reg} X \leq \deg X - \operatorname{codim} X + 1$ が成り立つ。

定理 6.3 (Stückrad-Vogel[57]). 非退化射影多様体 X が Buchsbaum であるとき、 $\operatorname{reg} X \leq [(\deg X - 1)/\operatorname{codim} X] + 1$ が成り立つ。

定理 6.4 (Trung-Valla[59], Nagel[47]; Yanagawa[62], Nagel[48]; Miyazaki[41]).

- (1) 非退化射影多様体 X が ACM であるとする。このとき、 $\deg X \gg 0$ でかつ $\operatorname{reg} X = [(\deg X - 1)/\operatorname{codim} X] + 1$ であれば、 X は最小次数の多様体の因子である。
- (2) 非退化射影多様体 X が Buchsbaum であるとする。このとき、 $\deg X \gg 0$ でかつ $\operatorname{reg} X = [(\deg X - 1)/\operatorname{codim} X] + 1$ であれば、 X は最小次数の多様体の因子である。
- (3) 非退化射影多様体 X が Buchsbaum であるとする。このとき、 $\deg X \gg 0$ でかつ $\operatorname{reg} X = [(\deg X - 1)/\operatorname{codim} X]$ であれば、 X は最小次数の多様体もしくは Del Pezzo 多様体の因子である。

簡単のために、 $\deg X \gg 0$ と書いたが、具体的にも表せる。

注意 6.5. 非退化射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ は、 $\deg X \geq \operatorname{codim} X + 1$ が成り立ち、等号が成立するときに、最小次数の多様体という。このとき、 X は(a) 2次超曲面(b) \mathbb{P}^5 内の Veronese 曲面(c) 有理正規線織面もしくは(d) これらの錐であることが知られている。また、Del Pezzo 多様体の定義は [17, Chapter I (6.3)] による。

非退化な Buchsbaum 多様体 $V \subseteq \mathbb{P}^{n+\dim V}$ に対して、一般超平面切断を繰り返して、射影曲線 $C = V \cap H_1 \cap \dots \cap H_{\dim V-1}$ をとる。さらに、一般超平面切断により、0 次元スキーム $X = C \cap H \subseteq H (\cong \mathbb{P}^n)$ をとる。このとき、Buchsbaum 環の性質より、 $\operatorname{reg} V = \operatorname{reg} C = \operatorname{reg} X$ が言え、 X が 0 次元スキームであることから、

$$\operatorname{reg} X = \min\{m \mid H^1(\mathcal{I}_X(m-1)) = 0\} = \min\{t \mid \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(t)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X(t))\} + 1$$

となる。つまり、0 次元スキームの点の配置の問題に帰着される。 $\operatorname{char} k = 0$ のとき、 X は ‘uniform position’ であり、 $\operatorname{char} k > 0$ のとき、は ‘uniform position’ になるとは限らない

い [55]。しかしながら、正標数の場合も (Ballico による) ‘linear semi-uniform position’ となり、代数的な議論のみで進めることができる。

次の不等式は重要である。

命題 6.6. 射影曲線の一般超平面切断 $X(\subset \mathbb{P}^n)$, $\deg X = d$ に対して、次が成り立つ。

$$\operatorname{reg} X \leq \lceil (d-1)/n \rceil + 1$$

標数 0 の場合の証明. いわゆる、‘Castelnuovo’s method’ を用いる。 $\ell = \lceil (d-1)/n \rceil$ とおく。任意の $P \in X$ に対して、 $X \setminus \{P\}$ を ℓ 個のグループに分ける。即ち、

$$X \setminus \{P\} = \{P_1, \dots, P_n | P_{n+1}, \dots, P_{2n} | \dots | P_{(\ell-1)n+1}, \dots, P_{d-1}\}$$

とする。 X は ‘uniform position’ であるから、 ℓ 個の超平面 $H_i = \langle P_{n(i-1)+1}, \dots, P_{ni} \rangle \not\ni P$, $1 \leq i \leq \ell$ を取り、その和集合を $F = H_1 \cup \dots \cup H_\ell$ とする。すると、 $F \cap X = X \setminus \{P\}$ となるので $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\ell)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X(\ell))$ が全射となる。□

標数正の場合の証明.

0 次元スキーム X の座標環を R とし、 h -vector を $\underline{h} = (h_0, \dots, h_s)$ とする。ここで、 h -vector とは、 $h_i = \dim_k[R]_i - \dim_k[R]_{i-1}$ であり、 s は $h_s \neq 0$ を満たす最大の整数である。すると、 $h_0 = 1$, $h_1 = (n+1) - 1 = n$, $\deg X = h_0 + \dots + h_s = d$, $s = \operatorname{reg} X - 1$ は簡単にわかる。

注意 6.7. Uniform Position Lemma は X の Hilbert 多項式を制御し、 h -vector の言葉では、 $h_i \geq h_1$, $i = 1, \dots, s-1$ であることを示している。これに対して、Ballico の ‘Linear semi-uniform position’ の定理 [4] は、 $h_1 + \dots + h_i \geq ih_1$, $i = 1, \dots, s-1$ を示している。

そこで、標数任意の場合の命題 6.6 の証明を続ける。次の命題の (a) は (b) に含まれている。歴史的には、[15] に (a) が述べられており、その後 [57] で (b) が示されている。現在の観点から、原論文に基づいた代数的証明を与える。

補題 6.8. (a) $\operatorname{reg} X \leq \deg X - \operatorname{codim} X + 1$ (b) $\operatorname{reg} X \leq \lceil (\deg X - 1)/\operatorname{codim} X \rceil + 1$

補題の証明. (a) $h_i \geq 1$ for $0 \leq i \leq s$ and $h_1 = n$ であるから、次が成り立つ。

$$\operatorname{reg} X = s + 1 \leq h_0 + h_1 + \dots + h_s - n + 1 = d - n + 1$$

$$(b) h_0 + \dots + h_s = d, h_1 + \dots + h_{s-1} \geq (s-1)h_1 \text{ であるから、}$$

$$\operatorname{reg} X - 2 + h_s/h_1 = (s-1) + h_s/h_1 \leq (h_1 + \dots + h_{s-1})/h_1 + h_s/h_1 = (d-1)/n.$$

が成り立つ。したがって、 $\operatorname{reg} X - 1 \leq \lceil (d-1)/n \rceil$ が得られる。□

続く補題は、Castelnuovo-Mumford 正則量上限を満たす Buchsbaum 多様体の分類で用いられる。

補題 6.9 (Castelnuovo, Eisenbud-Harris[20]). 射影曲線の一般超平面切断 $X \subset \mathbb{P}^n$ に対して次が成立する。

1. $\deg X \geq 2n + 1$ かつ $h_2 = h_1$ であれば、 X は有理正規曲線に含まれる。
2. $\deg X \geq 2n + 3$ かつ $h_2 = h_1 + 1$ であれば、 X は橢円正規曲線に含まれる。

補題 6.10 ([40, 41]).

1. $\deg X \geq n^2 + 2n + 2$ かつ $\text{reg } X = \lceil (\deg X - 1)/n \rceil + 1$ であれば、 X は有理正規曲線に含まれる。
2. $\deg X \geq n^2 + 4n + 2$ かつ $\text{reg } X = \lceil (\deg X - 1)/n \rceil$ であれば、 X は橢円正規曲線に含まれる。

補題 6.9 を拡張した次の Harris 予想があり、これが成立すれば補題 6.10 の拡張も得られる。

予想 6.11 (Harris). $1 \leq m \leq n - 1$ とする。 $\deg X \geq 2n + 2m - 1$ かつ $h_2 = h_1 + m - 1$ であれば、 X は、次数が高々 $n + m - 1$ の射影曲線に含まれる。

注意 6.12. 正標数の場合は X が‘uniform position’とは限らない。しかしながら、 X が‘uniform position’でない場合、 $\deg X \gg 0$ のとき $\text{reg } X \ll \lceil (d - 1)/N \rceil + 1$ となることは [6] の証明から示唆される。

定理 6.4 の証明の概略.

(3) の証明の概略を述べる。 C を $\mathbb{P}^{n+1} = \text{Proj } S$ の非退化射影曲線とし、 $S = k[x_0, \dots, x_{n+1}]$, $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_{n+1})$ とする。補題 6.10 を用いると、定理の仮定より、一般超平面切断 $X = C \cap H$ に対して、 X は有理正規曲線上もしくは橢円正規曲線上にある。ここでは、橢円正規曲線 $Z(\subset H \cong \mathbb{P}^n)$, $n \geq 3$ 上にある場合を述べる。 Z の定義式が2次生成であることに注意する。ここで、 $Y \cap H = Z$ を満たす Del Pezzo 曲面 Y を構成したい。

$$\begin{aligned} X &= C \cap H \subset Z \subset H(\cong \mathbb{P}^n) \\ C &\subset Y \subset \mathbb{P}^{n+1} \end{aligned}$$

したがって、 C を含む \mathbb{P}^{n+1} の2次式で Y を構成するために、次のことを示す。

- (a) $\Gamma(\mathcal{I}_{Z/H}(2)) \cong \Gamma(\mathcal{I}_{X/H}(2))$.
- (b) $\Gamma(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}}(2)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{I}_{X/H}(2))$ が全射である。

実際、 $X \subseteq Q$ と $Z \not\subseteq Q$ を満たす2次超曲面 Q が存在すれば、 $X \subseteq Z \cap Q$ となるので、 Bezout の定理より、 $d \leq 2(n+1)$ となる。これは $d \gg 0$ に矛盾し、(a) は示される。

次に、 $\Gamma(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}}(2)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{I}_{X/H}(2))$ が全射であることを示すために、完全列

$$\begin{aligned} \Gamma_*(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}}) &\rightarrow \Gamma_*(\mathcal{I}_{X/H}) \\ \rightarrow H_*^1(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}})(-1) &\xrightarrow{\varphi} H_*^1(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}}) \rightarrow H_*^1(\mathcal{I}_{X/H}), \end{aligned}$$

を考える。ここで、 $\varphi : H_*^1(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}})(-1) \xrightarrow{h} H_*^1(\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}^{n+1}})$ とおく。 $h \in [S]_1$ は超平面 H の定義式である。 $[\text{Ker } \varphi]_2 = 0$ となること、示せばよい。

Huneke-Ulrich によるソークル補題 (命題 6.13) を用いると、1 次式 $h \in [S]_1$ を適当に (正確には “generic” に) とると、 $a_-(\text{Ker } \varphi) > a_-(\text{Coker } \varphi)$ が得られる。したがって、 $a_-(\text{Ker } \varphi) > a_-(\text{Soc}(\text{H}_*^1(\mathcal{I}_{X/H})))$ となる。ここで、 $a_-(\text{Soc}(\text{H}_*^1(\mathcal{I}_{X/H})))$ を計算する。

Z が ACM であるので、短完全列 $0 \rightarrow \mathcal{I}_{Z/H} \rightarrow \mathcal{I}_{X/H} \rightarrow \mathcal{I}_{X/Z} \rightarrow 0$ から、短完全列

$$0 \rightarrow \text{H}_*^1(\mathcal{I}_{X/H}) \rightarrow \text{H}_*^1(\mathcal{I}_{X/Z}) \rightarrow \text{H}_*^2(\mathcal{I}_{Z/H}) \rightarrow 0$$

を得る。ここで、 $\text{H}_*^2(\mathcal{I}_{Z/H}) \cong \text{H}_*^1(\mathcal{O}_Z) \cong k$ であるから、 $\text{H}_*^1(\mathcal{I}_{X/H})$ は、0 次成分を除いて、 $\text{H}_*^1(\mathcal{I}_{X/Z})$ の加群の構造に一致している。Serre の双対性によって、 $\text{H}_*^1(\mathcal{I}_{X/Z})$ は $\Gamma_*(\mathcal{O}_Z(X))$ の双対な次数付き S 加群と同型である。つまり、 $\text{Soc}(\text{H}_*^1(\mathcal{I}_{X/Z}))$ は、 $\Gamma_*(\mathcal{O}_Z(X))/\mathfrak{m}\Gamma_*(\mathcal{O}_Z(X))$ の双対と同型である。そこで、 $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Z(X)$ とおくと、 Z は非特異橙円曲線であるから、 $-d - (m-1)(n+1) < 0$ のとき、 $\text{H}^1(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Z(m-1)) = 0$ となる。よって、 $m \geq (n-d+2)/(n+1)$ に対して、 \mathcal{F} は m -regular である。したがって、 $m = \lceil (n-d+2)/(n+1) \rceil$ とおくと、

$$\Gamma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Z(\ell)) \otimes \Gamma(\mathcal{O}_Z(1)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}(\ell+1))$$

は $\ell \geq m$ のとき、全射となるので、 $a_-(\text{Soc}(\text{H}_*^1(\mathcal{I}_{X/Z}))) \geq -m$ が成立する。即ち、 $d \gg 0$ のとき、 $a_-(\text{Soc}(\text{H}_*^1(\mathcal{I}_{X/H}))) \geq 2$ が成立し、 $[\text{Ker } \varphi]_2 = 0$ が示された。この操作を繰り返すことにより、定理が証明される。尚、Socle 補題は、標数 0 の場合のみに適用されるが、正標数の場合は別の議論で迂回して定理は証明できる。□

定理 6.13 (Socle Lemma[23]). 標数 θ の体 k 上の多項式環を $S = k[x_0, \dots, x_n]$ とし、有限生成次数 S 加群を M とする。十分一般の 1 次式 (*a generic element*) $h \in [S]_1$ に対して、

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow M(-1) \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow \text{Coker } \varphi \rightarrow 0$$

とする。ここで、 $\varphi = \cdot h$ とおく。このとき、 $\text{Ker } \varphi \neq 0$ であれば、 $a_-(\text{Ker } \varphi) > a_-(\text{Soc}(\text{Coker } \varphi))$ が成り立つ。

ここで、有限生成次数 S 加群 N に対して、 $\text{Soc}(N) = [0 : \mathfrak{m}]_N$ 、 $a_-(N) = \min\{i | [N]_i \neq 0\}$ とする。

射影曲線の場合も類似の結果が得られる。

定義 6.14. 射影曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ に対し、Hartshorne-Rao 加群を $M(C) = \text{H}_*^1(\mathcal{I}_C) = \oplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \text{H}^1(\mathcal{I}_C(\ell))$ と定義する。これは次数 S 加群であり、 $k(C) = \min\{v \geq 0 | \mathfrak{m}^v M(C) = 0\}$ とおく。

命題 6.15. 非退化な射影曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ に対して、 $\text{reg } C \leq \lceil (\deg C - 1)/\text{codim } C \rceil + k(C)$. が成り立つ。 $\deg C \geq 2n^2 + n + 2$ でかつ上記の等号が成立すれば、 C は最小次数の曲面の因子となる。

注意 6.16. 次数が十分に大きいという条件は必要である。種数 $g \geq 5$ の超橙円でない射影曲線 C を標準埋め込みで得られた曲線 $C \subseteq \mathbb{P}_k^{g-1}$ を考えると、Castelnuovo-Mumford 正則量の上限を満たすが、最小次数の射影曲面の因子にはなりえない。

注意 6.17. Buchsbaum 多様体を局所 Cohen-Macaulay 多様体に拡張した結果が望まれる。これについては [44] に述べているように、中間次元のコホモロジーを制御する不变量をうまく設定して正則量上限が Castelnuovo 型の不等式で記述することを目指している。

7 McCullough-Peeva による Eisenbud-Goto 予想の否定的解決と Rees-like Algebra

定理 7.1 (McCullough-Peeva[36]). 体 k 上の多項式環の非退化な齊次素イデアルの *Castelnuovo-Mumford 正則量* はその素イデアルの次数のどんな多項式関数でも上限を制御することはできない。

系 7.2. *Eisenbud-Goto* 予想は、一般には成り立たない。

反例をつくる手順

1. 多項式環 S の（必ずしも素でない）齊次イデアル I で $\text{reg } I \gg \deg S/I$ となるイデアルを取る。
2. Rees-like 代数（もしくは Rees 代数）を用いて、（不定元の次数が 1 とは限らない）多項式環 T と齊次素イデアル P をつくる。このとき、 $\text{reg } P$ と $\deg T/P$ は $\text{reg } I$ と $\deg S/I$ から計算可能に取る。
3. ‘Step-by-step homogenization’ もしくは ‘Prime standardization’ を用いて、上記の T を（標準）多項式環 T' にする。ここで、 $P' = PT'$ をつくると、 $\text{reg } P' = \text{reg } P$ および $\deg T'/P' = \deg T/P$ が成立する。

一般的のイデアルについては、正則量の上限が次のように与えられ、命題 7.3 は n についての帰納法により、代数的に証明される。

命題 7.3 ([7]). 多項式環 $k[x_0, \dots, x_n]$ の齊次イデアル I に対して、 $\text{char } k = 0$ の場合、 $\text{reg } I \leq (2\text{maxdeg}(I))^{2^{n-1}}$ が成り立つ。一般の場合、 $\text{reg } I \leq (2\text{maxdeg}(I))^{n!}$ が成り立つ。

上記の上限は、Eisenbud-Goto 予想からほど遠いが、次の例からほぼ ‘best possible’ な上限であると考えられている。実際、McCullough-Peeva の反例では、次の例を基に構成している。

例 7.4 (Mayr-Meyer[35]). $k[x_0, \dots, x_n]$ のイデアル I で $\text{maxdeg}(I) = 4$, $\text{reg } I \geq 2^{2^n} - 1$ を満たすものが存在する。

例 7.5 (Koh[24]). $k[x_1, \dots, x_{22r-1}]$, $r \in \mathbb{N}$ の 23 個の 2 次式、1 個の 1 次式で生成されたイデアル I_r で $\text{maxdeg}(Syz_1(I_r)) \geq 2^{2^{r-1}}$ を満たすものが存在する。（原論文通りに書いたが、変数を $22r - 2$ 個にして、1 次式なしでもよい。）

定義 7.6. 多項式環 $S = k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル $I = (f_1, \dots, f_r)$ の Rees 環は $R(I) = S[It](= \bigoplus_{d \geq 0} I^d) \subset S[t]$ として、定義される。Proj $R(I)$ は \mathbb{A}^n の I でのブローアップである。ここで、 $\varphi : S[y_1, \dots, y_r] \rightarrow S[It]$, $\varphi(y_i) = f_i t$ とおくとき、定義イデアル $P = \text{Ker } \varphi$ は計算するのは、一般には困難である。

例 7.7 ([36]). $I = (u^6, v^6, u^2w^4 + v^2x^4 + uvwy^3 + uvxz^3)$ を多項式環 $S = k[u, v, w, x, y, z]$ のイデアルとする。このとき、Rees 環 $S[It]$ の定義イデアルを $P \subset (T = S[w_1, w_2, w_3])$ とする。Macaulay2 による計算と Bertini の定理を用いて、3 次元射影多様体 X in \mathbb{P}^5 で $\deg X = 31$, $\text{reg } X \geq 38$ を満たすものを得る。

定義 7.8. 多項式環 $S = k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル $I = (f_1, \dots, f_r)$ の Rees-like 環は $\mathcal{R}L(I) = S[It, t^2] \subset S[t]$ として、定義される。ここで、重み付き多項式環 $T = S[y_1, \dots, y_r, z]$ を $\deg y_i = \deg f_i + 1$, $\deg t = 2$ として定義する。そこで、 $\psi : T = S[y_1, \dots, y_r, z] \rightarrow S[It, t^2]$, $\psi(y_i) = f_i t$ とおくと、定義イデアルは $Q = \text{Ker } \psi (\subset T)$ である。

例 7.9. $k[x]$ のイデアル $I = (x)$ の Rees-like 環 $\mathcal{R}L(I) = k[x, xt, t^2]$ の定義イデアルは $P = (y^2 - x^2z) (\subset k[x, y, z])$ である。

定理 7.10. 多項式環 $S = k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル $I = (f_1, \dots, f_r)$ の Rees-like 環の定義イデアル $Q (\subset T = S[y_1, \dots, y_r, z])$ に対して、 $\text{reg } T/Q = \text{reg } S/I + 2 + \sum_{i=1}^r \deg f_i$, $\deg T/Q = 2 \prod_{i=1}^r (\deg f_i + 1)$, $\text{ht } Q = r$ となる。

定理 7.10 の証明の概略. まず、定義イデアル $Q \subset T = k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r, z]$ の極小の生成元を計算すると、 $\{y_\alpha y_\beta - z f_\alpha f_\beta | 1 \leq \alpha, \beta \leq r\}$ および $\{\sum c_{ij} y_i | \sum c_{ij} f_i = 0\}$ となることがわかる。ここで、 I の S 加群としての極小自由分解を

$$F_1 \xrightarrow{(c_{ij})} F_0 \xrightarrow{(f_i)} P \rightarrow 0$$

と書いた。 Q は素イデアルで、 z は T/Q 非零因子である。ここで $\bar{T} = T/(z)$, $\bar{Q} = Q\bar{T}$ とおくと、 T/Q と \bar{T}/\bar{Q} の Betti 数は一致することがわかる。

さて、 $\bar{T} = k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r]$. の素イデアル \bar{Q} の生成元は $M = (\{\sum_i c_{ij} y_i\})$ および $N = (\{y_i y_j\}) = (y_1, \dots, y_r)^2$ である。すると、 \bar{T}/\bar{Q} の極小自由分解は $(M+N)/N \rightarrow \bar{T}/N$ の極小自由分解の写像錐により記述できる。実際、 \bar{T} 加群 $M+N/N (\cong M/M \cap N)$ の極小自由分解は S 加群 $\text{Syz}_1^S I$ の極小自由分解から書ける、また、 \bar{T}/\bar{Q} の極小自由分解は Eagon-Northcott 複体であるので、これらにより写像錐を記述し、 $\text{reg } T/Q$, $\deg T/Q$ が計算できる。□

定義・命題 7.11 (Step-by-step homogenization). 多項式環 $T = k[y_1, \dots, y_p]$ の重みづけを $\deg y_i > 1$, $i \leq q$ および $\deg y_i = 1$, $i > q$. とする。そこで、標準多項式環 $T' = k[y_1, \dots, y_p, v_1, \dots, v_q]$ を考え、次数準同型写像 $\nu : T \rightarrow T'$ を $\nu(y_i) = y_i v_i^{\deg y_i - 1}$, $i \leq q$ および $\nu(y_i) = y_i$, $i > q$ と定義する。これを ‘Step-by-step homogenization’ と呼ぶ。 T の素イデアル P に対して、 $P' = PT'$ は T' の素イデアルとなり、 T/P と T'/P' の Betti 数は一致することがわかる。

注意 7.12 ([11, 32]). Betti 数を保存する同次化の方法としては、‘Step-by-step homogenization’ の他に ‘Prime Standization’ も研究されている。この方法は Ananyan-Hochster[1] の ‘homogeneous prime sequence’ を用い、特異点を制御することができる。

例 7.13. $\varphi : S \rightarrow k[t]$, $\varphi(x) = t$, $\varphi(y) = t^2$, $\varphi(z) = t^3$ で定義された Affine monomial curve のイデアルは多項式環 $S = k[x, y, z]$ において $P = (x^2 - y, xy - z)$ in $S = k[x, y, z]$ と書ける。同次式と考えるために、重みを $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, $\deg z = 3$ とすると、極小自由分解は

$$0 \rightarrow S(-5) \rightarrow S(-2) \oplus S(-3) \rightarrow S \rightarrow S/P \rightarrow 0.$$

となるので、 $\text{reg } P = 4$ が言える。

通常の同次化では、多項式環 $S' = k[x, y, z, w]$ のイデアル $P' = (x^2 - yw, xy - zw, xz - y^2)$ が得られ (twisted cubic curve)、 $\text{reg } P' = 2$ となる。

一方、Step-by-step homogenization では、多項式環 $T = k[x, y, z, u, w]$ のイデアル $Q = (x^2 - yu, wyu - zu^2)$ が得られ、これは完全交叉であり、 $\text{reg } Q = 4$ となる。

定理 7.1 の証明の概略. Koh の例 (7.5) に対して、Rees-like 環、Step-by-step homogenization を用いて、標準多項式環 R_r の素イデアル P_r を取ると、

- $\deg R_r/P_r \leq 4 \cdot 3^{22r-3} < 2^{50r}$
- $\operatorname{reg} P_r \geq \max\deg(P_r) \geq 2^{2^{r-1}} + 1 > 2^{2^{r-1}}$,

となり、これは Eisenbud-Goto 予想の反例を与える。□

8 Castelnuovo-Mumford 正則量と Horrocks の判定法

この章では、ベクトル束の Horrocks 判定法を Castelnuovo-Mumford 正則量の観点から捉えることから始め、ベクトル束の分類についてのシジギー理論な観点からの概説を行う。「 \mathbb{P}^1 上のベクトル束は直線束の直和に同型である」という Grothendieck の定理の拡張が次の定理である。

定理 8.1 (Horrocks[22]). \mathbb{P}^n 上のベクトル束 \mathcal{E} が ACM、即ち、任意の $1 \leq i \leq n-1$ に対して $H_*^i(\mathcal{E}) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(\ell)) = 0$ であるとする。このとき、 \mathcal{E} は直線束の直和に同型である。

ここで、定理 8.1 の 4 つの証明の概略を述べる。

第 1 の証明の概略 (Okonek-Schneider-Spindler[53]).

射影空間 \mathbb{P}^n の次元 n についての帰納法である。 $n=1$ は Grothendieck の定理なので、 $n \geq 2$ とする。帰納法の仮定から $\psi : \mathcal{E}|_H \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_H(a_i)$ が得られるので、 $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a_i)$ とおくと、完全列 $0 \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \mathcal{E})(-1) \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_H(\mathcal{F}|_H, \mathcal{E}|_H) \rightarrow 0$ と ACM の仮定から、完全列 $\mathcal{H}\text{om}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_H(\mathcal{F}|_H, \mathcal{E}|_H) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \bigoplus \mathcal{E}(-a_i - 1)) = 0$ を得る。すると、 ψ の延長 $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a_i)$ が得られ、これは同型であることが示される。□

第 2 の証明の概略 (Auslander-Buchsbaum[3], Matsumura[34]).

Auslander-Buchsbaum の定理の多項式版を示せばよい。即ち、多項式環 $S = k[x_1, \dots, x_n]$ 上の有限生成次数 S 加群に対して、 $\operatorname{depth}_S M + \operatorname{proj.dim}_S M = n$ となることを示す。 $\operatorname{proj.dim}_S M$ についての数学的帰納法を用いる (cf. [34])。 M が自由のときは明らかなので、 $\operatorname{proj.dim}_S M \geq 1$ とする。ここで、完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ (ただし、 F は次数自由加群) を取り、局所コホモロジーを用いると、帰納法の仮定より証明される。□

第 3 の証明の概略 (Ballico-Malaspina[5], Malaspina-Miyazaki[30])

Castelnuovo-Mumford 正則量を用いた証明を行う。 \mathbb{P}^n 上のベクトル束 \mathcal{E} に対して、 $\operatorname{reg} \mathcal{E} = m$ とおくと、 $\mathcal{E}(m)$ は大域生成であるから、全射 $\psi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{E}$ が取れる。 \mathcal{E} は $(m-1)$ -regular でなく、かつ、ACM 束であるから、 $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}(m-n-1)) \neq 0$ である。Serre の双対性より $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}^\vee(m)) \neq 0$ となり、ゼロでない写像 $\varphi : \mathcal{E}(m) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ が存在する。 $\varphi \circ \psi$ はゼロでない写像であるから、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)$ が \mathcal{E} の直和因子を与える写像になる。これを繰り返す。□

第 4 の証明の概略 (Horrocks[22], Walter[60], Malaspina-Rao[31])

Horrocks のオリジナルなアイディアであるが、ここでは [60] に依る証明の概略を述べる。ACM 多様体上のベクトル束を含む理論は [31] に書かれている。 $\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$ 上のベクトル束 \mathcal{E} に対して $E = \Gamma_* \mathcal{E}$ とおく。そこで、次数 S^\vee 加群 E^\vee (negatively graded!) の極小自

由分解 $0 \rightarrow P^{n-1\vee} \rightarrow \cdots \rightarrow P^0\vee \rightarrow E\vee \rightarrow 0$ を取ります。(depth $E\vee \geq 2$ を用いる。) さらに、この双対を取ると、次数 S 加群の複体 $0 \rightarrow E \rightarrow P^0 \rightarrow \cdots \rightarrow P^{n-1} \rightarrow 0$ が得られ、この複体の層化は完全列になることがわかります。ここで、次数 S 加群 E の極小自由分解 $0 \rightarrow P^{-n} \rightarrow \cdots \rightarrow P^{-1} \rightarrow E \rightarrow 0$ をつなげて、複体

$$P^\bullet : 0 \rightarrow P^{-n} \rightarrow \cdots \rightarrow P^0 \rightarrow \cdots \rightarrow P^{n-1} \rightarrow 0,$$

を考えると、 $H^i(P^\bullet) \cong H_*^i(\mathcal{E})$ は S 加群として長さ有限であり、特に、 $H^i(P^\bullet) = 0$, $i \notin \{1, \dots, n-1\}$ となる。複体の構成を考えると、次数 S 加群の有界な複体の導来圏 $D^b(S\text{-Mod})$ の中で、 $\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E})$ ということが言える。

さて、 \mathbb{P}^n 上のベクトル束の安定同値なカテゴリーを VB とおく。ここで、 \mathbb{P}^n 上のベクトル束 \mathcal{E}, \mathcal{F} に対して、ある直線束の直和 \mathcal{L}, \mathcal{M} があり、 $\mathcal{E} \oplus \mathcal{L} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{M}$ を満たすとき、安定同値という。ここで、 $C^\bullet \in Ob(D^b(S\text{-Mod}))$ が $H^i(C^\bullet)$ が S 上有限加群であり、 $H^i(C^\bullet) = 0$, $0 < i < n$ となる充満部分圏を FinL と書くと、Horrocks の定理は次の通りになる。

定理 8.2. 同型関手 $\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_* : \underline{\text{VB}} \rightarrow \text{FinL}$ はカテゴリーの同値を与える。

\mathbb{P}^n 上の ACM 束は $\tau_{>0}\tau_{<n}\mathbb{R}\Gamma_*(\mathcal{E}) = 0$ を満たすので、Horrocks 対応 (8.2) より、 \mathcal{E} は直線束の直和に同型になる。□

定義 8.3. \mathbb{P}^n 上のベクトル束 \mathcal{E} が Buchsbaum 束であるとは、任意の r 平面 $L (\subseteq \mathbb{P}^n)$, $r = 1, \dots, n$ に対して、 $(x_0, \dots, x_n)H_*^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}|_L) = 0$, $1 \leq i \leq r-1$ が成り立つときをいう。

定義・命題 8.4 (Stückrad-Vogel[58], Schenzel[56]). $S = k[x_0, \dots, x_n]$ を体 k 上の多項式環とし、 $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_n)$ とおく。次数 S 加群 M , $\dim M = d$ が Buchsbaum 加群であるとは、次の同値条件が成り立つときにいう。

- (i) $\ell(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}; M)$ が同次パラメータイデアル $\mathfrak{q} = (y_1, \dots, y_d)$ に依らず一定である。
- (ii) 任意のパラメータ系 y_1, \dots, y_d , $0 \leq i \leq d$ に対して、 $\mathfrak{m}H_*^j(M/(y_1, \dots, y_i)M) = 0$, $0 \leq j \leq d-i-1$ が成り立つ。
- (iii) $\tau_{<d}\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ は $D^b(S\text{-Mod})$ において ik 線形空間の複体に同型である。

定理 8.5 ([12, 18]). \mathbb{P}^n 上の Buchsbaum 束 \mathcal{E} は $\mathcal{E} \cong \bigoplus \Omega_{\mathbb{P}^n}^{k_i}(\ell_i)$ の直和に同型である。

これは、Goto[18] と Chang[12] が独立に証明した。その後、Yoshino[62] による Horrocks 対応を用いた証明がある。著者によるシジジー論的な証明 [45] もあり、それぞれ定理 8.1 の 4 つの証明にほぼ対応している。

注意 8.6. Horrocks 対応やシジジー論的方法は、ベクトル束の Beilinson にも対応している。 \mathbb{P}^3 上のベクトル束で、 $H_*^i(\mathcal{E}) \cong k$, $i = 1, 2$ であり、Buchsbaum でなければ、Null-Correlation 束ということもわかる。 \mathbb{P}^4 上の Horrocks-Mumford 束を始め、Horrocks 対応に関する条件で具体的（環論的に）表すのは今後の問題と言える。

例 8.7. 次の結果は良く知られているかもしれない。しかしながら、多重 Castelnuovo-Mumford 正則量を用いると、証明がわかりやすい。多重 Castelnuovo-Mumford 正則量は [5, 42] の定義に従い、多重射影空間上での Horrocks 判定法に応用されている。

例えば、次の問題を考える。「 $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 \mathcal{E} で、 $H^i(\mathcal{E}(\ell_1, \ell_2)) = 0$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq m+n-1$ を満たすものは存在しない。」

実際、多重 Castelnuovo-Mumford 正則量を「うまく」定義すると、Horrocks 判定法の第3証明と同じ方法で、 $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(t) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(u)$ となり、これは中間次元のコホモロジーを持つから矛盾する。

次は、シジギー論的方法による小結果 [30] である。

例 8.8. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 上の既約なベクトル束 \mathcal{E} に対して、次は同値である。

- (a) $\mathcal{E} \cong \Omega_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}$.
- (b) $H^2(\mathcal{E}) \neq 0$ かつ $H^1(\mathcal{E}(1,1)) = H^2(\mathcal{E}(0,1)) = H^2(\mathcal{E}(1,0)) = H^2(\mathcal{E}(-1,0)) = H^2(\mathcal{E}(0,-1)) = H^3(\mathcal{E}(-1,-1)) = 0$ が成り立つ。

ついでに、次の例 [43] は、Buchsbaum 性の複雑さを表している。

- 例 8.9.**
1. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)$ は $\mathfrak{m}H_*^i(\mathcal{E}) = 0$, $i = 1, 2$ であるが、Buchsbaum 束でない。
 2. $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 上のベクトル束 $\mathcal{E} = \Omega_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(3)$ は $H^1(\mathcal{E}) \neq 0$, $H^3(\mathcal{E}(-3)) \neq 0$. であるが Buchsbaum 束である。

References

- [1] T. Ananyan and M. Hochster, Small subalgebras of polynomial rings and Stillman's conjecture. J. Amer. Math. Soc. 33, 291 - 309 (2020).
- [2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths and J. Harris, Geometry of algebraic curves I, Grundlehren der math. Wissenschaften 167, Springer, 1985.
- [3] M. Auslander and D. Buchsbaum, Codimension and multiplicity, Ann. Math. 68(1958), 625 – 657.
- [4] E. Ballico, On singular curves in positive characteristic, Math. Nachr. 141 (1989), 267 – 273.
- [5] E. Ballico and F. Malaspina, Regularity and cohomological splitting conditions for vector bundles on multiprojective spaces, J. Algebra 345 (2011), 137 – 149.
- [6] E. Ballico and C. Miyazaki, Generic hyperplane section of curves and an application to regularity bounds in positive characteristic, J. Pure Appl. Algebra 155 (2001), 93 – 103.
- [7] D. Bayer and D. Mumford, What can be computed in algebraic geometry?, Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (ed. D. Eisenbud and L. Robbiano), pp. 1 – 48, Cambridge University Press 1993.
- [8] D. Bayer, I. Peeva and B. Sturmfels, Monomial resolutions. Math. Res. Lett. 5 (1998), 31 - 46.

- [9] R. Beheshti and D. Eisenbud, Fibers of generic projections, *Compositio Math.*, 146(2010), 435 - 456.
- [10] W. Bruns and U. Vetter, Determinantal rings, Springer LN 1327, 1988.
- [11] G. Caviglia, M. Chardin, J. McCullough, I. Peeva and M. Varbaro Regularity of prime ideals. *Math. Z.* 291 (2019), 421 - 435.
- [12] M. C. Chang, Characterization of arithmetically Buchsbaum subschemes of codimension 2 in \mathbb{P}^n , *J. Differential Geom.* 31 (1990), 323 – 341.
- [13] L. Chiantini, N. Chiarli and S. Greco, Bounding Castelnuovo-Mumford regularity for varieties with good general projections, *J. Pure Appl. Algebra* 152 (2000), 57 – 64.
- [14] H. Clemens, J. Kollar and S. Mori, Higher Dimensional Complex Geometry, Astérisque 166, SMF, 1088
- [15] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicity, *J. Algebra* 88 (1984), 89 – 133.
- [16] D. Eisenbud, The geometry of syzygies, GTM 229, Springer, 2005.
- [17] T. Fujita, Classification theories of polarized varieties, London Math. Soc. Lecture Note Series 155, Cambridge University Press, 1990.
- [18] S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules, *ASPM* 11(1987), 39 – 64.
- [19] L. Gruson, C. Peskine and R. Lazarsfeld, On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves, *Invent. Math.* 72(1983), 491 – 506.
- [20] J. Harris (with D. Eisenbud), Curves in projective space, Les Presses de l'Université de Montréal, 1982.
- [21] L. T. Hoa and C. Miyazaki, Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for generalized Cohen-Macaulay graded rings, *Math. Ann.* 301 (1995), 587 – 598.
- [22] G. Horrocks, Vector bundles on the punctual spectrum of a ring, *Proc. London Math. Soc.* 14 (1964), 689 – 713.
- [23] C. Huneke and B. Ulrich, General hyperplane sections of algebraic varieties, *J. Algebraic Geometry* 2 (1993), 487 – 505.
- [24] J. Koh, Ideals generated by quadrics exhibiting double exponential degrees. (English summary) *J. Algebra* 200 (1998), no. 1, 225 - 245.
- [25] S. Kwak, Castelnuovo regularity for smooth projective varieties of dimension 3 and 4, *J. Algebraic Geom.* 7 (1998), 195 – 206.
- [26] S. Kwak and J. Park, A bound for Castelnuovo-Mumford regularity by double point divisors, *Adv. Math.* 364 (2020), 107008.

- [27] R. Lazarsfeld, A sharp Castelnuovo bound for smooth surfaces, Duke Math. J. 55 (1987), 423 – 438.
- [28] R. Lazarsfeld, Positivity, I, II, Springer, 2004
- [29] D. Maclagan and G. Smith, Multigraded Castelnuovo-Mumford regularity, J. Reine. Angew. Math. 571 (2004), 137 - 164.
- [30] F. Malaspina and C. Miyazaki, Cohomological property of vector bundles on biprojective spaces, Ric. mat. 67(2018), 963 – 968.
- [31] F. Malaspina and A. P. Rao, Horrocks correspondence on arithmetically Cohen-Macaulay varieties, Algebra Number Theory 9(2015), 981 – 1003.
- [32] P. Mantero, L. Miller and J. McCullough, Singularities of Rees-like algebras. Math. Z. 297 (2021), 535 - 555.
- [33] J. Mather, Generic projections. Ann. Math. 98(1973), 226 - 245.
- [34] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge UP, 1986
- [35] E. Mayr and A. Meyer, The complexity of the word problems for commutative semi-groups and polynomial ideals, Adv. Math. 46 (1982), 305 - 329.
- [36] J. McCullough and I. Peeva, Counterexamples to the Eisenbud-Goto regularity conjecture, J. Amer. Math. Soc. 31 (2018), 473 – 496.
- [37] J. McCullough and I. Peeva, The regularity conjecture for prime ideals in polynomial rings, EMS Survey Math. Sci. (2020), 173 - 206.
- [38] E. Miller and D. Perkinson, Eight Lectures on Monomial Ideals by B. Sturmfels, CoCoA Summer School 1999. <https://services.math.duke.edu/~ezra/Queens/cocoa.pdf>
- [39] C. Miyazaki and W. Vogel, Bounds on cohomology and Castelnuovo-Mumford regularity, J. Algebra 185 (1996), 626 – 642.
- [40] C. Miyazaki, Sharp bounds on Castelnuovo-Mumford regularity, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 1675 – 1686.
- [41] C. Miyazaki, Buchsbaum varieties with next to sharp bounds on Castelnuovo-Mumford regularity, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 1909 – 1914.
- [42] C. Miyazaki, A cohomological criterion for splitting of vector bundles on multiprojective space, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 1435 – 1440.
- [43] C. Miyazaki, Buchsbaum criterion of Segre products of vector bundles on multiprojective space, J. Algebra 467 (2016), 47 – 57.
- [44] C. Miyazaki, Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for graded modules and projective varieties, Beitr. Algebra Geom. 60 (2019), 57 – 65.

- [45] C. Miyazaki, On Horrocks-type criteria for vector bundles, 射影多様体の幾何とその周辺 2019 報告集
- [46] D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface, Annals of Math. Studies 59 (1966), Princeton UP.
- [47] U. Nagel, On the defining equations and syzygies of arithmetically Cohen-Macaulay varieties in arbitrary characteristic, J. Algebra 175 (1995), 359 – 372.
- [48] U. Nagel, Arithmetically Buchsbaum divisors on varieties of minimal degree, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 4381 – 4409
- [49] U. Nagel and P. Schenzel, Degree bounds for generators of cohomology modules and Castelnuovo-Mumford regularity, Nagoya Math. J. 152 (1998), 153 – 174.
- [50] A. Noma, Multisecant lines to projective varieties, Projective varieties with unexpected properties, 349 - 359, Walter de Gruyter, 2005.
- [51] A. Noma, Rational curves of Castelnuovo-Mumford regularity $d - r+1$, J. Algebra 321 (2009), 2445 - 2460.
- [52] A. Noma, Generic inner projections of projective varieties and an application to the positivity of double point divisors., Trans. AMS, 366 (2014), 4603 - 4623.
- [53] C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, Vector bundles on complex projective spaces, Progress in Math. 3 Birkhäuser, 1980.
- [54] I. Peeva and B. Sturmfels, Syzygies of codimension 2 lattice ideals. Math. Z. 229 (1998), 163 - 194.
- [55] J. Rathmann, The uniform position principle for curves in characteristic p , Math. Ann. 276 (1987), 565 – 579.
- [56] P. Schenzel, Dualisierende Komplexe in der lokalen Algebra und Buchsbaum-Ringe, Lecture Notes in Math. 907 (1980) Springer
- [57] J. Stückrad and W. Vogel, Castelnuovo bounds for locally Cohen-Macaulay schemes. Math. Nachr. 136 (1988) 307 - 320.
- [58] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and its applications, Springer, 1986.
- [59] N. V. Trung and G. Valla, Degree bounds for the defining equations of arithmetically Cohen-Macaulay varieties, Math. Ann. 281 (1988), 209 – 218.
- [60] C. Walter, Pfaffian subschemes, J. Algebraic Geom. 5(1996), 671 – 704.
- [61] K. Yanagawa, On the regularities of arithmetically Buchsbaum curves, Math. Z. 226 (1997), 155 – 163.
- [62] Y. Yoshino, Maximal Buchsbaum modules of finite projective dimension, J. Algebra 159(1993), 240 – 264.

クラスター代数とその広がり

井上 玲 (千葉大理)

Fomin と Zelevinsky によって導入されたクラスター代数は, mutation (変異) と呼ばれる代数的操作が特徴的な可換環である. この原稿では, まずクラスター代数の定義と基本性質を簡単に説明する. そして, クラスター代数誕生の背景にもなっている「Lie 群の全正値性」と「点付きリーマン面のタイヒミュラー空間」という一見かなり異なる数学的対象の「よい座標の記述」を切り口にして, 量子群の表現論と高次タイヒミュラー理論に共通するクラスター的構造に関する最近の研究を概説する.

1. はじめに

本稿で紹介するクラスター代数の周辺の様子（図 1, 私見を多分に含む）を見てみよう. クラスター代数は Fomin と Zelevinsky によって導入され, 2001 年から 2006 年にかけて 4 つの論文「Cluster algebras I, II, III, IV」が発表された. 3 番目の論文 III には Berenstein も加わっている. クラスター代数自体が興味深い研究対象であると同時に, クラスター代数を定義する際に使う mutation (変異) という代数的操作に似たものがいろいろな数学に現れ, 代数, 幾何, 組合せ論や数理物理学への幅広い応用が研究してきた.

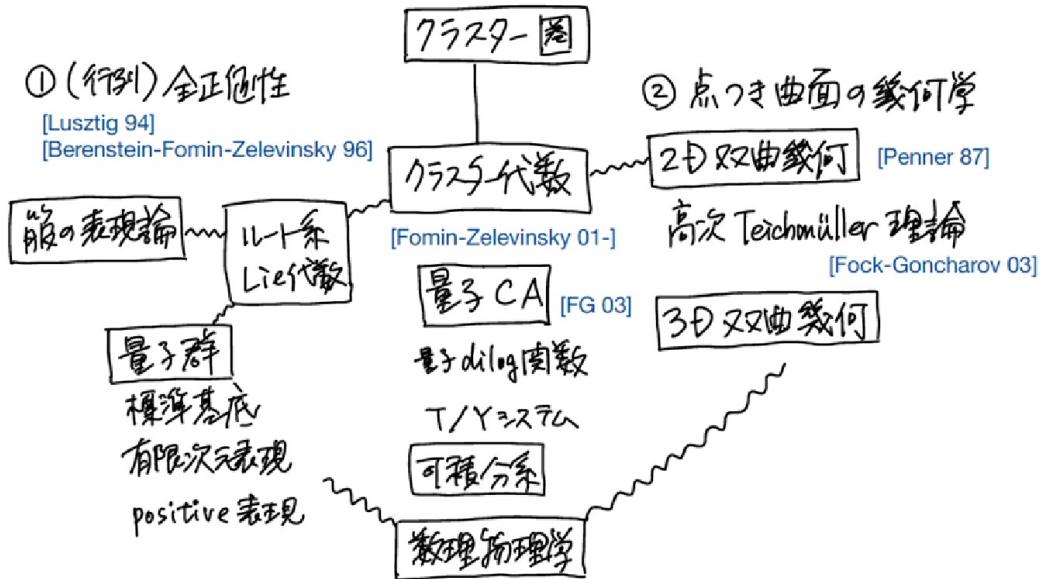


図 1. クラスター代数 (CA) の周辺

クラスター代数誕生の重要な背景の一つは「行列の全正値性」である. この問題は 20 世紀中頃から研究されていたが, Lusztig が正値性の概念を Lie 群に拡張したことをきっかけに, 全正値性を記述する「よい座標」の組合せ的性質を一般化することによってクラスター

代数が発見された。まさに誕生前夜と位置付けられるのが 1996 年の Berenstein, Fomin, Zelevinsky の論文 [BFZ96] である。このような背景からも推察されるように、クラスター代数の基本性質はルート系と密接な関係があり、さらに Lie 代数や量子群の表現論の組合せ的構造とも関連している。

一方クラスター代数と点付き曲面の双曲幾何学との関係は、1987 年に Penner が導入した「装飾つき Teichmüller 空間」に端を発する [Pe87]。装飾つき Teichmüller 空間の座標が満たす関係式はまさに mutation の形をしているのである。Fock と Goncharov は、2003 年に Penner の $PSL_2(\mathbb{R})$ の理論をより一般の Lie 群に拡張した「点付き曲面の高次 Teichmüller 空間」を提唱した [FG06]。この幾何的な空間の組合せ的構造が見事にクラスター代数で説明できることが分かっている。 \mathbb{R} 上の話を \mathbb{C} 上に拡張すると、3 次元双曲幾何への応用も可能になる [NTY19]。

他の話題についても少し述べよう。クラスター代数の非可換化は幾つか知られているが、Fock と Goncharov が 2003 年に導入した量子化では mutation に量子ダイログ関数が現れる [FG09]、このことは応用上も重要である [KN11, HI14, SS19]。また、クラスター代数の圏化であるクラスター圏は 2004 年に導入され [BMRRT06, CCS05]、簇の表現論や可換環と関連した多くの研究がある。クラスター代数の代数的側面、幾何的側面のどちらも数理物理学への様々な応用がある。私自身がクラスター代数に出会ったのは、量子可積分系に由来する T システム、 Y システムとよばれる差分方程式の周期性という 1990 年代に提唱された予想を、クラスター代数とクラスター圏を応用して証明するという問題に参加したことがきっかけである [IIKNS10, IIKKN13]。クラスター代数を通じていろいろな数学がつながっていく様子は、たいへん興味深い。

本稿の構成は次のとおりである。2 章ではクラスター代数の定義等を簡単に説明し、3 章でクラスター代数誕生の背景になっている「全正値性」について、4 章でクラスター代数の重要な応用である「点付き曲面の幾何学」について紹介する。そして 5 章では 3, 4 章の内容を合わせて得られる量子群の実現を紹介する。本稿では、専門用語を最も使われていると思われる言葉遣いで書くことにした。日本語と英語の表記が混在して多少見苦しい箇所があるのをご容赦ください。

2. クラスター代数の定義と基本性質

Fomin と Zelevinsky [FZ-I, FZ-IV] に従ってクラスター代数を導入する。有限集合 $I := \{1, 2, \dots, N\} = [1, N]$ に対し、「seed (種)」とよばれる次のような三つ組み $\Sigma = (B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ を定義する。 $B = (b_{ij})_{i,j \in I} \in \text{Mat}_N(\mathbb{Z})$ は N 次反対称化可能整数行列、つまり対角行列 $D = (d_i)_{i \in I}$; $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して DB が反対称行列になるようなもの、そして $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ は \mathbb{Q} 上代数的に独立な N 変数の組である。 d_i たちは互いに素とする。 B を「exchange matrix (交換行列)」とよぶ。 \mathbf{x} を「クラスター」、 x_i を「クラスター変数」または「 x 変数」とよび、 \mathbf{y} を「係数の組」、 y_i を「係数」または「 y 変数」とよぶ。¹⁾

このような seed $(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ と $k \in I$ に対し、「mutation (変異)」という代数的操作 $\mu_k(B, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (B', \mathbf{x}', \mathbf{y}')$ を以下のように定義する。

¹⁾[FZ-IV] では y 変数は任意の semifield (半体) の元として定義され、 x 変数の mutation ではまさに係数として現れるが、本稿では幾何学への応用を念頭において x 変数と y 変数を別々に扱う。

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ or } j = k \\ b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$x'_i = \begin{cases} \frac{\prod_{j \in I} x_j^{[b_{jk}]_+} + \prod_{j \in I} x_j^{[-b_{jk}]_+}}{x_k} & i = k \\ x_i & i \neq k \end{cases}$$

$$y'_i = \begin{cases} y_k^{-1} & i = k \\ y_i y_k^{[b_{ki}]_+} (1 + y_k)^{-b_{ki}} & i \neq k \end{cases}$$

ただし $[a]_+ = \max(a, 0)$ とする. 得られた三つ組み $(B', \mathbf{x}', \mathbf{y}')$ が再び seed になること, そして B' が同じ対角行列 D で反対称化されることは簡単に確かめられる. このような mutation には

$$\mu_k \circ \mu_k = \text{id. (対合性)}, \quad b_{kj} = 0 \text{ ならば } \mu_k \circ \mu_j = \mu_j \circ \mu_k \text{ (可換性)}$$

という性質がある. mutation による seed どうしの関係は N 分木を用いて表せる(図 2). 頂点 t に seed Σ_t を対応させ, 頂点 t, t' の間に両側矢印 $\xleftrightarrow{\mu_k}$ があるときは $\mu_k(\Sigma_t) = \Sigma_{t'}$ (かつ $\mu_k(\Sigma_{t'}) = \Sigma_t$) を意味している.

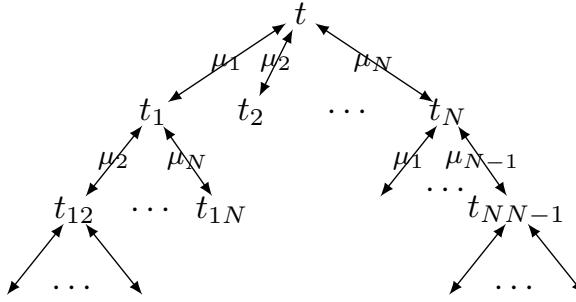


図 2. seed の生成

交換行列 B に有限回の mutation を施して行列 B'' が得られたとき, B と B'' は「mutation 同値」であるという. また, x 変数または y 変数のどちらかのみに着目した場合, (B, \mathbf{x}) を x -seed, (B, \mathbf{y}) を y -seed とよぶこともある. 行列 $B = (b_{ij})_{i,j \in I}$ が反対称行列, つまり $D = \mathbb{I}_N$ のとき, B は N 個の頂点をもつ quiver (箭) と

$$b_{ij} = (\text{頂点 } i \text{ から } j \text{ に向かう矢印の本数}) - (\text{頂点 } j \text{ から } i \text{ に向かう矢印の本数})$$

のように対応する. これにより, 反対称行列の集合と, 1 ループと 2 サイクルを持たない quiver の集合との間に一対一対応が得られる. $D \neq \mathbb{I}_N$ の場合には B は「頂点に重みをつけた quiver」として表せるのだが, 本稿ではほとんど出てこないので説明を省略する(例えば [HIO21] を参照). 交換行列 B の mutation は quiver で見ると分かりやすい(図 3).

クラスター代数 $\text{CA}(B, \mathbf{x})$ とは, 初期 x -seed (B, \mathbf{x}) から定まる可換環で, (B, \mathbf{x}) に mutation を施して得られる全ての seed たち (B'', \mathbf{x}'') に含まれるクラスター変数 x''_k たちで生成される $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ の \mathbb{Z} 部分代数である. クラスター代数の基本性質を紹介しよう.

Theorem 2.1. [FZ-I, FZ-II]

(i) (Laurent 性) 初期 seed $\Sigma_t = (B, \mathbf{x})$ から mutation で得られる x 変数は, 初期 x 変数

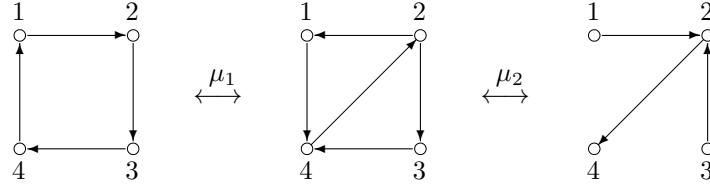


図 3. quiver の mutation

x_i ($i \in I$) の Laurent 多項式で表せる.

(ii) (有限性) クラスター代数が有限 (異なる x 変数の総数が有限個) であるための必要十分条件は, B が有限型の反対称化可能行列 A と mutation 同値となることである. 特に, A に対応するルート系の部分集合である「負の単純ルート」と「正ルート」の集合と x 変数との間に一対一対応がある.

ここで, 反対称化可能行列 $A = (a_{ij})$ が有限型とは, A がある有限次元単純 Lie 環の Cartan 行列 $C = (c_{ij})$ について

$$|a_{ij}| = \begin{cases} -c_{ij} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

を満たすことをいうものとする. 定義から mutation は有理変換であり, 上の (i) では, 有理式の分母に現れる多項式は必ず約分できることを主張している. そして (ii) はクラスター代数がルート系と密接に関係していることの現れである.

Example 2.2. 交換行列が $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, つまり A_2 型の quiver $\overset{1}{\circ} \longrightarrow \overset{2}{\circ}$ の場合を見てみよう. これは有限なクラスター代数の例である. 2 つの mutation μ_1, μ_2 を交互に作用させると, 5 回目の mutation でほぼ元の seed に戻ることが観察される. (さらに 5 回の mutation を施すと元に戻る.)

$$\begin{aligned} & \left(B, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{x}_1 \\ \textcolor{red}{x}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \xleftarrow{\mu_1} \left(-B, \begin{pmatrix} \frac{1+x_2}{x_1} \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^{-1} \\ \frac{y_1 y_2}{1+y_1} \end{pmatrix} \right) \\ & \xleftarrow{\mu_2} \left(B, \begin{pmatrix} \frac{1+x_2}{x_1} \\ \frac{x_1+1+x_2}{x_1 x_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{y_2}{1+y_1+y_1 y_2} \\ \frac{1+y_1}{1+y_1 y_2} \end{pmatrix} \right) \xleftarrow{\mu_1} \left(-B, \begin{pmatrix} \frac{x_1+1}{x_1 x_2} \\ \frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{y_1}{1+y_2} \end{pmatrix} \right) \\ & \xleftarrow{\mu_2} \left(B, \begin{pmatrix} \frac{x_1+1}{x_2} \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^{-1} \\ y_1(1+y_2) \end{pmatrix} \right) \xleftarrow{\mu_1} \left(-B, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

3 回目の mutation $\mu_1 \mu_2 \mu_1$ で非自明な約分が起こり, Laurent 性が確かめられる. 赤色で示したのは異なる 5 つの x 変数で, クラスター代数は $\text{CA}(B, \mathbf{x}) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{x_1+1+x_2}{x_1 x_2}]$ となる. x 変数と A_2 型のルート系との対応は

$$\left(x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{x_1+1+x_2}{x_1 x_2} \right) \longleftrightarrow (-\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

となっている (クラスター変数の分母の单項式を加法的に見るとそれぞれのルートに対応している).

x 変数と y 変数の mutation は様子がだいぶ違って見えるが, 両者はいろいろな意味で双対的な関係にあり, 次の性質からその一端が垣間見える.

Proposition 2.3. [FZ-IV, Proposition 3.9] x -seed (B, \mathbf{x}) に対し, $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_N$ を

$$\hat{y}_i = \prod_{j \in I} x_j^{b_{ji}} \quad (2.1)$$

と定義すると, mutation $\mu_k(B, \mathbf{x}) = (B', \mathbf{x}')$ は \hat{y}_i の変換を誘導し, \hat{y}_i は y_i と同様な変換性をもつ. つまり, 変換後の変数 $\hat{y}'_i = \prod_{j \in I} (x'_k)^{b'_{ji}}$ は変換前の \hat{y}_j の式で次のように書ける:

$$\hat{y}'_i = \begin{cases} \hat{y}_k^{-1} & i = k \\ \hat{y}_i \hat{y}_k^{[b_{ki}]_+} (1 + \hat{y}_k)^{-b_{ki}} & i \neq k. \end{cases}$$

この章の最後に, ここまで的基本事項に加えて, 本稿で扱う概念を簡単に説明する.

クラスター・モジュラーグループ. I 上の置換群 \mathfrak{S}_I の元 σ は seed $(B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ に次のように作用する.

$$b_{ij} \mapsto b_{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)}, \quad x_i \mapsto x_{\sigma^{-1}(i)}, \quad y_i \mapsto y_{\sigma^{-1}(i)}$$

mutation と \mathfrak{S}_I の元から成る列を mutation 列とよぶ. 交換行列 B に対し, B を不变に保つ mutation 列の集まりで, seed $\Sigma = (B, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ を不变に保つ mutation 列たちを同一視したものは群を成す. この群を Γ_B と表し, 「クラスター・モジュラーグループ」とよぶ.

$$\Gamma_B := \{\gamma \mid \gamma : \text{mutation 列}, \gamma(B) = B\} / \{\gamma \mid \gamma(\Sigma) = \Sigma\}$$

クラスター・モジュラーグループ Γ_B の元は, 有理関数体 $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ 上および $\mathbb{C}(\mathbf{y})$ 上の有理変換を誘導する.

Example 2.4. 先の Example 2.2 では, $(1, 2) \in \mathfrak{S}_I$ を 1 と 2 の置換とすると $(1, 2) \circ \mu_1$ や $\mu_2 \mu_1$ は Γ_B の元である. また $(1, 2) \circ \mu_1 \mu_2 \mu_1 \mu_2 \mu_1$ は Γ_B の恒等元である.

量子化. Fock と Goncharov は y 変数の量子化（非可換化）を次のように定義した [FG06]. ゼロでない複素数を q とし, $D = (d_i)_{i \in I}$ で反対称化される交換行列 $B = (b_{ij})_{i, j \in I}$ と量子 y 変数の組 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$ に対して関係式

$$Y_i Y_j = q^{2d_j b_{ji}} Y_j Y_i$$

で生成される非可換体を $\mathbb{C}_q\langle Y \rangle$ とする. 量子 y -seed (B, \mathbf{Y}) の mutation $\mu_k^q(B, \mathbf{Y}) = (B', \mathbf{Y}')$ を

$$Y'_i = \begin{cases} Y_k^{-1} & i = k \\ Y_i \prod_{r=1}^{|b_{ki}|} (1 + q^{d_i(2r-1)} Y_k^{\operatorname{sgn}(-b_{ki})})^{\operatorname{sgn}(-b_{ki})} & i \neq k \end{cases}$$

と定める. μ_k^q は非可換体の準同型 $\mathbb{C}_q\langle \mathbf{Y}' \rangle \rightarrow \mathbb{C}_q\langle \mathbf{Y} \rangle$ を誘導する. 詳しくは述べないが, 量子ダイログ関数の共役作用と量子 Y 変数の Laurent 単項式変換との合成で μ_k^q を表せることが知られている.

3. 全正值行列

3.1. 全正值行列. 行列 $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ の全ての小行列式が正值であるとき, A が「全正值」であるという. 全正值行列はグラフ理論や数理物理学などで自然に現れ, 1950 年以降の Loewner, Whitney, Cryer たちの研究により次のことが知られている.

Theorem 3.1. (i) $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ が全正値であるための必要十分条件は、ガウス分解 $A = x^- h x^+ \in N^- H N^+$ においてどの行列も全正値なことである。ただし N^+, N^-, H はそれぞれ対角成分が 1 の上三角行列、対角成分が 1 の下三角行列、対角行列の集合である。
(ii) $X \in N^+$ は $e_i(t) := \mathbb{I}_{n+1} + t E_{i,i+1}$ ($i \in [1, n]$) の積で表せる。ここで t は実数, $E_{i,i+1}$ は $(i, i+1)$ 成分が 1 で他はゼロの行列である。 $N_{>0}^+ \subset N^+$ を正値な部分集合とすると、 $N_{>0}^+ \simeq \mathbb{R}_{>0}^{n(n+1)/2}$ である。

写像 $\psi : \mathbb{R}_{>0}^{n(n+1)/2} \rightarrow N_{>0}^+$ が易しいのに比べて ψ^{-1} は複雑である。論文 [BFZ96] に従い、 ψ^{-1} の組合せ的記述から mutation が現れる様子を、 $n=2$ の場合を見てみよう。

$n=2$ のとき、 $\psi : \mathbb{R}_{>0}^3 \rightarrow N_{>0}^+; (t_1, t_2, t_3) \mapsto X$ は

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} \\ & 1 & x_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix} = e_1(t_1)e_2(t_2)e_1(t_3) = \begin{pmatrix} 1 & t_1 + t_3 & t_1 t_2 \\ & 1 & t_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

と表せる。これを逆に解くと $\psi^{-1} : X \mapsto (t_1, t_2, t_3) = (x_{13}/x_{23}, x_{23}, (x_{12}x_{23} - x_{13})/x_{23})$ であるが、敢えて次のように表す。 $X \in N^+$ に対して $Y \in N^+$ を

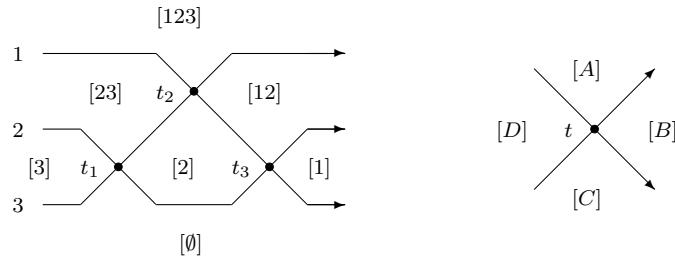
$$Y := \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_{23}}{x_{12}x_{23}-x_{13}} & \frac{1}{x_{13}} \\ & 1 & \frac{x_{12}}{x_{13}} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

と定義し、 $J \subset [1, 3]$ に対して Y の小行列式を $\Delta_J(Y) := \det(y_{ij})_{i \in [1, |J|], j \in J}$ とする。すると

$$(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_2 \Delta_3}(Y), \frac{\Delta_2}{\Delta_{12} \Delta_{23}}(Y), \frac{\Delta_{12}}{\Delta_1 \Delta_2}(Y) \right) \quad (3.2)$$

が得られる。

3.2. 配線図と quiver ($n=2$ の場合)。「配線図 (wiring diagram)」を用いると、(3.2) は次のように記述できる。配線図では 3 本の紐が左から右へ進み、行列 $e_i(t)$ に対応して $3-i$ 本目と $4-i$ 本目の紐を入れ替えて交点に t を配置する。こうすると平面が幾つかの領域に分けられるが、最も下に空集合 \emptyset を配置して下から上に進み、 k 番目の紐を超えたら k を加えることで領域に名前をつける。先の (3.1) に対応する配線図は次の左図のとおりである。

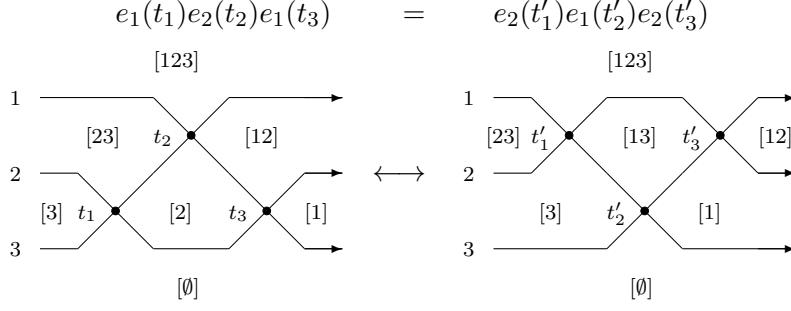


各交点は必ず 4 つの領域に囲まれている。実数 t が配置された交点が上の右図のように $[A] \sim [D]$ に囲まれているとき、

$$t = \frac{\Delta_A \Delta_C}{\Delta_B \Delta_D}$$

とおく。 $\Delta_\emptyset = 1$ とすると、上の左図から (3.2) を得ることが確かめられるだろう。

さらに考察を進める。 ψ の定義にはもうひと通り、 $e_2(t_1)e_1(t_2)e_2(t_3)$ が有り得る。ある X を表す二通りの表示を配線図で表すと次のようになり、



2つの表示が一致するための条件は

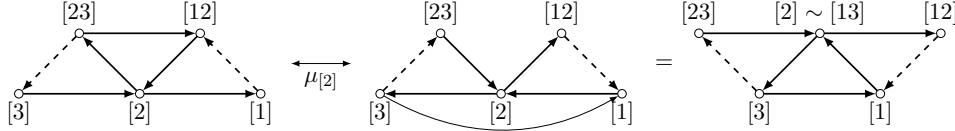
$$(t'_1, t'_2, t'_3) = \left(\frac{t_2 t_3}{t_1 + t_3}, t_1 + t_3, \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_3} \right)$$

である。これは領域上の変数 Δ_J の関係式

$$\Delta_2 \Delta_{13} = \Delta_1 \Delta_{23} + \Delta_{12} \Delta_3 \quad (3.3)$$

と同値なことが示せる。式 (3.3) は Plücker 関係式そのものである。

このような配線図の変換と関係式 (3.3) に、mutation を対応させることができ。[empty set] と [123] 以外の領域に箭の頂点を配置し、ある規則に従って頂点間に矢を描くことによって配線図に双対な箭を定めると、次の図の左端と右端の箭（それぞれ Q_{121} , Q_{212} とする）が得られる。²⁾



これら 2 つの箭は頂点 [2] における mutation $\mu_{[2]}$ で移り合う (Q_{121} を mutation すると中央の箭が得られ、頂点 [2] を上に移動すると Q_{212} に一致することが分かる。あとは Q_{212} の頂点 [13] を [2] と同一視すればよい)。 x -seed の mutation $\mu_{[2]}(Q_{121}, x) = (Q_{212}, x')$ を考えると、 x 変数の変化は

$$x'_2 = \frac{x_1 x_{23} + x_{12} x_3}{x_2}$$

のみである。 $x_{13} = x'_2$ とすると、この式は (3.3) と同じ形である。つまり「 Δ_J は x 変数 x_J に対応する」ことが観察される。

3.3. 一般の n の場合。 一般の n でも以下の手順で配線図と箭が構成できる。まず、 A_n 型のワイル群 $W(A_n)$ における最長元 w_0 の最短表示 $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$ を一つ選び、 I の元の列 $\mathbf{i} := (i_1, i_2, \dots, i_m)$ を「 w_0 の最短表示列」とよぼう。これに対し、写像 $\psi = \psi_{\mathbf{i}} : (t_1, \dots, t_m) \mapsto e_{i_1}(t_1) e_{i_2}(t_2) \cdots e_{i_m}(t_m) \in N^+$ が定まる。次に、 $n+1$ 本の紐から成る配線図を描き、それに双対な箭を得る。 w_0 の最短表示どうしは先ほどの関係式を一般化した

$$e_i(t_1) e_{i+1}(t_2) e_i(t_3) = e_{i+1}(t'_1) e_i(t'_2) e_{i+1}(t'_3); (t'_1, t'_2, t'_3) = \left(\frac{t_2 t_3}{t_1 + t_3}, t_1 + t_3, \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_3} \right)$$

で移り合い、それに対応して箭は mutation で移り合う。 $n=2$ のときに (3.2) のように表された ψ^{-1} の一般化は次のようになる。

²⁾ 点線の矢は本稿で定義していないが、重みが半分の矢であって 2 本同じ向きで重なると通常の矢 1 本と見なされる。点線の矢が出入りする頂点では mutation できない。詳しくは [FG06b] を参照。

Theorem 3.2. [BFZ96] w_0 の最短表示列 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ に対し,

$$\psi : \mathbb{R}_{>0}^m \rightarrow N_{>0}^+; (t_1, \dots, t_m) \mapsto X = e_{i_1}(t_1)e_{i_2}(t_2)\cdots e_{i_m}(t_m)$$

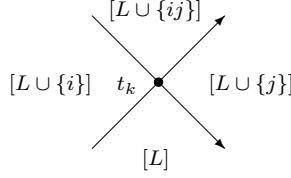
とする. このとき ψ^{-1} は以下のように定まる.

$$t_k = \frac{\Delta_L \Delta_{L \cup \{i,j\}}}{\Delta_{L \cup \{i\}} \Delta_{L \cup \{j\}}} (Y) \quad (3.4)$$

ここで, Y は「逆ツイスト写像」とよばれる $N_{>0}^+$ の自己同型写像 $\eta_{w_0}^{-1}$ による X の像で,

$$Y = \bar{w}_0^{-1} [X \bar{w}_0^{-1}]_+^T \bar{w}_0; \quad \bar{w}_0 := \sum_{i \in [1, n+1]} E_{i, n+2-i}$$

である. そして, 配線図で頂点 t_k を囲む領域はある $L \subset [1, n+1]$ と $i, j \in [1, n+1] \setminus L$ について次の図のようになっているとする.



式 (3.4) は「Chamber Ansatz 公式」とよばれている. 後の章で使うため, 特に $w_0 = s_1 s_2 s_1 \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_1$ から定まる quiver を $J(n)$ としよう. $n = 4$ のときは図 4 のようになる.

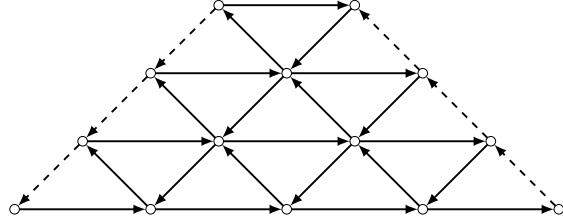


図 4. quiver $J(4)$

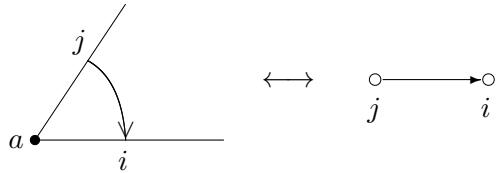
3.4. 半単純 Lie 群 G への拡張. 一般の半単純 Lie 群 G に対する正値性の概念は Lusztig によって導入された [Lus94]. それに基づいて Theorem 3.2 は G の場合に拡張され, G に対する twist 写像, Chamber Ansatz 公式が構成された [BZ97]. G の Lie 環 \mathfrak{g} のワイル群 $W(\mathfrak{g})$ の最長元とは限らない一般の元 w に対しても, 同様なことが成り立つ. つまり G の Bruhat 分解 $G = \bigcup_{w \in W(\mathfrak{g})} B_- w B_-$ に対し, $N_{>0}^{+,w} := N_{>0}^+ \cap B_- w B_-$ と $\mathbb{R}_{>0}^{\ell(w)}$ との間の全单射が同様な方法で構成できる [BZ97]. ここで $B_- := HN_-$, そして $\ell(w)$ は w の最短表示の長さである. また, やはり一般の G に対してツイスト写像, Chamber Ansatz 公式の量子群版も構成されている [KO18, O19].

Lusztig が正値性を研究した動機は, G の正値性と, G の極大幂单部分群に付随する量子群の標準基底との間に共通する組合せ的な構造に気づいたことだったといわれている. 筆者の知識を大幅に超えてしまうのでこれ以上は述べないが, 量子群の標準基底や双対標準基底にはクラスター代数と関連した多くの研究がある.

4. 点付き曲面の幾何学

4.1. 点付き曲面と quiver. クラスター代数と点付き曲面との関係は、クラスター代数が登場した当初から研究されてきた [FST08]. 種数 g で s 個の点がある向き付き曲面 $\Sigma := \Sigma_{g,s}$ を考える. g と s は $2g - 2 + s > 0$ を満たすとし、簡単のため Σ に境界は無いものとする. このような点付き曲面 Σ の三角形分割 T を考えると、その辺の総数 $e(T)$ は $6g - 6 + 3s$ である. T に双対な quiver Q_T を次の手順で定める.

- (i) T の辺と Q_T の頂点を対応させる.
- (ii) 三角形の 2 つの辺 i と j が頂点 a を共有し、辺 j から i が a を中心とした時計回りの向きのとき、 Q_T で頂点 j から i の向きに矢印を描く.



Example 4.1. 4 点付き球面 $\Sigma_{0,4}$ の場合 (図 5). 左に示してある三角形分割 T に対し、右の図が quiver Q_T である. 中央の図では手前部分の quiver を青色で描いており、後ろ部分の quiver は右の図で緑色で描かれている.

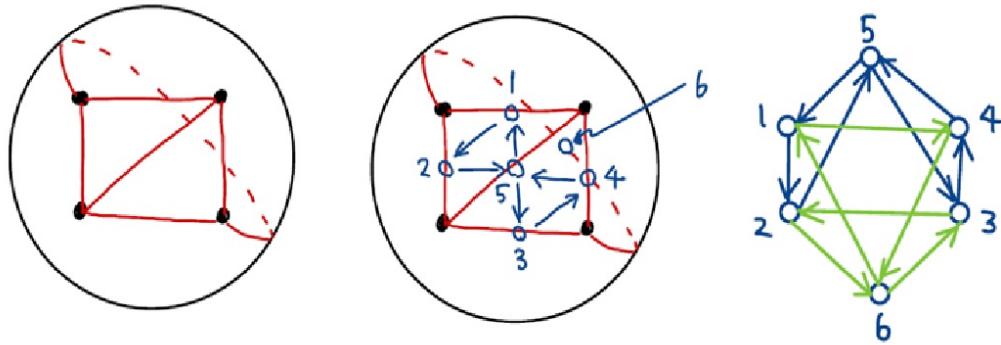


図 5. 4 点付き球面の三角形分割と双対な quiver

三角形分割内の四辺形に対してその対角線を取り換える操作を flip とよぶ. Σ の任意の 2 つの三角形分割 T と T' は有限回の flip で移りあうことが知られている. このことから、 $e(T)$ は三角形分割 T によらないことがわかるので、以下では Σ の三角形分割の辺の総数を $e(\Sigma)$ と書くことにしよう. T の flip を双対な quiver Q_T でみるとまさに mutation になっている. つまり、図 6 のような四辺形において対角線（番号 3 のついた辺）の flip は mutation μ_3 と整合的になる. この事実は、素朴ながらクラスター代数と点付き曲面をつなぐ第一歩である. それでは x 変数と y 変数の幾何的意味は何であろうか. 本稿では、Penner が論文 [Pe87] で導入した「 λ 座標（ラムダ座標）」と x 変数とが対応する様子を見てみよう.

4.2. ホロサイクルとラムダ長さ. 二次元双曲幾何について簡単に復習しよう. 上半平面 $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ に計量 $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ を入れたものを上半平面モデルとよぶ. \mathbb{H}^2 の境界は $\partial\mathbb{H}^2 := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ である. この世界の「直線（測地線）」とは、境界 $\partial\mathbb{H}^2$ に中心をもつ半円の円周またはその一部である. そして理想三角形とは、全ての頂点が境界に含まれ、か

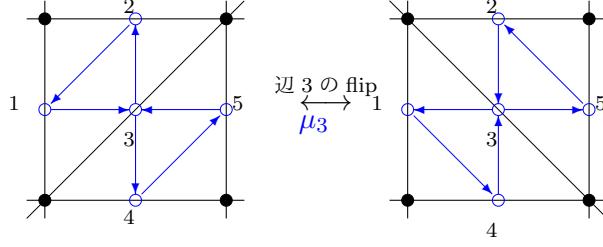
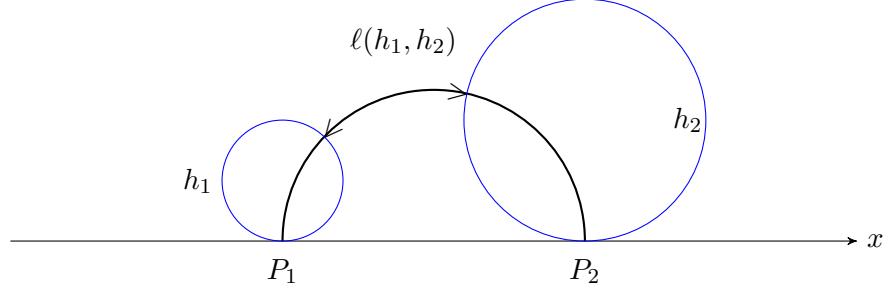


図 6. flip と mutation

つ全ての辺が直線からなる三角形のことである. $\partial\mathbb{H}^2$ に近づくと長さが発散するため, 全ての理想三角形は合同(3辺の長さが無限大)である.

図7のように, 境界上の2点 P_1, P_2 それぞれに接する円 h_1, h_2 をホロサイクルとよぶ. 直線 P_1P_2 のうち2つのホロサイクル h_1, h_2 で切り取られた部分の長さを $\ell(h_1, h_2)$ とおく. 2つのホロサイクルが交わるときは, ホロサイクルに切り取られる部分の長さが $-\ell(h_1, h_2)$ となるように(つまり $\ell(h_1, h_2) < 0$ となるように) 定義する. このとき, $\lambda(P_1, P_2) := \exp(\frac{1}{2}\ell(h_1, h_2))$ で定まる正の実数を「 h_1, h_2 から定まる P_1P_2 の λ 長さ」とよぶ.

図 7. λ 長さ

λ 長さについて, 以下のような「双曲版 Ptolemy の定理」が成り立つ. 図8のような理想四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の頂点にホロサイクル h_1, h_2, h_3, h_4 を配置する. このとき

$$\lambda(P_1, P_3)\lambda(P_2, P_4) = \lambda(P_1, P_2)\lambda(P_3, P_4) + \lambda(P_2, P_3)\lambda(P_1, P_4) \quad (4.1)$$

が成り立つ.

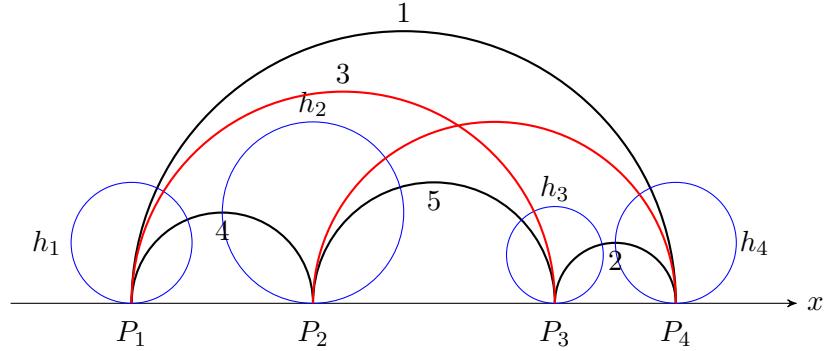


図 8. 双曲版 Ptolemy の定理

先ほどの flip と mutation の対応をあてはめてみよう。辺 $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ と対角線 P_1P_3 にそれぞれ quiver の頂点 $4, 5, 2, 1, 3$ を配置すると、図 6 の左側の quiver が定まる。対角線を P_1P_3 から P_2P_4 に flip すると、対応する x 変数の変換は

$$x_3 x'_3 = x_4 x_2 + x_5 x_1$$

となり、 λ 長さの変換 (4.1) と同じ形をしていることが分かる。こうして、点つき曲面の三角形分割 T とその λ 座標が、それぞれ quiver Q_T とクラスター \mathbf{x} に対応することが分かる。ここでは詳しく述べないが、Thurston が導入した「shear 座標」が Q_T の y 変数に対応する。まとめると、三角形分割可能な点つき曲面のクラスター構造は

$$(T, \lambda \text{ 座標}, \text{shear 座標}) \longleftrightarrow (Q_T, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

となっている。shear 座標と λ 座標は Proposition 2.3 と同様の変換で関係している。

4.3. 飾り付き Teichmüller 空間. 点付き曲面 Σ の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_{g,s}$ は、 Σ の基本群 $\pi_1(\Sigma)$ の $PSL_2(\mathbb{R})$ 表現を用いて

$$\mathcal{T}_{g,s} \simeq \{\rho : \pi_1(\Sigma) \xrightarrow{\text{忠実}} PSL_2(\mathbb{R}) ; (\text{条件})\} / PSL_2(\mathbb{R})$$

と定義される。ここで条件とは、(i) $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$ に対して $|\text{Tr}\rho(\gamma)| \geq 2$ 、(ii) γ が内点の 1 つを回る経路にホモトピー同値ならば $|\text{Tr}\rho(\gamma)| = 2$ 、である。 $\mathcal{T}_{g,s}$ の実次元は $6g - 6 + 2s$ である。Penner が導入した「飾り付き Teichmüller 空間」は、 $\mathcal{T}_{g,s}$ に各点のホロサイクルの半径を加えた空間

$$\tilde{\mathcal{T}}_{g,s} := \mathcal{T}_{g,s} \times \mathbb{R}_{>0}^s$$

として定義され。その実次元は $6g - 6 + 3s$ で $e(\Sigma)$ に等しい。 Σ の三角形分割 T に対して定まる λ 座標 \mathbf{x} が位相同型 $\tilde{\mathcal{T}}_{g,s} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^{e(\Sigma)}$ を与える、というのが [Pe87] の主張である。

さらに、shear 座標 \mathbf{y} を用いると $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$ が組合せ的に構成できることを簡単に説明しよう [F97]。点付き曲面 Σ 上の「点を通らず、後戻りしない向き付き閉路」を γ とする。三角形分割を 1 つ選ぶと、 γ は多くの三角形を通過しながら進み、ある三角形に一つの辺を通って入り右方向と左方向のどちらかに進んで別の辺から出る、ということを繰り返す。図 9 は γ の一部を示した例である。左の三角形に辺 1 から入って右方向の辺 3 から出て次の三角形に入り、左方向の辺 5 から出て次の三角形に入り、右方向の辺 7 から出ている。これに対応して、三種類の行列 $X(y), R, L \in PSL_2(\mathbb{R})$ を準備し、 y 変数 y_i が配置されている辺を通過したときは $X(y_i)$ 、右方向に進んだ時は R 、左方向に進んだ時は L を順に掛けていくことにより $\pi_1(\Sigma)$ の表現 $\rho(\mathbf{y})$ を定める。先の例では

$$\rho(\mathbf{y}) : \gamma \mapsto \cdots X(y_1) \cdot R \cdot X(y_3) \cdot L \cdot X(y_5) \cdot R \cdot X(y_7) \cdots$$

となる。

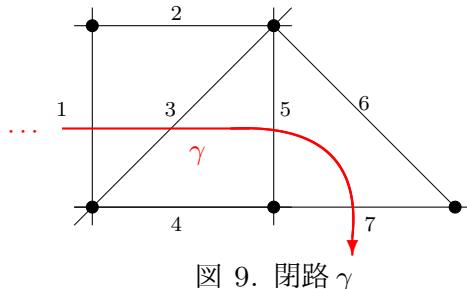


図 9. 閉路 γ

4.4. 高次 Teichmüller 理論. Fock と Goncharov が提唱した高次 Teichmüller 理論は、もともとの $PSL_2(\mathbb{R})$ の理論を一般の群に拡張したものである [FG06]. $G = G_n$ をランク n の半単純複素 Lie 群とし、その Lie 環を \mathfrak{g} とする。非常に荒っぽくいうと、 G に対して定まる「旗（または装飾付き旗）の 3 つ組の配置空間」の元を Σ の各点に配置することによって高次 Teichmüller 空間が定義される。そしてそのクラスター構造は、 Σ の三角形分割 T をとってそれぞれの三角形内に適切な quiver を配置することによって得られる。このときに使われる quiver が 3 章の話と結びつく。

§3.3 と同様に \mathfrak{g} の Weyl 群 $W(\mathfrak{g})$ の最長元 w_0 の最短表示列 \mathbf{i} を一つ選び、[FG06b] の方法に従って対応する quiver $J_{\mathfrak{g}, \mathbf{i}}$ を作る。この $J_{\mathfrak{g}, \mathbf{i}}$ に n 個の頂点と幾つかの矢を適切に加えた quiver $\tilde{J}_{\mathfrak{g}, \mathbf{i}}$ が、旗の 3 つ組のクラスター構造を与える。このような $\tilde{J}_{\mathfrak{g}, \mathbf{i}}$ の構成は、 \mathfrak{g} が A_n 型の場合は Fock と Goncharov によって、そしてその他の \mathfrak{g} の場合は Le, Goncharov と Shen によってなされた [Le19a, Le19b, GS19]。最長元 w_0 の異なる最短表示 \mathbf{i}, \mathbf{i}' に対する quiver $\tilde{J}_{\mathfrak{g}, \mathbf{i}}, \tilde{J}_{\mathfrak{g}, \mathbf{i}'}$ は mutation 列で移り合うことが知られている。図 10 に $\tilde{J}_{\mathfrak{g}, \mathbf{i}}$ の例を示す。図 10 では、最短表示列 \mathbf{i} から定まる quiver $J_{\mathfrak{g}, \mathbf{i}}$ に加えられる n 個の頂点はそれぞれの三角形の底辺上に配置されている。 $\mathfrak{g} = A_n$ のときは quiver に 3 回対称性があり、 $\mathfrak{g} = C_2$ のときは Cartan 行列が対称でないため重み 2 の頂点が登場する。

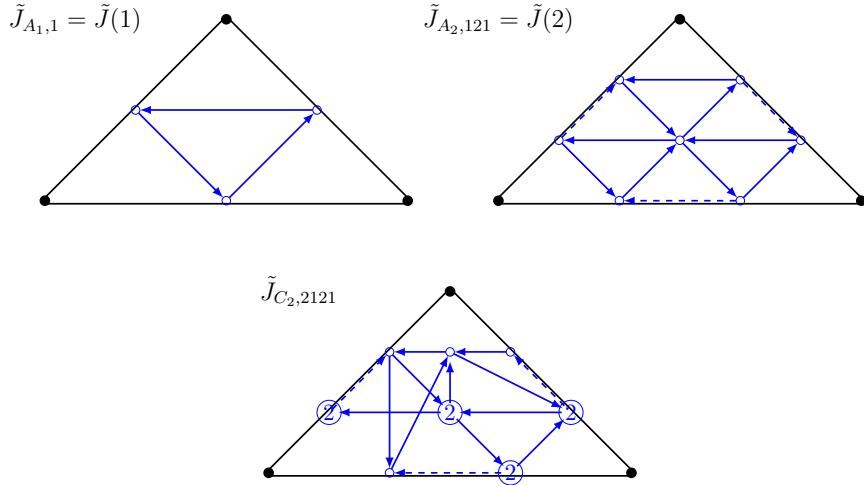


図 10. $\tilde{J}_{\mathfrak{g}, \mathbf{i}}$ の例

ここまで話は、そのまま境界つきの曲面に拡張される。改めて $\Sigma := \Sigma_{g,s,b,m}$ を種数 g , 内点 s 個, 境界成分 b 個, 境界上に m 点をもつ向き付き曲面とする。ただし各境界成分には少なくとも 1 つ点があるものとする。 Σ の三角形分割 T の各三角形に上の quiver $\tilde{J}_{\mathfrak{g}, \mathbf{i}}$ を張り付け、同じ辺上の頂点と点線矢印を貼り合せたものを $Q_{T, \mathfrak{g}, \mathbf{i}}$ と書くことにしよう（より一般に、 \mathbf{i} は三角形毎に異なってもよい）。

高次 Teichmüller 理論において、もとの Teichmüller 空間に對応するものは

$$\mathcal{L}_{G, \Sigma} \simeq \{\pi_1(\Sigma) \rightarrow G\}/G$$

と定義される「 Σ 上の G 局所系の moduli 空間」である。ここにはクラスター構造は入らないのだが、「 \mathcal{X} -space」とよばれている空間

$$\mathcal{X}_{G, \Sigma} = \mathcal{L}_{G, \Sigma} + \text{内点周りの平坦構造}$$

にはクラスター構造が入る [FG06]. Σ の三角形分割 T に対し, $Q_{T,\mathfrak{g},\mathbf{i}}$ の y 変数で境界上の頂点に対応するものを除いたものが $\mathcal{X}_{G,\Sigma}$ の座標を与える. さらに境界の構造を加えた「 \mathcal{P} -space」

$$\mathcal{P}_{G,\Sigma} = \mathcal{X}_{G,\Sigma} + \text{境界の点周りの平坦構造}$$

のクラスター構造が $(Q_{T,\mathfrak{g},\mathbf{i}}, \mathbf{y})$ で与えられる [GS19]. 飾り付き Teichmüller 空間の拡張に相当する空間は「 \mathcal{A} -space」とよばれ, $\mathcal{A}_{G,\Sigma}$ と書かれる. そのクラスター構造は $(Q_{T,\mathfrak{g},\mathbf{i}}, \mathbf{x})$ で与えられる.

Remark 4.2. 空間 $\mathcal{X}_{G,\Sigma}$, $\mathcal{P}_{G,\Sigma}$, $\mathcal{A}_{G,\Sigma}$ には様々な幾何学的な作用があり [FG06], それらの作用がクラスターモジュラー群の元で表せるかという問題を [GS18, GS19], [IIO21] で考察している(6章を参照).

5. 量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の実現

3章と4章の代数的, 幾何的な側面を合わせることによって得られる量子群のクラスター実現を紹介しよう.

5.1. 点付き円盤上の quiver. 三角形を2つ貼り合せて得られる1点つき円盤で境界に2点をもつもの $\tilde{J}_{0,1,1,2}$ を考える. これを簡単に「1点つき円盤」とよぶことにしよう. これに4.4節で導入した quiver $\tilde{J}_{\mathfrak{g},\mathbf{i}}$ と, その鏡映で矢印の向きを変えたもの $\tilde{J}'_{\mathfrak{g},\mathbf{i}}$ を2つの三角形に配置して貼り合せ, 1点つき円盤上の quiver $D_1(\mathfrak{g}, \mathbf{i})$ を作る. さらに $D_1(\mathfrak{g}, \mathbf{i})$ を p 個貼り合せて p 点つき円盤(で境界に2点もつもの)上の quiver $D_p(\mathfrak{g}, \mathbf{i})$ を得る. A_n 型の場合, $\tilde{J}'_{A_n, \mathbf{i}}$ は $\tilde{J}_{A_n, \mathbf{i}}$ に一致する. 図11に, 三角形や円盤が貼り合わされる様子と, quiver $D_1(A_2) := D_1(A_2, 121)$ を示す.

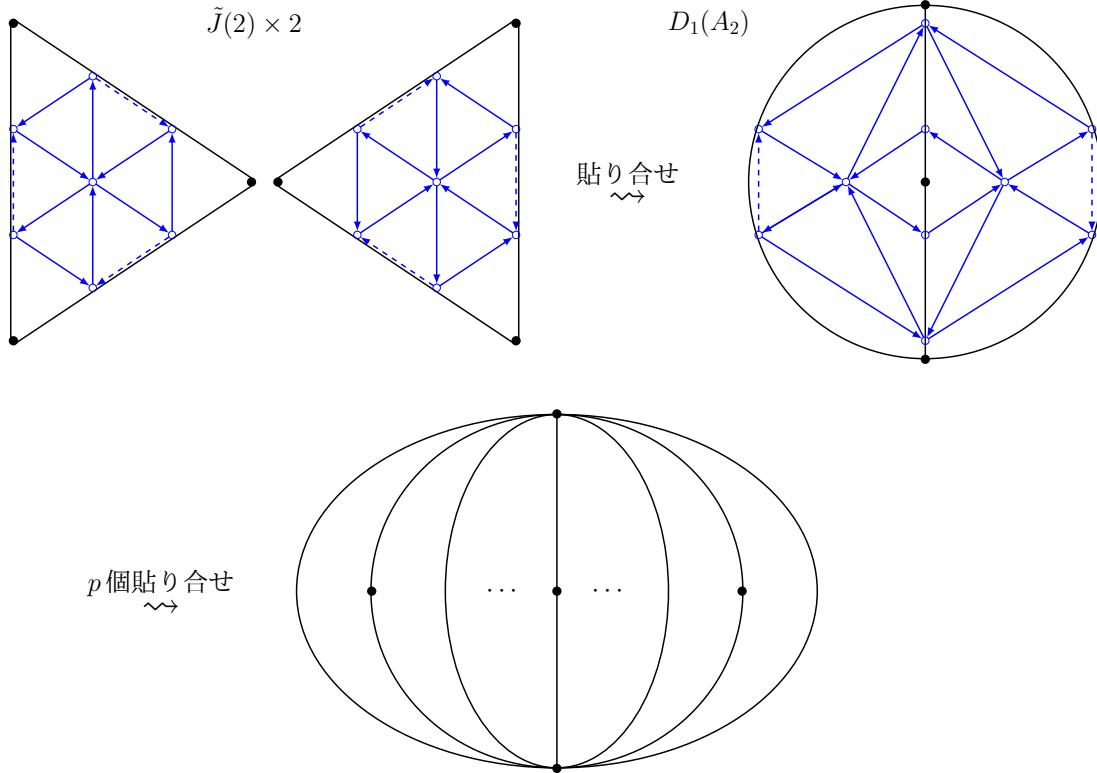


図 11. 点付き円盤の貼り合せと $D_1(A_2)$.

5.2. 量子群の埋め込み. ランク n の有限次元半単純 Lie 環 \mathfrak{g} に対し, 量子群を $U_q(\mathfrak{g})$ とする. $U_q(\mathfrak{g})$ のテンソル積 $U_q(\mathfrak{g})^{\otimes p}$ の $(a, a+1)$ 成分に作用する普遍 R 行列を R_a と書くと, R_a は有名な Yang-Baxter 関係式 :

$$R_a R_{a+1} R_a = R_{a+1} R_a R_{a+1} \quad (a = 1, \dots, p-1) \quad (5.1)$$

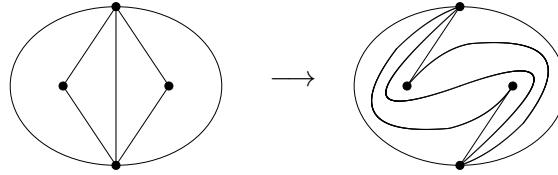
を満たす. 量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ が quiver $D_1(\mathfrak{g}, \mathbf{i})$ の量子 Y 変数で実現でき, そして量子群のテンソル積と点付き円盤の張り合わせが整合的になっている, というのが次の定理の内容である.

Theorem 5.1. ($\mathfrak{g} = A_n$ の場合を [SS19], 一般の \mathfrak{g} の場合は [Ip18])

$p = 1, 2, \dots$ に対し, $D_p(\mathfrak{g}, \mathbf{i})$ の量子 Y 変数が生成する非可換環を $\mathbb{C}_q[D_p(\mathfrak{g}, \mathbf{i})]$ とする.

- (i) $U_q(\mathfrak{g})$ から $\mathbb{C}_q[D_1(\mathfrak{g}, \mathbf{i})]/\sim$ への埋め込みがある. さらに, $U_q(\mathfrak{g})$ の余積と整合的な, $U_q(\mathfrak{g})^{\otimes p}$ から $\mathbb{C}_q[D_p(\mathfrak{g}, \mathbf{i})]/\sim$ への埋め込みがある. (同値関係 \sim については後の例で説明する.)
- (ii) $a \in [1, p-1]$ に対し, R_a の作用は, p 点付き円盤で $(a, a+1)$ 番目の内点を「half-Dehn ツイスト」する mutation 列 $b_a \in \Gamma_{D_p(\mathfrak{g}, \mathbf{i})}$ に対応する.

この定理で出てきた「half-Dehn ツイスト」とは, p 点付き円盤の写像類群の元の一つで, 次の図のように隣合う二つの内点を互いの周りを半周反時計回りするように動かすように作用する.



従って, b_a たちはブレイド群 $B_p(\mathfrak{g}) \subset (p \text{ 点付き円盤の写像類群}) \subset \Gamma_{D_p(\mathfrak{g}, \mathbf{i})}$ を成す.

Theorem 5.1(i) の詳細を例を使って説明しよう. 非可換代数 $\mathcal{D}_q(\mathfrak{g})$ を, 生成元 E_i, F_i, K_i, K'_i ($i \in [1, n]$) と関係式

$$\begin{aligned} K_i E_j &= q_i^{c_{ij}} E_j K_i, & K_i F_j &= q_i^{-c_{ij}} F_j K_i, \\ K'_i E_j &= q_i^{-c_{ij}} E_j K'_i, & K'_i F_j &= q_i^{c_{ij}} F_j K'_i, \\ K_i K_j &= K_j K_i, & K'_i K'_j &= K'_j K'_i, & K_i K'_j &= K'_j K_i, \\ E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{ij} \frac{K_i - K'_i}{q_i - q_i^{-1}} \end{aligned}$$

および E_i, F_i に対する q -Serre 関係式で定義する. ただし $C = (c_{ij})_{i,j \in [1,n]}$ は \mathfrak{g} のカルタン行列, そして単純ルート α_i の内積の $\frac{1}{2}$ 倍である d_i を用いて $q_i := q^{d_i}$ とおく. $\mathcal{D}_q(\mathfrak{g})$ には Hopf 代数の構造が入り, $U_q(\mathfrak{g})$ は $\mathcal{D}_q(\mathfrak{g})/\langle K_i K'_i = 1; i \in [1, n] \rangle$ に同型である. Theorem 5.1(i) は, 埋め込み $\beta : \mathcal{D}_q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathbb{C}_q[D_1(\mathfrak{g}, \mathbf{i})]$ から得られる.

Example 5.2. $\mathfrak{g} = A_2$ の場合. 図 12 のように頂点の番号をつけた quiver $D_1(A_2)$ について, 以下のように埋め込み β を定義する.

$$\begin{aligned} E_1 &\mapsto \sqrt{-1} Y_1(1 + qY_2), & E_2 &\mapsto \sqrt{-1} Y_4(1 + qY_5(1 + qY_6(1 + qY_7))), \\ F_1 &\mapsto \sqrt{-1} Y_3(1 + qY_7(1 + qY_{10}(1 + qY_5))), & F_2 &\mapsto \sqrt{-1} Y_8(1 + qY_9)), \\ K_1 &\mapsto q^2 Y_1 Y_2 Y_3, & K_2 &\mapsto q^2 Y_4 Y_5 Y_6 Y_7 Y_8, \\ K'_1 &\mapsto q^2 Y_3 Y_7 Y_{10} Y_5 Y_1, & K'_2 &\mapsto q^2 Y_8 Y_9 Y_4 \end{aligned}$$

quiver の矢の向きに沿って Y 変数を適当な規則で掛けていくと、それぞれの生成元の像が得られることが分かるだろう。これにより

$$U_q(A_2) \simeq \mathcal{D}_q(A_2)/\langle K_i K'_i = 1; i \in [1, 2] \rangle \hookrightarrow \mathbb{C}_q[D_1(A_2)]/\{\beta(K_i K'_i) = 1; i \in [1, 2]\}$$

が得られる。

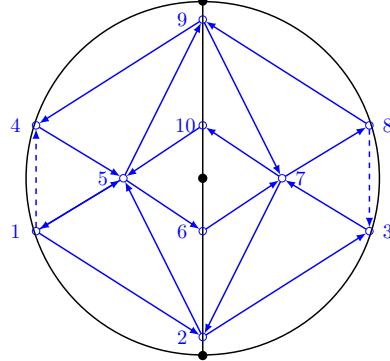


図 12. $D_1(A_2)$

Remark 5.3. (i) このような量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ のクラスター実現は、量子群の「positive 表現」と密接に関係している [Ip18]。この表現は量子群の Hilbert 空間上の自己共役作用素による表現で、Frenkel と Ip によって導入された [FI14]。Theorem 5.1 は positive 表現の幾何的な見方を与える、その応用として [SS17] では positive 表現のテンソル積分解の幾何的構造が明らかにされた。

(ii) 点付き円盤とは限らない、より一般的な点付き曲面上の quiver への $U_q(\mathfrak{g})$ や量子 Borel 部分代数 $U_q(\mathfrak{b})$ の埋め込みも [GS19] で議論されている。

Theorem 5.1(ii)について、half-Dehn ツイスト b_a の具体形と幾何的な様子をみてみよう。これまで考えてきた 2 点つき円盤の三角形分割 — 図 13 の左上 — から始めて、辺 4, 2, 6, 4 の順に flip し、初めの三角形分割と同じになるように辺の番号を付け替えると 2 つの内点が互いの周りを反時計周りに半周したように見える三角形分割が得られる。 $\mathfrak{g} = A_1$ の場合には、初め（と最後）の三角形分割に双対な quiver $D_2(A_1) := D_2(A_1, 1)$ は図 13 の左下のようになる。ブレイド群 $B_2(A_1)$ は b_1 で生成され、その具体形は flip の順序と辺の番号の付け替えに従って

$$b_1 = (3, 5) \circ (2, 5) \circ (3, 6) \circ \mu_4 \circ \mu_6 \circ \mu_2 \circ \mu_4$$

となる（図では $s := (3, 5) \circ (2, 5) \circ (3, 6)$ である）。³⁾

6. おわりに

本稿では、クラスター代数の代数的な側面、幾何的な側面についてクラスター代数誕生の背景とともに紹介した。詳細を述べずに例やお話で済ませたところが多いので、興味のある方は文献を参照していただきたい。最後に、本文では触れなかった関連する話題をごく簡単に紹介する。

³⁾このようなブレイド群 $B_p(A_1)$ のクラスター実現は、結び目補空間の複素体積の研究で導入された [HI14, HI15]。そのときはこれほど素性が良いものとは知らず、いろいろなことがうまくいくのに感心していた。

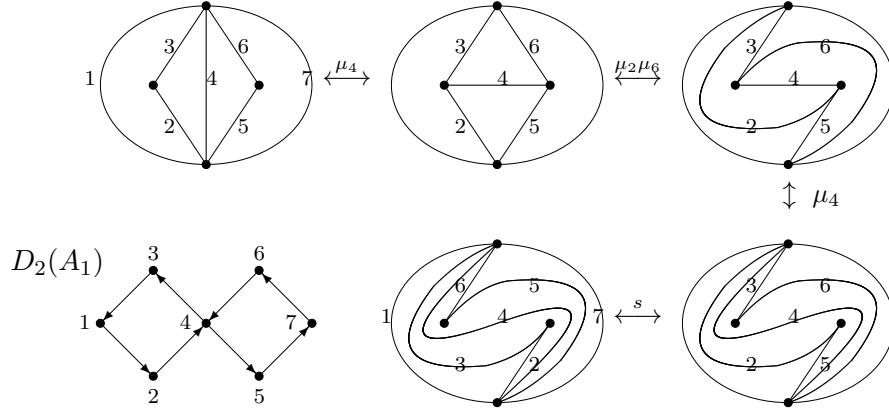


図 13. Half-Dehn ツイスト

ワイル群のクラスター実現. m を 2 以上の整数とする. Kac-Moody Lie 環 \mathfrak{g} の Dynkin 図形に付随する, m 周期的なある quiver $Q_m(\mathfrak{g})$ を定義すると, ワイル群 $W(\mathfrak{g})$ が $Q_m(\mathfrak{g})$ のクラスター モジュラー群 $\Gamma_{Q_m(\mathfrak{g})}$ の部分群として実現できる. $\mathfrak{g} = A_n$ の場合は [ILP19], その一般化は [IIO21] で導入された. このワイル群作用にはいろいろな応用がある.

- [ILP19] では, アフィン量子群 $U'_q(A_m^{(1)})$ の対称積表現に対応する幾何クリスタルの幾何 R 行列が, $Q_m(A_n)$ で実現されるワイル群 $W(A_n)$ になっていることが示された.
- 高次 Teichmüller 理論では曲面の内点周りへのワイル群作用があり [FG06], 空間 $\mathcal{P}_{G,\Sigma}, \mathcal{A}_{G,\Sigma}$ への作用は quiver $Q_{hk}(\mathfrak{g})$ で実現されるものと一致する [GS18, GS19, IIO21]. ただし h は \mathfrak{g} のコクセター数, k は正整数である.
- $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$ のとき, $Q_2(A_n^{(1)})$ が実現するワイル群は離散 Painlevé 方程式とその拡張に相当する差分方程式の対称性を記述する [OS20] ([BGM18] も参照).

アフィン量子群の q 指標のクラスター構造. \mathfrak{g} を有限次元半単純 Lie 環, $\hat{\mathfrak{g}}$ を \mathfrak{g} の (non-twisted) アフィン Lie 環とする. \mathfrak{g} の Dynkin 図形に付随する m 周期的な quiver $Q'_m(\mathfrak{g})$ を定義する. \mathfrak{g} の Dynkin 図形が simply-laced なとき $Q'_m(\mathfrak{g})$ は上の $Q_m(\mathfrak{g})$ に一致するが, そうでないときは異なっている.

- [HL16a] では, 量子群 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の Kirillov-Reshetikhin 加群の q 指標とクラスター代数との関係を調べる際に quiver $Q'_\infty(\mathfrak{g})$ を導入し, その半無限な部分簇を用いた. そして [HL16b] では, $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の Borel 部分代数の表現の圏を研究するために $Q'_\infty(\mathfrak{g})$ 全体を用いた.
- $Q'_m(\mathfrak{g})$ に対し, [IIO21] と類似の方法でワイル群 $W(\mathfrak{g}) \subset \Gamma_{Q'_m(\mathfrak{g})}$ を実現した [I20]. さらに q が 1 の幕根のとき, $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の q 指標がこのワイル群作用で不変であることを示した.

謝辞. 第 66 回代数学シンポジウムにて講演の機会を下さった, 有木進氏をはじめ第 66 回代数学シンポジウム責任者の方々にお礼申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 19K03440 の助成を受けたものです.

REFERENCES

- [BFZ96] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices*, Adv. Math. **122** (1996) no.1, 49–149.
- [BGM18] M. Bershtein, P. Gavrylenko, and A. Marshakov, *Cluster integrable systems, q -Painlevé equations and their quantization*, J. High Energy Phys. **2** (2018) 077, front matter + 33pp.
- [BMRRT06] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten and G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Advances in Math., **204** (2006) 572–618.
- [BZ97] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Total positivity in Schubert varieties*, Comment. Math. Helv. **72** (1997) no. 1, 128–166.
- [CCS05] P. Caldero, F. Chapoton and R. Schiffler, *Quivers with relations arising from clusters (A_n case)*, Trans.of Amer. Math. Soc. **358** (2005) no. 3, 1347–1364.
- [F97] V. V. Fock, *Dual Teichmüller spaces*, arXiv:dg-ga/9702018.
- [FG06] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., No. 103 (2006) 1–211.
- [FG06b] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Cluster \mathcal{X} -varieties, amalgamation and Poisson-Lie groups*, Algebraic geometry and number theory, Progr. Math. **253** (Birkhäuser Boston, 2006) 27–68.
- [FG09] V. Fock and A. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **42** (2009) 865–930.
- [FI14] I. Frenkel and I. Ip, *Positive representations of split real quantum groups and future perspectives*, Int. Math. Res. Notices, 2014 (8), (2014) 2126–2164.
- [FST08] S. Fomin, M. Shapiro and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces I. Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008) 83–146.
- [FZ-I] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002) 497–529.
- [FZ-II] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003) 63–121.
- [FZ-IV] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras IV. Coefficients*, Compos. Math. **143** (2007) 112–164.
- [GS18] A. B. Goncharov and L. Shen, *Donaldson-Thomas transformations of moduli spaces of G -local systems*, Adv. Math. **327** (2018) 225–348.
- [GS19] A. B. Goncharov and L. Shen, *Quantum geometry of moduli spaces of local systems and representation theory*, arXiv:1904.1049.
- [HI15] K. Hikami and R. Inoue, *Braids, complex volume, and cluster algebra*, Algebraic and Geometric Topology **15** (2015) 2175–2194.
- [HI14] K. Hikami and R. Inoue, *Braiding operator via quantum cluster algebra*, J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014) 474006.
- [HL16a] D. Hernandez and B. Leclerc, *A cluster algebra approach to q -characters of Kirillov-Reshetikhin modules*, J. Eur. Math. Soc. **18** (2016) 1113–1159.
- [HL16b] D. Hernandez and B. Leclerc, *Cluster algebras and category \mathcal{O} for representations of Borel subalgebras of quantum affine algebras*, Algebra Number Theory **10**, no. 9 (2016) 2015–2052.
- [I20] R. Inoue, *Cluster realization of Weyl groups and q -characters of quantum affine algebras*, Lett. Math. Phys. **111** (2021) no. 1, Paper No. 4, 32pp.
- [IIKNS10] Rei Inoue, Osamu Iyama, Atsuo Kuniba, Tomoyuki Nakanishi and Junji Suzuki, *Periodicities of T -systems and Y -systems*, Nagoya Math. J. **197** (2010) 59–174.
- [IIKKN13] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba, and T. Nakanishi, *Periodicities of T -systems and Y -systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: type B_r* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. **49** (2013) no. 1, 1–42.
- [IO21] R. Inoue, T. Ishibashi and H. Oya, *Cluster realizations of Weyl groups and higher Teichmuller theory*, Selecta Math. **27** (2021) 37, 84pp.
- [Ip18] Ivan C. H. Ip, *Cluster Realization of $U_q(\mathfrak{g})$ and Factorization of the Universal R-Matrix*, Selecta Math. (N.S.) **24** (2018) no. 5, 4461–4553.
- [ILP19] R. Inoue, T. Lam, and P. Pylyavskyy, *On the cluster nature and quantization of geometric R -matrices*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **55** (2019) no. 1, 25–78.
- [KN11] R. Kashaev and T. Nakanishi, *Classical and Quantum Dilogarithm Identities*, SIGMA **7** (2011) 102, 29pp.
- [KO18] Y. Kimura and H. Oya, *Quantum twist maps and dual canonical bases*, Algebr. Represent. Theory **21** (2018) no. 3, 589–604.
- [O19] H. Oya, *The chamber ansatz for quantum unipotent cells*, Transform. Groups **24** (2019) no. 1, 193–217.

- [Le19a] I. Le, *Cluster structure on higher Teichmüller spaces for classical groups*, Forum Math. Sigma, **7** (2019) e13, 165pp.
- [Le19b] I. Le, *An approach to higher Teichmüller spaces for general groups*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2019, no.16, 4899–4949.
- [Lus94] G. Lusztig, *Total positivity in reductive groups*, Lie theory and geometry, Progr. Math. **123** (Birkhäuser Boston, 1994) 531–568.
- [NTY19] K. Nagao, Y. Terashima and M. Yamazaki, *Hyperbolic geometry and cluster algebra*, Nagoya Math. J., **235** (2019) 1–25.
- [OS20] N. Okubo and T. Suzuki, *Generalized q -Painlevé VI systems of type $(A_{2n+1} + A_1 + A_1)^{(1)}$ arising from cluster algebra*, Int. Math. Res. Not. IMRN, rnaa283 (2020) 1–47.
- [Pe87] R. Penner, *The decorated Teichmüller space of punctured surfaces*, Commun. Math. Phys. **113** (1987) 299–339.
- [SS19] G. Schrader and A. Shapiro, *A cluster realization of $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ from quantum character varieties*, Invent. Math. **216** (2019) no.3, 799–846.
- [SS17] G. Schrader and A. Shapiro, *Continuous tensor categories from quantum groups I: algebraic aspects*, arXiv:1708.08107.

形式的 dg 代数のクラスター圏とその森田型定理

埴原 紀宏 (はにはら のりひろ) *

1 導入

クラスター圏（団圏）は Fomin-Zelevinsky のクラスター代数（団代数）[10] を動機に Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov [7] によって生み出された三角圏である。クラスター圏はクラスター代数における変異などの組み合わせ論的構造の表現論的な解釈を与えるが、このようなクラスター代数の表現論的・圏論的モデルを与えることを、クラスター代数の圏化 (categorification) という^{*1}。今日では多様なクラスター代数に対してそれを圏化するクラスター圏が構成されているほか、「クラスター傾理論」として高次元 Auslander-Reiten 理論、可換環の Cohen-Macaulay 表現論、Lie 代数の表現論、(非) 可換代数幾何、特異点論など多くの対象と密接に関わり広がりを見せている。

本稿では主に環の表現論の立場からクラスター圏を論じる。環の表現論の大きな目標は、与えられた環や類似の代数構造 (dg 圏など) に付随する種々の圏（加群圏、導來圏、特異圏、クラスター圏など）を理解することであり、クラスター圏自身も興味深い表現論的対象である。クラスター圏がクラスター代数の圏化として働くために重要な性質が、「クラスター傾対象を持つ Calabi-Yau 三角圏」たることであるが、Amiot はそのような三角圏を dg 代数に付随するクラスター圏として体系的に構成した。本文ではこの Amiot クラスター圏に焦点を当てて、その構造の理解を与える試みとして [14, 15] の結果を紹介したい。

本稿は第 66 回代数学シンポジウムの講演に基づきます。

2 背景

以下（簡単のため） k を完全体、 $D = \text{Hom}_k(-, k)$ を k 双対をとる関手とする。まず基本的な言葉の定義を振り返る。

定義 2.1. \mathcal{T} を k 線形三角圏とする。

1. \mathcal{T} 上の Serre 関手とは \mathcal{T} 上の自己同値 ν であって各 $X, Y \in \mathcal{T}$ に対して自然な同型

$$D \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, \nu X)$$

が成り立つものをいう。

2. 整数 d に対して三角圏の d シフト関手 $[d]$ が Serre 関手を与えるとき、すなわち次の自然な同型が存在するとき \mathcal{T} は d -Calabi-Yau (CY) であるという。

$$D \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X[d])$$

以後 Serre 関手 ν と整数 d に対して ν_d で合成 $\nu \circ [-d]$ を表す。Serre 関手や Calabi-Yau 三角圏の例を挙げておく。

* 名古屋大学多元数理科学研究科, m17034e@math.nagoya-u.ac.jp

^{*1} ここで扱うのは加法的圏化 (additive categorification) である。他にはクラスター代数をモノイダルアーベル圏の Grothendieck 環として実現するモノイダル圏化がある。

- 例 2.2.**
1. X を d 次元非特異射影多様体、 ω をその双対化層とすると $-\otimes_X \omega[d]$ は X の導来圏 $\mathcal{D}^b(\text{coh } X)$ の Serre 関手である。従って X が Calabi-Yau (ω が自明) のとき $\mathcal{D}^b(\text{coh } X)$ は d -CY である。
 2. A を有限次元 k 代数で大域次元が有限のものとすると $-\otimes_A^L DA$ は A の有界導来圏 $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ の Serre 関手である。
 3. R を d 次元可換 Gorenstein 孤立特異点とすると、その Cohen-Macaulay 安定圏（あるいは特異圏） $\underline{\text{CM}} R = \mathcal{D}_{\text{sg}}(R)$ は $(d-1)$ -CY である。

クラスター傾理論において大切な概念が次で与えられる。

定義 2.3 ([18, 7, 23]). d を正の整数とする。三角圏 \mathcal{T} の対象 X が

$$\begin{aligned}\text{add } X &= \{Y \in \mathcal{T} \mid 0 < i < d \text{ に対して } \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[i]) = 0\} \\ &= \{Y \in \mathcal{T} \mid 0 < i < d \text{ に対して } \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X[i]) = 0\}\end{aligned}$$

を満たすとき d クラスター傾対象 (d -cluster tilting object) であるという。

特に 2 クラスター傾対象がクラスター代数におけるクラスター（団）の対応物であり、クラスター代数の圏化の観点からは本質的である。同時に d クラスター傾対象（あるいは d クラスター傾部分圏）は高次元 Auslander-Reiten 理論 [18, 19] の舞台として有限次元代数や可換環の表現論 [23] で重要なほか、さらに非可換特異点解消 [35] の類似として双有理幾何学でも現れる。

クラスター傾対象をもつ CY 三角圏の主要なクラスが、以下に述べるクラスター圏である。

2.1 Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov クラスター圏

先述のようにクラスター圏はクラスター代数の圏化の文脈で Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov [7] によって導入された三角圏である。最も基本的なクラスター代数が（有限で非輪状な）簇に対して定義されるように、「元祖」クラスター圏は有限非輪状簇 Q に対してその道多元環 kQ の導来圏の軌道圏^{*2}として

$$\mathcal{C}_Q := \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ) / -\otimes_{kQ}^L D(kQ)[-2] = \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ) / \tau^{-1}[1]$$

によって定義される。ここで軌道圏をとるのに使った関手 $- \otimes_{kQ}^L D(kQ)[-2]$ は Serre 関手と $[-2]$ の合成 ν_2 であり、また Auslander-Reiten 移動 τ を用いて $\tau^{-1}[1]$ とも書ける。次が簇のクラスター圏に関する最も基本的な結果である。

定理 2.4. Q を有限非輪状簇とする。

- (1) [26] \mathcal{C}_Q は自然な三角圏の構造を持ち、 2 -CY である。
- (2) [7] $kQ \in \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$ の \mathcal{C}_Q における像は 2 クラスター傾対象である。

注意 2.5. 三角圏の軌道圏は、一般には三角圏の構造を持たない。上の定理 (1) (の前半) は $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$ が道多元環の導来圏であることに強く依存した結果である。一般には三角圏の軌道圏の代わりに、その包絡三角圏 (triangulated hull)^{*3}を考える。そのためには三角圏の dg 増強 (enhancement) が必要となる。これについては次節で触れる。

簇の道多元環 kQ は遺伝的 (=大域次元が 1 以下) であるためその導来圏の構造は簡明であり、ゆえにクラスター圏の構造も明示することができる。このクラスター圏がクラスター代数を「圏化」していることを非自明な

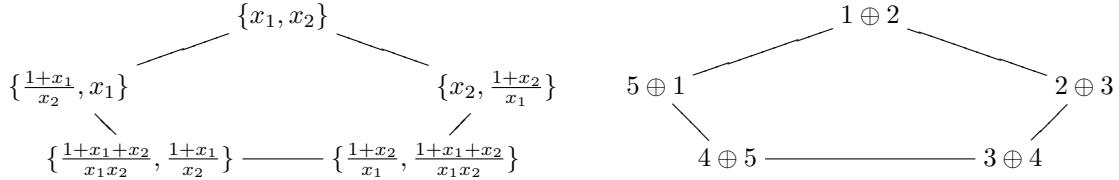
^{*2} 加法圏 \mathcal{A} とその上の自己同型関手 F に対して、 \mathcal{A} の F による軌道圏 \mathcal{A}/F は、 \mathcal{A} と同じ対象からなり射空間を $\text{Hom}_{\mathcal{A}/F}(X, Y) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F^i X, Y)$ とする圏として定義される。

^{*3} 本稿では軌道圏 \mathcal{T}/F の包絡三角圏とは、三角関手 $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$ で忠実充満関手 $\mathcal{T}/F \hookrightarrow \mathcal{U}$ を誘導し像が \mathcal{U} を生成するもの、程度の意味で使うこととする。

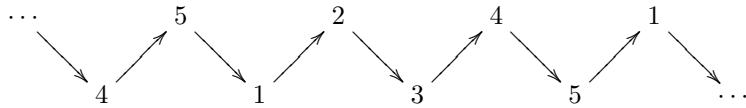
最も簡単な例 (A_2 型) を用いて観察してみる。

例 2.6. Q を A_2 型箭 $1 \longrightarrow 2$ とする。

A_2 型のクラスター代数 \mathcal{A}_Q は 5 つのクラスター変数 $x_1, x_2, (1+x_1)/x_2, (1+x_2)/x_1, (1+x_1+x_2)/x_1x_2$ で生成され、これらが 5 つのクラスターに組み分けされ、以下の左の交換グラフを持つ。



一方 A_2 型のクラスター圏 \mathcal{C}_Q の Auslander-Reiten 箭は以下のようになり、(5 つのクラスター変数に対応して) 5 つの直既約対象からなる。 \mathcal{C}_Q の 2 クラスター傾対象は (5 つのクラスターに対応して) $1 \oplus 2, 2 \oplus 3, 3 \oplus 4, 4 \oplus 5, 5 \oplus 1$ の 5 つで、これらはやはり右上のような交換グラフをもつ。



クラスター代数、クラスター圏の両者から得られる五角形の交換グラフが同型であることは、 \mathcal{C}_Q が \mathcal{A}_Q を圏化している様子が見て取れるだろう。

より一般に、多様なクラスター代数に対してそれを圏化する三角圏が構成されており、それぞれが「クラスター圏」と呼ばれている。通常は cluster character の存在を以って「圏化」と言うようである。クラスター代数の圏化としてのクラスター圏について、より詳しい解説は [28] を参照していただきたい。

2.2 Amiot クラスター圏

前節では、クラスター代数の立場からは非輪状箭に対するクラスター代数の圏化、環論的には遺伝的多元環に対するクラスター圏の定義を説明しその例を見た。では次に非輪状でない箭はどうか、あるいは大域次元が 1 を超える環に対するクラスター圏は定義できるのか、というの自然な問い合わせである。この問題には微分次数付き代数 (differential graded algebra, dg 代数) を用いることによって同時に答えを与えることができる。

この節では dg 代数を用いたクラスター圏の構成を解説する。扱う内容は Keller [26, 29], Amiot [1], Guo [13] に基づく。また Amiot-Guo-Keller によるクラスター圏の構成を一般化した枠組みが [22] で与えられている。まず dg 代数とその導来圏の定義を簡単に述べておく。dg 代数 (や dg 圈) の導来圏に関する基本的な事項は [25] を参照されたい。

定義 2.7. 微分次数付き代数 (dg 代数) とは次数付き k 代数 $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ であって次数 +1 の微分 d を持ち、各 $a \in A^p, b \in A$ に対して Leibniz 則 $d(ab) = da \cdot b + (-1)^p a \cdot db$ を満たすものをいう。

圏論の言葉を用いれば、dg 代数は k ベクトル空間の複体のなす対称モノイダル圏で enrich された環である。dg 代数の簡単な例を挙げておく。

- 通常の k 代数は次数 0 に集中した dg 代数と見なすことができる。
- 次数付き環が与えられると、それを微分が 0 の dg 代数と見なすことができる。

与えられた dg 代数 A に対して $dg A$ 加群の圏 (のホモトピー圏) を擬同型で局所化することで A の導来圏 $\mathcal{D}(A)$ が得られる。これは次数ずらし (=複体のシフト) [1] を懸垂関手として持つ三角圏である。例えば A

が通常の環のときは、dg A 加群とは A 加群の複体であり、dg 代数 A の導来圏 $\mathcal{D}(A)$ は A 加群の圏の導来圏 $\mathcal{D}(\text{Mod } A)$ である。

導来圏 $\mathcal{D}(A)$ の部分圏を 2 つ用意しよう。

- $\text{per } A := \text{thick}_{\mathcal{D}(A)} A$ を A で生成される thick 部分圏（直和因子で閉じる充満三角部分圏）とする。これを A の完全導来圏 (perfect derived category) という。
- $\mathcal{D}^b(A) := \{M \in \mathcal{D}(A) \mid \dim (\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i M) < \infty\}$ 、すなわちコホモロジーが有限次元の dg 加群のなす三角部分圏を $\mathcal{D}^b(A)$ とする。

例えば A が通常の環のときは $\text{per } A$ は有限生成射影加群の有界ホモトピー圏 $\mathcal{K}^b(\text{proj } A)$ である。

dg 代数の導来圏の遍在することは次の Keller の定理 [25] から分かる。

定理 2.8. 代数的三角圏で 1 つの対象で生成される^{*4}ものは、ある dg 代数の完全導来圏と三角同値である。

クラスター圏の構成に重要なのは、次の Ginzburg [12] の意味の Calabi-Yau dg 代数である。dg 代数 A に対してその包絡多元環 $A^{\text{op}} \otimes_k A$ を A^e で表す。

定義 2.9. A を dg 代数とする。

1. A が (homologically) **smooth** であるとは、 A が両側加群として完全、すなわち $A \in \text{per } A^e$ を満たすことをいう。
2. A が **n -Calabi-Yau** であるとは、 A が smooth であり、 $\mathcal{D}(A^e)$ において次の同型が成り立つときをいう。

$$\text{RHom}_{A^e}(A, A^e)[n] \simeq A$$

CY dg 代数の定義についていくつかコメントをしておく。

注意 2.10. 1. dg 代数 A の smooth 性は環の大域次元の有限性の類似である。実際、有限次元代数 A に対して、 A が (dg 代数として) smooth であることは A の大域次元の有限性と同値である^{*5}。
2. A を smooth な dg 代数とすると、 $X \in \mathcal{D}^b(A)$, $Y \in \mathcal{D}(A)$ に対して自然な同型

$$D \text{RHom}_A(X, Y) \simeq \text{RHom}_A(Y \otimes_A^L \text{RHom}_{A^e}(A, A^e), X)$$

が存在する ([27, Lemma 4.1])。従って関手 $- \otimes_A^L \text{RHom}_{A^e}(A, A^e)$ は (可逆ならば) Serre 関手の逆を与えるので、 $\text{RHom}_{A^e}(A, A^e)$ は逆双対化複体 (inverse dualizing complex) と呼ばれる。

3. 上の同型から A が n -CY であるとき、その有限次元導来圏 $\mathcal{D}^b(A)$ は n -CY であることが分かる。

CY dg 代数の例を与えるのは (定義が難しさから推察されるように) 非自明なことであるが、Calabi-Yau 完備化やその変形 (deformation) として体系的な構成が知られている。

定義 2.11. 1. [12] (Q, W) をポテンシャル付き箇^{*6}とする。次のように得られる dg 代数 $k\widehat{Q}$ を **Ginzburg dg 代数**といい $\Gamma_3(Q, W)$ で表す。

- 各 $a \in Q_1$ (矢の集合) に対して次数 -1 の逆向きの矢 a^* を付け加える。
- 各 $i \in Q_0$ (頂点の集合) に対して次数 -2 のループ t_i を付け加える。

このようにして得られる箇を \widehat{Q} とおく。

- \widehat{Q} 上に微分を $da^* = \partial_a W$, $dt_i = e_i(\sum_{a \in Q_1} (aa^* - a^*a))e_i$ で定める。ただし ∂_a は矢 a における cyclic derivative, e_i は i におけるべき等元。

^{*4} 「生成」とは (ここでは) その対象を含む最小の thick 部分圏が全体であること。

^{*5} 基礎体 k の完全性を使っている。

^{*6} [9] の意味。すなわち Q は箇で W はそのサイクルの線形結合を up to cyclic permutation で見たものである。

2. [29] A を smooth な dg 代数、 $d \in \mathbb{Z}$, $\theta_d \rightarrow \mathrm{RHom}_{A^e}(A, A^e)[d]$ を A^e 加群としての cofibrant resolution^{*7} とする。このときテンソル代数

$$\Pi_{d+1}(A) := A \oplus \theta_d \oplus (\theta_d \otimes_A \theta_d) \oplus \cdots$$

を A の $(d+1)$ -Calabi-Yau 完備化 (Calabi-Yau completion) という。

定理 2.12 (Keller [29]). 1. ポテンシャル付き簇 (Q, W) の Ginzburg dg 代数 $\Gamma_3(Q, W)$ は 3-CY である。
2. smooth な dg 代数 A の $(d+1)$ -Calabi-Yau 完備化 $\Pi_{d+1}(A)$ は $(d+1)$ -CY である。

Amiot クラスター圏はこのような CY dg 代数（で多少のコホモロジーの条件を満たすもの）に対して定義される。 Π が smooth ならば導来圏の包含 $\mathcal{D}^b(\Pi) \subset \mathrm{per} \Pi$ があることに注意する。

定理-定義 2.13 (Amiot [1]). $d \geq 2$ を整数、 Π を $(d+1)$ -CY dg 代数で $H^{>0}\Pi = 0$, $H^0\Pi$ が有限次元であるものとする。このとき

$$\mathcal{C}(\Pi) := \mathrm{per} \Pi / \mathcal{D}^b(\Pi)$$

は d -CY 三角圏で $\Pi \in \mathrm{per} \Pi$ の像は $\mathcal{C}(\Pi)$ の d クラスター傾対象を与える。この $\mathcal{C}(\Pi)$ を Π のクラスター圏という。

こうして簇のクラスター圏 \mathcal{C}_Q の一般化として、Jacobi 有限^{*8}なポテンシャル付き簇に対して、そのクラスター圏 $\mathcal{C}_{(Q,W)}$ が Ginzburg dg 代数のクラスター圏 $\mathcal{C}(\Gamma_3(Q, W))$ として定義される。 Q が非輪状（このとき必然的に $W = 0$ ）の場合は $\mathcal{C}_{(Q,0)} = \mathcal{C}_Q$ である。

また（遺伝的とは限らない）有限次元代数 A のクラスター圏は、上の定理を A の CY 完備化に対して適用することで定義される。この構成が \mathcal{C}_Q の一般化を与えていていることを少し詳しく説明する。 $d \geq 2$ を整数、 A を ν_d 有限^{*9}な有限次元代数、 $\Pi = \Pi_{d+1}(A)$ を A の $(d+1)$ -CY 完備化とする。CY 完備化の定義から自然な射 $A \rightarrow \Pi$ がある。

定理-定義 2.14 (Amiot [1]). dg 代数の射 $A \rightarrow \Pi$ から得られる $- \otimes_A^L \Pi : \mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathrm{per} \Pi$ は忠実充満関手

$$- \otimes_A^L \Pi : \mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A) / \nu_d \hookrightarrow \mathcal{C}(\Pi)$$

を誘導し $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A)$ の包絡三角圏を与える。この $\mathcal{C}(\Pi)$ を A の d クラスター圏といい $\mathcal{C}_d(A)$ で表す。

特に埋め込み $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A) / \nu_d \hookrightarrow \mathcal{C}_d(A)$ が存在し、 $\mathcal{C}_d(A)$ は d -CY 三角圏で $A \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A)$ の像はクラスター傾対象を与える。こうして定理 2.14 は定理 2.4 の一般化であることが分かる。 $(\mathcal{C}_Q = \mathcal{C}_2(kQ)$ である。)

Amiot のクラスター圏の構成 2.13 は（抽象的であるが、その分）クラスター傾対象を持つ CY 三角圏の「標準型」と考えられている。例えばクラスター傾理論で現れる多くの CY 三角圏が定理 2.13, 2.14 の形で現れることが知られている [1, 3, 21, 2, 34] ほか、クラスター傾対象（の類似）をもつ CY 三角圏をある dg 代数 Π を用いて定義 2.13 の形に記述できることが分かっている [24, 15]。

^{*7} 通常の環上の projective resolution の類似。例えば導来テンソル積 $M \otimes_A^L N$ は cofibrant resolution $P \rightarrow M$ をとることで $P \otimes_A N$ として計算される。

^{*8} $\Gamma_3(Q, W)$ に対するコホモロジーの条件の言い換え。 $H^0\Gamma_3(Q, W)$ が Jacobi 代数と呼ばれることによる。

^{*9} $\Pi_{d+1}(A)$ に対するコホモロジーの条件の言い換え。例えば「大域次元が d 未満 $\Rightarrow \nu_d$ 有限 \Rightarrow 大域次元が d 以下」が成り立つ。

3 主定理

3.1 形式的 dg 代数のクラスター圏

我々の目的は Amiot のクラスター圏 2.13 を理解することである。例えば定理 2.14 のように、CY dg 代数 Π が有限次元代数 A の CY 完備化である場合は Π のクラスター圏は A の導来圏の軌道圏の包絡三角圏として表示された。このように Amiot クラスター圏の理解として、導来圏の軌道圏やその他の三角圏との圏同値を与えることが目標である。

本稿では Amiot クラスター圏を考える CY dg 代数として形式的 (formal) なものを扱う。ここで微分が 0 の dg 代数 (と擬同型) なものを形式的 dg 代数という。そこで (dg でない) 通常の次数付き環から議論をはじめ。まず (dg でない通常の) CY 代数の定義を述べる。

定義 3.1. $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ を次数付き環とする。 R が n -Calabi-Yau で a 不変量 a をもつ^{*10} とは、 R が smooth であり次数付き両側加群の導来圏 $\mathcal{D}(\text{Mod}^{\mathbb{Z}} R^e)$ において同型

$$\text{RHom}_{R^e}(R, R^e)(a)[n] \simeq R$$

が存在することをいう。

smooth で半単純でない負次数付き代数の a 不変量はつねに正である。通常の CY 代数は (CY dg 代数と比べて) 例がよく知られている。

- 例 3.2.**
1. $R = k[x_1, \dots, x_n]$ を n 変数多項式環、 $\deg x_i = a_i$ とする。このとき R は n -CY で a 不変量は $-\sum_{i=1}^n a_i$ である。
 2. k を標数 0 の代数閉体、 G を $\text{SL}_n(k)$ の有限部分群とする。このときねじれ群環 $R = k[x_1, \dots, x_n] * G$ は n -CY である。
 3. Q を連結な non-Dynkin 箱、 R をその前射影多元環 (preprojective algebra) とする。すなわち下のように R は Q に逆向きの矢を付け加えた箱 \overline{Q} と関係式で表示される代数である。

$$\overline{Q} = \cdots \xleftarrow{\alpha} \circ \xrightarrow{\alpha^*} \cdots, \quad R = k\overline{Q}/(\sum_{\alpha \in Q_1} (\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha))$$

整数 a を好きにとり、各矢 α に対して $\deg \alpha + \deg \alpha^* = -a$ を満たすように次数を与える。(例えば $\deg \alpha = 0, \deg \alpha^* = 1$.) すると R は 2-CY で a 不変量 a をもつ。

4. より一般に A を n 無限表現型の有限次元代数の $(n+1)$ 前射影多元環は $(n+1)$ -CY である。

他にも標準束の全空間などの幾何的な状況 [5, 8] やダイマー模型 [6] から現れる例などが知られている。

1 つ目の結果は、CY dg 代数をこのように比較的よく知られた次数付き CY 代数から素朴に構成できることを主張する。

定理 3.3. R を次数付き n -CY 代数で a 不変量 a を持つとする。このとき R^{dg} は符号のねじれを除いて (dg 代数として) $(n+a)$ -CY である。

従って例 3.2 に挙げたものは dg 代数としても (符号を除いて) CY であることが分かる。多項式環の場合だけ改めて述べておこう。

例 3.4. $R = k[x_0, x_1, \dots, x_d]$ を $(d+1)$ 変数多項式環、 $\deg x_i = -a_i$ とする。

*10 「Gorenstein parameter が $-a$ である」とも言われる。

- R は次数付き環として $(d+1)$ -CY で a 不変量は $a = \sum_{i=0}^d a_i$ である。
- R を微分が 0 の dg 代数と見なすと up to sign で $(d+a+1)$ -CY である。

こうして CY dg 代数の構成ができたので、次の目標は $\mathcal{C}(R^{\text{dg}})$ の表示を与えることである。定理を述べるためにいくつか言葉を準備する。次数付き CY 代数 R に対してその次数付き加群の導来圏 $\mathcal{D}(\text{Mod}^{\mathbb{Z}}R)$ の三角部分圏を次のように定める。

- $\text{per}^{\mathbb{Z}}R := \text{thick}\{R(i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$, すなわち自由加群で生成される thick 部分圏。これは有限生成射影加群のホモトピー圏に他ならない : $\text{per}^{\mathbb{Z}}R \simeq \mathcal{K}^b(\text{proj}^{\mathbb{Z}}R)$. さらに R がネーター環のとき（大域次元の有限性から）これは有限生成次数付き加群の導来圏 $\mathcal{D}^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}}R)$ に等しい。
- $\mathcal{D}^b(\text{fl}^{\mathbb{Z}}R)$ を長さ有限 R 加群の導来圏とする。ただし自然な射 $\mathcal{D}^b(\text{fl}^{\mathbb{Z}}R) \rightarrow \mathcal{D}(\text{Mod}^{\mathbb{Z}}R)$ は忠実充満であることを用いて $\mathcal{D}(\text{Mod}^{\mathbb{Z}}R)$ の部分圏と見なしている。

R の smooth 性から上の 2 つの部分圏は包含関係 $\mathcal{D}^b(\text{fl}^{\mathbb{Z}}R) \subset \text{per}^{\mathbb{Z}}R$ をもつ。そこで

$$\text{qper}^{\mathbb{Z}}R := \text{per}^{\mathbb{Z}}R / \mathcal{D}^b(\text{fl}^{\mathbb{Z}}R)$$

と定める。 R がネーター環のときは $\text{qper}^{\mathbb{Z}}R = \mathcal{D}^b(\text{mod}^{\mathbb{Z}}R) / \mathcal{D}^b(\text{fl}^{\mathbb{Z}}R)$ であり、これは中身のアーベル圏の Serre 商 $\text{qmod}^{\mathbb{Z}}R := \text{mod}^{\mathbb{Z}}R / \text{fl}^{\mathbb{Z}}R$ の導来圏と同値である。このアーベル圏は Artin-Zhang の非可換射影スキーム [4] であり、従って三角圏 $\text{qper}^{\mathbb{Z}}R$ はその導来圏の類似である。

さて、次数付き環の導来圏 $\mathcal{D}(\text{Mod}^{\mathbb{Z}}R)$ と dg 代数 R^{dg} の導来圏 $\mathcal{D}(R^{\text{dg}})$ を直接比較することができる。次数付き加群の複体 $X = (\cdots \rightarrow X^{i-1} \rightarrow X^i \rightarrow X^{i+1} \rightarrow \cdots)$ に対して、次数付き R 加群 $\text{Tot } X := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X^i(-i)$ に複体 X の微分から微分を与えた全複体 (total complex)^{*11} として、dg R^{dg} 加群が定まる。この対応は三角関手 $\text{Tot}: \mathcal{D}(\text{Mod}^{\mathbb{Z}}R) \rightarrow \mathcal{D}(R^{\text{dg}})$ を与える。次の 2 つ目の定理は、これがクラスター圏のレベルに良い形で関手を誘導することを意味する。

定理 3.5. $R = \bigoplus_{i \leq 0} R_i$ を負次数付き CY 代数で a 不変量 a をもち、 R_0 は有限次元であるとする。このとき Tot は忠実充満関手

$$\text{qper}^{\mathbb{Z}}R / (-1)[1] \hookrightarrow \mathcal{C}(R^{\text{dg}})$$

を誘導し、その像は $\mathcal{C}(R^{\text{dg}})$ を生成する。すなわち $\mathcal{C}(R^{\text{dg}})$ は軌道圏の包絡三角圏である。

上の定理によって「クラスター圏を軌道圏として表示する」ことはできたが、左辺を有限次元代数の言葉を使って書き直すことで $\mathcal{C}(R^{\text{dg}})$ の意味をより良く理解することができる。その過程で本質的に重要なのが次の Minamoto-Mori の定理である。

定理 3.6 ([33]). $R = \bigoplus_{i \leq 0} R_i$ を負次数付き CY 代数で a 不変量 a をもち、 R_0 が有限次元であるとする。このとき $T = \bigoplus_{i=0}^{a-1} R(-i)$ は $\text{qper}^{\mathbb{Z}}R$ の傾対象^{*12}である。従って $A = \text{End}_{\text{qper}^{\mathbb{Z}}R}(T)$ に対して三角同値

$$\text{qper}^{\mathbb{Z}}R \simeq \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$$

が存在する。

注意 3.7. 1. R が多項式環 $k[x_0, x_1, \dots, x_d]$ で $\deg x_i = -1$ のとき $\text{qper}^{\mathbb{Z}}R = \mathcal{D}^b(\text{coh } \mathbb{P}^n)$ であり、 T は Beilinson の傾ベクトル束 $T = \bigoplus_{i=0}^d \mathcal{O}(i)$ に他ならない。この意味で定理 3.6 は Beilinson の定理の非

^{*11} つまり $\text{Tot } X$ は X を「タテ」の微分が 0 の二重複体と見なしたときの二重複体の total である。

^{*12} 三角圏 \mathcal{T} の生成元 T で $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[\neq 0]) = 0$ を満たすものを傾対象 (tilting object) という。後述の定理 3.14(3) のように傾対象は三角同値を導く。これは Keller の定理 2.8 の帰結である。

可換版である。 T の自己準同型環 A は Beilinson 代数と呼ばれ、以下の図と関係式で表示される。

$$A: 0 \xrightarrow[x_d]{x_0} 1 \xrightarrow[x_d]{x_0} \cdots \xrightarrow[x_d]{x_0} d, \quad x_i x_j = x_j x_i$$

2. R が $(d+1)$ -CY のとき定理 3.6 に現れた有限次元代数 A は d 無限表現型である。これは高次元 Auslander-Reiten 理論の観点から、非 Dynkin 簇の道多元環 (=1 無限表現型) の高次元版として [17] で導入された大域次元が d の環のクラスである。上記の Beilinson 代数が典型的な例であり、このような（可換・非可換）代数幾何的な状況で姿を現すことが多い [32, 33, 17, 8]。

定理 3.6 の三角同値において Serre 関手を比較することで次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{qper}^{\mathbb{Z}} R & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A) \\ (a)[d] \downarrow & & \downarrow \nu = - \otimes_A^L DA \\ \mathrm{qper}^{\mathbb{Z}} R & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A) \end{array}$$

したがって $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A)$ の d -Auslander-Reiten 移動 $\nu_d = - \otimes_A^L DA[-d]$ には、 $\mathrm{qper}^{\mathbb{Z}} R$ 上の (a) が対応し、従って (1) に対応する $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A)$ の自己同値として ν_d の a 乗根を定義することができる：

系 3.8. $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A)$ の d -Auslander-Reiten 移動 ν_d は a 乗根を持つ。

この ν_d の a 乗根 $\nu_d^{1/a}$ と Minamoto-Mori の定理 3.6 を用いて定理 3.5 の左辺を書き直すと以下を得る。

系 3.9. 埋め込み

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A)/\nu_d^{-1/a}[1] \hookrightarrow \mathcal{C}(R^{\mathrm{dg}})$$

が存在してその像は $\mathcal{C}(R^{\mathrm{dg}})$ を生成する。従って $\mathcal{C}(R^{\mathrm{dg}})$ は $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} A)/\nu_d^{-1/a}[1]$ の包絡三角圏である。

こうして BMRRT クラスター圏と類似の $\mathcal{C}(R^{\mathrm{dg}})$ の表示を得ることができた。同時に A の ν_d の「 a 乗根を伴う」クラスター圏、正確には

$$\nu_d^{-1/a}[1] = (\nu_d \circ [-a])^{-1/a} = \nu_{d+a}^{-1/a}$$

と形式的に変形することで、通常の $(d+a)$ クラスター圏 $\mathcal{C}_{d+a}(A)$ の「 a 次巡回群による商」であると理解することができる。

この定理を用いて $\mathcal{C}(R^{\mathrm{dg}})$ を具体的に記述できる例を見る。

例 3.10. $R = k[x, y]$ を 2 変数多項式環で次数 $\deg x = \deg y = -1$ をもつものとする。これは（次数付き環として）2-CY で a 不変量は 2 なので、定理 3.3 より R^{dg} は（dg 代数として）符号によるねじれを除いて 4-CY であり、(up to sign で) 3-CY な三角圏 $\mathcal{C}(R^{\mathrm{dg}})$ が得られる。

非可換射影スキーム $\mathrm{qmod}^{\mathbb{Z}} R$ は（可換な）射影空間 \mathbb{P}^1 上の連接層の圏 $\mathrm{coh} \mathbb{P}^1$ であり、定理 3.6 与えられる有限次元代数 $A = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ R_{-1} & R_0 \end{pmatrix}$ は Kronecker 簇 $Q: \circ \longrightarrow \circ$ の道多元環である。系 3.8 より kQ の Auslaner-Reiten 移動は平方根 $\tau^{1/2}$ をもち、以下のように $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh} \mathbb{P}^1) \simeq \mathcal{D}^b(\mathrm{mod} kQ)$ の Auslander-Reiten 簇上で「左に 1 つずれる」関手である。

$$\cdots \Rightarrow \begin{matrix} \mathcal{O}(-1) \\ \mathcal{O}(-2) \end{matrix} \rightleftarrows \begin{matrix} \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(2) \end{matrix} \rightleftarrows \cdots \quad \cdots \Rightarrow \begin{matrix} I_1[-1] \\ I_0[-1] \end{matrix} \rightleftarrows \begin{matrix} P_1 \\ P_0 \end{matrix} \rightleftarrows \cdots$$

定理 3.5 と系 3.9 より以下の三角同値を得る。

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{coh} \mathbb{P}^1)/(1)[1] \simeq \mathcal{D}^b(\mathrm{mod} kQ)/\tau^{-1/2}[1] \simeq \mathcal{C}(R^{\mathrm{dg}})$$

例えば右の三角同値から $\mathcal{C}(R^{\text{dg}})$ の直既約対象は kQ 加群と $P_0[1]$ からなることが分かり、これはちょうど $\mathcal{C}_3(kQ)$ の半分である。

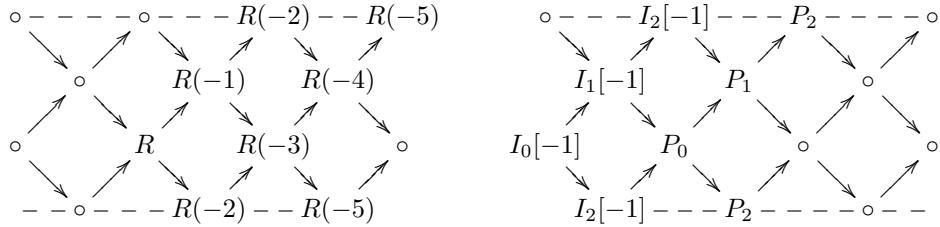
上の例から次数を少し変えるだけでも、様子の異なる例が得られる。

例 3.11. $R = k[x, y]$ を 2 変数多項式環で次数 $\deg x = -1$, $\deg y = -2$ をもつものとする。これは（次数付き環として）2-CY で a 不变量は 3 なので、定理 3.3 より R^{dg} は（dg 代数として）5-CY であり、4-CY 三角圏 $\mathcal{C}(R^{\text{dg}})$ が得られる。

定理 3.6 で与えられる有限次元代数 $A = \begin{pmatrix} R_0 & 0 & 0 \\ R_{-1} & R_0 & 0 \\ R_{-2} & R_{-1} & R_0 \end{pmatrix}$ は下の \widetilde{A}_2 型範 Q の道多元環である。

$$Q: \quad \begin{array}{ccc} & R(-1) & \\ & \nearrow x \quad \searrow x & \\ R & \xrightarrow{y} & R(-2) \end{array} = \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \nearrow & \searrow & \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 \end{array}$$

系 3.8 より kQ の Auslander-Reiten 移動は 3 乗根 $\tau^{1/3}$ をもつ。その様子を以下の $\mathcal{D}^b(\text{qmod}^{\mathbb{Z}} R) \simeq \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ の Auslander-Reiten 範で観察する。



$\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$ の $\tau^{-1/3}$ は、 $\mathcal{D}^b(\text{qmod}^{\mathbb{Z}} R)$ の (-1) に対応する自己同型なので、preprojective component 上では「円柱に沿った $1/3$ 回転」であることが分かる。この 3 乗根を用いて、 $\mathcal{C}(R^{\text{dg}})$ は下の三角同値によって記述される。

$$\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)/\tau^{-1/3}[1] \simeq \mathcal{C}(R^{\text{dg}})$$

従って $\mathcal{C}(R^{\text{dg}})$ の対象は kQ 加群ともう一つ $P_0[1]$ からなり、これはちょうど kQ の 4 クラスター圏 $\mathcal{C}_4(kQ)$ の 3 分の 1 である。

範の道多元環に対してはその (1-)Auslander-Reiten 移動 τ がべき根をもつ必要条件を、移動範 (translation quiver) $\mathbb{Z}Q$ [16] が τ のべき根をもつ必要十分条件として与えることができる。範 Q と Q' に対して $\mathbb{Z}Q$ と $\mathbb{Z}Q'$ が移動範として同型であるとき、 Q と Q' は導来同値であるということにする。（道多元環 kQ と kQ' が導来同値であること、と言ってもよい。）

定理 3.12. Q を有限非輪状範、 a を正の整数とする。 $\mathbb{Z}Q$ が τ の a 乗根を持つのは、 Q が以下の (a), (b), (c) を満たす範 Q' と導来同値であるとき、またそのときに限る。

- (a) Q' はその充満部分範として、ある範 T の a 個のコピー $T^{(0)}, T^{(1)}, \dots, T^{(a-1)}$ をもつ。
- (b) $x \in T^{(i)}, y \in T^{(j)}$ に対して、 Q' に矢があるのは $i \leq j$ のときに限る。
- (c) $T^{(i)}$ を $T^{(i+1)}$ (ただし $T^{(a)} := T^{(0)}$) に送る Q' の頂点の置換は、 Q' の下部グラフの自己同型に延長できる。

最後に、Auslander-Reiten 移動のべき根に関してひとつの定義を提示してみよう。

定義 3.13. A を有限次元代数で a を正の整数、 n を整数、 U を両側 A 加群の複体で $\mathcal{D}(A^e)$ において $U \otimes_A^L \cdots \otimes_A^L U \simeq DA[-n]$ を満たすものとする（左辺は a 個のテンソル積）。このとき A の n クラスター圏 $\mathcal{C}_n(A)$ の a 次巡回商を $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)/ - \otimes_A^L U$ の包絡三角圏として定める^{*13}。

このようなクラスター圏の巡回商は例えば可換環の表現論に自然に姿を現す。実際に、あるクラスの可換 Gorenstein 環の Cohen-Macaulay 安定圏と、クラスター圏の巡回商の三角同値を与えることができる。

3.2 森田型定理

前節では CY 代数から出発してそのクラスター圏として、 d -Auslander-Reiten 移動のべき根を伴う「有限次元代数 A の $(d+a)$ クラスター圏の a 次の巡回群による商」が得られることを観察した。この節の目的は、クラスター傾対象を持つ CY 三角圏を、そのような $\mathcal{C}(R^{\text{dg}})$ の形の三角圏として分類する、森田型定理を与えることである。「森田型」というのは、抽象的なアーベル圏や三角圏の中から、それらの典型例である加群圏、連接層の圏や導來圏を、ある対象の存在によって特徴づける次の古典的な結果を指している。

定理 3.14. 1. [11] \mathcal{A} をアーベル圏で射影生成元 (progenerator) $P \in \mathcal{A}$ をもつとする。このとき以下の圏同値が存在する。

$$\mathcal{A} \simeq \text{mod End}_{\mathcal{A}}(P)$$

2. [4] \mathcal{A} をアーベル圏で $\mathcal{O} \in \mathcal{A}$ と自己同型 $s: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ が豊富 (ample) な対 (\mathcal{O}, s) をなすとする。このとき以下の圏同値が存在する。

$$\mathcal{A} \simeq \text{qmod}^{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, s^i \mathcal{O}))$$

3. [25] \mathcal{T} を代数的三角圏で傾対象 (tilting object) $T \in \mathcal{T}$ をもつとする。このとき以下の三角同値が存在する。

$$\mathcal{T} \simeq \mathcal{K}^b(\text{proj End}_{\mathcal{T}}(T))$$

クラスター圏の文脈においては、 \mathcal{C}_Q などのクラスター圏をクラスター傾対象の存在によって特徴づけるのが「森田型定理」と言えよう。この方向で知られている結果は本質的に以下が全てである。

定理 3.15. \mathcal{T} を代数的 d -CY 三角圏で d クラスター傾対象 T をもつとする。

1. (Keller-Reiten [31]) $d = 2$ で、ある非輪状範 Q に対して $\text{End}_{\mathcal{T}}(T) = kQ$ であるとする。このとき以下の三角同値が存在する。

$$\mathcal{T} \simeq \mathcal{C}_Q = \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)/\tau^{-1}[1]$$

2. (Keller-Murfet-Van den Bergh [30]) $d = 3$ で $\text{End}_{\mathcal{T}}(T) = k$, $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[-1]) = m > 0$ とする。このとき以下の三角同値が存在する。

$$\mathcal{T} \simeq \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ_m)/\tau^{-1/2}[1]$$

ここで $Q_m: \circ \rightrightarrows \circ$ は矢が m 本ある一般 Kronecker 範、 $\tau^{1/2}$ は Auslander-Reiten 移動 τ の自然に定義される平方根である^{*14}。

注意 3.16. クラスター代数の観点からは Keller-Reiten の定理は「クラスター圏の一意性」を主張している。すなわち、範 Q のクラスター代数 \mathcal{A}_Q の圏化が持つべき性質 (=定理 3.15(1) の仮定) を満たす三角圏は \mathcal{C}_Q しかない、と言っている。特に \mathcal{A}_Q の持つ変異の組み合わせ的構造は三角圏 \mathcal{C}_Q によって決定される。

*13 正確には $\Psi \rightarrow U$ を A^e 加群としての射影分解、 $S = T_A \Psi$ をテンソル代数として、 $\text{per } S/\mathcal{D}^b(S)$ によって定義する。

*14 例えば $\tau^{-1/2}$ は preprojective component では例 3.10 のように「ひとつ右に」ずれる。

我々の主定理は上の 2 つ（の大部分）を共通に一般化する、遺伝的多元環から生じる CY 三角圏に対する森田型定理である。

定理 3.17. $d \geq 2$ を整数、 \mathcal{T} を d クラスター傾対象 T をもつ代数的 d -CY 三角圏とする。ここで $H = \text{End}_{\mathcal{T}}(T \oplus T[-1] \oplus \cdots \oplus T[-(d-2)])$ が遺伝的で無限表現型であると仮定する。このとき H の Auslander-Reiten 移動 τ は自然な $(d-1)$ 乗根をもち、三角同値

$$\mathcal{T} \simeq \mathcal{D}^b(\text{mod } H)/\tau^{-1/(d-1)}[1]$$

が存在する。

例えば $d = 2$ ならば定理 3.15(1) の Keller-Reiten の定理（の非 Dynkin の場合）を与える、 $d = 3$ で $\text{End}_{\mathcal{T}}(T) = k$ ならば定理 3.15(2) の Keller-Murfet-Van den Bergh の定理（の $m \geq 2$ の場合）を与える。

また仮定に現れた $H = \text{End}_{\mathcal{T}}(T \oplus T[-1] \oplus \cdots \oplus T[-(d-2)])$ の遺伝性は強い条件に見えるが、次が成り立つ。

定理 3.18. $d \geq 3$ を整数、 \mathcal{T} を d クラスター傾対象 T をもつ d -CY 三角圏とする。もし $\text{End}_{\mathcal{T}}(T \oplus \cdots \oplus T[-(d-3)])$ が遺伝的ならば $H = \text{End}_{\mathcal{T}}(T \oplus \cdots \oplus T[-(d-3)] \oplus T[-(d-2)])$ も遺伝的である。

以上を組み合わせると次の帰結が得られる。ただし (2) は $\text{End}_{\mathcal{T}}(T \oplus T[-1] \oplus T[-2])$ を決定できることも主張している。

系 3.19. \mathcal{T} を代数的 d -CY 三角圏で d クラスター傾対象 T をもつとする。

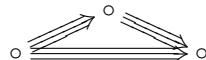
1. $d = 3$ で $\text{End}_{\mathcal{T}}(T)$ が遺伝的であるとする。このとき $H = \text{End}_{\mathcal{T}}(T \oplus T[-1])$ も遺伝的であり、 H が無限表現型ならば以下の三角同値が存在する。

$$\mathcal{T} \simeq \mathcal{D}^b(\text{mod } H)/\tau^{-1/2}[1]$$

2. $d = 4$ で $\text{End}_{\mathcal{T}}(T) = k$, $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[-1]) = m > 0$ とする。このとき以下の三角同値が存在する。

$$\mathcal{T} \simeq \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ_m)/\tau^{-1/3}[1]$$

ここで Q_m は矢が m 本ある一般 \widetilde{A}_2 型簇、 $\tau^{1/3}$ は Auslander-Reiten 移動 τ の自然に定義される 3 乗根^{*15}である。



謝辞

第 66 回代数学シンポジウムにおいて講演の機会を与えてくださいました世話人の先生方に感謝申し上げます。
本研究は JSPS 科研費 JP19J21165 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] C. Amiot, Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 59, no.6 (2009) 2525-2590.
- [2] C. Amiot, O. Iyama, and I. Reiten, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories, Amer. J. Math, 137 (2015) no.3, 813-857.

*15 例 3.11 のような挙動をする。

- [3] C. Amiot, I. Reiten, and G. Todorov, The ubiquity of generalized cluster categories, *Adv. Math.* 226 (2011) no. 4, 3813-3849.
- [4] M. Artin and J. J. Zhang, Noncommutative projective schemes, *Adv. Math.* 109 (1994) 228-287.
- [5] T. Bridgeland and D. Stern, Helices on del Pezzo surfaces and tilting Calabi-Yau algebras, *Adv. Math.* 224 (2010), no. 4, 1672-1716.
- [6] N. Broomhead, Dimer models and Calabi-Yau algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.* 215 (2012) no.1011, viii+86.
- [7] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, and G. Todorov, Tilting theory and cluster combinatorics, *Adv. Math.* 204 (2006) 572-618.
- [8] R. O. Buchweitz and L. Hille, Higher Representation-Infinite Algebras from Geometry, *Oberwolfach Rep.* 11 (2014), 466-469.
- [9] H. Derksen, J. Weyman, and A. Zelevinsky, Quivers with potentials and their representations I. Mutations, *Selecta Math. (N.S.)* 14 (2008), no. 1, 59-119.
- [10] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. I. Foundations, *J. Amer. Math. Soc.* 15 (2002), no. 2, 497-529.
- [11] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France*, 90 (1962), pp. 323-448.
- [12] V. Ginzburg, Calabi-Yau algebras, arXiv:0612139.
- [13] L. Guo, Cluster tilting objects in generalized higher cluster categories, *J. Pure Appl. Algebra* 215 (2011), no. 9, 2055-2071.
- [14] N. Hanihara, Cluster categories of formal DG algebras and singularity categories, arXiv:2003.7858.
- [15] N. Hanihara, Morita theorem for hereditary Calabi-Yau categories, arXiv:2010.14736, to appear in *Adv. Math.*
- [16] D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras, London Mathematical Society Lecture Note Series 119, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [17] M. Herschend, O. Iyama, and S. Oppermann, n -representation infinite algebras, *Adv. Math.* 252 (2014) 292-342.
- [18] O. Iyama, Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories, *Adv. Math.* 210 (2007) 22-50.
- [19] O. Iyama, Auslander correspondence, *Adv. Math.* 210 (2007) 51-82.
- [20] O. Iyama, Cluster tilting for higher Auslander algebras, *Adv. Math.* 226 (2011) 1-61.
- [21] O. Iyama and S. Oppermann, Stable categories of higher preprojective algebras, *Adv. Math.* 244 (2013), 23-68.
- [22] O. Iyama and D. Yang, Silting reduction and Calabi-Yau reduction of triangulated categories, *Trans. Amer. Math. Soc.* 370 (2018) no.11, 7861-7898.
- [23] O. Iyama and Y. Yoshino, Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules, *Invent. math.* 172, 117-168 (2008).
- [24] M. Kalck and D. Yang, Relative singularity categories III: Cluster resolutions, arXiv:2006.09733.
- [25] B. Keller, Deriving DG categories, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* (4) 27 (1) (1994) 63-102.
- [26] B. Keller, On triangulated orbit categories, *Doc. Math.* 10 (2005), 551-581.
- [27] B. Keller, Calabi-Yau triangulated categories, in: Trends in representation theory of algebras and related topics, EMS series of congress reports, European Mathematical Society, Zürich, 2008.
- [28] B. Keller, Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories, in: *Triangulated categories*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 375, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

- [29] B. Keller, Deformed Calabi-Yau completions, with an appendix by M. Van den Bergh, *J. Reine Angew. Math.* 654 (2011) 125-180.
- [30] B. Keller, D. Murfet, and M. Van den Bergh, On two examples of Iyama and Yoshino, *Compos. Math.* 147 (2011) 591-612.
- [31] B. Keller and I. Reiten, Acyclic Calabi-Yau categories, with an appendix by M. Van den Bergh, *Compos. Math.* 144 (2008) 1332-1348.
- [32] H. Minamoto, Ampleness of two-sided tilting complexes, *Int. Math. Res. Not.* (2012) no. 1, 67-101.
- [33] H. Minamoto and I. Mori, The structure of AS-Gorenstein algebras, *Adv. Math.* 226 (2011) 4061-4095.
- [34] L. de Thanhoffer de Völcsey and M. Van den Bergh, Explicit models for some stable categories of maximal Cohen-Macaulay modules, *Math. Res. Lett.* 23 (2016), no. 5, 1507-1526.
- [35] M. Van den Bergh, Non-commutative crepant resolutions, *The legacy of Niels Henrik Abel*, 749–770, Springer, Berlin, 2004.

総実代数体の新谷生成類と同変ポリログ類

坂内健一 **

ABSTRACT. 本稿では、総実代数体の新谷生成類と、対応する同変ポリログ類にまつわる筆者の
大下達也氏、戸次鵬人氏、山田一紀氏、山本修司氏、萩原啓氏との共同研究について解説する。

CONTENTS

1.はじめに	1
2.新谷生成類	3
2.1.有理数体の場合	3
2.2.総実代数体のLerchゼータ関数	4
2.3.新谷ゼータ関数とその母関数	6
2.4.新谷生成類	9
3.ポリログ	11
3.1.乗法群のポリログの構成	11
3.2.ホッジ実現とBeilinson予想	13
3.3.総実代数体の同変ポリログ	15
3.4.プレクティック構造と予想	16
References	19

1.はじめに

筆者は今まで、「ポリログ」と呼ばれる数論幾何的対象に興味を持って研究を進めてきた。

有理関数

$$\mathcal{G}(t) := \frac{t}{1-t}$$

を考える。整数 $k > 0$ に対して、古典的なポリログ関数 $\text{Li}_k(t)$ は、帰納的に

$$(1) \quad \text{Li}_1(t) := \int_0^\infty \mathcal{G}(s) \frac{ds}{s}, \quad \text{Li}_{k+1}(t) := \int_0^\infty \text{Li}_k(s) \frac{ds}{s} \quad (k \geq 1)$$

と反復積分で定義される、 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 上の多価正則関数である。ポリログ関数は 0 の周りで

$$\text{Li}_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n n^{-k}$$

と幕級数表示され、この関数の 1 の幕根での値の線型和として、Dirichlet L 関数の正の整数値での値を書き表すことができる。この事実から、ポリログ関数は整数論、特に L 関数の特

Date: December 28, 2021.

殊値の研究と深い関係にある。これらポリログ関数は Deligne により、混合ポリログ層と呼ばれる $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上の混合実 Hodge 構造の変形（variation of mixed \mathbb{R} -Hodge structures）の周期関数として解釈が与えられた。また、この混合ポリログ層は、Beilinson と Deligne により、 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上のモチビックな混合層の Hodge 実現であることが示されて、このモチビックな混合層に対応する「ポリログ」と呼ばれるモチビックコホモロジーの元は、 $t = 1$ で留数が 1 という極めて簡単なコホモロジー論的性質で一意的に特徴づけられる元であることが示された。この様な普遍的なモチビックなポリログが存在するという事実こそが、様々な数論幾何的に重要な現象を引き起こしており、Dirichlet L 関数の特殊値にまつわる Beilinson 予想 [13, 23, 29] や Bloch-Beilinson 加藤予想 [16] の証明の背景にも現れる。

\mathbb{G}_m を乗法群としたとき、 $\mathbb{G}_m(\mathbb{C}) \setminus \{1\} = \mathbb{C}^\times \setminus \{1\} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ であることから、上記のポリログは、乗法群 \mathbb{G}_m に対するものと理解できる。コホモロジー論的特徴づけをもつモチビックなポリログの構成は、Beilinson-Levin [15], Wildeshaus [35], Kings [26] などにより、楕円曲線やより一般のアーベル多様体の場合にも拡張された。近年、Huber-Kings [24] により、一般の代数群の場合にも、この様なポリログの構成が与えられた。これらのポリログを数論幾何的予想の証明に利用するためには、抽象的に機械的に定義されたモチビックなポリログの様々な実現を、 $\text{Li}_k(t)$ の様な具体的な関数などで記述する必要がある。特に高次元の代数群のポリログを具体的に記述する試みは、current など実解析的な関数を用いる方法 [14, 17, 27] がより一般的ではあったが、筆者等は今まで「ポリログのドラム実現を調べる」という独自の切り口で研究を進めてきた。乗法群の場合に、モチビックなポリログと古典的なポリログ関数の関係を与える肝は、反復積分 (1) の最初の微分形式を与える有理関数 $G(t) = t/(1-t)$ である。有理関数 $G(t)$ は、実はモチビックなポリログのドラム実現として与えらることが証明できる。このことから、より一般的な場合のポリログについても、ドラム実現を具体的に決定することは、とても重要な課題である。

筆者は、乗法群のポリログの p 進実現の研究 [1] や、虚 2 次体のポリログのホッジ実現や p 進実現の共同研究 [2, 8–11] を通して、ポリログのドラム実現は、ある種の「普遍的母関数」によって与えられる、という経験則を得ている。総実代数体など、より高次元の場合については、普遍的母関数が何であるかは必ずしも明らかでは無かった。鍵となったのは近年注目されている、総実代数体の単数群による作用による同変性である。筆者は、萩原啓氏、山田一紀氏、山本修司氏と共に、総実代数体の p 進 L 関数の構成で Katz [25] により導入されたある種の代数トーラスに注目し、新谷卓郎の新谷ゼータ関数の母関数の理論を用いて、総実代数体の場合に普遍的な母関数の役割を果たす標準的な対象を、この代数トーラスの同変コホモロジー類として構成することに成功した [5, 6]。この標準的な同変コホモロジー類が、本稿の題名にもある「新谷生成類」である。また、この研究を発展させた現在進行中の研究では、大下達也氏と戸次鵬人氏を共同研究者として加え、同変 Deligne-Beilinson コホモロジー理論の存在を仮定のもと、新谷生成類が、総実代数体の場合のポリログのドラム実現を与えることも示すことに成功した [7]。本稿では、これらの一連の研究を解説する。ポリログの魅力は、極めて抽象的なモチビックな対象と、極めて具体的な特殊関数が普遍的な特徴づけを通して関係する、という点にある。本稿を通して、このポリログの魅力が少しでも伝われば嬉しく思う。

本稿では、次の §2 で、有理数体の場合の Lerch ゼータ関数とその普遍的母関数の理論を復習した後、総実代数体の場合の Lerch ゼータ関数の定義を述べ、新谷ゼータ関数とその母関数の理論を説明し、新谷生成類の構成と性質について解説する。§3 では、まずは乗法群のポリログについて復習し、総実代数体の場合の代数トーラスに付随する同変ポリログの構成について解説する。特に、ドラム実現が新谷生成類と一致するという結果を紹介する。最後に、Nekovar と Scholl のプレクティック構造の理論 [28] を仮定して、総実代数体に付随する代数トーラスの同変ポリログが満たすと期待する予想を述べる。

代数学シンポジウムで講演の機会をいただき、世話人の皆様には深く感謝しております。特に連絡を担当いただいた水野義紀先生、シンポジウム責任者の森脇淳先生には、大変お世話になりました。深く御礼申し上げます。

2. 新谷生成類

総実代数体の Hecke L 関数の特殊値は、Hilbert モジュラー多様体の Eisenstein 級数を用いて研究する方向性と、新谷卓郎 [31] により創出された、新谷ゼータ関数とその母関数を用いて研究する方向性がある。新谷の理論は、Barsky [12] や Cassou-Noguès [18] により、総実代数体の p 進 L 関数の構成に用いられた。この理論はその後、Sczech [30], Solomon [32, 33], Hu–Solomon [22], Hill [21], Spiess [34], Charollois–Dasgupta [19], Charollois–Dasgupta–Greenberg [20] などの研究により、新谷コサイクルの理論へと発展して行った。筆者らはこの一連の研究とは異なる視点で、総実代数体の場合に Lerch ゼータ関数の一般化を定義し、Katz [25] により導入されたある種の代数トーラス上の同変コホモロジー類として、この Lerch ゼータ関数の普遍的母関数の役割を果たす「新谷生成類」を構成した。この章では、まずは有理数体の場合に「普遍的母関数」について復習した後、総実代数体の場合の Lerch ゼータ関数の定義と、新谷生成類の構成について解説する。詳細は [5, 6] に書かれている。

2.1. 有理数体の場合. ここでは有理数体の場合に、普遍的母関数について解説する。有理数体の場合の Hecke L 関数である Dirichlet L 関数は、Lerch ゼータ関数と呼ばれるある種のゼータ関数の線型和で表される。まずは Lerch ゼータ関数の定義から始める。

いま、 1 の N 乗根 $\xi \in \mathbb{C}^\times$ を考える。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\xi(n) := \xi^n$ とおくことより、幕根 ξ は、指標 $\xi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を与える。今後、 1 の幕根 ξ と対応する指標 $\xi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ は同一視する。

定義 2.1. $\xi \in \mathbb{C}^\times$ を 1 の N 乗根として、 $\xi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を対応する指標とする。 ξ の Lerch ゼータ関数を

$$\mathcal{L}(\xi, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \xi(n) n^{-s}$$

と定義する。この級数は $\operatorname{Re}(s) > 1$ の時に絶対収束し、全複素平面に s の有理型関数として解析接続されることが知られている。

幕級数表示から任意の $\xi \neq 1$ と整数 $k > 0$ に対して

$$\mathcal{L}(\xi, k) = \operatorname{Li}_k(\xi)$$

が成り立つ。従って、Lerch ゼータ関数 $\mathcal{L}(\xi, s)$ の正の整数値は、ポリログ関数 $\text{Li}_k(t)$ の幕根 $\xi \neq 1$ での値でもある。Dirichlet 指標 $\chi: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を考える。1 の N 乗根 $\xi \in \mu_N$ に対して

$$c_\chi(\xi) := \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \chi(m) \xi(-m)$$

とおくと、有限指標の Fourier 展開より、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\chi(n) = \sum_{\xi \in \mu_N} c_\chi(\xi) \xi(n)$$

が成り立つ。この事実から、

$$(2) \quad L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \sum_{\xi \in \mu_N} c_\chi(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} c_\chi(\xi) \xi(n) n^{-s} = \sum_{\xi \in \mu_N} c_\chi(\xi) \mathcal{L}(\xi, s)$$

となり、Dirichlet L 関数は Lerch ゼータ関数の線型和で書けることが従う。上記から、Dirichlet L 関数の特殊値は、Lerch ゼータ関数の特殊値を通して調べられることが分かる。有理関数 $\mathcal{G}(t)$ が「普遍的母関数」であることの意味は、 $\mathcal{G}(t)$ を様々な $t = \xi$ での幕級数展開が、 $\mathcal{L}(\xi, s)$ の負の整数点での値の母関数となっていることである。

定理 2.2. $\mathcal{G}(t) = t/(1-t)$ として、 $\partial = t \frac{d}{dt}$ とする。このとき、任意の 1 の幕根 $\xi \in \mathbb{C}^\times$, $\xi \neq 1$ と整数 $k \geq 0$ に対して、

$$\partial^k \mathcal{G}(t) \Big|_{t=\xi} = \mathcal{L}(\xi, -k)$$

が成り立つ。

微分作用素 $\partial = t \frac{d}{dt}$ は、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\partial(t^n) = nt^n$ を満たす作用素として特徴づけられる。定理 2.2 より、 $\mathcal{G}(t)$ は全ての自明でない有限指標 ξ と非正な整数 $-k$ での Lerch ゼータ関数 $\mathcal{L}(\xi, -k)$ の値を知っていることが分かる。1 つの関数に多くの情報が内在されていることから極めて普遍的なものであり、筆者が「普遍的母関数」と呼ぶ所以である。母関数 $\mathcal{G}(t) = t/(1-t)$ は、乗法群 $\mathbb{G}_m := \text{Spec } \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ 上の有理関数であり、特に $U^\mathbb{Z} := \mathbb{G}_m \setminus \{1\}$ とおくと、

$$\mathcal{G}(t) \in H^0(U^\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m})$$

となる。

2.2. 総実代数体の Lerch ゼータ関数. ここでは、総実代数体の Lerch ゼータ関数の定義を述べる。以下、 F を総実代数体として、 \mathcal{O}_F を整数環とする。 F_+ を F の総正元全体として、乗法による演算を考える場合に、 F_+ を F_+^\times と書くこととする。より一般に $A \subset F$ に対して $A_+ \subset A$ を A の総正元全体とする。いま、 $\mathfrak{f} \subset \mathcal{O}_F$ を 0 でない F の整イデアルとして、 $I_{\mathfrak{f}}$ を \mathfrak{f} と互いに素な F の分数イデアル全体の成す群、 $P_{\mathfrak{f}}^+ := \{(x) \mid x \in F_+^\times, x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}\}$ とおく。このとき、 F の導手 \mathfrak{f} の狭義イデアル類群 $\text{Cl}_F^+(\mathfrak{f})$ は、 $\text{Cl}_F^+(\mathfrak{f}) := I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}^+$ によって与えられる。準同型

$$\chi: \text{Cl}_F^+(\mathfrak{f}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

を、 F の導手 \mathfrak{f} の有限 Hecke 指標と呼ぶ。この Hecke 指標に対応する Hecke L 関数は、級数

$$L(\chi, s) := \sum_{\mathfrak{a} \subset O_F} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$$

で与えられる。ここで、 \mathfrak{a} は O_F の整イデアル全体を動くとして、 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \neq 1$ のとき、 $\chi(\mathfrak{a}) := 0$ と定義する。上記級数は $\operatorname{Re}(s) > 1$ のときに絶対収束し、Hecke L 関数は全複素平面に s の有理型関数として解析接続されることが知られている。総実代数体の Lerch ゼータ関数は、(2) の様にその線型和が $L(\chi, s)$ を与える様なものとして定義する必要がある。

いま、任意の F の分数イデアル $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ に対して、 $(\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})^\times \subset \mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}$ を、 $\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}$ の O_F/\mathfrak{f} 加群としての生成元全体とする。以下、 $\Delta := O_{F,+}^\times$ を F の総正単数全体とすると、狭義イデアル類群 $\operatorname{Cl}_F^+(\mathfrak{f})$ の代表 \mathfrak{C} を固定する。このとき、 $\alpha \in \mathfrak{a}_+$ を $\mathfrak{a}^{-1}\alpha \in \operatorname{Cl}_F^+(\mathfrak{f})$ に送る写像は、全单射

$$\coprod_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}} \Delta \backslash (\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})^\times \xrightarrow{\cong} \operatorname{Cl}_F^+(\mathfrak{f})$$

を導く。Hecke 指標 $\chi: \operatorname{Cl}_F^+(\mathfrak{f}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\chi_{\mathfrak{a}}(\alpha) := \chi(\mathfrak{a}^{-1}\alpha), \quad \alpha \in \mathfrak{a}_+$$

とおくと、関数 $\chi_{\mathfrak{a}}: \Delta \backslash (\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ が定義される。以上の事実より、Hecke L 関数は

$$L(\chi, s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset O_F} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s} = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}} \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}_+ / \Delta} \chi_{\mathfrak{a}}(\alpha) N(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-s}$$

と表される。

次に、 $\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}] := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}, \mathbb{C}^\times)$ を写像 $\xi: \mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ で、任意の $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{a}$ に対して $\xi(\alpha + \alpha') = \xi(\alpha)\xi(\alpha')$ となるもの全体とする。このとき、 $\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ に対して

$$c_\chi(\xi) := \frac{1}{N(\mathfrak{f})} \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}} \chi_{\mathfrak{a}}(\alpha) \xi(-\alpha)$$

とおくと、任意の $\beta \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\chi_{\mathfrak{a}}(\beta) = \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]} c_\chi(\xi) \xi(\beta)$$

が成り立つことが証明される。この事実から指標 $\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ に対して、総実代数体の Lerch ゼータ関数を

$$\mathcal{L}(\xi, s) := \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}_+ / \Delta} \xi(\alpha) N(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-s}$$

と定義することは自然に思われるかもしれない。しかしながら、指標 ξ は \mathfrak{a}_+ / Δ 上の関数として well-defined にはならないことから、この定義をこのまま採用することは叶わない。

上記の問題を回避するために、筆者らは ξ の Δ 軌道による和を取るというアイディアを導入した。いま、 $\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ と $\varepsilon \in \Delta$ に対して、 $\xi^\varepsilon \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ を、 $\xi^\varepsilon(\alpha) = \xi(\varepsilon\alpha)$ で与えられる指標とする。この対応は、 Δ の $\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ への作用を与えていた。 $\Delta_\xi := \{\varepsilon \in \Delta \mid \xi^\varepsilon = \xi\}$ とおくと、

$$\xi\Delta := \sum_{\varepsilon \in \Delta / \Delta_\xi} \xi^\varepsilon$$

は ξ の Δ 軌道による和を与えていた。構成より、 $\xi\Delta$ は \mathfrak{a}_+/Δ 上 well-defined な関数を与える。以上を踏まえて、総実代数体の Lerch ゼータ関数を次の様に定義する。

定義 2.3. 任意の $\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ に対して、 $\xi\Delta$ の Lerch ゼータ関数を

$$\mathcal{L}(\xi\Delta, s) := \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}_+/\Delta} \xi\Delta(\alpha) N(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-s}$$

と定義する。この級数は $\operatorname{Re}(s) > 1$ で絶対収束し、全複素平面に有理型関数として解析接続されるが証明できる。

任意の $\varepsilon \in \Delta$ に対して $c_\chi(\xi) = c_\chi(\xi^\varepsilon)$ となることから、任意の $\beta \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\chi_{\mathfrak{a}}(\beta) = \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]/\Delta} c_\chi(\xi) \xi\Delta(\beta)$$

となり、(2) の自然な一般化として

$$\begin{aligned} L(\chi, s) &= \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}} \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}_+/\Delta} \chi_{\mathfrak{a}}(\alpha) N(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-s} = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}} \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]/\Delta} c_\chi(\xi) \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}_+/\Delta} \xi\Delta(\alpha) N(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-s} \\ &= \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}} \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]/\Delta} c_\chi(\xi) \mathcal{L}(\xi\Delta, s) \end{aligned}$$

を得る。すなわち、Hecke L 関数は Lerch ゼータ関数の有限線型和で与えられる。

2.3. 新谷ゼータ関数とその母関数. 新谷は、Hecke L 関数を研究する上で、錐 *cone* に対する新谷ゼータ関数を導入した。この章では、Lerch 型の新谷ゼータ関数について復讐する。いま、 $I := \operatorname{Hom}(F, \mathbb{R})$ を体の埋め込み写像全体とする。このとき、

$$F \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^I := \prod_{\tau \in I} \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto (\tau(\alpha))_{\tau \in I}$$

となる。 $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ として、 $\mathbb{R}_+^I := \prod_{\tau \in I} \mathbb{R}_+$ とする。以下、 $g := [F: \mathbb{Q}]$ として、 F の分数イデアル $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ を固定する。

定義 2.4. \mathbb{R} 上 1 次独立な $\alpha_1, \dots, \alpha_g \in \mathfrak{a}_+$ に対して、

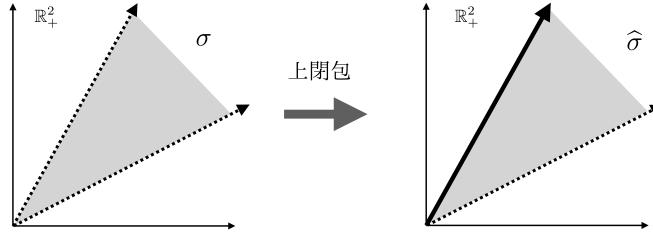
$$\sigma := \{x_1\alpha_1 + \dots + x_g\alpha_g \mid x_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, \dots, g\}$$

という形で与えられる集合を、 \mathbb{R}_+^I の単体的な有理開錐 *open rational simplicial cone* と呼ぶ。

I の元に番号を振って $I = \{\tau_1, \dots, \tau_g\}$ とする。いま、 $A \subset \mathbb{R}_+^I$ に対して A の上閉包 \widehat{A} を

$$\widehat{A} := \{u = (u_{\tau_i}) \in \mathbb{R}_+^I \mid \exists \delta > 0, 0 < \forall \delta' < \delta, (u_{\tau_1}, \dots, u_{\tau_{g-1}}, u_{\tau_g} - \delta') \in A\}$$

と定義する。



いま、 $f \neq \{0\}$ を F の整イデアルとする。このとき、新谷ゼータ関数を次の様に定義する。

定義 2.5. $\sigma \subset \mathbb{R}_+^I$ を単体的な有理開錐とする。また、 $\xi \in \mathbb{T}^a[f]$ とする。このとき、Lerch 型の新谷ゼータ関数を

$$\zeta_\sigma(\xi, s) := \sum_{\alpha \in \widehat{\sigma} \cap a_+} \xi(\alpha) \alpha^{-s}$$

と定義する。ただし、 $s = (s_\tau) \in \mathbb{C}^I := \prod_{\tau \in I} \mathbb{C}$ として、 $\alpha^{-s} := \prod_{\tau \in I} \tau(\alpha)^{-s_\tau}$ とする。この関数は $\operatorname{Re}(s_\tau) > 1$ のときに絶対収束して、 $s \in \mathbb{C}^I$ に有利型関数として解析接続されることが知られている。

以上は、新谷ゼータ関数のとても特殊な場合となっている。新谷により、新谷ゼータ関数の負の整数点の値を与える母関数は構成されている。この母関数を考える自然な枠組みとして、総実代数体に付随するある種の代数トーラスを導入する。 F の 0 でない分数イデアル a に対して、Katz [25] に従って、 \mathbb{Z} 上の代数トーラス \mathbb{T}^a を

$$\mathbb{T}^a := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(a, \mathbb{G}_m)$$

と定義する。この代数トーラスは、任意の \mathbb{Z} 代数 R に対して $\mathbb{T}^a(R) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(a, R^\times)$ をみたす代数群として特徴づけられる。スキームとしては、

$$\mathbb{T}^a = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t^\alpha \mid \alpha \in a]$$

である。ここで $\mathbb{Z}[t^\alpha \mid \alpha \in a]$ は、 $t^0 = 1$ と、任意の $\alpha, \alpha' \in a$ に対して $t^\alpha t^{\alpha'} = t^{\alpha+\alpha'}$ という関係式をみたす有限生成 \mathbb{Z} 代数である。任意の $\theta \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[t^\alpha \mid \alpha \in a], R)$ に対して、 $\xi(\alpha) := \theta(t^\alpha)$ とおくことで、 $\xi \in \mathbb{T}^a(R) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(a, R^\times)$ が定義される。特に $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ を a の \mathbb{Z} 加群としての生成元とすると、

$$\mathbb{Z}[t^\alpha \mid \alpha \in a] = \mathbb{Z}[t^{\pm\alpha_1}, \dots, t^{\pm\alpha_g}]$$

となる。従って非標準的ではあるが、 $\mathbb{T}^a \cong \mathbb{G}_m \times \cdots \times \mathbb{G}_m$ となることが導かれる。

いま、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_g)$ で生成される単体的な有理開錐 σ に対して、 $P_\alpha := \{x_1\alpha_1 + \cdots + x_g\alpha_g \mid 0 < x_i < 1, i = 1, \dots, g\}$ とおく。ここで、

$$\mathcal{G}_\sigma^a(t) := \frac{\sum_{\alpha \in \widehat{P}_\alpha \cap a} t^\alpha}{(1 - t^{\alpha_1}) \cdots (1 - t^{\alpha_g})}$$

と定義すると、 $\mathcal{G}_\sigma^a(t)$ は \mathbb{T}^a 上の有理関数であり、任意の $\alpha \in a$ に対して $U_\alpha^a := \mathbb{T}^a \setminus \{t^\alpha = 1\}$ とおくと、 $\mathcal{G}_\sigma^a(t)$ は $U_\alpha^a := U_{\alpha_1}^a \cap \cdots \cap U_{\alpha_g}^a$ 上の正則関数となる。すなわち、

$$\mathcal{G}_\sigma^a(t) \in \Gamma(U_\alpha^a, \mathcal{O}_{\mathbb{T}^a})$$

が成り立つ。

以下、 $\tau \in I$ に対して $\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$ の微分作用素 ∂_{τ} を、任意の $\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して $\partial_{\tau}(t^{\alpha}) = \tau(\alpha)t^{\alpha}$ をみたすという性質で特徴づけられるものとする。 $\partial := \prod_{\tau \in I} \partial_{\tau}$ とおくと、 ∂ は $\partial(t^{\alpha}) = N(\alpha)t^{\alpha}$ で特徴づけられる。また、任意の $\mathbf{k} = (k_{\tau}) \in \mathbb{N}^I$ に対して、 $\partial^{\mathbf{k}} := \prod_{\tau \in I} \partial_{\tau}^{k_{\tau}}$ と定義する。このとき、以下が知られている。

定理 2.6. 任意の $\xi \in U_{\alpha}^{\mathfrak{a}}(\mathbb{C})$ と $\mathbf{k} = (k_{\tau}) \in \mathbb{N}^I$ に対して、

$$\partial^{\mathbf{k}} \mathcal{G}_{\sigma}^{\mathfrak{a}}(t) \Big|_{t=\xi} = \zeta_{\sigma}(\xi, -\mathbf{k})$$

が成り立つ。特に、任意の $\xi \in U_{\alpha}^{\mathfrak{a}}(\mathbb{C})$ と整数 $k \geq 0$ に対して、

$$\partial^k \mathcal{G}_{\sigma}^{\mathfrak{a}}(t) \Big|_{t=\xi} = \zeta_{\sigma}(\xi, (-k, \dots, -k))$$

が成り立つ。

特に $F = \mathbb{Q}$ 、 $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}$ 、 $\alpha = 1$ のとき、 $\sigma = \widehat{\sigma} = \mathbb{R}_+$ 、 $P_{\alpha} = (0, 1)$ 、 $\widehat{P}_{\alpha} = (0, 1]$ となる。また、 $\widehat{\sigma} \cap \mathfrak{a} = \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$ 、 $\widehat{P}_{\alpha} \cap \mathfrak{a} = \{1\}$ となり、

$$\zeta_{\sigma}(\xi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(n) n^{-s} = \mathcal{L}(\xi, s), \quad \mathcal{G}_{\sigma}^{\mathfrak{a}}(t) = \frac{t}{1-t}$$

が導かれる。従って、定理 2.6 は定理 2.2 の自然な一般化である。

新谷ゼータ関数と Lerch ゼータ関数を関係付けるための従来の方法は、新谷分解を利用する方法である。次の様な単体的な有理開錐の集合が存在することが知られている。

定理 2.7 ([36, Theorem 4.1]). 以下の性質をみたす、単体的な有理開錐の集合 Φ が存在する。

- (1) $\mathbb{R}_+^I = \coprod_{\sigma \in \Phi} \widehat{\sigma}$.
- (2) Φ は Δ の作用で閉じていて、 Φ/Δ は有限集合である。

上記の様な Φ を「新谷分解」と呼ぶ。新谷分解 Φ/Δ の代表系 C を 1 つ固定すると、 $\coprod_{\sigma \in C} \widehat{\sigma}$ は \mathbb{R}_+^I の Δ による作用の基本領域を与える。この代表系を利用すると、 $\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\xi \Delta, s) &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}_+/\Delta} \xi \Delta(\alpha) N(\mathfrak{a}^{-1} \alpha)^{-s} = \sum_{\sigma \in C} \sum_{\alpha \in \widehat{\sigma} \cap \mathfrak{a}} \xi \Delta(\alpha) N(\mathfrak{a}^{-1} \alpha)^{-s} \\ &= \sum_{\sigma \in C} \sum_{\varepsilon \in \Delta/\Delta_{\xi}} \sum_{\alpha \in \widehat{\sigma} \cap \mathfrak{a}} \xi^{\varepsilon}(\alpha) N(\mathfrak{a}^{-1} \alpha)^{-s} = N(\mathfrak{a})^s \sum_{\sigma \in C} \sum_{\varepsilon \in \Delta/\Delta_{\xi}} \zeta_{\sigma}(\xi^{\varepsilon}, (s, \dots, s)) \end{aligned}$$

となり、Lerch ゼータ関数が新谷ゼータ関数で表される。従って、指標 ξ や新谷分解 Φ 及びその代表系 C を固定すると、定理 2.6 より、 $\mathcal{L}(\xi \Delta, s)$ の非正な整数点での値の母関数が、関数 $\mathcal{G}_{\sigma}^{\mathfrak{a}}(t)$ の線型和で書けることが導かれる。この様に、様々な情報の代表系を適切に選び、固定すれば、それらの選択に対する母関数を作ることは可能である。しかしながら、構成が指標 ξ の取り方に依存しているという事実などからも、この様な母関数が普遍的であるとは言い難い。 $\mathcal{L}(\xi \Delta, s)$ の非正な整数点での値の標準的な普遍的な母関数をコホモロジー類として与えるのが、我々の新谷生成類である。

2.4. 新谷生成類. ここでは新谷生成類の理論と性質を解説する。新谷生成類は、Lerch ゼータ関数のある種の母関数の役割を果たす、同変コホモロジー類である。まずは新谷生成類の住処となる幾何学的な対象を紹介する。

\mathfrak{J} を F の 0 でない分数イデアル全体の集合として、

$$\mathbb{T} := \coprod_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}} \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$$

とおく。 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}$ とする。 $x \in F_+^\times$ に対して、 $x\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}$ となり、自然な同型 $\mathfrak{a} \cong x\mathfrak{a}$ は、代数トーラスの同型

$$\langle x \rangle: \mathbb{T}^{x\mathfrak{a}} \cong \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$$

を誘導する。この同型は、指標 $\xi: x\mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を指標 $\xi^x: \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $\xi^x(\alpha) := \xi(x\alpha)$ に移す。 \mathbb{T} は \mathfrak{J} のすべてに渡る和であることから、同型

$$\langle x \rangle: \mathbb{T} \cong \mathbb{T}$$

が導かれる。以上は、 \mathbb{T} に F_+^\times の作用を与える。扱う幾何学的対象は、気持ちとして \mathbb{T} の F_+^\times の作用による商スタック \mathbb{T}/F_+^\times であるが、この対象のコホモロジーを実現する手段として、 \mathbb{T} の F_+^\times の作用による同変コホモロジーを考える。 $x \in \Delta$ のとき、 $x\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ であることから、 $\Delta \subset F_+^\times$ は各 $\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$ の作用を与える。 \mathbb{T} は巨大な対象に思えるが、 \mathbb{T} の F_+^\times の作用による商スタックは、 $\text{Cl}_F^+(1)$ の代表 \mathfrak{C} を 1 つ固定すると

$$\mathbb{T}/F_+^\times \cong \coprod_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}} \mathbb{T}^{\mathfrak{a}} / \Delta$$

となり、 \mathbb{T} の F_+^\times の作用による同変コホモロジーは、有限個の $\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$ の Δ の作用による同変コホモロジーの和と一致する。

以下、 $U^{\mathfrak{a}} := \mathbb{T}^{\mathfrak{a}} \setminus \{1\}$ として、 $U := \coprod_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}} U^{\mathfrak{a}}$ とおくと、 F_+^\times は U にも作用する。 U の F_+^\times の作用による同変コホモロジー $H^m(U/F_+^\times, -)$ は、 U 上の F_+^\times の同変作用をもつ層に対して、 $\Gamma(U/F_+^\times, -) := \Gamma(U, -)^{F_+^\times}$ の右導來関手として定義される。実際の U の同変コホモロジーの計算には、同変 Čech 複体を用いる。いま、 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}$ に対して $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$ を、 \mathfrak{a}_+ の原始的な元全体とする。すなわち、 $\alpha \in \mathfrak{a}_+$ で、任意の整数 $N > 1$ に対して、 $\alpha/N \notin \mathfrak{a}_+$ とする。このとき、 $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathfrak{a}}$ に対して $U_\alpha^{\mathfrak{a}} := \mathbb{T}^{\mathfrak{a}} \setminus \{t^\alpha = 1\}$ とおくと、 $\{U_\alpha^{\mathfrak{a}}\}_{\alpha \in \mathcal{A}_{\mathfrak{a}}}$ は $U^{\mathfrak{a}}$ のアフィン被覆となり、 $\mathfrak{U} := \{U_\alpha^{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}, \alpha \in \mathcal{A}_{\mathfrak{a}}}$ は U のアフィン被覆となる。整数 $q \geq 0$ と任意の $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in \mathcal{A}_{\mathfrak{a}}^{q+1}$ に対して、 $U_\alpha^{\mathfrak{a}} := U_{\alpha_1}^{\mathfrak{a}} \cap \dots \cap U_{\alpha_q}^{\mathfrak{a}}$ とおく。 F_+^\times の \mathfrak{U} への作用が自由なことから、次が導かれる。

命題 2.8 ([6, Proposition 2.13]). 整数 $q \geq 0$ に対して

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}}) := \left(\prod_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}} \prod_{\alpha \in \mathcal{A}_{\mathfrak{a}}^{q+1}}^{\text{alt}} \Gamma(U_\alpha^{\mathfrak{a}}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}}) \right)^{F_+^\times}$$

として、微分 $d^q: C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}}) \rightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}})$ を、各 \mathfrak{a} 成分において標準的な Čech 複体の微分 $(d^q u)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{q+1}} = \sum_{j=0}^q (-1)^j u_{\alpha_0, \dots, \check{\alpha}_j, \dots, \alpha_{q+1}}$ で与えられるものとする。この様に得られた複体を $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}})$ とおくと、

$$H^m(U/F_+^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{T}}) \cong H^m(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}}))$$

が成り立つ。

いま、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_g) \in \mathcal{A}_{\mathfrak{a}}^g$ に対して、 $\text{sgn}(\alpha)$ を行列 $(\tau_j(\alpha_i)) \in M_g(\mathbb{R})$ の行列式の符号とする。また、 $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ が \mathbb{R} 上 1 次独立なときに、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_g)$ が生成する単体的有理開錐を σ_{α} とおき、 $\mathcal{G}_{\alpha}^{\mathfrak{a}} := \text{sgn}(\alpha)\mathcal{G}_{\sigma_{\alpha}}^{\mathfrak{a}}$ と定義する。 $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ が \mathbb{R} 上 1 次従属な場合には、 $\mathcal{G}_{\alpha}^{\mathfrak{a}} := 0$ と定義する。新谷生成類は、次の様に定義される。

命題 2.9 ([6, Proposition 2.17]). $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}$ と $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathfrak{a}}^g$ に対して、 $\mathcal{G}_{\alpha}^{\mathfrak{a}}(t) \in \Gamma(U_{\alpha}^{\mathfrak{a}}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}})$ は

$$\mathcal{G}(t) := (\mathcal{G}_{\alpha}^{\mathfrak{a}}(t))_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}, \alpha \in \mathcal{A}_{\mathfrak{a}}^g} \in C^{g-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}})$$

をみたし、臨界条件 $d^{g-1}(\mathcal{G}(t)) = 0$ も満たすことから、同変コホモロジー類

$$\mathcal{G}(t) \in H^{g-1}(U/F_+^{\times}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}})$$

を定義する。この $\mathcal{G}(t)$ を、新谷生成類と呼ぶ。

新谷生成類は 1 つの標準的なコホモロジー類であり、何らか付加的情報の選択に依存していないことが、とても重要なポイントである。新谷生成類が、普遍的な母関数の役割を果たすことを示す為に、点への引き戻しを考察する。いま、整イデアル $\mathfrak{f} \neq \{0\}$ に対して、 $U^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}] := \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}] \setminus \{1\}$ とおく。また、 $U_{\text{tor}}^{\mathfrak{a}} := \bigcup_{\mathfrak{f} \subset O_F} U^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ として、

$$U_{\text{tor}} := \bigsqcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}} U_{\text{tor}}^{\mathfrak{a}}$$

とおく。すなわち、任意の $\xi \in U_{\text{tor}}$ に対して、ある $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}$ と $\mathfrak{f} \subset O_F$ が存在して、 $\xi \in U^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ が成り立つ。 ξ はスキームの写像 $\xi: \text{Spec } \mathbb{Q}(\xi) \hookrightarrow U$ を誘導する。 $\xi\Delta$ を ξ の Δ 軌道とすると、 $\xi\Delta$ はスキームの写像 $\xi\Delta: \coprod_{\varepsilon \in \Delta/\Delta_{\xi}} \text{Spec } \mathbb{Q}(\xi^{\varepsilon}) \hookrightarrow U$ を誘導する。以下簡単のため、 $\text{Spec } \mathbb{Q}(\xi)$ を ξ 、 $\coprod_{\varepsilon \in \Delta/\Delta_{\xi}} \text{Spec } \mathbb{Q}(\xi^{\varepsilon})$ を $\xi\Delta$ で表す。 $\xi\Delta$ には Δ が作用し、埋め込み $\xi\Delta \rightarrow U$ はこれらの作用で同変となる。従って、引き戻し

$$(\xi\Delta)^*: H^{g-1}(U/F_+^{\times}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}}) \rightarrow H^{g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathcal{O}_{\xi\Delta})$$

が誘導される。Dirichlet の单数定理より、 $\Delta_{\xi} \cong \mathbb{Z}^{g-1}$ である。Shapiro の補題と群コホモロジーの計算から、標準的な同型

$$(3) \quad H^{g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathcal{O}_{\xi\Delta}) \cong H^{g-1}(\xi/\Delta_{\xi}, \mathcal{O}_{\xi}) \cong H^{g-1}(\Delta_{\xi}, H^0(\xi, \mathcal{O}_{\xi})) \cong \mathbb{Q}(\xi)$$

を得る。 \mathbb{T} の微分作用素 ∂ は、同変コホモロジーへの作用

$$\partial: H^{g-1}(U/F_+^{\times}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}}) \rightarrow H^{g-1}(U/F_+^{\times}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}})$$

を誘導する。新谷生成類は、下記の性質をみたす。

定理 2.10 ([5, Theorem 5.1]). 任意の $\xi \in U_{\text{tor}}$ と整数 $k \geq 0$ に対して、(3) の同型を通して $(\xi\Delta)^* \partial^k \mathcal{G}(t)$ を $\mathbb{Q}(\xi)$ の元とみなしたものを、 $\partial^k \mathcal{G}(\xi\Delta)$ と記す。このとき、

$$\partial^k \mathcal{G}(\xi\Delta) = \mathcal{L}(\xi\Delta, -k)$$

が成り立つ。

全ての自明でない有限指標 $\xi \in U_{\text{tor}}$ と整数 $k \geq 0$ について、Lerch ゼータ関数の値 $\mathcal{L}(\xi\Delta, -k)$ を復元できることから、新谷生成類は普遍的な母関数の役割を果たしている。特に $F = \mathbb{Q}$ のとき $g = 1$ であり、 $U/F_+^\times \cong U^\mathbb{Z} = \mathbb{G}_m \setminus \{1\}$ となり、

$$\mathcal{G}(t) \in H^{g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{T}}) \cong H^0(U^\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m})$$

は $\mathcal{G}(t) = t/(1-t)$ と一致する。従って新谷生成類は $\mathcal{G}(t) = t/(1-t)$ の一般化であり、定理 2.10 は、定理 2.2 の自然な一般化となっている。

3. ポリログ

この章では、総実代数体に付随する代数トーラスの同変ポリログについて、解説する。最初は有理数体の場合に対応する、乗法群のポリログについて解説する。その後、ホッジ実現と Beilinson 予想との関係を述べ、最後に総実代数体の場合を扱う。

3.1. 乗法群のポリログの構成. ここでは、乗法群のポリログの構成を説明する。ポリログの構成には、ある種の良い性質を満たす混合層の理論が仮定される。逆に、良い混合層の理論さえあれば、抽象的に構成できてしまうところが、ポリログの魅力である。 S を低空間として、 $\pi: X \rightarrow S$ を S 上のスキーム等、幾何学的対象とする。 X, S 上にそれぞれ体 K に対するある種の淡中圏として混合層の圏 $\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(S)$ が存在して、 π を介して Grothendieck の関手 $\pi^*, \pi^!: \mathcal{M}(S) \rightarrow \mathcal{M}(X)$ や、 $\pi_*, \pi_!: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(S)$ が定義される状況を考える。整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して Tate 対象 $K(k)$ が $\mathcal{M}(S)$ の対象として定義され、 $\pi^* K(k) \in \mathcal{M}(X)$ を再び $K(k)$ と記す。 $\mathcal{F} \in \mathcal{M}(X)$ に対して、 X の \mathcal{F} 係数の絶対コホモロジー $H_{\mathcal{A}}^m(X, \mathcal{F})$ を

$$H_{\mathcal{A}}^m(X, \mathcal{F}) := \text{Ext}_{\mathcal{M}(X)}^m(K(0), \mathcal{F})$$

と定義し、 X の \mathcal{F} 係数の相対コホモロジー $H^m(X, \mathcal{F}) \in \mathcal{M}(S)$ を、 π_* の右導來関手 $H^m(X, \mathcal{F}) := R^m \pi_* \mathcal{F} \in \mathcal{M}(S)$ として定義する。両者の間にはスペクトル系列

$$(4) \quad E_2^{p,q} = \text{Ext}_{\mathcal{M}(S)}^p(K(0), H^q(X, \mathcal{F})) \Rightarrow H_{\mathcal{A}}^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

が存在する。

実際に扱う混合層は、下記の通りである。(1)(2) は完全に良い混合層の理論が整備されている圏である。(3)(4) については必ずしも良い混合層の理論が完成されている訳では無いが、ポリログの構成を正当化できるだけの理論は整備されている。

- (1) **Hodge 実現の場合:** $S = \text{Spec } \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ とする。 $\mathcal{M}(X)$ は X 上のホッジ加群の圏、 $\mathcal{M}(S)$ は混合実ホッジ構造の圏となる。この場合の絶対コホモロジーは Deligne-Beilinson コホモロジーで与えられ、相対コホモロジーは、 X の \mathcal{F} 係数のコホモロジーに混合実ホッジ構造を入れたものである。
- (2) **Etale 実現の場合:** S : 代数体のスペクトラム、 $K = \mathbb{Q}_l$ とする。 $\mathcal{M}(X)$ は X 上の perverse l 進層の圏、 $\mathcal{M}(S)$ は代数体のガロア群の \mathbb{Q}_l 表現の圏となる。この場合の絶対コホモロジーは X の \mathcal{F} 係数の étale コホモロジーで与えられ、相対コホモロジーは、 X を代数体の代数閉体まで拡大してから \mathcal{F} 係数の étale コホモロジーを考えたものとなる。

- (3) **Motivic** な場合 : S : 代数体のスペクトラム、 $K = \mathbb{Q}$ とする。 $\mathcal{M}(X)$ は X 上のモチビックな混合層の圏、 $\mathcal{M}(S)$ は代数体上のモチーフの圏とする。この場合の絶対コホモロジーは X の \mathcal{F} 係数のモチビックコホモロジーで与えられ、相対コホモロジーは、 X の \mathcal{F} 係数のモチーフとなる。
- (4) p 進実現の場合 : S : p 進体のスペクトラム、 $K = \mathbb{Q}_p$ とする。この場合にも p 進混合層の理論があって然るべきである。 $\mathcal{M}(S)$ は、ある種の filtered Frobenius 加群の圏として取りたい。この場合の絶対コホモロジーは X の \mathcal{F} 係数のサントミックコホモロジーで与えられ、相対コホモロジーは、 X の \mathcal{F} 係数のコホモロジーとなる。

Motivic な場合の混合層は最も上位にあり、他の混合層へ「実現」と呼ばれる関手が存在して、それが絶対コホモロジーにはレギュレーターと呼ばれる準同型を誘導する。

以下、 $X = \mathbb{G}_m$ として、(1)(2)(3)(4) のいずれかの混合層の理論を考えているとする。まず、 $\mathcal{H} := H^1(X, K(0))^\vee$ を、 X の $K(0)$ 係数の相対コホモロジーの双対、すなわち X の Tate 加群とする。乗法群のコホモロジーは $H^0(X, K(0)) \cong K(0)$ 、 $H^1(X, K(0)) \cong K(-1)$ となり、

$$\mathcal{H} \cong K(1)$$

となる。いま、 $H^m(X, \pi^* \mathcal{H}) = H^m(X, K(0)) \otimes \mathcal{H}$ となる。このとき、スペクトル系列 (4) から、

$$(5) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{M}(S)}^1(K(0), \mathcal{H}) \rightarrow H_{\mathcal{A}}^1(X, \pi^* \mathcal{H}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}(S)}(K(0), \mathcal{H}^\vee \otimes \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

を得る。 $X = \mathbb{G}_m$ の単位元は $i: S \rightarrow X$ を与え、この写像による引き戻しによって、上記の完全系列は分解する。 $\mathcal{L}\text{og}^{(1)}$ を $\mathcal{M}(X)$ 内の $K(0)$ と $\pi^* \mathcal{H}$ の拡大

$$0 \rightarrow \pi^* \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}\text{og}^{(1)} \rightarrow K(0) \rightarrow 0$$

で、拡大類が

$$H_{\mathcal{A}}^1(X, \pi^* \mathcal{H}) = \text{Ext}_{\mathcal{M}(X)}^1(K(0), \pi^* \mathcal{H})$$

の元として、 i^* による引き戻しが $\text{Ext}_{\mathcal{M}(S)}^1(K(0), \mathcal{H})$ の中で 0、全射による

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}(S)}(K(0), \mathcal{H}^\vee \otimes \mathcal{H}) \subset \mathcal{H}^\vee \otimes \mathcal{H} = \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$$

への像が $\text{id} \in \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ に対応するものとする。整数 $N > 0$ に対して $\mathcal{L}\text{og}^N := \text{Sym}^N \mathcal{L}\text{og}^{(1)}$ とすると、射影

$$\mathcal{L}\text{og}^{N+1} \rightarrow \mathcal{L}\text{og}^N \otimes \mathcal{L}\text{og}^{(1)} \rightarrow \mathcal{L}\text{og}^N$$

が定義される。この射影系を対数層 $\mathcal{L}\text{og} = (\mathcal{L}\text{og}^N)$ と呼ぶ。対数層は構成より、各冪根 $\xi \in \mathbb{G}_m$ で引き戻すと、

$$\xi^* \mathcal{L}\text{og} \cong \prod_{k=0}^{\infty} \text{Sym}^k \mathcal{H} \cong \prod_{k=0}^{\infty} K(k)$$

と分解する。いま、 $U^{\mathbb{Z}} := \mathbb{G}_m \setminus \{1\}$ とする。

定理 3.1. $U^{\mathbb{Z}}$ の 1 での留数は、標準的な同型

$$(6) \quad \text{res}: H_{\mathcal{A}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og}) \cong K$$

を誘導する。この事実を用いて、ポリログ

$$\text{pol} \in H_{\mathcal{A}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$$

を、(6) の同型を通して $1 \in K$ に行く元として定義する。

ポリログの構成は非常に抽象的で、各混合層によって並行に定義されることに注意されたい。

3.2. ホッジ実現と Beilinson 予想. ポリログのホッジ実現について、以下の結果は Beilinson-Deligne による。詳細は、[4, 23] などにも書かれている。任意の幕根 $\xi \in U_{\text{tor}}^{\mathbb{Z}}$ に対して、 $\text{Spec } \mathbb{Q}(\xi)$ を ξ で記す。このとき、 $k > 0$ であれば

$$H_{\mathcal{D}}^1(\xi, \mathbb{R}(k)) \cong \text{Ext}_{\text{MHS}_{\mathbb{R}}}^1(\mathbb{R}(0), \mathbb{R}(k)) \cong \mathbb{C}/(2\pi i)^k \mathbb{R}$$

となることに注意する。

定理 3.2 ([4, Corollary 5.10]). ポリログのホッジ実現 $\text{pol} \in H_{\mathcal{D}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$ を考える。任意の幕根 $\xi \in U_{\text{tor}}^{\mathbb{Z}}$ に対して、

$$\xi^* \text{pol} \in H_{\mathcal{D}}^1(\xi, \xi^* \mathcal{L}\text{og}) \cong \prod_{k \geq 0} H_{\mathcal{D}}^1(\xi, \mathbb{R}(k)) \cong \prod_{k > 0} \mathbb{C}/(2\pi i)^k \mathbb{R}$$

としたとき、

$$\xi^* \text{pol} = ((-1)^{k-1} \text{Li}_k(\xi))_{k>0}$$

が成り立つ。

この結果は、Dirichlet モチーフの Beilinson 予想の証明で重要な役割を果たす。非常に大雑把であるが、Beilinson 予想は、 L 関数の特殊値が、実現関手から誘導されるモチビックコホモロジーから Deligne-Beilinson コホモロジーへのレギュレーター写像

$$r_{\mathcal{D}}: H_{\text{mot}}^1(\xi, \mathbb{Q}(k)) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^1(\xi, \mathbb{Q}(k))$$

によって記述されると予想している。この予想を証明する最も重要なステップは、 $H_{\text{mot}}^1(\xi, \mathbb{Q}(k))$ に元を構成して、この元の $r_{\mathcal{D}}$ による像を具体的に計算することにある。一般的には、モチビックなコホモロジー内に具体的に元を構成することは難しいとされている。いま、ポリログの構成より、モチビックな場合にも、ポリログ

$$\text{pol} \in H_{\text{mot}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$$

が構成されている。任意の $\xi \in U_{\text{tor}}^{\mathbb{Z}}$ に対して、ポリログの ξ による引き戻しは、

$$\xi^* \text{pol} \in H_{\text{mot}}^1(\xi, \xi^* \mathcal{L}\text{og}) \cong \prod_{k>0} H_{\text{mot}}^1(\xi, \mathbb{Q}(k))$$

を与え、 $\xi^* \text{pol}$ の k 番目の成分は $c_k(\xi) \in H_{\text{mot}}^1(\xi, \mathbb{Q}(k))$ を与える。これは古典的には、Beilinson の cyclotomic element と呼ばれていたモチビックな元である。すなわち、1 つ標準的なモチビックな元 pol を構成したことにより、結果として任意の $\xi \in U_{\text{tor}}^{\mathbb{Z}}$ と整数 $k > 0$ に対して無数のモチビックな元 $c_k(\xi)$ が構成されたことになる。また、ポリログの構成は非常に形式的であることから混合層の理論に依存せず、構成に現れる各種写像はレギュレーター $r_{\mathcal{D}}$ などの自然な写像と可換となる。定理 3.2 は、以下の系を導く。

系 3.3. $\xi \in U_{\text{tor}}^{\mathbb{Z}}$ と整数 $k > 0$ に対して $c_k(\xi)$ を Beilinson の cyclotomic element としたとき、

$$r_{\mathcal{D}}(c_k(\xi)) = (-1)^{k-1} \text{Li}_k(\xi)$$

が成り立つ。

Proof. 図形

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{mot}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \xi^* \mathcal{L}\text{og}) & \xrightarrow{\xi^*} & \prod_{k \geq 0} H_{\text{mot}}^1(\xi, \mathbb{Q}(k)) \\ \downarrow r_{\mathcal{D}} & & \downarrow r_{\mathcal{D}} \\ H_{\mathcal{D}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \xi^* \mathcal{L}\text{og}) & \xrightarrow{\xi^*} & \prod_{k \geq 0} H_{\mathcal{D}}^1(\xi, \mathbb{R}(k)) \xrightarrow{\cong} \prod_{k > 0} \mathbb{C}/(2\pi i)^k \mathbb{R} \end{array}$$

は可換となる。レギュレーター $r_{\mathcal{D}}$ は $\text{pol} \in H_{\text{mot}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$ を $\text{pol} \in H_{\mathcal{D}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$ に写すことから、系の主張は定理 3.2 より従う。□

Dirichlet L 関数の特殊値が、ポリログの特殊値 $\text{Li}_k(\xi)$ の線型和で表される。系 3.3 より $\text{Li}_k(\xi)$ はモチビックな元のレギュレーターによる像として書き表せることが分かるので、この表示を用いて、Dirichlet L 関数の場合の Beilinson 予想が証明される。

絶対コホモロジーである Deligne-Beilinson コホモロジーと、普通のコホモロジーである相対コホモロジーの間には、スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_{\text{MHS}_{\mathbb{R}}}^p(\mathbb{R}(0), H^q(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})) \Rightarrow H_{\mathcal{D}}^{p+q}(X, \mathcal{L}\text{og})$$

が与えられている。 $H^0(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og}) \cong \{0\}$ となることから、このスペクトル系列より、埋め込み

$$(7) \quad H^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{MHS}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), H^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})) \hookrightarrow H_{\text{dR}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$$

を得る。ここで $H_{\text{dR}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$ は、 $\mathcal{L}\text{og}$ の底にある接続付き $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$ 加群 $\mathcal{L}\text{og}$ のドラムコホモロジーである。 $\mathcal{L}\text{og}$ は接続付き加群として

$$\mathcal{L}\text{og} = \prod_{k \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m} e^k, \quad \nabla(e^k) = e^{k+1} \otimes \frac{dt}{t}$$

によって与えられる。 $\text{pol} \in H^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$ の $H_{\text{dR}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$ への像をポリログのドラム実現と呼ぶ。 $u \in \Gamma(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m})$ に対して

$$\theta(u) := ue^1 \otimes \frac{dt}{t} \in \Gamma(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og} \otimes \Omega_{\mathbb{T}}^1)$$

とおくと、この対応関係は準同型

$$\theta: H^0(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$$

を誘導する。定理 3.2 を証明する最初の大変なステップとして、次の命題がある。証明は、例えば [4, Proposition 3.10] を参照せよ。

命題 3.4. $\mathcal{G}(t) = t/(1-t) \in H^0(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m})$ とする。ポリログのドラム実現は、

$$-\theta(\mathcal{G}(t)) \in H_{\text{dR}}^1(U^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}\text{og})$$

と一致する。

$-\theta(\mathcal{G}(t))$ がポリログを表す理由は、微分形式

$$-\theta(\mathcal{G}(t)) = -\mathcal{G}(t)e \otimes \frac{dt}{t} = e \otimes \frac{dt}{t-1}$$

の \mathbb{G}_m の原点 $t = 1$ での留数が、ちょうど 1 になるからである。この結果は、反復積分 (1) の最初に $\mathcal{G}(t)$ が出て来ることに対応している。本稿では、総実代数体に付随する代数トーラスの場合に、上記を拡張する結果を紹介する。

3.3. 総実代数体の同変ポリログ. ここでは、総実代数体に付随する代数トーラス \mathbb{T} に対して、 F_+^\times の作用による同変ポリログの構成を行う。ポリログの構成は Huber-Kings [24] により、一般の代数群の場合へと拡張された。本稿ではこの構成を、代数群 \mathbb{T}^a や $\mathbb{T} = \coprod_{a \in \mathfrak{I}} \mathbb{T}^a$ の場合に適用して、さらに F_+^\times の作用による同変性を考慮して構成を拡張する。現在、同変性込みの混合層の一般論、特に絶対コホモロジーの理論は整備されていない。筆者らは現在、ホッジ実現の場合に、同変ポリログを構成する為に最低限の同変 Deligne-Beilinson コホモロジーの理論を整備中である [7]。本稿では、同変 Deligne-Beilinson コホモロジーの存在を仮定して、同変ポリログについて解説する。

総実代数体の場合の対数層は、乗法群の場合と基本的に同様に構成される。特にホッジ実現の場合、 \mathbb{T}^a に対して

$$\mathcal{H}_a := H^1(\mathbb{T}^a, \mathbb{R}(0))^\vee = \bigoplus_{\tau \in I} \mathbb{R}(1)$$

となる。 \mathbb{T}^a 上の対数層 \mathcal{Log}_a は混合実ホッジ構造の変形として同様に定義され、 $\xi \in \mathbb{T}_{\text{tor}}^a$ に制限すると、

$$\xi^* \mathcal{Log}_a \cong \prod_{k \geq 0} \text{Sym}^k \mathcal{H}_a \cong \prod_{k \in \mathbb{N}^I} \mathbb{R}(k)$$

と分解する。最後の項は、 $k = (k_\tau) \in \mathbb{N}^I$ に対して、 $\mathbb{R}(k) = \mathbb{R}(\sum_{\tau \in I} k_\tau)$ として与えられる Tate 対象である。各 \mathbb{T}^a 上に \mathcal{Log}_a を乗せることで、 \mathbb{T} 上 \mathcal{Log} が定義される。 \mathcal{Log} の構成は関手的であることから、 \mathcal{Log} は F_+^\times の作用により同変構造を持っている。従って、同変 Deligne-Beilinson コホモロジーを考えることができる。同変 Deligne-Beilinson コホモロジーは、スペクトル系列 $E_2^{p,q} = H^p(F_+^\times, H^q(U, \mathcal{Log})) \Rightarrow H^{p+q}(U/F_+^\times, \mathcal{Log})$ と

$$(8) \quad E_2^{p,q} = \text{Ext}_{\text{MHS}_{\mathbb{R}}}^p(\mathbb{R}(0), H^q(U/F_+^\times, \mathcal{Log})) \Rightarrow H_{\mathcal{D}}^{p+q}(U/F_+^\times, \mathcal{Log})$$

によって計算できる。対数層のコホモロジーの計算より、次が証明される。

定理 3.5 ([7]). U の 1 での留数は、標準的な同型

$$(9) \quad \text{res}: H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{Log}) \cong \bigoplus_{\text{Cl}_F^+(1)} \mathbb{R}$$

を誘導する。この事実を用いて、 \mathbb{T} の同変ポリログ

$$\text{pol} \in H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{Log})$$

を、(6) の同型を通して $(1, \dots, 1)$ に行く元として定義する。

スペクトル系列(8)より、(7)と同様に、埋め込み

$$H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{MHS}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), H^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})) \hookrightarrow H_{\text{dR}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$$

を得る。ここで $H_{\text{dR}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$ は、 $\mathcal{L}\text{og}$ の底にある接続付き $\mathcal{O}_{\mathbb{T}}$ 加群 $\mathcal{L}\text{og}$ の同変ドラムコホモロジーである。 $\mathcal{L}\text{og}$ は接続付き加群として

$$\mathcal{L}\text{og} = \prod_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^I} \mathcal{O}_{\mathbb{T}} e^{\mathbf{k}}, \quad \nabla(e^{\mathbf{k}}) = \sum_{\tau \in I} e^{\mathbf{k} + 1_\tau} \otimes \frac{dt_\tau}{t_\tau}$$

によって与えられる。ただし、 $1_\tau \in \mathbb{N}^I$ は、 τ 成分が 1 で他の成分が 0 となる様な元で、 $\{\frac{dt_\tau}{t_\tau}\}_{\tau \in I}$ は $\{\partial_\tau\}_{\tau \in I}$ の双対基底となる $\Omega_{\mathbb{T}}^1$ の微分形式である。 $\text{pol} \in H^1(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$ の $H_{\text{dR}}^1(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$ への像を、ポリログのドラム実現と呼ぶ。

同変ドラムコホモロジー $H_{\text{dR}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$ は、命題 2.8 の様な Čech 複体で具体的に計算できる。すなわち、アフィン被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha^\mathfrak{a}\}_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}, \alpha \in \mathcal{A}_\mathfrak{a}}$ を考えると、 $H_{\text{dR}}^\bullet(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$ は、 $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{L}\text{og} \otimes \Omega_{\mathbb{T}}^g)$ で与えらえる 2 重複体によって計算される。臨界元

$$u = (u_\alpha^\mathfrak{a}) \in C^{g-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{T}})$$

に対して、 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}$ と $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_g) \in \mathcal{A}_\mathfrak{a}^g$ のとき、

$$\theta(u_\alpha^\mathfrak{a}) := \text{sgn}(\alpha) u_\alpha^\mathfrak{a} \frac{e^{(1, \dots, 1)}}{|\widehat{P}_\alpha \cap \mathfrak{a}|} \otimes \frac{dt^{\alpha_1}}{t^{\alpha_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dt^{\alpha_g}}{t^{\alpha_g}} \in \Gamma(U_\alpha^\mathfrak{a}, \mathcal{L}\text{og} \otimes \Omega_{\mathbb{T}}^g)$$

とおくと、臨界元 $\theta(u) := (\theta(u_\alpha^\mathfrak{a})) \in C^{g-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{L}\text{og} \otimes \Omega_{\mathbb{T}}^g)$ が定義される。この対応関係は準同型

$$\theta: H^{g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{T}}) \rightarrow H_{\text{dR}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$$

を誘導する。

定理 3.6. $\mathcal{G}(t) \in H^{g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{T}})$ を新谷生成類とする。ポリログのドラム実現は、

$$(-1)^g \theta(\mathcal{G}(t)) \in H_{\text{dR}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$$

と一致する。

$(-1)^g \theta(\mathcal{G}(t))$ がポリログを表す理由は、微分形式

$$(-1)^g \theta(\mathcal{G}_\alpha^\mathfrak{a}(t)) = \frac{\sum_{\alpha \in \widehat{P}_\alpha \cap \mathfrak{a}} t^\alpha}{t^{\alpha_1} \cdots t^{\alpha_g}} \frac{e^{(1, \dots, 1)}}{|\widehat{P}_\alpha \cap \mathfrak{a}|} \otimes \frac{dt^{\alpha_1}}{t^{\alpha_1} - 1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt^{\alpha_g}}{t^{\alpha_g} - 1}$$

の $\mathbb{T}^\mathfrak{a}$ の原点 $t^{\alpha_1} = \cdots = t^{\alpha_g} = 1$ での留数が、ちょうど 1 になるからである。

3.4. プレクティック構造と予想. 総実代数体の場合にも、ポリログを Beilinson 予想に応用することは期待したいところである。有理数体の場合を踏襲すると、点 $\xi \in U_{\text{tor}}$ に対して、引き戻し写像

$$(10) \quad (\xi\Delta)^*: H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og}) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(\xi\Delta/\Delta, (\xi\Delta)^*\mathcal{L}\text{og}) \cong \prod_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^I} H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k}))$$

を考える。 $\xi\Delta$ は 0 次元で、 $\Delta \cong \mathbb{Z}^{g-1}$ で群コホモロジーは $g-1$ 次までしか残らないから、スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\Delta, H^q(\xi\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k}))) \Rightarrow H^{p+q}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k}))$$

より、同変コホモロジー $H^m(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k}))$ が $m > g - 1$ で消えることが導かれる。従って同変 Deligne-Beilinson コホモロジーは、スペクトル系列

$$(11) \quad E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_{\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}}^p(\mathbb{R}(0), H^q(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k}))) \Rightarrow H_{\mathcal{D}}^{p+q}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k}))$$

より

$$H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k})) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}}^g(\mathbb{R}(0), H^{g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k})))$$

となる。しかしながら混合実ホッジ構造の圏 $\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}$ では、 Ext^m は $m > 1$ で消えることが知られている。このことから、結果として $g > 1$ のとき $H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k})) = \{0\}$ となってしまう。すなわち、引き戻し写像 (10) は 0 写像にしかなりえない。この事実こそが、総実代数体の場合など、高次元の代数群の場合にポリログの研究を最も阻害してきた要因である。この障害を解消する為に筆者らが大きな期待を寄せているのが、Nekovar と Scholl [28] によって提唱された「プレクティック構造」の概念である。

プレクティック構造の哲学では、総実代数体と関連する様な幾何学的対象に対しては、混合層の理論に、総実代数体から来る「プレクティック構造」と呼ばれる付加的構造が入ることを期待している。ホッジ実現については、混合実ホッジ構造の圏 $\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}$ のプレクティック版として、 $\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}$ の g 次 Deligne テンソル積

$$\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I := \mathrm{MHS}_{\mathbb{R}} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}$$

が、混合プレクティック実ホッジ構造の圏として提唱されている。筆者らは $\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I$ の対象の具体的表示や Ext 群の計算について、論文 [3] で調べた。実際、 $M_1, \dots, M_g \in \mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}$ に対して、 $\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I$ の対象

$$M_1 \boxtimes \cdots \boxtimes M_g$$

が構成され、 $\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I$ の任意の対象は、 $M_1 \boxtimes \cdots \boxtimes M_g$ という形の対象の sub-quotient となっている。上記の Tate 対象 $\mathbb{R}(\mathbf{k})$ も、

$$\mathbb{R}(\mathbf{k}) = \mathbb{R}(k_{\tau_1}) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathbb{R}(k_{\tau_g})$$

として自然に $\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I$ の対象とみなすことができる。 $\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I$ の圏での Ext の計算は以下の通りである。計算の詳細は [3, Example 5.28] や [7, Lemma 5.4] を参照せよ。

補題 3.7. 整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\mathbb{R}(k_I)$ を $\mathbb{R}(k) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathbb{R}(k)$ で与えられる $\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I$ 内の Tate 対象とする。このとき、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I}(\mathbb{R}(0_I), \mathbb{R}(k_I)) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, \\ \{0\} & k \neq 0, \end{cases} \quad \mathrm{Ext}_{\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I}^g(\mathbb{R}(0_I), \mathbb{R}(k_I)) = \begin{cases} \mathbb{C}/(2\pi i)^{g(k-1)+1}\mathbb{R} & k > 0, \\ \{0\} & k \leq 0 \end{cases}$$

が成り立ち、これ以外の場合には $\mathrm{Ext}_{\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I}^m(\mathbb{R}(0_I), \mathbb{R}(k_I)) = \{0\}$ となる。

現時点では、プレクティック同変 Deligne-Beilinson コホモロジーを定義するだけにプレクティックの理論はまだ十分に進化していない。しかしながら、仮に良いプレクティック同変 Deligne-Beilinson コホモロジーの理論があるとすれば、スペクトル系列

$$(12) \quad E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_{\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^I}^p(\mathbb{R}(0_I), H^q(U/F_+^\times, \mathcal{L}\mathrm{og})) \Rightarrow H_{\mathcal{D}^I}^{p+q}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\mathrm{og})$$

によって計算できるはずである。実際、このスペクトル系列の存在を仮定して、プレクティック同変 Deligne-Beilinson コホモロジーを計算すると、

$$H_{\mathcal{D}^I}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og}) \cong H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$$

となることが証明できる。このことから、同変ポリログ $\text{pol} \in H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$ は、プレクティック同変 Deligne-Beilinson コホモロジーの中にも $\text{pol} \in H_{\mathcal{D}^I}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og})$ が定まることが分かる。プレクティック版を考えることの利点は、点への引き戻しが定義されることにある。

いま、スペクトル系列 $E_2^{p,q} = H^p(\Delta, H^q(\xi\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k}))) \Rightarrow H^{p+q}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k}))$ と $\Delta \cong \mathbb{Z}^{g-1}$ の群コホモロジーの計算より、

$$H^{g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k})) \cong H^{g-1}(\Delta, H^0(\xi\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k}))) \cong H^{g-1}(\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k})) \cong \begin{cases} \mathbb{R}(k_I) & \mathbf{k} = k_I \\ \{0\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

が導かれる。いま、(11) と同様のスペクトル系列から、

$$H_{\mathcal{D}^I}^{2g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k})) \cong \text{Ext}_{\text{MHS}_{\mathbb{R}}^I}^g(\mathbb{R}(0), H^{g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k})))$$

となり、補題 3.7 の計算より、

$$H_{\mathcal{D}^I}^{2g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k})) \cong \begin{cases} \mathbb{C}/(2\pi i)^{g(k-1)+1}\mathbb{R} & \mathbf{k} = k_I, k > 0, \\ \{0\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。上記の計算を踏まえて、以下を予想する。

予想 3.8. プレクティック構造、及び同変プレクティック *Deligne-Beilinson* コホモロジーの一般論があると仮定する。このとき、 $\xi \in U_{\text{tor}}$ に対して引き戻し

$$(\xi\Delta)^*: H_{\mathcal{D}}^{2g-1}(U/F_+^\times, \mathcal{L}\text{og}) \rightarrow H_{\mathcal{D}^I}^{2g-1}(\xi\Delta/\Delta, (\xi\Delta)^*\mathcal{L}\text{og})$$

が定義される。また、同型

$$H_{\mathcal{D}^I}^{2g-1}(\xi\Delta/\Delta, (\xi\Delta)^*\mathcal{L}\text{og}) \cong \prod_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^I} H_{\mathcal{D}^I}^{2g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathbb{R}(\mathbf{k})) \cong \prod_{k>0} \mathbb{C}/(2\pi i)^{g(k-1)+1}\mathbb{R}$$

を通して、

$$(\xi\Delta)^*\text{pol} = ((-1)^k d_F^{1/2} \mathcal{L}(\xi\Delta, k))_{k>0} \in \prod_{k>0} \mathbb{C}/(2\pi i)^{g(k-1)+1}\mathbb{R}$$

となる。ここで d_F は F の差積である。

$F = \mathbb{Q}$ のとき、Lerch ゼータ関数の特殊値 $\mathcal{L}(\xi, k)$ は、ポリログ関数の特殊値 $\text{Li}_k(\xi)$ と一致する。また、 $U^{\mathbb{Z}} \cong U/\mathbb{Q}_+^\times$ である。従って、予想 3.8 は定理 3.2 の自然な拡張となっている。上記予想は、高次元の場合のポリログから数論的量を取り出す具体的な道筋を示している。Lerch ゼータ関数は Hecke L 関数と関係することから、同変ポリログがモチビックなポリログのレギュレーター $r_{\mathcal{D}}$ の像となっていることを仮定すると、予想 3.8 から総実代数体の Hecke L 関数の Beilinson 予想を証明することができる期待される。詳細は [7] を参照されたい。

REFERENCES

- [1] Kenichi Bannai, *Rigid syntomic cohomology and p -adic polylogarithms*, J. Reine Angew. Math. **529** (2000), 205–237, DOI 10.1515/crll.2000.097. MR1799937
- [2] ———, *On the p -adic realization of elliptic polylogarithms for CM-elliptic curves*, Duke Math. J. **113** (2002), no. 2, 193–236, DOI 10.1215/S0012-7094-02-11321-0. MR1909217
- [3] Kenichi Bannai, Kei Hagihara, Shinichi Kobayashi, Kazuki Yamada, Shuji Yamamoto, and Seidai Yasuda, *Category of mixed plectic Hodge structures*, Asian J. Math. **24** (2020), no. 1, 31–76. MR4143982
- [4] Kenichi Bannai, Kei Hagihara, Kazuki Yamada, and Shuji Yamamoto, *The Hodge realization of the polylogarithm on the product of multiplicative groups*, Math. Z. **296** (2020), no. 3-4, 1787–1817, DOI 10.1007/s00209-020-02483-y. MR4159851
- [5] ———, *Canonical Equivariant Cohomology Classes Generating Zeta Values of Totally Real Fields* (2019), preprint, available at arXiv:1911.02650 [math.NT].
- [6] ———, *p -adic Polylogarithms and p -adic Hecke L -functions for Totally Real Fields* (2020), preprint, available at arXiv:2003.08157 [math.NT].
- [7] Kenichi Bannai, Hohto Bekki, Kei Hagihara, Tatsuya Oshita, Kazuki Yamada, and Shuji Yamamoto, *The Hodge realization of the Polylogarithm and the Shintani Generating Class for Totally Real Fields* (2021), in preparation.
- [8] Kenichi Bannai and Shinichi Kobayashi, *Algebraic theta functions and Eisenstein-Kronecker numbers*, Proceedings of the Symposium on Algebraic Number Theory and Related Topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B4, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007, pp. 63–77. MR2402003
- [9] ———, *Algebraic theta functions and the p -adic interpolation of Eisenstein-Kronecker numbers*, Duke Math. J. **153** (2010), no. 2, 229–295, DOI 10.1215/00127094-2010-024. MR2667134
- [10] Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi, and Takeshi Tsuji, *Realizations of the elliptic polylogarithm for CM elliptic curves*, Algebraic number theory and related topics 2007, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B12, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2009, pp. 33–50. MR2605771
- [11] ———, *On the de Rham and p -adic realizations of the elliptic polylogarithm for CM elliptic curves*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **43** (2010), no. 2, 185–234, DOI 10.24033/asens.2119 (English, with English and French summaries). MR2662664
- [12] Daniel Barsky, *Fonctions zeta p -adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels*, Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique (5e année: 1977/78), Secrétariat Math., Paris, 1978, pp. Exp. No. 16, 23 (French). MR525346
- [13] A. A. Beilinson, *Higher regulators and values of L -functions*, Current problems in mathematics, Vol. 24, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984, pp. 181–238 (Russian). MR760999
- [14] Alexander Beilinson, Guido Kings, and Andrey Levin, *Topological polylogarithms and p -adic interpolation of L -values of totally real fields*, Math. Ann. **371** (2018), no. 3-4, 1449–1495, DOI 10.1007/s00208-018-1645-4. MR3831278
- [15] Alexander Beilinson and Andrey Levin, *The elliptic polylogarithm*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 123–190. MR1265553
- [16] Spencer Bloch and Kazuya Kato, *L -functions and Tamagawa numbers of motives*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 333–400. MR1086888
- [17] David Blotière, *Réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien*, J. Inst. Math. Jussieu **8** (2009), no. 1, 1–38, DOI 10.1017/S1474748008000315 (French, with English and French summaries). MR2461901
- [18] Pierrette Cassou-Noguès, *Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p -adiques*, Invent. Math. **51** (1979), no. 1, 29–59, DOI 10.1007/BF01389911 (French). MR524276

- [19] Pierre Charollois and Samit Dasgupta, *Integral Eisenstein cocycles on GL_n , I: Sczech's cocycle and p -adic L -functions of totally real fields*, Camb. J. Math. **2** (2014), no. 1, 49–90, DOI 10.4310/CJM.2014.v2.n1.a2. MR3272012
- [20] Pierre Charollois, Samit Dasgupta, and Matthew Greenberg, *Integral Eisenstein cocycles on GL_n , II: Shintani's method*, Comment. Math. Helv. **90** (2015), no. 2, 435–477, DOI 10.4171/CMH/360. MR3351752
- [21] Richard Hill, *Shintani cocycles on GL_n* , Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), no. 6, 993–1004, DOI 10.1112/blms/bdm099. MR2392823
- [22] Shubin Hu and David Solomon, *Properties of higher-dimensional Shintani generating functions and cocycles on $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Q})$* , Proc. London Math. Soc. (3) **82** (2001), no. 1, 64–88, DOI 10.1112/S0024611500012612. MR1794257
- [23] Annette Huber and Jörg Wildeshaus, *Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne*, Doc. Math. **3** (1998), 27–133. MR1643974
- [24] Annette Huber and Guido Kings, *Polylogarithm for families of commutative group schemes*, J. Algebraic Geom. **27** (2018), 449–495.
- [25] Nicholas M. Katz, *Another look at p -adic L -functions for totally real fields*, Math. Ann. **255** (1981), no. 1, 33–43, DOI 10.1007/BF01450554. MR611271
- [26] Guido Kings, *A note on polylogarithms on curves and abelian schemes*, Math. Z. **262** (2009), no. 3, 527–537, DOI 10.1007/s00209-008-0387-5. MR2506305
- [27] Andrey Levin, *Elliptic polylogarithms: an analytic theory*, Compositio Math. **106** (1997), no. 3, 267–282, DOI 10.1023/A:1000193320513. MR1457106
- [28] J. Nekovář and A. J. Scholl, *Introduction to plectic cohomology*, Advances in the theory of automorphic forms and their L -functions, Contemp. Math., vol. 664, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, pp. 321–337, DOI 10.1090/conm/664/13107. MR3502988
- [29] Jürgen Neukirch, *The Beilinson conjecture for algebraic number fields*, Beilinson's conjectures on special values of L -functions, Perspect. Math., vol. 4, Academic Press, Boston, MA, 1988, pp. 193–247. MR944995
- [30] Robert Sczech, *Eisenstein group cocycles for GL_n and values of L -functions*, Invent. Math. **113** (1993), no. 3, 581–616, DOI 10.1007/BF01244319. MR1231838
- [31] Takuro Shintani, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), no. 2, 393–417. MR0427231
- [32] David Solomon, *Algebraic properties of Shintani's generating functions: Dedekind sums and cocycles on $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$* , Compositio Math. **112** (1998), no. 3, 333–362, DOI 10.1023/A:1000493903703. MR1631700
- [33] ———, *The Shintani cocycle. II. Partial ζ -functions, cohomologous cocycles and p -adic interpolation*, J. Number Theory **75** (1999), no. 1, 53–108, DOI 10.1006/jnth.1998.2332. MR1670874
- [34] Michael Spiess, *Shintani cocycles and the order of vanishing of p -adic Hecke L -series at $s = 0$* , Math. Ann. **359** (2014), no. 1-2, 239–265, DOI 10.1007/s00208-013-0983-5. MR3201900
- [35] Jörg Wildeshaus, *Realizations of polylogarithms*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1650, Springer-Verlag, Berlin, 1997. MR1482233
- [36] Shuji Yamamoto, *On Shintani's ray class invariant for totally real number fields*, Math. Ann. **346** (2010), no. 2, 449–476, DOI 10.1007/s00208-009-0405-x. MR2563695

Email address: bannai@math.keio.ac.jp

*DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, KEIO UNIVERSITY, 3-14-1 HIYOSHI, KOUHOKU-KU, YOKOHAMA 223-8522, JAPAN

°MATHEMATICAL SCIENCE TEAM, RIKEN CENTER FOR ADVANCED INTELLIGENCE PROJECT (AIP), 1-4-1 NIHONBASHI, CHUO-KU, TOKYO 103-0027, JAPAN

数体の素元星座定理

関 真一朗 (青山学院大学)

概要

本稿は第 66 回代数学シンポジウムにおける筆者の講演に基づいて、甲斐亘、見村万佐人、宗政昭弘、吉野聖人の各氏との共著論文 [KMMSY] の成果について報告するものである。

1 はじめに

素数全体の集合を表す記号として \mathcal{P} を採用する。正整数 N に対して, $[N] := \{1, 2, \dots, N\}$ 。1904 年に提起された素数に関する次の予想がある。

予想 1.1 (Dickson の予想). $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}$ について,

$$\forall p \in \mathcal{P}, \exists n \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } p \nmid \prod_{i \in [k]} (a_i n + b_i)$$

が満たされるならば $a_1 n + b_1, \dots, a_k n + b_k$ が全て素数となるような整数 n が無限に存在する。

$k = 1$ の場合が Dirichlet の算術級数定理であり、その他様々な有名予想が Dickson の予想に含まれている。 k は任意, $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_k = k, b_1 = \dots = b_k = 1$ のときを考えると, $(p+1)(2p+1) \cdots (kp+1) \equiv 1 \pmod{p}$ なので、Dickson の予想は $n+1, 2n+1, \dots, kn+1$ が全て素数となるような整数 n が無限個存在することも予想している。特に、任意の長さの素数等差数列が存在することは遅くとも 1904 年の時点では信じられていたとみることはできるだろう。ここで、素数のみで構成されるような等差数列を素数等差数列とよび、等差数列の項数を長さとよぶ(長さが 2 以上というときは公差として 0 は許さない)。

進展としては解析的整数論の手法を用いた van der Corput および Heath-Brown の結果があった。

定理 1.2 (van der Corput [VdC]). 長さ 3 の素数等差数列は無限に存在する。

定理 1.3 (Heath-Brown [HB1]). 3 つの素数および 1 つの「素数または 2 つの素数の積であるような数」から構成される長さ 4 の等差数列は無限に存在する。

その後、Green が [Gr] において van der Corput の定理を Roth の定理(定理 2.3)の形に拡張するブレイクスルーを与え(定理 6.1 の $k = 3$ の場合), Tao との共同研究により次の金字塔に到達した。

定理 1.4 (Green–Tao [GT]). 任意の長さの素数等差数列が存在する.

本稿の主たる興味は Green–Tao の定理の多次元化である. その際, 等差数列に対応する概念として**星座**を考える.

定義 1.5. \mathcal{Z} を \mathbb{Z} 加群とし, S を \mathcal{Z} の有限部分集合とする. このとき, \mathcal{Z} の部分集合 \mathcal{S} が S 星座であるとは, 或る $a \in \mathcal{Z}$ および或る $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $\mathcal{S} = a + l \cdot S = \{a + ls : s \in S\}$ と表されることをいう.

\mathcal{Z} の(無限)部分集合 A について, 「任意の有限部分集合 $S \subset \mathcal{Z}$ に対して或る S 星座 $\mathcal{S} \subset A$ が存在する」ことを「 A は \mathcal{Z} に対する任意の形状の星座を含む」などと表現する.

補題 1.6. $A \subset \mathbb{Z}$ について, 「 A は任意の長さの等差数列を含む」ということと「 A は \mathbb{Z} に対する任意の形状の星座を含む」ということは同値である.

証明. 長さ k の等差数列(の作る集合)は $[k]$ 星座に他ならない. どんな \mathbb{Z} の有限部分集合 S をとっても, 或る $a, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して $a + S \subset [k]$ が成り立ち, このとき $[k]$ 星座は S 星座を含んでいる. 以上の観察により証明は尽きている. \square

この補題から Green–Tao の定理は次のように言い換えることができる.

定理 1.7 (Green–Tao, 再掲). 素数全体の集合 \mathcal{P} は \mathbb{Z} に対する任意の形状の星座を含む.

この2次元類似といえる定理を Tao は証明した. それは Green–Tao の定理における整数を Gauss 整数に置き換え, 素数を Gauss 素数に置き換えたものといえる.

定理 1.8 (Gauss 素数星座定理 [T2]). Gauss 素数全体の集合 $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}$ は $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ に対する任意の形状の星座を含む.

Green–Tao の論文の §11 で Gauss 数体版や他の数体でやってみることを提案していたが, Gauss 数体については Tao 自身が直後にやってしまったわけである(arXiv の v3 で提案し, v6 で Tao の論文が引用されている. また, 出版年は前後てしまっている). Tao の論文の §12 においては依然として他の数体の場合にも拡張できるだろうと予想している一方で, 少なくとも「整数環が UFD で単数を有限個しか持たない場合」には同じ方法が使えるだろうというような表現もしている. 有理数体を除くと単数が有限個しかないような数体は Dirichlet の単数定理から虚 2 次体に限定され, その場合に類数が 1 であるようなものは Baker–Heegner–Stark の定理から 9 つしか存在しないことがわかる. しかしながら, 東北大学のメンバーで構成された研究チーム¹は Tao のこのような数体への制限を課さずとも Green–Tao の論法は拡張できることを確認し, 以下の定理を証明した.

定理 1.9 (数体の素元星座定理 [KMMSY]). K を数体とし, \mathcal{O}_K を K の整数環とする. このとき, \mathcal{O}_K の素元全体の集合 \mathcal{P}_K は \mathcal{O}_K に対する任意の形状の星座を含む. 更に, 各星座は同伴なペアを含まないようにとることができる.

¹著者は昨年度まで東北大学に所属していた.

$\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ が互いに同伴であるとは、或る $\mu \in \mathcal{O}_K^\times$ が存在して $\alpha = \mu\beta$ が成り立つときをいう。Tao の制限を課さないこの主張に対する影響については、類数が一般の場合は既約元ではなく素元を考えていること、单数群が一般の場合は同伴なペアに関する追加的主張が成立していることに現れている。次数 d の数体の整数環は \mathbb{Z} 加群としては \mathbb{Z}^d と同型であるため、上記定理は Green–Tao の定理の多次元化（の1つ）と捉えることができる。

2 Szemerédi の定理

Green–Tao の定理は円周法や Vinogradov の手法などの解析的整数論的なアプローチだけで証明されたのではなく、Szemerédi の定理を1つの landmark とする Ramsey 型の一般論の発展と解析的整数論の合わせ技によって証明された。そこで、この節では Szemerédi の定理周辺の話題を簡単にまとめたい。

1920年頃に以下のような Ramsey 理論の先駆けとなる予想がなされた。

予想 2.1 (Baudet, Schur). 整数の集合をどのように2分割しようとも、どちらか一方は任意の長さの等差数列を含む。

この予想は van der Waerden によって次のような形で解決された。

定理 2.2 (van der Waerden [VdW]). 任意の $k, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して或る $N_0(k, m) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して、以下が成立する：整数 $N \geq N_0(k, m)$ と任意の分割 $[N] = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_m$ について、或る $i \in [m]$ が存在して C_i は長さ k の等差数列を含む。

これは Ramsey 理論における典型的な定理であり（ちなみに van der Waerden の定理が 1927 年なのに対して Ramsey の定理は 1930 年）、分割が与えられたときに等差数列が存在する集合 C_i を具体的に知ることはできないという弱点がある。Erdős–Turán は [ET] での研究を皮切りに密な部分集合は常に等差数列を含むだろうと予想し、この予想は長さ 3 の場合に Roth によって解決された。

定理 2.3 (Roth [R]). 任意の $\delta > 0$ に対して或る $N_0(\delta) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して、以下が成立する：整数 $N \geq N_0(\delta)$ と集合 $A \subset [N]$ について、 $\#A \geq \delta N$ であれば A は長さ 3 の等差数列を含む。

その後、長さ 4 の場合を Szemerédi [Sz1] が解決した後に、更に一般の長さの場合を解決するに至った。

定理 2.4 (Szemerédi [Sz2]). 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}, \delta > 0$ に対して或る $N_0(k, \delta) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して、以下が成立する：整数 $N \geq N_0(k, \delta)$ と集合 $A \subset [N]$ について、 $\#A \geq \delta N$ であれば A は長さ k の等差数列を含む。

Roth の証明は Fourier 解析的な証明であったのに対し、Szemerédi の証明は正則化補題のプロトタイプを用いた組合せ論的証明であった。その後、Szemerédi の定理は様々なアプローチによって別証明が考えられ、そのことが数学を進展させることにつながった。特に重要な別証明が Furstenberg によるエルゴード理論的証明 [F] および Gowers による Fourier

解析的証明 [Go1] である。Gowers による証明は Szemeédi の定理における $N_0(k, \delta)$ の上からの定量的評価

$$N_0(k, \delta) \leq 2^{2^{\delta-2}2^{k+9}}$$

を導き、これは一般の k については現在でも最良の評価である ($k = 3, 4$ に限定すると著しい進展がある)。この評価の改良が統ければ Green–Tao の定理がいつか得られるが、そのような証明は現状実現していないのであって、Green–Tao は代わりに Szemerédi の定理の相対化を考えた(次節)。

エルゴード理論的証明は即座に Furstenberg と Katznelson による Szemerédi の定理の多次元化を導いた。

定理 2.5 (多次元 Szemerédi 定理 [FK]). 任意の $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, \mathbb{Z}^d の有限部分集合 S , $\delta > 0$ に対して或る $N_0(d, S, \delta) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して、以下が成立する：整数 $N \geq N_0(d, S, \delta)$ と集合 $A \subset [N]^d$ について、 $\#A \geq \delta N^d$ であれば A は S 星座を含む。

その後、Gowers [Go2] および Rodl–Schacht–Tengan–Tokushige [RSTT] がハイパーグラフ除去補題を用いる組合せ論的別証明を与えた。この組合せ論的なアプローチは今回の我々の研究でも採用した手法である(§4)。

3 Szemerédi の定理の相対化

Green と Tao は Szemerédi の定理における $N_0(k, \delta)$ の定量評価を改良するのではなく、Szemerédi の定理の相対化を考えることによって新しい道を切り拓いた。 $\emptyset \neq A \subset X$, $\#X < \infty$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $\mathbb{E}(f | A) := \frac{1}{\#A} \sum_{x \in A} f(x)$ という記号を用いる。このとき、Szemerédi の定理における条件 $\#A \geq \delta N$ は $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A | [N]) \geq \delta$ と書き直すことができる。ここで、 $\mathbf{1}_\bullet$ は指示関数を表す。相対 Szemerédi 定理とはこの条件を重み付け関数 $\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対する重み付き密度条件 $\mathbb{E}(\lambda \cdot \mathbf{1}_A | [N]) \geq \delta$ に置き換えても、 λ が十分良い条件を満たしている場合には Szemerédi の定理と同等の結果を導くことができることを主張する ([GT, Theorem 3.5])。ここにいう「十分良い条件」とは λ が殆ど 1 のように振舞うというものである(線形形式条件などの擬ランダム性)。

また、多次元 Szemerédi 定理の相対化も同様に知られており、[T2, Theorem 2.18] や [CFZ, Theorem 3.1] がそれである。ここでは我々の共同研究で与えた version の相対多次元 Szemerédi 定理を紹介する。

定義 3.1. d を正整数とし、 S を 0 を含むような \mathbb{Z}^d の有限部分集合とする。 $r := \#S - 1 \geq 1$ とし、 $S = \{s_1, \dots, s_r\} \cup \{0\}$ と元に名前を付けておく。 $D_{r+1} := \bigsqcup_{i \in [r+1]} \{0, 1\}^{[r+1] \setminus \{i\}}$ とおく。各 $\omega \in D_{r+1}$ に対して、 \mathbb{Z} 線形写像 $\psi_S^{(\omega)}: \mathbb{Z}^{2r+2} \rightarrow \mathbb{Z}^d$ を次のように定める： $i \in [r]$ で $\omega = (\omega_j)_{j \in [r+1] \setminus \{i\}} \in \{0, 1\}^{[r+1] \setminus \{i\}}$ のときは

$$\psi_S^{(\omega)}(a_1^{(0)}, \dots, a_{r+1}^{(0)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{r+1}^{(1)}) := \left(\sum_{j \in [r] \setminus \{i\}} (s_j - s_i) a_j^{(\omega_j)} \right) + s_i a_{r+1}^{(\omega_{r+1})}$$

と定義し, $\omega = (\omega_i)_{i \in [r]}$ のときは

$$\psi_S^{(\omega)}(a_1^{(0)}, \dots, a_{r+1}^{(0)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{r+1}^{(1)}) := \sum_{j \in [r]} s_j a_j^{(\omega_j)}$$

と定義する. ρ を $0 < \rho < 1$ を満たす実数, N を正整数とする. このとき, 写像 $\lambda: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が (ρ, N, S) -擬ランダム測度であるとは, 元の個数が N 以上であるような整数の区間の直積として表される任意の $L \subset \mathbb{Z}^{r+1}$ および任意の $\Omega \subset D_{r+1}$ に対して

$$\left| \mathbb{E} \left(\prod_{\omega \in \Omega} \lambda \circ \psi_S^{(\omega)} \mid L \times L \right) - 1 \right| \leq \rho$$

が成り立つときという.

定義 3.2. d を正整数, S を \mathbb{Z}^d の有限部分集合とする. $0 \in S$ および $S = -S$ が成り立っており, 更に S が \mathbb{Z}^d を \mathbb{Z} 加群として生成するとき, S を標準形状とよぶ.

\mathbb{Z}^d の任意の有限部分集合に対してそれを含むような標準形状が存在するため, 任意の形状の星座の存在を証明するには標準形状のみを扱えば十分である. 次が多次元 Szemerédi 定理の相対化である.

定理 3.3 (相対多次元 Szemerédi 定理 [KMMSY, Theorem 5.4]). d を正整数とし, $S \subset \mathbb{Z}^d$ を標準形状とし, $r := \#S - 1 \geq d$ とおく. このとき, 任意の正の実数 $\delta > 0$ に対して正の実数 $\rho = \rho_0(S, \delta)$ および $\gamma = \gamma_0(S, \delta)$ が存在して以下が成立する. N を正整数, $\lambda: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を (ρ, N, S) -擬ランダム測度とする. 集合 $A \subset [-N, N]^d$ は次の 2 条件を満たすと仮定する:

1. (重み付き密度条件) $\mathbb{E}(\lambda \cdot \mathbf{1}_A \mid [-N, N]^d) \geq \delta$,
2. (Smallness 条件) $\mathbb{E}(\lambda^{r+1} \cdot \mathbf{1}_A \mid [-N, N]^d) \leq \gamma N$.

このとき, A は S 星座を含む.

自明な擬ランダム測度 $\lambda = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}^d}$ に対してこの定理を適用することにより定理 2.5 が系として得られる.

4 ハイパーグラフ除去補題

この節では Gowers や Rodl–Schacht–Tengen–Tokushige が多次元 Szemerédi 定理を導出する際に使用したハイパーグラフ除去補題および Conlon–Fox–Zhao によるその相対化について簡単に紹介する (相対ハイパーグラフ除去補題から同様の方法で相対多次元 Szemerédi の定理を導出することができる). この導出アプローチは Solymosi [So] が起源であり, Szemerédi の定理の導出と多次元 Szemerédi 定理の導出で本質的な差が発生しない, つまり元々の次元があまり問題にならないという利点がある. なお, 相対 Szemerédi 定理の Green–Tao によるオリジナルは幾分エルゴード理論的なアプローチによって証明された.

r を正整数とする. 有限集合 V に対して, $\binom{V}{r}$ を $\binom{V}{r} := \{e \in \mathfrak{P}(V) : \#e = r\}$ で定義する (\mathfrak{P} で幂集合を表す). このとき, V と $\binom{V}{r}$ の部分集合 $E \subset \binom{V}{r}$ の組 (V, E) のことを r ハイパーグラフとよぶ. 次がハイパーグラフ除去補題である.

定理 4.1 (ハイパーグラフ除去補題). 正整数 k と正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta_0(k, \varepsilon) > 0$ が存在して以下が成立する. H を頂点数 k の r ハイパーグラフとし ($r \in [k]$), r ハイパーグラフ G を任意に考えて, その頂点数を n とおく. もし G が高々 δn^k 個しか H と同型な部分ハイパーグラフを含まなければ, 高々 εn^r 個の辺を除去することによって H と同型な部分ハイパーグラフを含まないような G の部分ハイパーグラフを得ることができる.

この定理に至るまでには歴史があるがここではその紹介は割愛する². 最終的にハイパーグラフ除去補題を証明したのは Gowers [Go2] および Nagle–Rödl–Schacht–Skokan [RoSk1, RoSk2, NRS, RoSc1, RoSc2] である.

Tao [T1] は以下の形でハイパーグラフ除去補題の証明を短くまとめており, この後に述べる相対化はこの version を元に行われる. (J, E) が r ハイパーグラフで各 $j \in J$ に対して V_j が空でない有限集合であるとき, $V = ((J, E); (V_j)_{j \in J})$ を r ハイパーグラフ系とよぶ. J の部分集合 e に対して $V_e := \prod_{j \in e} V_j$ と略記する.

定理 4.2. 正整数 k と正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta_0(k, \varepsilon) > 0$ が存在して以下が成立する. $((J, E); (V_j)_{j \in J})$ を $\#J = k$ であるような r ハイパーグラフ系 ($r \in [k]$) として, 各 $e \in E$ 毎に $E_e \subset V_e$ を考える. もし

$$\mathbb{E} \left(\prod_{e \in E} \mathbf{1}_{E_e \times V_{J \setminus e}} \mid V_J \right) \leq \delta$$

が満たされるならば, ある $(E'_e)_{e \in E} \in \prod_{e \in E} \mathfrak{P}(V_e)$ が存在して, $\bigcap_{e \in E} (E'_e \times V_{J \setminus e}) = \emptyset$ かつ $\forall e \in E, \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_e \setminus E'_e} \mid V_e) \leq \varepsilon$ が成り立つ.

自明というわけではないが, 実は定理 4.2 から定理 4.1 を導出することができる. この定理の相対化を述べるために, 重み付きハイパーグラフの概念を導入する.

定義 4.3. $V = ((J, E); (V_j)_{j \in J})$ を r ハイパーグラフ系とする. g が V 上の重み付きハイパーグラフであるとは, g が関数 $g_e: V_e \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ の組 $g = (g_e)_{e \in E}$ であるときにいう.

g, g' を V 上の重み付きハイパーグラフとする. 任意の $e \in E$ に対して各点で $g_e \leq g'_e$ が成り立つとき, $g \leq g'$ と表す.

有限集合 e に対して, $\omega \in \{0, 1\}^e$ が $\omega = (\omega_j)_{j \in e}$ と成分表示され, 各 $j \in e$ に対して $x_j^{(0)}$ および $x_j^{(1)}$ が定まっているとき, 記号 $x_e^{(\omega)}$ で $(x_j^{(\omega_j)})_{j \in e}$ を略記しているものと約束する. また, $(0)_{j \in e}, (1)_{j \in e} \in \{0, 1\}^e$ をそれぞれ 0, 1 と表すこととし, 例えれば $x_e^{(0)} = (x_j^{(0)})_{j \in e}$, $x_e^{(1)} = (x_j^{(1)})_{j \in e}$ と理解する.

定義 4.4. $\rho > 0$ を正の実数, $V = ((J, E); (V_j)_{j \in J})$ を r ハイパーグラフ系 ($r \in \mathbb{Z}_{>0}$), $\nu = (\nu_e)_{e \in E}$ を V 上の重み付きハイパーグラフとする. また, $D(E) := \bigsqcup_{e \in E} \{0, 1\}^e$ とおく. このとき, ν が ρ 擬ランダムであるとは, 任意の $(n_\omega)_{\omega \in D(E)} \in \{0, 1\}^{D(E)}$ に対して

$$\left| \mathbb{E} \left(\prod_{e \in E} \prod_{\omega \in \{0, 1\}^e} \nu_e(x_e^{(\omega)})^{n_\omega} \mid (x_J^{(0)}, x_J^{(1)}) \in V_J \times V_J \right) - 1 \right| \leq \rho$$

が成り立つときという.

² 第 37 回代数的組合せ論シンポジウムの報告集の原稿には少し記述した.

定義 3.1 は上記の擬ランダム性に由来する.

定理 4.2 は次のように一般化される (証明にはハイパーグラフ除去補題を道具として利用する必要がある). $\pi_e: V_J \rightarrow V_e$ を自然な全射とするとき, $x \in V_J$ に対して $x_e = \pi_e(x)$ と略記する.

定理 4.5 (相対ハイパーグラフ除去補題 [CFZ], [T2]³). 正整数 k および正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta_0(k, \varepsilon) > 0$ および $\rho = \rho_0(k, \varepsilon) > 0$ が存在して以下が成立する. $V = ((J, E); (V_j)_{j \in J})$ を $\#J = k$ であるような r ハイパーグラフ系 ($r \in [k]$) とする. ν を ρ 擬ランダムな V 上の重み付きハイパーグラフとし, g を $g \leq \nu$ を満たすような V 上の重み付きハイパーグラフとする. もし

$$\mathbb{E} \left(\prod_{e \in E} g_e(x_e) \mid x \in V_J \right) \leq \delta$$

が満たされるならば, ある $(E'_e)_{e \in E} \in \prod_{e \in E} \mathfrak{P}(V_e)$ が存在して, $\bigcap_{e \in E} (E'_e \times V_{J \setminus e}) = \emptyset$ かつ $\forall e \in E, \quad \mathbb{E}(g_e \cdot \mathbf{1}_{V_e \setminus E'_e} \mid V_e) \leq \varepsilon$ が成り立つ.

5 擬ランダム測度の構成と密度計算

適切な擬ランダム測度を構成し, 相対多次元 Szemerédi 定理を適用することによって定理 1.9 が示される. K を $[K : \mathbb{Q}] = d$ であるような数体とする. また, 整基底 ω を任意にとって同型 $\mathcal{O}_K \simeq \mathbb{Z}^d$ を固定する. $S \subset \mathcal{O}_K$ を標準形状とする. 利用される擬ランダム測度は

$$\lambda(\alpha) = \frac{\varphi_K(W)}{W^d} \cdot \frac{\kappa \cdot \Lambda_{R,\chi}(W\alpha + b)^2}{c_\chi \cdot \log R}$$

という形の関数である ($\alpha \in \mathcal{O}_K$). ここで, 2つのメインパラメーター $w > 0, M \in \mathbb{Z}_{>0}$ があり, W は $W = \prod_{p \in \mathcal{P}_{\leq w}} p$ と定義される. R は M と S に依存して定義される実数で, χ は support が $[-1, 1]$ に含まれるような C^∞ 級の非負値関数であって, $\chi(0) = 1$ および $\chi \leq 1$ を満たすものとする. $c_\chi := \int_0^\infty \chi'(x)^2 dx$. φ_K は K に対する Euler totient 関数. b は W と互いに素な \mathcal{O}_K の元. κ は Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ の $s = 1$ における留数. \mathcal{O}_K のイデアル \mathfrak{a} に対して, $\Lambda_{R,\chi}(\mathfrak{a})$ は

$$\Lambda_{R,\chi}(\mathfrak{a}) := \log R \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} \mu_K(\mathfrak{b}) \chi \left(\frac{\log N(\mathfrak{b})}{\log R} \right)$$

と定義される. μ_K は K に対する Möbius 関数で $N(\mathfrak{b})$ はイデアル \mathfrak{b} のノルム. そして, $\Lambda_{R,\chi}(\alpha) := \Lambda_{R,\chi}(\alpha \mathcal{O}_K)$ である.

$\rho > 0$ を任意にとる. ρ と S に依存して w を十分大きくとり, その後 M を w, ρ, χ, S に依存して十分大きくとれば λ は $(\rho, \lceil M/W \rceil, S)$ -擬ランダム測度であることが証明される. その証明は W -trick に基づいた Goldston–Yıldırım 型漸近公式を解析的整数論の技法で示すという形でなされる.

³Tao の示した定理はより多くの条件が課されていたが, Conlon–Fox–Zhao によって条件が緩められた.

さて、ノルムが与えられた数以下となるような単項素イデアルの個数の漸近挙動は代数的整数論の分野における古典として知られているが、数の幾何学を用いることによって $\mathcal{O}_K \simeq \mathbb{Z}^d$ において原点から一定距離以内にある互いに非相伴な素元たちのカウンティングが適切に実行可能な \mathcal{O}_K^\times -基本領域を見出すことができる（我々はこれを“NL-compatible”な基本領域とよんでいる [KMMSY, Proposition 4.11]）。このカウンティングに上手く鳩の巣原理を用いた議論を組み合わせることによって、或る b に対して相対多次元 Szemerédi 定理で要請される重み付き密度条件をパスすることができる。

6 Szemerédi 性

Green-Tao の定理およびその多次元化である星座定理は若干の一般化が可能であり、Szemerédi 型の定理に拡張することができる。この拡張は一部の先行研究においては簡単のために証明が記述されないことがあったが、我々の論文では元の星座定理とその Szemerédi 型で議論の複雑さがあまり変わらないように種々の議論を洗練し、以下の定理 6.5 の証明も省略することなく詳述した。

定理 6.1 (素数 Szemerédi 定理). 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\delta > 0$ に対して或る $N_0(k, \delta) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して、以下が成立する：整数 $N \geq N_0(k, \delta)$ と集合 $A \subset \mathcal{P} \cap [N]$ について、 $\#A \geq \delta \cdot \#(\mathcal{P} \cap [N])$ であれば A は長さ k の等差数列を含む。

この定理から de la Vallée Poussin による算術級数の素数定理と組み合わせることにより以下の系を得ることができる。

系 6.2. a, b を互いに素な正整数とする。このとき、公差が a で初項が b であるような無限等差数列に含まれるような素数のみで構成される任意の長さの等差数列が存在する。

定理 6.3 (Gauss 素数 Szemerédi 定理). 任意の $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の有限部分集合 S と $\delta > 0$ に対して或る $N_0(S, \delta) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して、以下が成立する：整数 $N \geq N_0(S, \delta)$ と集合 $A \subset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})} \cap \mathbb{Z}[\sqrt{-1}](N)$ について、 $\#A \geq \delta \cdot \#(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})} \cap \mathbb{Z}[\sqrt{-1}](N))$ であれば A は S 星座を含む。ここで、 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}](N) := \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] : |a|, |b| \leq N\}$ 。

実は Tao は [T2] において数体の素元星座定理だけではなく、Green-Tao の定理の次の形の多次元化の成立も予想していた。現在では 3 チームによって独立に解決されている。また、 \mathcal{P}^d が任意の形状の星座を含むことは Green-Tao の定理から即座に従うため、Szemerédi 型の主張を考えて初めて非自明な拡張となることに注意。

定理 6.4 (素数多次元 Szemerédi 定理 [TZ, FZ, CMT]). 任意の $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, \mathbb{Z}^d の有限部分集合 $S, \delta > 0$ に対して或る $N_0(d, S, \delta) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して、以下が成立する：整数 $N \geq N_0(d, S, \delta)$ と集合 $A \subset (\mathcal{P} \cap [N])^d$ について、 $\#A \geq \delta \cdot \#(\mathcal{P} \cap [N])^d$ であれば A は S 星座を含む。

次が数体の素元星座定理の Szemerédi 化である。

定理 6.5 (数体の素元 Szemerédi 定理 [KMMSY]). K を数体とし、 \mathcal{O}_K をその整数環、 \mathcal{P}_K を \mathcal{O}_K の素元全体の集合とする。任意の \mathcal{O}_K の有限部分集合 S と $\delta > 0$ に対して或る

$N_0(K, S, \delta) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して、以下が成立する：整数 $N \geq N_0(K, S, \delta)$ と集合 $A \subset \mathcal{P}_K \cap \mathcal{O}_K(N)$ について、 $\#A \geq \delta \cdot \#(\mathcal{P}_K \cap \mathcal{O}_K(N))$ であれば A は同伴なペアを含まないような S 星座を含む。ここで、 K の整基底 ω を任意にとって固定し、同型 $\mathcal{O}_K \simeq \mathbb{Z}^d$ を通して $([-N, N] \cap \mathbb{Z})^d \subset \mathbb{Z}^d$ に対応する集合を $\mathcal{O}_K(N)$ と表している⁴。ここで、 $d = [K : \mathbb{Q}]$ 。

更に、 S が標準形状であれば、そのような S 星座の個数 \mathcal{N} は

$$\mathcal{N} \gg_{\omega, S, \delta} \frac{N^{d+1}}{(\log N)^{\#S}}$$

を満たす。

この定理の証明においては、 \mathcal{P}_K に対して相対的に密な集合 A に対して NL-compatible な \mathcal{O}_K^\times -基本領域 \mathcal{D} であって $A \cap \mathcal{D}$ が $\mathcal{P}_K \cap \mathcal{D}$ において相対的に密となるようなものが存在することを証明することが 1 つの鍵となる。

7 二次形式による素数表現と星座定理

$p = x^2 + y^2$ の形の奇素数は $p \equiv 1 \pmod{4}$ を満たすものなので、算術級数定理によってそのような素数は無限に存在する。より一般の 2 元 2 次形式についてはこのような単純な合同条件が常にあるわけではないが、Weber は次の定理を証明している。

定理 7.1 (Weber [W]). $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ を原始的 2 次形式とする。また、判別式 $D_F = b^2 - 4ac$ は完全平方数ではないと仮定し、 F は負定値ではないとする。このとき、

$$\#\{p \in \mathcal{P} : \exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ s.t. } F(x, y) = p\} = \infty$$

が成り立つ。

$F(x, y) = p$ なる p の分布ではなく、 (x, y) の分布に興味を移して、数体の素元星座定理の枠組みを応用することにより、我々は次の結果を得た。これは純粋に有理素数に関する新定理と考えることができる。

定理 7.2 (2 次形式の素数表現に関する Szemerédi 定理 [KMMSY]). $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ を原始的 2 次形式とする。また、判別式 $D_F = b^2 - 4ac$ は完全平方数ではないと仮定し、 F は負定値ではないとする。このとき、 $F^{-1}(\mathcal{P})$ の相対的に密な部分集合 A は \mathbb{Z}^2 に対する任意の形状の星座を含む。更に、各星座上に F を制限すると单射であるようにできる。

2 次体の整環などに関する追加の議論は必要であるが、数体の議論には基づいているため、より一般の形式に拡張するのは現状難しい（3 次以上であってもノルム形式についてはできている）。例えば、次の疑問は肯定的に成り立つであろうか？

疑問 7.3. 集合 $\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x^3 + y^3 + z^3 \in \mathcal{P}\}$ は \mathbb{Z}^3 に対する任意の形状の星座を含むだろうか。

なお、Heath-Brown [HB2] が $p = x^3 + 2y^3$ の形の素数の無限性を証明している。

⁴ なので、厳密には $N_0(K, S, \delta)$ は ω の取り方に依存する。

謝辞

講演の機会を与えて下さったシンポジウム責任者の森脇淳先生(京都大学), 数論のプログラム責任者である安田正大先生(北海道大学), 水野義紀先生(徳島大学)に心より感謝申し上げます.

参考文献

- [CFZ] D. Conlon, J. Fox, Y. Zhao, *A relative Szemerédi theorem*, Geom. Funct. Anal. **25** (2015), 733–762.
- [CMT] B. Cook, Á. Magyar, T. Titichetrakun, *A multidimensional Szemerédi theorem in the primes via combinatorics*, Ann. Comb. **22** (2018), 711–768.
- [ET] P. Erdős, P. Turán, *On some sequences of integers*, J. London Math. Soc. **11** (1936), 261–264.
- [FZ] J. Fox, Y. Zhao, *A short proof of the multidimensional Szemerédi theorem in the prime*, Amer. J. Math. **137** (2015), 1139–1145.
- [F] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204–256.
- [FK] H. Furstenberg, Y. Katznelson, *An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations*, J. Analyse Math. **34** (1978), 275–291.
- [Go1] W. T. Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), 465–588.
- [Go2] W. T. Gowers, *Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem*, Ann. of Math. **166** (2007), 897–946.
- [Gr] B. J. Green, *Roth's theorem in the primes*, Ann. Math. **161** (2005), 1609–1636.
- [GT] B. J. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. of Math. **167** (2008), 481–547.
- [HB1] D. R. Heath-Brown, *Three primes and an almost-prime in arithmetic progression*, J. London Math. Soc. **23** (1981), 396–414.
- [HB2] D. R. Heath-Brown, *Primes represented by x^3+2y^3* , Acta. Math. **186** (2001), 1–84.
- [KMMSY] W. Kai, M. Mimura, A. Munemasa, S. Seki, K. Yoshino, *Constellations in prime elements of number fields*, preprint, arXiv:2012.15669.

- [NRS] B. Nagle, V. Rödl, M. Schacht, *The counting lemma for regular k -uniform hypergraphs*, Random Structures Algorithms **28** (2006), 113–179.
- [R] K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 104–109.
- [RoSc1] V. Rödl, M. Schacht, *Regular partitions of hypergraphs: regularity lemmas*, Combin. Probab. Comput. **16** (2007), 833–885.
- [RoSc2] V. Rödl, M. Schacht, *Regular partitions of hypergraphs: counting lemmas*, Combin. Probab. Comput. **16** (2007), 887–901.
- [RoSk1] V. Rödl, J. Skokan, *Applications of the regularity lemma for k -uniform hypergraphs*, Random Structures Algorithms **25** (2004), 1–42.
- [RoSk2] V. Rödl, J. Skokan, *Applications of the regularity lemma for uniform hypergraphs*, Random Structures Algorithms **28** (2006), 180–194.
- [RSTT] V. Rödl, M. Schacht, E. Tengan, N. Tokushige, *Density theorems and extremal hypergraph problems*, Israel J. Math. **152** (2006), 371–380.
- [So] J. Solymosi, *Note on a generalization of Roth’s theorem*, Discrete and Computational Geometry, 825–827, Algorithms Combin., **25**, Springer, Berlin, 2003.
- [Sz1] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **20** (1969), 89–104.
- [Sz2] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245.
- [T1] T. Tao, *A variant of the hypergraph removal lemma*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), 1257–1280.
- [T2] T. Tao, *The Gaussian primes contain arbitrarily shaped constellations*, J. Anal. Math. **99** (2006), 109–176.
- [TZ] T. Tao, T. Ziegler, *A multi-dimensional Szemerédi theorem for the primes via a correspondence principle*, Israel J. Math. **207** (2015), 203–228.
- [VdC] J. G. van der Corput, *Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten*, Math. Ann. **116** (1939), 1–50.
- [VdW] B. L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen vermutung*, Nieuw. Arch. Wisk. **15** (1927), 212–216.
- [W] H. Weber, *Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist*, Math. Ann. **20** (1882), 301–329.

アフィン旗多様体の幾何学とその広がり *

加藤 周 †

2021 年 10 月 31 日

概要

アフィン旗多様体の幾何学と半無限旗多様体の幾何学、そしてそれらの旗多様体の量子 K 群とのつながりについての最近の我々の結果 ([15]) について概説する。

Introduction

複素数体上の半単純リー代数や半単純代数群の理論において体を 1 次元の対象、つまり 1 変数の多項式環や(完備)局所体に取り換えることは 1960 年代以降盛んに考えられてきた。また、複素数体上の半単純代数群の極大な射影的等質空間である旗多様体の幾何学はそれ単体としても表現論を記述する言葉としても有用であつたためそちらについても体を複素数体から 1 次元的な対象へと拡大して考えることが自然である。これは、半単純代数群 G とその Borel 部分群(上三角部分群) B に対して、 $\mathcal{K} = \mathbb{C}((z)), \mathbb{Q}_p$ などとおいて概ね

$$\mathcal{B}(\mathcal{K}) := G(\mathcal{K})/B(\mathcal{K})$$

のような対象を考えることに対応する。

このような集合 $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ をアフィン旗多様体と呼んで良いと個人的には思うが、実際に 1980 年代から盛んに研究されているいわゆるアフィン旗多様体はこういったものではない。有限次元分の違いを除いていわゆるアフィン旗多様体は $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]], \mathbb{Z}_p$ を \mathcal{K} の整数環として

$$\text{Gr}_G := G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$$

のように表せる集合に多様体、もしくはそれに類似した構造を入れたものになっている(実際にはこの集合上の有限次元旗多様体によるファイバー束になっている)。簡単のため $\mathcal{K} = \mathbb{C}((z))$ で考えると包含図式

$$\begin{array}{ccc} & B(\mathcal{K}) & \\ (B(\mathcal{K}) \cap G(\mathcal{O})) & \swarrow \quad \searrow & \\ & G(\mathcal{O}) & \end{array}$$

のどの埋め込みも余次元は無限であり、その状況は $G(\mathcal{K})$ の作用で適当に捻っても変わらないので、例えばこのふたつが同じであると主張するには無理があるし、同値であると主張するには根拠が必要になってくる。

このような状況になっている理由は大きく分けて 3 つあると考えられる。ひとつには半単純リー代数の自然な 1 変数化 (+ 中心拡大) であるアフィン・リー代数をカツ・ムッディーリー代数とみなしたときの上三角

* MSC2010: 14N15, 20G44

† 京都大学大学院理学研究科 · 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 E-mail: syuchan@math.kyoto-u.ac.jp

部分代数が、半単純リー代数の上三角部分の 1 変数化から見るとずれているためそれをもとに定義したアフィン旗多様体は上のようなものとは全く違う自然なものを与えること、もうひとつにはそのように定義された旗多様体は p -進代数群（代数群の p -進数体値点のなす群）のスムース表現の研究と相性が良いように見受けられること、そして最後に上の普通でない意味でのアフィン旗多様体を集合以外の何がしかの実体として捉える方法が十分に整備されていなかったことが挙げられる。

さて、新谷 [30]、Casselmann-Shalika [4] らによる半単純 p -進代数群における球関数と Whittaker 関数の対応は上の 2 種類のアフィン旗多様体 Gr_G と $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の上の構造物をつなぐものと見做せた。このことは複数の種類のアフィン旗多様体の上の構造物には強い結びつきがあることを示唆する。実際、 Gr_G と $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の幾何学の間の関係は間違いなく深いことは分かっていた ([6]) が、 $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ をなんだと思うのが良いのかが十分理解されていなかったためにそのような結びつきをまとめあげるような結果を出すことが難しかった。こういった事情から集合 $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ を適切な意味で多様体とみなしてその上の幾何学を展開し、これまでに有限次元近似や Gr_G の幾何学によって得られていた結果を自然に取り込むこと、そしてそれにより有限次元の幾何学的表現論の結果の正しいループ化を行うことはひとつの基本的な問題と見なされてきた。この問題に対してここ数年アプローチを行った結果、少なくとも $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ が（適切な意味で）きちんと存在して関連するいくつかの予想を解決したり既存の構成を説明するだけの力を持っていることは示すことができた。

ここでは、上記のような状況の中で [15] の主定理までを簡潔に纏めておく。講演では他の話を取り込みつつ話そうとしたが、いろいろと失敗した気がするので、そこは割愛する。実はこの話は似たような文章を他にも書いた ([19]) のだが、それとは書き方をちょっと変えてみた。

1 旗多様体とその同変 K 群

この節に書かれていることについてきちんと知りたい向きは、Chriss-Ginzburg [5] を見るのが良いと思う。

G を单連結かつ連結な複素数体上の単純代数群とし、 B をその Borel 部分群、 T を極大トーラスとする。このとき、

$$X := G/B$$

とおき G の旗多様体と呼んだ。 $W := N_G(T)/T$ を G のワイル群とし、 $w \in W$ に対して $\dot{w} \in N_G(T)$ というリフトを適切に決めると Bruhat 分解

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B\dot{w}B$$

から

$$X = \bigsqcup_{w \in W} B\dot{w}B = \bigsqcup_{w \in W} \mathbb{O}_w$$

という B -軌道分解が決まり、 $X_w := \overline{\mathbb{O}_w}$ とおくと Schubert 多様体が決まる。また、 B^- を $B \cap B^- = T$ となるような G の別の Borel 部分群とすると $\mathbb{O}^v := B^- \dot{v} B / B$ ($v \in W$)、 $X^v := \overline{\mathbb{O}^v}$ などとして X の opposite Schubert 多様体が決まる。 W の Bruhat 順序を

$$w \leq v \Leftrightarrow X_w \subset X_v \quad (\Leftrightarrow X^v \subset X^w) \tag{1.1}$$

という Schubert 多様体の間の包含関係によって定める。 X^w たちと X_v たちは横断的に交わり、その結果交叉として定まる Richardson 多様体

$$X_w^v := X_w \cap X^v \quad (\text{ただし } v \leq w \text{ でなければこれは空集合})$$

の特異点の局所的な構造は Schubert 多様体の特異点の局所的な構造と同定できる。

\mathbb{X}^* を T の(代数的)指標群、 \mathbb{X}_* をその \mathbb{Z} -双対(T の余指標群)とする。このとき、 $\lambda \in \mathbb{X}^*$ を自然に B の 1 次元表現に持ち上げて

$$\mathcal{O}_X(\lambda) := G \times^B (-\lambda) \longrightarrow G/B = X$$

を対応する直線束とする。等質性から $\mathcal{O}_X(\lambda)$ は自然に正則直線束と見做せ、以下が成立:

Theorem 1.1 (Borel-Weil). $r = \dim T$ のとき $\mathbb{X}_+^* = \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_i$ となるような \mathbb{Z} -線型独立な $\varpi_1, \dots, \varpi_r \in \mathbb{X}^*$ (G の基本ウェイトという) が取れ、 $\lambda \in \mathbb{X}^*$ に対して

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(\lambda))^* \cong \begin{cases} L(\lambda) & (\lambda \in \mathbb{X}_+^*) \\ \{0\} & (\text{else}) \end{cases}$$

が成立する。ただし、 $L(\lambda)$ は有限次元既約 G -加群であって B -固有ベクトルで T が λ を通じて作用するようなものを持つもの(このような $L(\lambda)$ は同型を除いて唯一に定まる)。

さて、この状況下で

$$X \hookrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(L(\varpi_i)^*) \quad (1.2)$$

という自然な埋め込みが存在して、 $\mathcal{O}_X(\varpi_i)$ とは (1.2)において i 番目の直積因子の $\mathcal{O}(1)$ を引き戻したものと同一視できる。

$E \subset G$ を閉部分群として、 X の E -同変 K 群 $K_E(X)$ を

$$\frac{\bigoplus_{\mathcal{F}: E\text{-作用付き代数的ベクトル束}} \mathbb{Z}[\mathcal{F}]}{\{[\mathcal{F}] - [\mathcal{F}_0] - [\mathcal{F}_1] \mid E\text{-作用付き单完全系列 } 0 \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow 0\}} \quad (1.3)$$

と定める。このとき、 E の任意の表現は 1 点上の E -同変ベクトル束であるので、(外部)テンソル積により (1.3) の両方の項、結果として $K_E(X)$ へと作用する。特に E の表現環 $R(E) := K_E(\text{pt})$ が $K_E(X)$ へと作用する。構成より E -同変ベクトル束のテンソル積は $K_E(X)$ に $[\mathcal{O}_X]$ を単位元とする環構造を導く。また、 X が smooth な射影的代数多様体であるので任意の X 上の E -同変連接層は長さ有限のベクトル束による分解を持ち、従って $K_E(X)$ は X 上の E -同変連接層の類を全て含む。

X 上の G -同変ベクトル束は X が等質空間であったことから $B/B \in X$ でのファイバー(B の表現)のデータのみで決まる。特に $K_G(X) \cong R(T)$ 。従って G -作用を一部分忘れて T -作用にする写像

$$K_G(X) \longrightarrow K_T(X)$$

が定まる。これと、先に述べた T の表現環 $R(T) = \mathbb{Z}[\mathbb{X}^*]$ のテンソル積作用を組み合わせて

$$R(T) \otimes K_G(X) \longrightarrow K_T(X)$$

という写像が構成できるが、これは全射準同型になる。具体的には

Theorem 1.2 (Atiyah-Hirzebruch, Pittie-Steinberg, Demazure, Joseph). 次の同型が存在し、特に $K_T(X)$ は $R(T)$ 加群として自由になる:

$$\bigoplus_{w \in W} R(T)[\mathcal{O}_{X_w}] \cong K_T(X) \cong R(T) \otimes_{R(G)} K_G(X) \cong R(T) \otimes_{R(T)^W} R(T)$$

ただし、最後の同型は $R(G) = R(T)^W$ による。

B の既約有理表現と T の既約有理表現は一致し、定理 1.2 を鑑みると $K_T(X) \cong K_B(X)$ が成立する。さて、各 $1 \leq i \leq r$ に対して ϖ_i に対応する単純ルート $\alpha_i \in \mathbb{X}^*$ 及び対応する鏡映 $s_i \in W$ が決まり、 $\{s_i\}_{i=1}^r$ が W の Coxeter 群としての構造を与えた。また、 $B \subset P_i \subset G$ という部分群で、 $P_i/B \cong \mathbb{P}^1$ となるようなものが $P_i/B \subset X$ が X_{s_i} という Schubert 多様体を定めるように取れる（単純ルート α_i に対応する極小放物型部分群）。これを用いて

$$\pi_i : P_i \times_B X \longrightarrow X$$

という自然なファイバー束を構成し、 $[\mathcal{E}] \in K_B(X)$ に対して $\text{infl}_i \mathcal{E}$ を X 上の B -同変連接層 \mathcal{E} の P_i -作用による $P_i \times_B X$ への持ち上げとする。このとき、 π_i は P_i -同変かつ射影的なので

$$[\mathcal{E}] \mapsto \sum_{j \geq 0} (-1)^j [\mathbb{R}^j(\pi_i)_* \text{infl}_i \mathcal{E}]$$

は $K_T(X)$ の自己準同型を定める。これを Demazure 作用素といい、 \mathcal{D}_i で表す。

Corollary 1.3 (Demazure 指標公式の系).

$$K_G(X) = \{\xi \in K_T(X) \mid \mathcal{D}_i(\xi) = \xi, \quad 1 \leq \forall i \leq r\}.$$

2 アフィン・グラスマン多様体とアフィン・旗多様体及びその同変 K 群

この節に書かれていることについてきちんと知りたい向きは、Kumar [22] を見るのが良いと思う。そこに書かれていないことに関しては柏原-Shimozono [13]、Lam-Schilling-Shimozono [24]あたりを見ることをお薦めする。

さて、同様のことの（通常の意味での）アフィン版を考える。そのためには

$$G((z)) := G(\mathbb{C}((z))), \quad G[[z]] := G(\mathbb{C}[[z]]), \quad G[z] := G(\mathbb{C}[z]), \quad G[z^{-1}] := G(\mathbb{C}[z^{-1}])$$

などとおく。また、

$$\text{ev}_0 : G(\mathbb{C}[[z]]) \longrightarrow G, \quad \text{ev}_\infty : G[z^{-1}] \longrightarrow G$$

という evaluation map を用いて

$$\mathbf{I} := \text{ev}_0^{-1}(B), \quad \mathbf{I}^- := \text{ev}_\infty^{-1}(B^-)$$

という部分群（岩堀部分群）を考える。これらを用いて

$$\text{Fl}_G := G((z))/\mathbf{I}, \quad \mathbf{Fl}_G := G((z))/\mathbf{I}^-$$

と定め、各々 thin/thick アフィン旗多様体と呼ぶ。実は、 $G((z))$ には Kac-Moody 群の構成に倣う形で 1 次元の \mathbb{C}^\times による中心拡大及び z をスカラー倍する \mathbb{C}^\times の外部作用が定まるが、そこも \mathbf{I} や \mathbf{I}^- へと吸収させる形で

$$\mathbb{C}^\times \ltimes G((z)) \ltimes \mathbb{C}^\times \tag{2.1}$$

といういわゆる（極大）カツツ・ムッディー群が Fl_G および \mathbf{Fl}_G に自然に作用する。この状況のもとで $\mathbb{T} := \mathbb{C}^\times \times T \times \mathbb{C}^\times$ はカツツ・ムッディー群の極大トーラスを与え、その指標群 $\mathbb{Z} \times \mathbb{X}^* \times \mathbb{Z}$ の部分モノイド

$$\mathbb{Z}\delta \times \sum_{i=0}^r \mathbb{Z}_{\geq 0} \Lambda_i \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{X}^* \times \mathbb{Z}$$

の元 Λ とカツツ・ムッディー群の \mathbf{I} -有限既約可積分表現 $L(\Lambda)$ が 1 対 1 に対応する^{*1}。このとき、

$$\mathrm{Fl}_G := G((z))/\mathbf{I} \hookrightarrow \prod_{i=0}^r \mathbb{P}(L(\Lambda)^\vee)$$

という閉埋め込みがある、というのが有限次元の場合と同様に成り立つ。ただ、 $\Lambda \notin \mathbb{Z}\delta$ あれば必ず $\dim L(\Lambda) = \infty$ となってしまうので $L(\Lambda)^\vee$ という次数成分ごとの双対をとる制限双対と単純に線形空間としての双対 $L(\Lambda)^*$ は異なる。また、 $L(\Lambda)$ の \mathbb{T} -指標が適切な意味で上に有界であることからこの双対は $L(\Lambda)^\vee$ の次数成分に関する完備化と同一視される。このようにすると

$$\mathrm{Fl}_G := G((z))/\mathbf{I} \hookrightarrow \prod_{i=0}^r \mathbb{P}(L(\Lambda)^\vee) \hookrightarrow \prod_{i=0}^r \mathbb{P}(L(\Lambda)^*)$$

のように合成埋め込みができるが、最右辺の一般元には \mathbf{I} や $G[[z]]$ の作用は(そのまま考えると無限和が出現するために)定義できず、 $G(\mathbb{C}[z])$ の作用までしか定義できない。ただし、反対に $G(\mathbb{C}[z])$ の作用を延長する形で $G(\mathbb{C}((z^{-1})))$ は作用できてしまう。こういった理由から、 $z \mapsto z^{-1}$ という twist を行うと

$$\mathrm{Fl}_G \hookrightarrow \mathbf{Fl}_G \hookrightarrow \prod_{i=0}^r \mathbb{P}(L(\Lambda_i)^*) \tag{2.2}$$

という埋め込みが存在する。

このとき、 $\gamma \in \mathbb{X}_*$ に対して

$$\gamma : \mathbb{C}^\times = \mathrm{Spec} \mathbb{C}[z^{\pm 1}] \rightarrow T \subset G$$

によって $\gamma \in G(\mathbb{C}[z^{\pm 1}]) \subset G((z))$ と見なすと、 $G((z))$ の Bruhat 分解は

$$G((z)) = \bigsqcup_{w \in W, \gamma \in \mathbb{X}_*} \mathbf{I} w \gamma \mathbf{I}, \quad G((z)) = \bigsqcup_{w \in W, \gamma \in \mathbb{X}_*} \mathbf{I} w \gamma \mathbf{I}^-$$

となる(後者は Birkhoff 分解と呼ぶべきかもしれない)。

$$N_G(T)\mathbb{X}_* = N_{G((z))}(T) \longrightarrow N_{G((z))}(T)/T =: W_{\mathrm{af}}$$

となり、最右辺を G のアフィン・ワイル群と呼ぶ。以下、 $\beta \in \mathbb{X}_*$ の元を W_{af} の元とみなす際に識別しやすくするため t_β と記すことがある。

このとき、 $w \in W_{\mathrm{af}}$ のリフトを $N_{G((z))}(T)$ から適当にとり \dot{w} として

$$\mathrm{Fl}_w := \overline{\mathbf{I} \dot{w} \mathbf{I} / \mathbf{I}}, \quad \mathrm{Fl}^w := \overline{\mathbf{I}^- \dot{w} \mathbf{I} / \mathbf{I}} \subset \mathrm{Fl}_G$$

とおき、アフィン・旗多様体の Schubert 多様体と呼ぶ。 Fl_w は有限次元アフィン空間の閉包という構造を持つが、 Fl^w には非特異な空間の閉包という解釈を与えることはできない。

Theorem 2.1 (軌道の包含関係). W_{af} は W の単純鏡映系 s_1, \dots, s_r に Λ_0 に対応する単純ルートによる鏡映 s_0 を加えたものを Coxeter 生成系とする Coxeter 群で、特に元の(Coxeter 生成系による)最短表示の長さ $\ell : W_{\mathrm{af}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 、及び以下で定義される Bruhat 順序 $<$ を持つ:

^{*1} ここで、 $T \subset \mathbb{T}$ に対応する引き戻しで $\Lambda_i \mapsto \varpi_i$ ($i \neq 0$)、 0 ($i = 0$) となるように添字を調整するのが伝統。なお、次数シフト δ に関しては別にどんな値にとってもリー代数として可積分性には影響しないが、可積分とは群の表現に持ち上がる指すので群 \mathbb{C}^\times の作用には持ち上がるということで整数値にしている。

- $w \in W_{\text{af}}$ が $\ell(w) = \ell$ を満たし、 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_\ell}$ ($i_1, \dots, i_\ell \in \{0, 1, \dots, r\}$) という最短表示を持つとき、 $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq \ell$ という $\{1, 2, \dots, \ell\}$ の任意の部分列に対して

$$s_{i_{j_1}} s_{i_{j_2}} \cdots s_{i_{j_k}} < w.$$

このとき、 $w, v \in W_{\text{af}}$ に対して $w < v$ は以下のいずれかと同値：

$$\text{Fl}_w \subset \text{Fl}_v, \quad \text{Fl}^v \subset \text{Fl}^w.$$

さらに、 $w, v \in W$ の場合には前節 (1.1) の定義と一致する。

埋め込み (2.2) の最右辺には $\mathbf{I}^- \subset G[z^{-1}] \subset G[\![z^{-1}]\!]$ が作用するので、 \mathbf{I}^- の $G[\![z^{-1}]\!]$ での Zariski 閉包 \mathbf{I}^{op} を考えると

$$\text{Fl}^w := \mathbf{I}^{\text{op}} \cdot \text{Fl}^w \subset \prod_{i=0}^r \mathbb{P}(L(\Lambda_i)^*)$$

は無限次元アフィン空間の閉包という構造を自然にもつ。これらのものを

$$\pi_0 : \prod_{i=0}^r \mathbb{P}(L(\Lambda_i)^*) \longrightarrow \mathbb{P}(L(\Lambda_0)^*)$$

という射影で送ったものは自然に

$$\text{Gr}_w := \overline{\mathbf{I}^- w \mathbf{I} / G[\![z]\!]}, \quad \text{Gr}^w := \overline{\mathbf{I}^- w \mathbf{I} / G[\![z]\!]} \subset \text{Gr}_G$$

と同一視できる。

Remark 2.2. この同一視

$$\pi_0(\text{Fl}_G) \cong \text{Gr}_G \cong G((z))/G[\![z]\!]$$

であるが、 \mathbb{X}_* は G が (同じリーダー数を与える代数群として) 小さければ小さいほど大きくなるため G が単連結でなければ成立しないことが容易にわかる。単連結でない G に対してその余指標群を単連結の時と識別するため $\mathbb{X}_* \subset \mathbb{Y}$ と書くと、定義より $\pi_1(G) \cong \mathbb{Y}/\mathbb{X}_*$ だが、さらに $\pi_1(G)$ は $\{s_i\}_{i=0}^r$ の関係式を保つ W_{af} の自己同型に持ち上がり

$$W \ltimes \mathbb{Y} \cong \pi_1(G) \ltimes W_{\text{af}}$$

という同型を与える。特に、 $\pi_1(G)$ は $\mathbf{I} \subset G((z))$ というペアの自己同型を与えるが、 $G[\![z]\!]$ はこの自己同型で保たれない。そして単連結でない G に対しては $G((z))/G[\![z]\!]$ は (集合として) Gr_G の $\pi_1(G)$ による捻りたちの合併として与えられることが分かる。

この状況のもとで、 W_{af}^- を coset W_{af}/W の代表系 (唯一の長さ最短のもので取るのが通常) として

$$K_T(\text{Fl}_G) := \bigoplus_{w \in W_{\text{af}}} R(T)[\mathcal{O}_{\text{Fl}_w}], \quad K_T(\text{Gr}_G) := \bigoplus_{w \in W_{\text{af}}^-} R(T)[\mathcal{O}_{\text{Gr}_w}]$$

と定める。このように定めた空間が K -群と呼べることは Fl_G や Gr_G 上の T -同変な連接層であり、かつ適切な $w \in W_{\text{af}}$ に対して連接 $\mathcal{O}_{\text{Fl}_G}$ -加群 (もしくは連接 $\mathcal{O}_{\text{Gr}_w}$ -加群) とみなせるものの類を全て含むという形で示すことができる^{*2}。各 $\Lambda \in \mathbb{Z} \times \mathbb{X}^* \times \mathbb{Z}$ に対して、 Fl_G を (2.1) の等質空間と思うことにより X と同様に直線

^{*2} Fl_G や Fl_w は (w がそれなりに大きければ) 決していわゆる C^∞ -多様体とは見なせないことが知られている ([9])。この辺の定義が ad hoc に見えるのはその辺にも理由があり、別に筆者が飛び抜けて怠慢であるということだけが理由ではない。

束 $\mathcal{O}_{\mathrm{Fl}_G}(\Lambda)$ が決まる。ただし、この定義のもとでは $[\mathcal{O}_{\mathrm{Fl}_G}(\Lambda)] \notin K_T(\mathrm{Fl}_G)$ であるので、そのテンソル積作用を $K_T(\mathrm{Fl}_G)$ の環構造の一部とみなすことはできない（そもそも、 $K_T(\mathrm{Fl}_G)$ に直線束のテンソル積という形の積構造は入らない）。

さて、

$$\mathrm{Gr}_G \times \mathrm{Gr}_G \xleftarrow{\mathbf{q}} G((z)) \times \mathrm{Gr}_G \xrightarrow{\mathbf{p}} G((z)) \times_{G[[z]]} \mathrm{Gr}_G \xrightarrow{\mathbf{m}} \mathrm{Gr}_G$$

という図式を考える。写像 \mathbf{q} は $G((z)) \times \mathrm{Gr}_G$ の第一因子に関する商写像で、 \mathbf{p} は $G((z)) \times \mathrm{Gr}_G$ の第一因子に g 、第二因子に g^{-1} ($g \in G[[z]]$) として作用させた商を考える写像、最後の \mathbf{m} は $G((z))$ の積が誘導する写像とする。

このとき、 $G[[z]]$ -同変な Gr_G 上有限次元な台を持つ（適切な $w \in W_{\mathrm{af}}^-$ に対して連接 $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_w}$ -加群とみなせる）ような層 \mathcal{E}, \mathcal{F} に対して

$$\mathbf{q}^*(\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{F}) \cong \mathbf{p}^*(\mathcal{E} \tilde{\times} \mathcal{F})$$

となるような $G[[z]]$ -同変な $G((z)) \times_{G[[z]]} \mathrm{Gr}_G$ 上有限次元な台を持つような層 $\mathcal{E} \tilde{\times} \mathcal{F}$ が存在するので、これを用いて

$$\mathcal{E} \odot \mathcal{F} := \sum_{i \geq 0} (-1)^i [\mathbf{R}^i \mathbf{m}_*(\mathcal{E} \tilde{\times} \mathcal{F})] \in K_T(\mathrm{Gr}_G)$$

と定めることで、

$$K_G(\mathrm{Gr}_G) := \{\xi \in K_T(\mathrm{Gr}_G) \mid \mathcal{D}_i(\xi) = \xi, \quad 1 \leq \forall i \leq r\}.$$

の上の作用を定めることができる。ただし、 \mathcal{D}_i は前節の Demazure 作用素で、各 Gr_w が B -作用を持つことから $K_T(\mathrm{Gr}_G)$ にも X の場合と同様に定義することができる。このようにして定めた $K_G(\mathrm{Gr}_G)$ が G -同変な連接層のクラスの線形結合であることも示すことができる。

Proposition 2.3 (Bezrukavnikov-Finkelberg-Mirković [2]). 環 $K_G(\mathrm{Gr}_G)$ は可換な整閉整域である。

同様の作用を $K_T(\mathrm{Fl}_G)$ に対しても定義することができ、環ができるのだがそのように作った環は可換でないし、零因子も持ってしまう。

ここで $K_T(\mathrm{Gr}_G) \cong R(T) \otimes_{R(G)} K_G(\mathrm{Gr}_G)$ は係数環の拡大で、やはり整域になる。この状況で

$$\mathbb{X}_*^- := \{\beta \in \mathbb{X}_* \mid \langle \alpha_i, \beta \rangle < 0, \quad 1 \leq \forall i \leq r\}$$

とおき、 W_{af} の部分群 \mathbb{X}_* の部分モノイドとみなすと Gr_β ($\beta \in \mathbb{X}_*^-$) は G -安定となり

$$[\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_\beta}] \odot [\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_{\beta'}}] = [\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_{\beta+\beta'}}] \quad \beta, \beta' \in \mathbb{X}_*^-$$

を満たす。これにより

$$K_G(\mathrm{Gr}_G)_{\mathrm{loc}} := K_G(\mathrm{Gr}_G)[[\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_\beta}]^{-1} \mid \beta \in \mathbb{X}_*^-]$$

とおくと、 $K_G(\mathrm{Gr}_G)_{\mathrm{loc}}$ もやはり可換環となる。

3 半無限旗多様体とその同変 K 群

さて、半無限旗多様体を Introduction と同様に

$$G((z))/B((z)), \quad G((z))/T[[z]] \cdot N((z))$$

という点集合に対して適切に scheme(もしくは ind-scheme) の構造を入れたものとして定義したいのだが、前者は单なる旗多様体の arc scheme で特に \mathbf{I} -軌道の構造が単純であり考える余地のないものとなり、後者は Hausdorff な空間にできないことが知られている。そういう事情から半無限旗多様体として意味のある研究をするには

$$G((z)) / (T \cdot N((z)))$$

という集合を考えてそれに適切な位相や環付き空間の構造を入れるのが良いことは昔から知られていた。ただし、arc scheme でこの空間を捉えようとすると G/N の自然な部分コンパクト化である基本アフィン空間の arc scheme を考える必要があり、その構造層には幕零元が自然に出てくる ([28]) ことからこの捉え方はそのままでは正しくないことも分かっていた。前節で紹介したアフィン・グラスマン多様体の書き方は表現論の立場からの書き方であり、代数幾何的に

$$\mathbf{CAlg}_{\mathbb{C}}^{op} \ni R \mapsto G(R((z))) / G(R[[z]]) \in \mathbf{Sets}$$

のような特定の体上の可換環の圏から対応する点の集合を実現するような関手(適切な位相のもとでの層)を ind-scheme として最良近似(coarsely represent)するものと一致することは(成り立つが)完全に明らかではない ([1, 7])。

(1.2)、あるいは(2.2)の自然な類似である部分集合

$$G((z)) / (T \cdot N((z))) \hookrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(L(\varpi_i)^* \otimes \mathbb{C}((z))) \quad (3.1)$$

から定まる閉部分 ind-scheme $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ を構成すると、それが

$$\mathbf{CAlg}_{\mathbb{C}}^{op} \ni R \mapsto G(R((z))) / (T(R) \cdot N(R((z)))) \in \mathbf{Sets}$$

という関手(+ z に関する pole order filtration)から射を受けるような ind-scheme としての最良近似であることが(適切な意味で、ほぼ標数に依らずに)示せる ([18])。ここで ind-scheme になっているのはそもそも(3.1)の右辺のようなタイプの空間は z に関する pole order について制限をつけないと scheme と見なせないことから来ている。特に、(3.1)の右辺の z に関する pole order を直積成分ごとに制限して得られる $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ の部分集合は scheme になる。

埋め込み(3.1)の存在により、右辺の i 番目の直積成分の $\mathcal{O}(1)$ を引き戻すことで $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ やその閉部分 scheme Y 上に直線束 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}}(\varpi_i)$ や $\mathcal{O}_Y(\varpi_i)$ が定まる。 $\lambda = \sum_{i=1}^r m_i \varpi_i$ に対して

$$\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}}(\lambda) := \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}}(\varpi_i)^{\otimes m_i}$$

などとおく。

岩澤分解、Bruhat 分解、及び $\mathbb{X}_* \cong T((z)) / T[[z]]$ より

$$G((z)) = G[[z]]B((z)) = \bigsqcup_{w \in W} \mathbf{I}wB((z)) = \bigsqcup_{w \in W_{\text{af}}} \mathbf{I}wT[[z]]N((z)) = \bigsqcup_{w \in W_{\text{af}}} \mathbf{I}wTN((z))$$

となる。従って $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ の \mathbf{I} -軌道は W_{af} で添字づけられ、

$$\mathbf{Q}(w) := \overline{\mathbf{I}wTN((z)) / TN((z))} \subset \mathbf{Q}_G^{\text{rat}} \subset \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(L(\varpi_i)^* \otimes \mathbb{C}((z)))$$

がその Schubert 多様体となる。これらは $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ の閉部分 scheme とみなせる。以下、簡単のため $\mathbf{Q} := \mathbf{Q}(w_0)$ とおく。

Theorem 3.1 (Braverman-Finkelberg [3], [14, 18], K-Naito-Sagaki [20]). 任意の $\lambda \in \mathbb{X}^*$ と $w \in W_{\text{af}}$ に対して、次が成立する^{*3}:

$$\text{gch } H^i(\mathbf{Q}(w), \mathcal{O}_{\mathbf{Q}(w)}(\lambda)) \in \begin{cases} \in (\mathbb{Z}((q^{-1}))) \otimes R(T) & (i = 0, \lambda \in \mathbb{X}_+^*) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}.$$

Theorem 3.2 (Drinfeld, Lusztig [26], Finkelberg-Mirković [8]). 以下が成立する:

1. 各 $w \in W_{\text{af}}$ に対して、 $\mathbf{Q}(w)$ は無限次元であり、また $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ の中の余次元も無限である。
2. $\mathbb{X}_* \subset T((z))$ の元は集合

$$G((z))/(T \cdot N((z)))$$

に右から作用し、 $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ にも右から作用する。ここで $\gamma \in \mathbb{X}_*$ は $\mathbf{Q}(w)$ を $\mathbf{Q}(wt_\gamma)$ へと送る。

3. $w, v \in W_{\text{af}}$ に対して $\mathbf{Q}(ww_0) \subset \mathbf{Q}(vw_0)$ であることと、以下の各条件^{*4}は同値:

(a) 全ての $\beta \in \mathbb{X}_*$ で $1 \leq i \leq r$ に対して $\beta(\alpha_i) \gg 0$ となるものに対して $wt_\beta < vt_\beta$ 。

(b) 全ての $\beta \in \mathbb{X}_*$ で $1 \leq i \leq r$ に対して $\beta(\alpha_i) \ll 0$ となるものに対して $ww_0t_\beta < vw_0t_\beta$ 。

ただし、 $<$ は定理 2.1 で定まる W_{af} の Bruhat 順序。このとき $w \leq_{\frac{\infty}{2}} v$ と書くこととする。

$\mathbb{X}_*^+ := \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^\vee \subset \mathbb{X}_*$ と定める。ただし、 $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_r^\vee$ は単純ルートに対応する余ルート、つまり $\alpha_i^\vee(\varpi_j) = \delta_{ij}$ を満たすような \mathbb{X}_* の元のことである。このとき、 \mathbb{X}_* の順序 \leq を

$$\beta \leq \gamma \Leftrightarrow \gamma - \beta \in \mathbb{X}_*^+$$

で定める^{*5}。

この状況下において、 $R(T)$ -加群

$$K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}) := \left\{ \sum_{w \in W_{\text{af}}} a_w [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(w)}] \mid a_w \in R(T), \exists \beta_0 \in \mathbb{X}_* \text{ s.t. } a_{ut_\beta} = 0, \forall u \in W, \beta \not\leq \beta_0 \right\}$$

と定める。ただし、この定義の中での総和は形式的和とする。また、

$$K_H(\mathbf{Q}) := \left\{ \sum_{w \in W_{\text{af}}} a_w [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(w)}] \mid a_w \in R(T) \text{ s.t. } a_{ut_\beta} = 0, \forall u \in W, \beta \not\leq 0 \right\}$$

を $K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$ の部分 $R(T)$ -加群として定める。このとき、定理 3.2 から来る右 \mathbb{X}_* -移動を $K_T(\mathbf{Q})$ に適用すると $K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$ に線形位相空間としての 0 の開基を定める。

Remark 3.3. このように定めた K 群 $K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$ がどの程度正しい対象であるかという部分には議論の余地がある(とくに、この群に関する数値的結果のみを持って半無限旗多様体の K 群に関する何某かのこととしたと主張するのには抵抗を感じる)。しかし、以下のような意味で数値的に正しい対象である(もしくはその一部をなす)と考えられている: 一般に射影多様体 $\mathfrak{X} = \text{Proj } \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が与えられたとき、 $R\text{-gmod}$ をその有限生成次数付き R -加群のなす圏、 $R\text{-gmod}_{\text{nilp}}$ を $R\text{-gmod}$ の充満部分圏で十分高い次数部分は消えるようなものとするとき、 \mathfrak{X} の連接層の圏 $\text{Coh } \mathfrak{X}$ は

$$\text{Coh } \mathfrak{X} = \frac{R\text{-gmod}}{R\text{-gmod}_{\text{nilp}}}$$

^{*3} どのような指標になるかも分かっていて、Macdonald 多項式の特殊化が出てくるなどそれ自体の構造もあるが、省略する。

^{*4} ふたつの条件が互いに同値なことは $w_0^2 = 1$ と $ut_\beta = t_{u\beta}u$ ($u \in W, \beta \in \mathbb{X}_*$) より容易。

^{*5} この順序と $\mathbb{X}_* \subset W_{\text{af}}$ で誘導した Bruhat 順序は一般には一致しない。ただし、 $-\mathbb{X}_*$ (なお、これは \mathbb{X}_+^* とは異なる集合である) に制限すると一致する。また、実は $\mathbb{X}_* \subset W_{\text{af}}$ で誘導した generic Bruhat 順序 $\leq_{\frac{\infty}{2}}$ とは w_0 での捻りを法として一致する。

と書ける。特に、これを K -群に移植すると $M = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} M_a \in R\text{-gmod}$ に対して

$$\psi_M : \mathbb{Z} \ni a \mapsto \dim M_a \in \mathbb{Z}$$

という写像と M の層化で得られる \mathfrak{X} の連接層 \widetilde{M} を用いると

$$K(\mathfrak{X}) \ni [\widetilde{M}] \mapsto \psi_M \in \frac{\{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\}}{\{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(a) = 0, \forall a \gg 0\}}$$

というアーベル群の準同型が定義できる。その像を $K_{\text{num}}(\mathfrak{X})$ で表すとこれは $K(\mathfrak{X})$ の商とみなせる。特に、 ψ_M の像は \widetilde{M} のみに依存するので、 $\psi_{\widetilde{M}}$ とも書くことにする。

我々の状況では

$$K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}) \longrightarrow \frac{\{f : \mathbb{X}^* \rightarrow (\mathbb{Z}((q^{-1})) \otimes R(T)\}}{\{f : f : \mathbb{X}^* \rightarrow (\mathbb{Z}((q^{-1})) \otimes R(T) \mid f(\lambda) = 0, \forall \lambda \gg 0\}}$$

という写像が各 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(w)}$ を $\mathbb{G}_m \ltimes \mathbf{I}$ -同変層と思い $\lambda \in \mathbb{X}^*$ に応じて $\mathcal{O}(\lambda)$ で捻ってから Euler-Poincaré 標数を取ることにより導かれる。このとき、 $\psi_{\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(w)}}$ たちの像の $R(\mathbb{C}^\times \times T)$ -線形結合

$$\sum_{w \in W_{\text{af}}} a_w(q) \psi_{\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(w)}} \quad a_w(q) \in R(\mathbb{C}^\times \times T), \exists \beta_0 \in \mathbb{X}_* \text{ s.t. } a_{u t_\beta} = 0, \forall u \in W, \beta \not\prec \beta_0$$

の集合（これは $K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$ の像を含むことに注意）に対して関係式を

$$\sum_{w \in W_{\text{af}}} a_w(q) \psi_{\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(w)}}(\lambda) \equiv 0 \quad \lambda \gg 0$$

となるような $a_w(q) \in R(\mathbb{C}^\times \times T)$ ($\Rightarrow a_w(1) \in R(T)$) によって

$$\sum_{w \in W_{\text{af}}} a_w(1) [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(w)}] \equiv 0$$

と定めると $K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$ が埋め込めるという格好になっている。

Theorem 3.4 ([15] Theorem 1.17). 各 $\lambda \in \mathbb{X}^*$ に対して、 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}}(\lambda)$ によるテンソル積は $K_T(\mathbf{Q})$ 及び $K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$ を保つ。この作用を以下 $\Xi(\lambda)$ で表す。

Corollary 3.5 ([15] Lemma 1.18). 各 $1 \leq i \leq r$ に対して、以下が成立する：

$$[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(s_i w_0)}] = [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}}] - e^{\varpi_i} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}}(-\varpi_i)] \in K_T(\mathbf{Q}).$$

系 3.5 及び $\mathbf{Q}(s_i w_0) \subset \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(w_0)$ が超平面であったという事実に鑑みて

$$H_i := \text{id} - e^{\varpi_i} \Xi(-\varpi_i) \in \text{End}(K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}))$$

を仮想的な意味での超平面切断に対応するような自己同型とする。

Theorem 3.6 ([15] Theorem 2.12). $R(T)$ -線形な埋め込み

$$\Phi : K_T(\text{Gr}_G)_{\text{loc}} \longrightarrow K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$$

であって以下の性質を満たすものが存在する：

1. $w \in W, \beta \in \mathbb{X}_*^-$ に対して

$$\Phi([\mathcal{O}_{\text{Gr}_{w^t\beta}}]) = [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(wt_\beta w_0)}];$$

2. 各 $\xi \in K_T(\text{Gr}_G)_{\text{loc}}$ と $\beta \in \mathbb{X}_*^-$ に対して

$$\Phi(\xi \odot [\mathcal{O}_{\text{Gr}_\beta}]^{\pm 1}) = \Phi(\xi) \circ t_{w_0\beta}$$

ただし、 $t_{w_0\beta}$ は $K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$ の右 \mathbb{X}_* -平行移動作用。

3. 各 $1 \leq i \leq r, \beta \in \mathbb{X}_*^-$ と $\xi \in K_T(\text{Gr}_G)_{\text{loc}}$ に対して

$$\Phi([\mathcal{O}_{\text{Gr}_{s_i\beta}}] \odot \xi) = H_i(\Phi(\xi)) \circ t_{w_0\beta}.$$

4 旗多様体の量子 K 群

量子 K 群は量子コホモロジーの K 群版であり、Givental と Lee による一連の論文 [11, 10, 25] で定義が固まつたものである。量子コホモロジーの場合と同様にその計算は一般には安定写像の空間の上で仮想基本類を用いて重みをつけた数え上げを行うのであるが、旗多様体のように convex、つまり有理連結であり任意の写像 $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ に対して接束の引き戻しが次数 ≥ -1 の直線束の直和に分裂するような状況では仮想基本類は要らなくなる ([21])。ベクトル空間としては、旗多様体の場合

$$qK_T(X)^\wedge := K_T(X)[[Q^\beta \mid \beta \in \mathbb{X}_*^+]]$$

で与えられ、その積が Novikov 変数^{*6}と呼ばれる Q^β の方向に変形されたものとなる^{*7}。すなわち、 \star を $qK_T(X)^\wedge$ とすると、

$$(qK_T(X)^\wedge, \star) \longrightarrow (K_T(X), \otimes)$$

は全射環準同型になる。実は \star は $qK_T(X)^\wedge$ の定義において Novikov 変数方向に完備化を取らなくても定義できる（つまり、出現項が有限になる）ことが予想され、量子 K 群の有限性問題と呼ばれてきた。

[11] を読むと分かるように量子コホモロジーの計算と量子 K 群の計算を比較したとき後者はアブリオリには余次元の高い部分多様体の寄与まできちんと見なければいけないので分かりやすい空間からきっちりと transversal な超平面切断の繰り返しで得られるような空間、もしくは別の理由により詳細に構造が分かっているような空間でなければ計算が容易ではない^{*8}。これが Maulik-Okounkov 理論 [27, 29] をもととして一般の旗多様体に対して量子 K 群^{*9}を論じることができる一方で旗多様体の量子 K 群の記述に関しては（旗多様体の部分多様体として現れる）A 型以外の場合には今まであまり深いことが分からなかった理由と言える。

半無限旗多様体 $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ に関して言えば、埋め込み (3.1) をさらに拡張した埋め込み

$$\mathbf{Q}_G^{\text{rat}} \hookrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(L(\varpi_i)^* \otimes \mathbb{C}((z))) \hookrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(L(\varpi_i)^* \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]])$$

^{*6} これは、 X 内の（既約とは限らない）代数曲線が（仮想的にではなく実際に）なす類 ($\subset H_2(X, \mathbb{Z})$) に関する重みづけを与える変数で、今 $H_2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{X}_*$ だったことなどから上のような記述になる。

^{*7} これはいわゆる小量子 K 群と呼ばれるもの。小量子 K 群から大量子 K 群を復元するアルゴリズムも知られている ([12])。

^{*8} 旗多様体こそが分かりやすい空間だとも思えるので、そういう意味でもその量子 K 群は分かっておきたいという考え方もある。

^{*9} 彼らの量子 K 群と Givental-Lee のものとは厳密にはずれがある。

を考えることができ、こうすると最右辺は $z \mapsto z^{-1}$ という対合で安定ゆえ $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ を捻って埋め込める。これを使うと、 \mathbf{I} -軌道と \mathbf{I}^- の $G[\![z^{-1}]\!]$ における Zariski 閉包 $\overline{\mathbf{I}^p}$ の軌道の $\mathbf{Q}_G^{\text{rat}}$ 内の交叉として

$$\mathcal{Q}(w, v) = \overline{\mathbf{I}p_w \cap \mathbf{I}^p p_v} = \overline{\mathbf{I}p_w} \cap \overline{\mathbf{I}^p p_v} \quad w, v \in W_{\text{af}}$$

を定義することができる ([18])。ただし、 p_w は $\mathbf{Q}(w)$ ($w \in W_{\text{af}}$) の稠密 \mathbf{I} -軌道の唯一の $(\mathbb{C}^\times \times T)$ -固定点とする。

Theorem 4.1 ([15, 18]). $w, v \in W_{\text{af}}$ に対して、 $\mathcal{Q}(w, v) \neq \emptyset$ である必要十分条件は $w \leq_\infty v$ である。またこのとき $\mathcal{Q}(w, v)$ は既約な射影的正規代数多様体であり有理特異点のみを持つ。またその次元は w, v の $<_\infty$ における距離で与えられる。

定理と 4.1、直線束のシフト作用素の記述を用いると、 $qK_T(X)$ を計算するのに用いた相関関数の計算が $\mathcal{Q}(w, v)$ の上の直線束の Euler-Poincaré 標数の記述に帰着されることが分かる。このことと

Theorem 4.2 ([18]). 任意の $w \in W_{\text{af}}$ に対して

$$\bigcup_{v \in W_{\text{af}}} \mathcal{Q}(w, v) \subset \mathbf{Q}(w)$$

という埋め込みは稠密であり、さらに任意の $\lambda \in \mathbb{X}_+^*$ に対して

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} \chi_{\mathbb{C}^\times \times T}(\mathcal{Q}(w, v), \mathcal{O}_{\mathcal{Q}(w, v)}(\lambda)) = \chi_{\mathbb{C}^\times \times T}(\mathbf{Q}(w), \mathcal{O}_{\mathcal{Q}(w, v)}(\lambda))$$

が成立する。ただし、 $\chi_{\mathbb{C}^\times \times T}$ は $\mathbb{C}((q^{-1}))[[T]]$ 値をとる同変 Euler-Poincaré 標数。

を合わせると、(漸近挙動の解析から) 以下を示すことができる:

Theorem 4.3 ([15] Theorem B). $R(T)$ -線形な同型写像

$$\Psi : qK_T(X)^\wedge \longrightarrow K_T(\mathbf{Q}_G^{\text{rat}})$$

であって以下の性質を満たすものが存在する:

1. $w \in W, \beta \in \mathbb{X}_*$ に対して

$$\Psi([\mathcal{O}_{X_w}]Q^\beta) = [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}(wt_{w_0}\beta)}];$$

2. 各 $1 \leq i \leq r, \beta \in \mathbb{X}_*$ と $\xi \in qK_T(X)^\wedge$ に対して

$$\Psi(\mathcal{O}_X(-\varpi_i) \star \xi) = \Xi(-\varpi_i)(\Psi(\xi)).$$

以上を組み合わせることで、以下を得る:

Corollary 4.4 ([15], conjectured by Lam-Li-Mihalcea-Shimozono [23]). $R(T)$ -線形な環準同型

$$\Psi^{-1} \circ \Phi : K_T(\text{Gr}_G)_{\text{loc}} \longrightarrow qK_T(X)^\wedge$$

で以下 $w \in W, \beta \in \mathbb{X}_-^*$ に対して

$$\Psi^{-1} \circ \Phi([\mathcal{O}_{\text{Gr}_{w\beta}}]) = [\mathcal{O}_{X_{ww_0}}]Q^\beta$$

となるものが存在する。

$K_T(\mathrm{Gr}_G)_{\mathrm{loc}}$ の積 \odot が有限性を満たすことは昔から知られていたので、このことから $qK_T(X)$ の有限性も従う。このような考え方は量子 K 群の関手性 ([16, 17]) などにも応用をもち、特にグラスマン多様体など放物型旗多様体の量子 K 群の理解においても役に立つ。

謝辞: 講演の機会を与えてくださいました直井克之先生にお礼申し上げます。本来であれば小寺諒介先生がご質問されたようにきちんとその先の研究を取り込んで話すことを期待された方がおられるることは分かっていますが、そこに関してはもう少し時間を頂きたいです(人生とは往々にしてままならないものなのです)。なお、この研究は以下の研究費の補助を受けています: JSPS KAKENHI Grant Number JP26287004 and JP19H01782.

参考文献

- [1] Arnaud Beauville and Yves Laszlo. Conformal blocks and generalized theta functions. *Comm. Math. Phys.*, 164(2):385–419, 1994.
- [2] Roman Bezrukavnikov, Michael Finkelberg, and Ivan Mirković. Equivariant homology and K -theory of affine Grassmannians and Toda lattices. *Compos. Math.*, 141(3):746–768, 2005.
- [3] Alexander Braverman and Michael Finkelberg. Weyl modules and q -Whittaker functions. *Math. Ann.*, 359(1-2):45–59, 2014.
- [4] W. Casselman and J. Shalika. The unramified principal series of p -adic groups II. The Whittaker function. *Compos. Math.*, 41:207–231, 1980.
- [5] Neil Chriss and Victor Ginzburg. *Representation theory and complex geometry*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010. Reprint of the 1997 edition.
- [6] D. Kazhdan E. Frenkel, D. Gaitsgory and K. Vilonen. Geometric realization of Whittaker functions and the Langlands conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 11:451–484, 1998.
- [7] Gerd Faltings. Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 5(1):41–68, 2003.
- [8] Michael Finkelberg and Ivan Mirković. Semi-infinite flags. I. Case of global curve \mathbf{P}^1 . In *Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications*, volume 194 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 81–112. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [9] Susanna Fishel, Ian Grojnowski, and Constantin Teleman. The strong Macdonald conjecture and Hodge theory on the loop Grassmannian. *Ann. of Math. (2)*, 168(1):175–220, 2008.
- [10] Alexander Givental. On the WDVV equation in quantum K -theory. *Michigan Math. J.*, 48:295–304, 2000.
- [11] Alexander Givental and Yuan-Pin Lee. Quantum K -theory on flag manifolds, finite-difference Toda lattices and quantum groups. *Invent. Math.*, 151(1):193–219, 2003.
- [12] Hiroshi Iritani, Todor Milanov, and Valentin Tonita. Reconstruction and convergence in quantum K-Theory via Difference Equations. *International Mathematics Research Notices*, 2015(11):2887–2937, 2015, 1309.3750.
- [13] Masaki Kashiwara and Mark Shimozono. Equivariant K -theory of affine flag manifolds and affine Grothendieck polynomials. *Duke Math. J.*, 148(3):501–538, 2009.
- [14] Syu Kato. Demazure character formula for semi-infinite flag varieties. *Math. Ann.*, 371(3):1769–1801, 2018, arXiv:1605.0279.
- [15] Syu Kato. Loop structure on equivariant K -theory of semi-infinite flag manifolds. arXiv:1805.01718v6, 2018.
- [16] Syu Kato. On quantum K -groups of partial flag manifolds. arXiv:1906.09343, 2019.
- [17] Syu Kato. Darboux coordinates on the BFM spaces. arXiv:2008.01310, 2020.
- [18] Syu Kato. Frobenius splitting of Schubert varieties of semi-infinite flag manifolds. *Forum of Mathematics, Pi*, 9:e5 56pp, 2021.
- [19] Syu Kato. The formal model of semi-infinite flag manifolds. to appear., 2022.
- [20] Syu Kato, Satoshi Naito, and Daisuke Sagaki. Equivariant K -theory of semi-infinite flag manifolds and the Pieri-Chevalley formula. *Duke Math. J.*, 169(13):2421–2500, 2020.
- [21] M. Kontsevich and Yu. Manin. Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. *Comm. Math. Phys.*, 164(3):525–562, 1994.
- [22] Shrawan Kumar. *Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory*, volume 204 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.
- [23] Thomas Lam, Changzheng Li, Leonardo C. Mihalcea, and Mark Shimozono. A conjectural Peterson isomorphism in K -theory. *J. Algebra*, 513:326–343, 2018.
- [24] Thomas Lam, Anne Schilling, and Mark Shimozono. K -theory Schubert calculus of the affine Grassmannian. *Compositio Mathematica*, 146(4):811–852, 2010, 0901.1506.

- [25] Yuan-Pin Lee. Quantum K -theory, I: Foundations. *Duke Math. J.*, 121(3):389–424, 2004.
- [26] George Lusztig. Hecke algebras and Jantzen’s generic decomposition patterns. *Adv. in Math.*, 37(2):121–164, 1980.
- [27] Davesh Maulik and Andrei Okounkov. Quantum groups and quantum cohomology. *Astérisque*, 408:ix+209, 2019.
- [28] Mircea Mustata. Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities. *Inventiones mathematicae*, 424:397–424, 2001.
- [29] Andrei Okounkov. Lectures on K-theoretic computations in enumerative geometry. In *Geometry of moduli spaces and representation theory*, volume 24 of *IAS/Park City Math. Ser.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.
- [30] Takuro Shintani. On an explicit formula for class 1 whittaker functions on GL_n over \mathfrak{p} -adic fields. *Proc. Japan Acad.*, 52:180–182, 1976.

符号, 格子と頂点作用素代数における レーマー型問題

三枝崎剛 *

1 はじめに

X を球面 S^{n-1} 上の有限集合, t を自然数とする. X が球面 t -デザインとは, 任意の t 次以下の多項式関数 $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ に対して

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

が成立することである. 球面 t -デザインならば球面 $(t-1)$ -デザインであることに注意すると, t の値の大きい有限集合 X の構成が基本的な問題となる.

球面デザインの構成法は数多く知られているが, ここでは格子を用いたものを紹介しよう. L を格子, 原点からノルム m の点集合

$$(L)_m := \{x \in L \mid (x, x) = m\}$$

を格子 L のノルム m のシェルと呼ぶ. すると $(L)_m$ はノルムを調整することによって球面 S^{n-1} 上の有限集合と考えられる. 格子を用いた球面デザインの構成とは, 対称性の高い格子を用いて t の値の大きい球面 t -デザインを構成しようというものである.

例えば E_8 -格子を例に取ろう. 任意の自然数 m に対して $(E_8)_{2m}$ は球面 7-デザインの構造を与える. 球面 t -デザインならば球面 $(t-1)$ -デザインであり, 高い t の球面 t -デザインの構成が重要であったことを思い出そう. するをあるシェルで $(E_8)_{2m}$ が球面 8-デザインとなることがあるか, このような問題が自然に生じる. 実は $(E_8)_{2m}$ が球面 8-デザインであることと $\tau(m) = 0$ が同値である. ここで $\tau(m)$ は以下で定義されるラマヌジンの τ 関数である:

$$\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 + \cdots.$$

これに関して次の Lehmer 予想がある.

*早稲田大学基幹理工学部

予想 1.1 ([15]). 任意の自然数 m に対して $\tau(m) \neq 0$.

このように Lehmer 予想は E_8 -格子のデザイン理論の性質と同値であることが分かった. このような現象は全ての整数格子で観察でき, 整数格子におけるモジュラー形式のフーリエ係数の零性とデザインの関係を Lehmer 型問題と呼ぶ. 詳しい定式化はセクション 2 で行う.

また格子と符号, 頂点作用素代数 (VOA) の類似はよく知られており, 符号や VOA においても Lehmer 型問題を考えることができる. 格子や符号, VOA の Lehmer 型問題について現在までの状況を概説することが本稿の目的である.

セクション 2 で格子と球面デザインに関する Lehmer 型問題の定式化, セクション 3 で符号と組合せデザインに関する Lehmer 型問題, セクション 4 で VOA と共に形デザインに関する Lehmer 型問題の定式化, セクション 5 で現在までの進展状況, および Lehmer 型問題の応用として, 符号と格子の幾何に関する話題を紹介する.

2 格子と球面デザイン

セクション 1 で格子から球面デザインが得られることを説明し, Lehmer 予想との関係を紹介した. 本セクションでは球面デザイン理論の立場から, なぜ Lehmer 予想が重要か, これに関して extremal Type II 格子を取り上げて説明する. その後一般の格子に対して Lehmer 型問題を定式化しよう.

2.1 Extremal Type II 格子と球面デザイン

$L(\subset \mathbb{R}^n)$ をランク n の格子とする. 格子 L が Type II とは自己双対かつ偶な格子と定義する. ここで自己双対は

$$L = L^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y, x) \in \mathbb{Z}, \forall x \in L\},$$

偶は

$$\text{任意の } x \in L \text{ に対して } (x, x) \in 2\mathbb{Z}$$

で定義される. このような格子は $n \equiv 0 \pmod{8}$ のみ存在することが知られている. L の最小ノルムを $\min(L) := \min\{(x, x) \mid 0 \neq x \in L\}$ とする. Type II 格子の最小ノルムは

$$\min(L) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 2.$$

で評価され, 等号を達成するとき extremal と呼ぶ.

例 2.1. 次は extremal Type II 格子の例である.

1. 8 次元球充填問題の解を与える E_8 -格子 ([28]).

2. 24 次元球充填問題の解を与える Leech 格子 ([9]).

このように extremal Type II 格子は対称性の高い構造を持ち、実際高い t の球面 t -デザインを与えることが知られている。

定理 2.1 ([27]). L をランク n の extremal Type II 格子とする。このとき任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $(L)_{2m}$ は次の値の t -デザインとなる。

$$t = \begin{cases} 11 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{24}, \\ 7 & \text{if } n \equiv 8 \pmod{24}, \\ 3 & \text{if } n \equiv 16 \pmod{24}. \end{cases}$$

この事実から直ちに次が得られる。

例 2.2. 1. L を E_8 -格子とすると、 $(L)_{2m}$ は球面 7-デザイン。

2. L を Leech 格子とすると、 $(L)_{2m}$ は球面 11-デザイン。

実は格子から得られる球面 t -デザインは $t \leq 11$ が予想されている。

予想 2.1. 格子 L と $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $(L)_m$ が球面 t -デザインとする。このとき $t \leq 11$ 。

したがってランクが 24 の倍数の extremal Type II 格子は、格子の中では最も高い t の球面 t -デザインを与えると予想される。また次のように L を E_8 -格子とすると、 $(L)_{2m}$ は球面 8-デザインかどうかは、Lehmer 予想と関係したのだった。

予想 2.2 ([15]). 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\tau(m) \neq 0$.

以下では L を E_8 -格子として、

1. $(L)_{2m}$ は球面 7-デザイン、
2. $(L)_{2m}$ は球面 8-デザインであることと $\tau(m) \neq 0$ は同値、

この 2 つの証明の概略を紹介しよう。

証明. $(L)_{2m}$ が球面 7-デザインであることと、全ての齊次調和多項式 $P(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_8) \in \text{Harm}_k$ ($k \in \{1, \dots, 7\}$) に対して

$$\sum_{x \in (E_8)_{2m}} P(x) = 0 \tag{1}$$

が同値であることが良く知られている。次の重さ付きデータ級数を考える。モジュラー形式の一般論から、これは重さ $5, \dots, 11$ の $SL_2(\mathbb{Z})$ に関するカスプ形式となるが、それは存在しない。すなわち次の式が得られ

$$\theta_{E_8, P} = \sum_{x \in E_8} P(x) q^{(x,x)/2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{x \in (E_8)_{2m}} P(x) \right) q^m = 0$$

(1) を導く。

また $k = 8$ とすると重さ 12 に関するカスプ形式となり、適当な定数 $c(P)$ を用いて

$$\theta_{E_8, P} = \sum_{x \in E_8} P(x) q^{(x,x)/2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{x \in (E_8)_{2m}} P(x) \right) q^m = c(P) \Delta$$

が得られる。以上より $(L)_{2m}$ は球面 8-デザインであることと $\tau(m) \neq 0$ は同値であることが（もう少しの議論で）わかる。□

証明の概略を見ると一般に任意の Type II 格子 L に対し、モジュラー形式 $\sum a(n)q^n$ が存在して $(L)_m$ が球面 t -デザインであることと $a(m) = 0$ は同値であることがわかるであろう。したがって Lehmer 型問題は任意の格子で考えることができる。

また格子 L に対して $(L)_m$ が球面 t -デザインであることが任意の m で成立するか、あるいは特別な m でのみ成立するか、このような現象の違いを正確に理解するため、我々は次の 2 つの関数を導入した。

- $\delta(L) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid \forall m, L_m \text{ は球面 } t\text{-デザイン}\},$
- $s(L) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid \exists m \text{ s.t. } L_m \text{ は球面 } t\text{-デザイン}\}.$

一般に $\delta(L) \leq s(L)$ が成立する。この関数を用いて上記 2 つの予想は次のように言い換えられる。

予想 2.3. 1. $s(L) \leq 11$.

2. $\delta(E_8) = s(E_8)$.

以上の考察より、任意の格子に対して次の 2 つの問題を格子版 Lehmer 型問題と呼ぶ。

問題 2.1 (Lehmer 型問題). 1. $s(L)$ を上から評価せよ。

2. $\delta(L) = s(L)$ や $\delta(L) < s(L)$ となる例を見つけよ。

これは Lehmer 予想の一般化と考えられ、任意の格子でこの問題を考えることは興味深いと思われる。現在までの知られている結果について最終セクションでまとめよう。

以上が格子に対する Lehmer 型問題の定式化である。以降のセクションで、符号と VOA 版の Lehmer 型問題を定式化しよう。

3 符号と組合せデザイン

符号と格子の類似性はよく知られている。本セクションでは符号において Lehmer 型を定式化しよう。以下の表は符号と格子のそれぞれの対応物の表である。セクション 2 の格子の議論において、以下の表をもとに符号の言葉

符号 $(C)_w$	格子 $(L)_m$
組合せ t -デザイン	球面 t -デザイン
離散調和多項式	調和多項式
群の不变式	モジュラー形式
$\min(C) \leq 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 4$	$\min(L) \leq 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2$
Extremal Type II 符号	Extremal Type II 格子
拡大ハミング符号 H_8	E_8 -格子
Golay 符号 G_{24}	Leech 格子

に置き換えると、本セクションの議論になる。(例えばモジュラー形式は群の不变式などに。) より正確に見ていこう。

組合せ t -デザインを導入する。

定義 3.1 (組合せ t -デザイン). X を v 点からなる有限集合,

$$\mathcal{B} \subset X_k := \binom{X}{k} = X \text{ の } k \text{ 点部分集合全体}$$

とする。 (X, \mathcal{B}) が組合せ t -デザイン (t -(v, k, λ)) とは、次の条件を満たすことである。

任意の $T \in \binom{X}{t}$ に対して、次の値は一定値をとる : $\lambda = \#\{B \in \mathcal{B} \mid T \subset B\}$.

例 3.1. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}\}$ とおくと (X, \mathcal{B}) : 組合せ 2-デザイン (2-(7, 3, 1))。

格子を用いて球面デザインが得られたように、符号を用いて組合せデザインが得られる。ここで長さ n の符号 C とは \mathbb{F}_2^n の部分空間である。Type II 符号とは自己双対かつ重偶と定義しよう。 C が自己双対とは

$$C = C^\perp = \{y \in \mathbb{F}_2^n \mid (y, x) = 0, \forall x \in C\}.$$

重偶とは、任意の $x \in C$ に対して $(x, x) \equiv 0 \pmod{4}$ が成立することである。Type II 符号は $n \equiv 0 \pmod{8}$ のみ存在することが知られている。符号 C の最小距離を次で定義しよう：

$$\min(C) := \min\{(x, x) \mid 0 \neq x \in C\}.$$

Type II 符号 C の最小距離は次で評価される：

$$\min(C) \leq 4 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4.$$

Type II 符号 C が extremal とは等号を達成するときである。いくつか例を紹介しよう。

例 3.2. 1. 長さ 8 の拡大ハミング符号 H_8 ,

2. 長さ 24 の Golay 符号 G_{24} .

H_8 は以下で定義をするが、Golay 符号については適切な符号理論の教科書を参照されたい。

$(C)_w = \{x \in C \mid \text{wt}(x) = w\}$ を重さ w のシェルと呼ぼう。ただし $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対し

$$\text{wt}(x) = \#\{i \mid c_i \neq 0\}.$$

たとえばハミング符号 H_8 の元を全て列挙すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ & (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) \quad (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) \\ & (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) \quad (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0) \\ & (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1) \quad (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0) \\ & (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \quad (0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0) \\ & (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \quad (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ & (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) \quad (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0) \\ & (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \quad (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0) \\ & \quad (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

$(H_8)_4$ は成分に 1 が 4 つ存在する 14 個のベクトルの集合である。符号 $C \subset \mathbb{F}_2^n$ に対して、

$$\begin{cases} X := \{1, 2, \dots, n\}, \\ \mathcal{B} := \{\text{supp}(x) \mid x \in (C)_w\}, \end{cases}$$

と定義する。 $\text{supp}(x)$ は $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対し

$$\text{supp}(x) = \{i \mid x_i \neq 0\}$$

で定義される. (X, \mathcal{B}) が組合せ t -デザインのとき, $(C)_w$ は組合せ t -デザインと定義しよう. 例えば $(H_8)_4$ は組合せ 3-デザインになることが上の元を見るに確認できる. つまり任意の 3 つの座標を取ると, その成分に 1 がある $(H_8)_4$ の元はただ 1 つ存在するはずである. 以上が符号を用いた組合せデザインの構成法である.

格子の場合, Type II 格子から良い球面デザインが得られた. 符号における類似は次の定理である.

定理 3.1 ([1]). $C(\subset \mathbb{F}_2^n)$ を extremal Type II 符号とする. このとき任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $(C)_{4m}$ は次の値の組合せ t -デザイン

$$t = \begin{cases} 5 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{24}, \\ 3 & \text{if } n \equiv 8 \pmod{24}, \\ 1 & \text{if } n \equiv 16 \pmod{24}. \end{cases}$$

この定理を用いると次が得られる.

例 3.3. 1. $(H_8)_4$ は組合せ 3-デザイン.

2. $(G_{24})_8, (G_{24})_{12}, (G_{24})_{16}$ は組合せ 5-デザイン.

格子から得られる球面 t -デザインは $t \leq 11$ であった. この符号における類似は次の予想である.

予想 3.1. $(C)_m$ が組合せ t -デザインとする. このとき $t \leq 5$ である.

以上のように, 格子と球面デザインの関係と符号と組合せデザインの関係は類似している. 格子から得られる球面デザインの判定は, モジュラー形式のフーリエ係数と関係することをセクション 1 で見た. この類似を次のセクションで紹介しよう.

3.1 組合せデザインと不变式

格子 L に対して, $(L)_m$ が球面 t -デザインかどうかは, モジュラー形式のフーリエ係数で判定できた. 符号の場合はある群 G の一般不变式の係数で判定できる. この理論を概説しよう.

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$G = \langle T_1, T_2 \rangle$ とおく. これは位数 192 の有限群である. χ_ℓ を次で定義される G の指標とする.

$$\chi_\ell(T_1) = (-1)^\ell, \chi_\ell(T_2) = i^{-\ell}.$$

一般不变式の集合を次で定義しよう.

$$\begin{cases} I_G = I_{G,\chi_0} = \mathbb{C}[x,y]^G = \{f \in \mathbb{C}[x,y] \mid \sigma f = f, \forall \sigma \in G\}, \\ I_{G,\chi_\ell} = \{f \in \mathbb{C}[x,y] \mid \sigma f = \chi_\ell(\sigma)f, \forall \sigma \in G\}. \end{cases}$$

このとき次が知られている.

定理 3.2 ([3]).

$$I_{G,\chi_\ell} = \begin{cases} \langle P_8, P_{24} \rangle (\ell \equiv 0 \pmod{4}), \\ P_{12}I_G (\ell \equiv 2 \pmod{4}), \\ P_{18}I_G (\ell \equiv 3 \pmod{4}), \\ P_{30}I_G (\ell \equiv 1 \pmod{4}), \end{cases}$$

ここで $P_8 = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$, $P_{24} = x^4y^4(x^4 - y^4)^4$, $P_{12} = x^2y^2(x^4 - y^4)$, $P_{18} = xy(x^8 - y^8)(x^8 - 34x^4y^4 + y^8)$, $P_{30} = P_{12}P_{18}$.

γ を以下で定義しよう.

$$\gamma : \mathbb{R}X_k \rightarrow \mathbb{R}X_{k-1}; \gamma(z) = \sum_{y \in X_{k-1}, y \subset z} y.$$

$\text{Harm}_k = \ker \gamma$, $f \in \text{Harm}_k$ に対して $\tilde{f} \in \mathbb{R}2^X$, $\tilde{f}(u) = \sum_{z \in X_k, z \subset u} f(z)$ と定義し \tilde{f} を離散調和多項式と呼ぶ. 球面デザインは調和多項式で特徴づけられた. 組合せデザインは以下のように離散調和多項式で特徴づけられる.

定理 3.3 ([10]). C_w が組合せ t -デザインであることと任意の $f \in \text{Harm}_\ell$ ($1 \leq \ell \leq t$) に対して $\sum_{x \in C_w} \tilde{f}(c) = 0$ は同値である.

符号 $C \subset \mathbb{F}_2^n$, $f \in \text{Harm}_k$, 調和重さ多項式を以下で定義する:

$$w_{C,f}(x, y) = \sum_{c \in C} \tilde{f}(c) x^{n-\text{wt}(c)} y^{\text{wt}(c)}.$$

Bachoc はこの調和重さ多項式が一般不变式となることを見出した.

定理 3.4 ([3]). $C(\subset \mathbb{F}_2^n)$ を Type II 符号, $f \in \text{Harm}_k$ とする. このとき

$$w_{C,f}(x, y) = (xy)^k Z_{C,f}(x, y), \quad Z_{C,f}(x, y) \in I_{G,\chi_\ell}, \quad \deg(Z_{C,f}) = n - 2k.$$

これを用いて, C を拡大ハミング符号 H_8 とすると, $(H_8)_4$ は 3-デザインとなることを証明しよう.

証明. (H_8) が組合せ 3-デザインを示す. 定理 3.3 からそれは任意の $f \in \text{Harm}_k$ ($1 \leq k \leq 3$) に対して

$$\sum_{c \in (H_8)_m} \tilde{f}(c) = 0$$

を示せばよい. 定理 3.4 からこれは次数 $8 - 2k$ の G に関する不变式であり, それは存在しない. したがって

$$w_{H_8, f} = \sum_{c \in H_8} \tilde{f}(c) x^{8-\text{wt}(c)} y^{\text{wt}(c)} = \sum_{m=1}^8 \left(\sum_{c \in (H_8)_m} \tilde{f}(c) \right) x^{8-m} y^m = 0.$$

が得られた. \square

以上の考察を, H_8 以外の Type II 符号 C に対して行うことにより, 一般不变式 $\sum a(m)x^{n-m}y^m$ が存在して C_m が組合せ t -デザインであることと $a(m) = 0$ が同値であることがわかる.

以上から符号から得られる組合せデザインは一般不变式の係数の零性が関係することが分かった. 格子の球面デザインはモジュラー形式のフーリエ係数の零性が関係したことの符号における類似である.

格子のときと同じく次の 2 つの関数を導入する.

- $\delta(C) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid \forall w, C_w \text{ は組合せ } t\text{-デザイン}\},$
- $s(C) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid \exists w \text{ s.t. } C_w \text{ は組合せ } t\text{-デザイン}\}.$

一般に $\delta(C) \leq s(C)$ が成立する.

先に述べたように, C_m が組合せ t -デザインならば $t \leq 5$ であった. これは $s(C) \leq 5$ と言い換えられる. 以上から符号の Lehmer 型問題を次のように定式化しよう.

問題 3.1 (Lehmer 型問題). 1. $s(C)$ を上から評価せよ.

2. $\delta(C) = s(C)$ や $\delta(C) < s(C)$ となる例を見つけよ.

4 VOA と共形デザイン

本セクションでは, VOA や共形デザインの定義は省略し, VOA において Lehmer 型がどのように定式化されるか結果のみ述べる. 以下の表は符号と格子のそれぞれの対応物の表である.

VOA においても “extremal Type II” が定義されそれは高い t の共形 t -デザインとなることが知られている.

符号	格子	頂点作用素代数
組合せ t -デザイン	球面 t -デザイン	共形 t -デザイン
離散調和多項式	調和多項式	Virasoro 最高ウェイト元
群の不変式	モジュラー形式	モジュラー関数
$\min(C) \leq 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 4$	$\min(L) \leq 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2$	$\min(L) \leq \lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 1$
Extremal Type II 符号	Extremal Type II 格子	Extremal Type II VOA
拡大ハミング符号 $H_8(t=3)$	E_8 -格子 ($t=7$)	E_8 -格子 VOA($t=7$)
Golay 符号 $G_{24}(t=5)$	Leech 格子 ($t=11$)	ムーンシャイン VOA($t=11$)

定理 4.1 ([12]). V を中心電化 n の extremal Type II VOA とする. このとき任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $(V)_m$ は次の値の共形 t -デザイン

$$t = \begin{cases} 11 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{24}, \\ 7 & \text{if } n \equiv 8 \pmod{24}, \\ 3 & \text{if } n \equiv 16 \pmod{24}. \end{cases}$$

符号や格子のときと同じく次のが知られている. すなわち Type II VOA V に対しモジュラー関数 $\sum a(m)q^m$ 存在して $(V)_m$ が共形 t -デザインであることと $a(m) = 0$ が同値となるのである.

また次の 2 つの関数を導入しよう.

- $\delta(V) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid \forall w, (V)_w \text{ は共形 } t\text{-デザイン}\},$
- $s(V) := \max\{t \in \mathbb{N} \mid \exists w \text{ s.t. } (V)_w \text{ は共形 } t\text{-デザイン}\}.$

格子のときと同じく $s(V) \leq 11$ と予想されている. VOA の Lehmer 型問題を次のように定式化しよう.

問題 4.1 (Lehmer 型問題). 1. $s(V)$ を上から評価せよ.

2. $\delta(V) = s(V)$ や $\delta(V) < s(V)$ となる例を見つけよ.

以上が符号と格子, VOA の Lehmer 型問題の定式化である. 次のセクションで現在までの進展状況を紹介する.

注意 4.1. V をムーンシャイン VOA とする. このとき $(V)_m$ は共形 11-デザインとなる [16, 12]. さらに $(V)_{m+1}$ が共形 12-デザインであることと $\tau(m) = 0$ は同値である [17]. つまり Lehmer 予想は VOA の共形デザインを用いた特徴づけも可能である.

5 Lehmer 型問題の進展

本セクションでは符号と格子, VOA における Lehmer 型問題の進展状況について概説する.

5.1 格子と VOA の場合

格子 L に対して $\delta(L), s(L)$ が決定されている例はほとんどなく、筆者の知る限り次の 2 つの定理のみである。

定理 5.1 ([4, 5]). L を \mathbb{Z}^2 -格子とする。このとき L_m は球面 3-デザインとなる。 $a(n)$ を以下のフーリエ係数として定義する。

$$\frac{1}{16}\theta_3^2(\theta_2\theta_4)^4 = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n.$$

1. $(L)_m$ が球面 4-デザインであることと $a(m) = 0$ は同値である。
2. 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $a(m) \neq 0$.

つまり $\delta(L) = s(L) = 3$ が得られた。

もっと一般に次がわかっている。

定理 5.2 ([4, 5]). $L \subset \mathbb{R}^2$: 類群が初等可換 2 群となる 2 次元整数格子とする。このとき

$$\begin{cases} \delta(L) = s(L) = 3 \ (L = \mathbb{Z}^2) \\ \delta(L) = s(L) = 5 \ (L = A_2) \\ \delta(L) = s(L) = 1 \ (\text{o.w.}) \end{cases}$$

次に VOA V に対して $\delta(V), s(V)$ が決定、あるいは評価されている例を紹介する。

定理 5.3 ([18]). 1. L をランク 24 の Type II 格子とする。このとき格子 VOA V_L に対し $\delta(V_L) = s(V_L) = 3$ 。

2. L をランク 16 の Type II 格子とする。このとき格子 VOA V_L に対し $3 = \delta(V_L) < 7 \leq s(V_L)$.

注意 5.1. 論文 [18] 出版直前に、島倉裕樹先生(東北大学)より次のことを教えていただいた。

$$(1) \ \delta(V_{\mathbb{Z}^2}) = s(V_{\mathbb{Z}^2}) = 3.$$

$$(2) \ \delta(V_{A_2}) = s(V_{A_2}) = 5.$$

格子の場合と類似した現象が観察され興味深い。

以上が格子と VOA において $\delta(L), s(L), \delta(V), s(V)$ が決定・評価されている例である。これ以外の例は(以下で 1 例を紹介するが)ほとんど知られていないと思われ、今後の追及は重要な問題である。

5.2 符号の場合

符号 C に対して $\delta(C), s(C)$ が決定, あるいは評価されている例を紹介する. 一つ目は extremal Type II 符号に関する結果である.

定理 5.4 ([20]). C を長さ n の extremal Type II 符号とする.

- (1) If $n = 24m$, then $\delta(C) = s(C) = 5$ or $\delta(C) = s(C) = 7$.
- (2) If $n = 24m + 8$, then $\delta(C) = s(C) = 3$ or $5 \leq \delta(C) \leq s(C) \leq 7$.
- (3) If $n = 24m + 16$, then $\delta(C) = s(C) = 1$ or $3 \leq \delta(C) \leq s(C) \leq 5$.

注意 5.2. 下線の例は見つかっておらず, 存在しないと予想される.

二つ目は立方重偶 2 元符号に関する結果である.

定理 5.5 ([21]). C が立方重偶 2 元符号とは, 任意の C の元 x に対して $\text{wt}(x) \equiv 0 \pmod{8}$ が成立するものである. 長さ $8 \leq n \leq 48$ のとき分類されている [7]. 詳細は省略するが, この中に $1 = \delta(C) < s(C) = 2$ となるものを発見した. 以下がその例である. 詳細(記号など)は [6, 21] をご覧いただきたい.

Dim.	[Code Id] Weight distribution (i, A_i) for $A_i \neq 0$	2-(v, k, λ) # of designs
7	[144] Miyamoto's Moonshine code $(0, 1), (16, 3), (24, 120), (32, 3), (48, 1)$	2-(48, 6, 2520) 1
8	[129,130,131,132,133] $(0, 1), (16, 15), (24, 224), (32, 15), (48, 1)$	2-(48, 6, 1240) 5
9	[59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,1109,1712,1714,1716,1960] $(0, 1), (16, 39), (24, 432), (32, 39), (48, 1)$	2-(48, 6, 600) 16
10	[16,17,18,19,20,21,22,549,550,554,1001,1245,1246,1247] $(0, 1), (16, 87), (24, 848), (32, 87), (48, 1)$	2-(48, 6, 280) 14
11	[6,7,154,520] $(0, 1), (16, 183), (24, 1680), (32, 183), (48, 1)$	2-(48, 6, 120) 4
12	[3] $(0, 1), (16, 375), (24, 3344), (32, 375), (48, 1)$	2-(48, 6, 40) 1
13	[1] Extended doubling of G_{24} $(0, 1), (16, 759), (24, 6672), (32, 759), (48, 1)$	- 0

注意 5.3. 下線のよく知られた符号が, 表の最上段と最下段の極端な場合に現れた. これの組合せ論的な説明を与えることは興味深い問題と思われる.

三つ目は $\delta(C) < s(C)$ が起こる可能性のあるパラメータを列挙した結果である.

定理 5.6 ([22]). d を C の最小距離, d^\perp を C^\perp の最小距離とする. $(d^\perp, t) = (4, 1)$, $\#\{u \mid (C)_u \neq \emptyset, 0 < u \leq n - t\} = 3$ を仮定する. 次の C が次のパラメーターを持つとき $\delta(C^\perp) < s(C^\perp)$ となる. (一部の値のみ紹介している. 詳しくは元論文を参照いただきたい.)

n	16	22	22	38	40	48	54	72	72	80
d	4	6	8	16	16	16	22	26	33	36
w	6, 10	6	18	24	16, 24	6, 42	50	6, 66	48, 58	34, 46
n	86	86	102	118	118	136	136	166	198	208
d	32	40	44	46	56	64	65	74	96	100
w	6	58	98	6	94	60, 76	94, 108	162	156	94, 114
n	246	246	272	296	296	328	328	342	358	358
d	104	112	116	120	144	142	161	158	156	176
w	6	242	6, 266	8, 288	136, 160	6, 322	234, 256	338	6	256

5.3 Near extremal に関する結果

最後に near extremal に関する結果を紹介する。Near extremal とは以下の表のように最小距離の条件を extremal より少し弱めたものである。

符号	格子	頂点作用素代数
組合せ t -デザイン $\min(C) = 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor$ near extremal Type II 符号	球面 t -デザイン $\min(L) = 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor$ near extremal Type II 格子	共形 t -デザイン $\min(L) = \lfloor \frac{n}{24} \rfloor$ near extremal Type II VOA

定理 5.7 ([19, 18]). 1. Type II 符号 C と Type II 格子 L , Type II VOA V が³ near extremal とする。このとき $1 \leq \delta(C), 3 \leq \delta(L), 3 \leq \delta(V)$.

2. C を長さ 96 の near extremal Type II 符号とする。このとき, $1 = \delta(C) < s(C) = 2$ ($(C)_{20}$ が組合せ 2-デザイン).
3. L をランク 240 の near extremal Type II 格子とする。このとき $3 = \delta(C) < s(L) = 5$ ($(L)_{22}$ が球面 5-デザイン).

以上が進展状況である。まだまだ例が少なく今後の更なる研究が望まれる。

5.4 符号と格子の幾何への応用

最後に Lehmer 型問題の一つの応用を紹介しよう。次の問題を考えよう。

問題 5.1. C を符号とする。

$$(C)_{\ell_1, \dots, \ell_s} := \{x \in L \mid (x, x) = \ell_1 \text{ or } \dots \text{ or } (x, x) = \ell_s\}.$$

C は $(C)_{\ell_1, \dots, \ell_s}$ で生成されるか ($C = \langle (C)_{\ell_1, \dots, \ell_s} \rangle$)。格子 L においても同様の記号と問題を定義する。

現在まで次が知られている。

1. C を extremal Type II 符号で、長さが $n \in \{32, 48, 56, 72, 96\}$ とする。
このとき $C = \langle (C)_{\min(L)} \rangle$ ([11]),

2. L : extremal Type II 格子, ランクを $n \in \{32, 48, 56, 72, 96\}$ とする. このとき $L = \langle (L)_{\min(L)} \rangle$ ([24, 25], [13]),
3. L : extremal Type II 格子, ランクを $n \in \{40, 80, 120\}$ とする. このとき $L = \langle (L)_{\min(L), \min(L)+2} \rangle$ ([26], [14]).

以上は Type II の結果である. Type II 格子は ℓ -modular 格子という概念に一般化されている. これに関して次の結果がある.

定理 5.8 ([23]). 1. L をランク 32, 48 の extremal 2-modular 格子とする. L は $(L)_{\min(L)}$ で生成される.

2. L をランク 24, 36 の extremal 2-modular 格子とする. L は $(L)_{\min(L), \min(L)+2}$ で生成される.

詳しい証明は省略するが, 2-modular 格子 L に対して $\delta(L)$ や $s(L)$ を評価し, その結果を用いる. $\ell \neq 2$ に対する ℓ -modular 格子についても同様の結果を紹介した論文を準備中である. このように Lehmer 型問題は符号や格子の幾何への応用がある.

5.5 関連する未解決問題・研究問題

最後に関連する未解決問題・研究問題などを挙げ, 本稿を閉じることにしたい.

問題 5.2. 1. 格子から得られる球面デザインとモジュラー形式は関係することを見てきた. モジュラー形式は多変数化されている. この多変数モジュラー形式と関係する球面デザイン理論は存在するか. その符号や VOA における類似は存在するか.

2. 筆者は一般化 Jacobi 多項式を定義して, それを用いて generalized t -デザインや mixed t -デザインと符号との関係を示した [8]. これらの格子や VOA における類似は存在するか.
3. セクション 5.4 で議論した「符号や格子の生成元を決定する問題」の VOA 類似は存在するか.
4. 群作用付き組合せ t -デザイン, 重さ多項式, テータ級数 [29, 30, 2] が定義されている. 球面デザインや VOA の共形デザインにおける類似は存在するか.
5. 論文 [22] において Golay 符号の次のような特徴づけを得た.

定理 5.9 ([22]). 符号 C が $d^\perp = 8, t = 5, \#\{u \mid C_u \neq \emptyset, 0 < u \leq n-t\} = 3$ を満たすならば C は Golay 符号 G_{24} である.

この定理の Leech 格子, ムーンシャイン VOA における類似は存在するか.

References

- [1] E. F. Assmus, Jr. and H. F. Mattson, Jr., New 5-designs, *J. Combin. Theory* **6** (1969), 122–151.
- [2] T. Atsumi, A note on lattices with group actions. *Hokkaido Math. J.* **27** (1998), no. 1, 213–218.
- [3] C. Bachoc, On harmonic weight enumerators of binary codes, *Des. Codes Cryptogr.* **18** (1999), no. 1-3, 11–28.
- [4] E. Bannai and T. Miezaki, Toy models for D. H. Lehmer’s conjecture, *J. Math. Soc. Japan*, **62** (2010), no. 3, 687–705
- [5] E. Bannai and T. Miezaki, Toy models for D. H. Lehmer’s conjecture II, *Quadratic and Higher Degree Forms*, 1–27, Dev. Math., 31, Springer, New York, 2013.
- [6] K. Betsumiya, DATABASE: Triply even codes of length 48, <http://www.st.hirosaki-u.ac.jp/~betsumi/triply-even/>
- [7] K. Betsumiya and A. Munemasa, On triply even binary codes, *J. London Math. Soc.* **86** (1) (2012), 1–16.
- [8] H.S. Chakraborty, T. Miezaki, and M. Oura, Generalized Jacobi polynomials and t -designs, in preparation.
- [9] H. Cohn, A. Kumar, S.D. Miller, D. Radchenko, and M.S. Viazovska, The sphere packing problem in dimension 8, *Ann. of Math.* (2) **185** (2017), no. 3, 1017–1033.
- [10] P. Delsarte, Hahn polynomials, discrete harmonics, and t -designs, *SIAM J. Appl. Math.* **34** (1978), no. 1, 157–166.
- [11] N.D. Elkies and S.D. Kominers, Configurations of extremal Type II codes via harmonic weight enumerators. *J. Théor. Nombres Bordeaux* **31** (2019), no. 3, 679–688.
- [12] G. Höhn, Conformal designs based on vertex operator algebras, *Adv. Math.*, **217-5** (2008), 2301–2335.
- [13] S.D. Kominers, Configurations of Extremal Even Unimodular Lattices, *Int. J. Number Theory* **5** (2009), p. 457–464

- [14] S.D. Kominers and Z. Abel, Configurations of rank- $40r$ extremal even unimodular lattices ($r = 1, 2, 3$). *J. Théor. Nombres Bordeaux* **20** (2008), no. 2, 365–371.
- [15] D.H. Lehmer, The vanishing of Ramanujan’s function $\tau(n)$. *Duke Math. J.* **14** (1947), 429–433.
- [16] A. Matsuo, Norton’s Trace Formulae for the Griess Algebra of a Vertex Operator Algebra with Larger Symmetry, *Comm. Math. Phys.*, **224** (2001), 565–591.
- [17] T. Miezaki, Conformal designs and D.H. Lehmer’s conjecture, *J. Algebra* **374** (2013), 59–65.
- [18] T. Miezaki, Design-theoretic analogies between codes, lattices, and vertex operator algebras, *Des. Codes Cryptogr.*, **89** (2021), 763–780.
- [19] T. Miezaki, A. Munemasa, and H. Nakasora, An note on Assmus–Mattson theorems, *Des. Codes Cryptogr.*, **89** (2021), 843–858.
- [20] T. Miezaki and H. Nakasora, An upper bound of the value of t of the support t -designs of extremal binary doubly even self-dual codes, *Des. Codes Cryptogr.* **79** (2016), no. 1, 37–46.
- [21] T. Miezaki and H. Nakasora, The support designs of the triply even binary codes of length 48, *J. Combin. Designs*, **27** (2019), 673–681.
- [22] T. Miezaki and H. Nakasora, Strengthening of the Assmus-Mattson theorem for some dual codes, submitted.
- [23] T. Miezaki and G. Nebe, Pseudo-normalized Hecke eigenform and its application to extremal 2-modular lattices, submitted.
- [24] M. Ozeki, On even unimodular positive definite quadratic lattices of rank 32, *Math. Z.* **191** (1986), p. 283–291.
- [25] M. Ozeki, On the configurations of even unimodular lattices of rank 48, *Arch. Math.* **46** (1986), p. 54–61.
- [26] M. Ozeki, On the structure of even unimodular extremal lattices of rank 40. *Rocky Mtn. J. Math.* **19** (1989), 847–862.
- [27] B.B. Venkov, Even unimodular extremal lattices. (Russian) Algebraic geometry and its applications. *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **165** (1984), 43–48; translation in Proc. Steklov Inst. Math. **165** (1985) 47–52.

- [28] M.S. Viazovska, The sphere packing problem in dimension 8, *Ann. of Math.* (2) **185** (2017), no. 3, 991–1015.
- [29] T. Yoshida, Fisher’s inequality for block designs with finite group action. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **34** (1987), no. 3, 513–544.
- [30] T. Yoshida, MacWilliams identities for linear codes with group action. *Kumamoto J. Math.* **6** (1993), 29–45.

VOA の C_1 -余有限 \mathbb{N} -gradable 加群の fusion 積の結合律

宮本雅彦 筑波大名誉教授/中央研究院数学研究所

2021/9/2 from Taiwan

§0 序文 用語の説明は後にして、まずは目的の主定理を述べる。

主定理 V を頂点作用素代数、 A, B, C を C_1 -cofinite \mathbb{N} -gradable V -加群とする。 $\mathcal{Y}^{AB} \in I\left(\begin{smallmatrix} A \boxtimes B \\ AB \end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{Y}^{BC} \in I\left(\begin{smallmatrix} B \boxtimes C \\ BC \end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{Y}^{A(BC)} \in I\left(\begin{smallmatrix} A \boxtimes (B \boxtimes C) \\ A(B \boxtimes C) \end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{Y}^{(AB)C} \in I\left(\begin{smallmatrix} (A \boxtimes B) \boxtimes C \\ A \boxtimes BC \end{smallmatrix}\right)$ を全射な交絡作用素とし、4点相關関数 $\langle \theta, \mathcal{Y}^{A(BC)}(v, x)\mathcal{Y}^{BC}(u, y)w \rangle$ と $\langle \theta', \mathcal{Y}^{(AB)C}(\mathcal{Y}^{AB}(v, x-y)u, y)w \rangle$ を考える。ここで、 $v \in A, u \in B, w \in C, \theta \in (A \boxtimes (B \boxtimes C))^\vee, \theta' \in ((A \boxtimes B) \boxtimes C)^\vee$ である。さらに、領域 $\mathcal{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < |x - y| < |y| < |x|, x, y, x - y \notin \mathbb{R}^{\leq 0}\}$ において、上記の分岐 $\tilde{F}(\langle \theta, \mathcal{Y}^{A(BC)}(v, x)\mathcal{Y}^{BC}(u, y)w \rangle)$ と $\tilde{F}(\langle \theta', \mathcal{Y}^{(AB)C}(\mathcal{Y}^{AB}(v, x-y)u, y)w \rangle)$ を取る。この時、同型 $\phi : (A \boxtimes B) \boxtimes C \rightarrow A \boxtimes (B \boxtimes C)$ が存在して、 \mathcal{D}^2 上で、 $\tilde{F}(\langle \theta, \mathcal{Y}^{A(BC)}(v, x)\mathcal{Y}^{BC}(u, y)w \rangle) = \tilde{F}(\langle \phi^*(\theta), \mathcal{Y}^{(AB)C}(\mathcal{Y}^{AB}(v, x-y)u, y)w \rangle)$ が成り立つ。

§1 カイラル代数 場の理論とは、次を満たすものから成り立っている。

- (1) 真空 **1** と呼ばれる状態と、
- (2) 時空間 $z \in U$ 上で定義される作用素達 $\{\mathcal{Y}(v^j, z) : v^j \in \Gamma\}$ (v^j は状態、 $\mathcal{Y}(v^j, z)$ は場と呼ばれる) と
- (3) 真空 **1** との比較 (内積)、即ち、 n 点相關関数

$$\langle \mathbf{1}, \mathcal{Y}(v^n, z_n) \cdots \mathcal{Y}(v^1, z_1) \mathbf{1} \rangle \quad (U \text{ 上の関数で真空期待値と呼ばれる})$$

また、 $\mathcal{Y}(\exists L(-1)v^j, z) = \frac{d}{dz}\mathcal{Y}(v^j, z)$ 、即ち微分を与える作用 $L(-1)$ を持つ。

真空期待値の中で、**1** で挟まれた部分は作用素の積なので、それらは一種の代数をなしている。この中で Virasoro 代数の表現を適切な設定の下で含むものが共形場理論である。

真空期待値の左端の $\mathcal{Y}(v^n, z_n)$ を随伴作用で左に移動させ、 $\mathcal{Y}(v, z)\mathbf{1}$ は $\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{Y}(v, z)\mathbf{1} = v$ が分かれば判断できるので、通常は

$$\langle v^n, \mathcal{Y}(v^{n-1}, z_{n-1}) \cdots \mathcal{Y}(v^2, z_2)v^1 \rangle$$

を考える。この中で、4点相關関数 $\langle \theta, \mathcal{Y}(v, x)\mathcal{Y}(u, y)w \rangle$ が今回の研究対象である。

Borcherds は、Moonshine 予想（モンスター単純群の表現次数と楕円モジュラー関数の係数との神秘的な一致の理由を求めた）を解決するために、場の理論の次数部分を重要視した新しい概念「頂点代数 (VA)」を導入した。少し詳しく説明すると、Virasoro 代数の標準的な表現と同じように、整数次数を中心に据えて、

$$\alpha(z) = \mathcal{Y}(\alpha, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1}$$

とローラン展開できるもので、開空間 $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \neq y\}$ 上で互いに可換（局所可換）

$$(x - y)^N [\mathcal{Y}(\alpha, x), \mathcal{Y}(\beta, y)] = 0 \quad N \gg 0$$

かつ代数として結合性

$$\langle \theta, \mathcal{Y}(\alpha, x) \mathcal{Y}(\beta, y) w \rangle = \langle \theta, \mathcal{Y}(\mathcal{Y}(\alpha, x - y) \beta, y) w \rangle$$

を満たすものからなる集合 $V = \{\mathcal{Y}(\alpha, z) \mid \alpha \in \Gamma\}$ が頂点代数となる。次数に関しては、

$$\text{wt}(\alpha_n v) = \text{wt}(\alpha) + \text{wt}(v) - n - 1$$

を満たすように定義する。局所可換と結合性を成分表示すると、綺麗な表示を持つ。

$$\begin{aligned} [\alpha_n, \beta(z)] &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (\alpha_j \beta)(z) z^{n-j} \\ (\alpha_m \beta)(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} (-1)^j \{ \alpha_{m-j} z^j \beta(z) - (-1)^m \beta(z) \alpha_j z^{m-j} \} \end{aligned}$$

Truncation property

ただ、上記の関係式が定義可能（右が有限和）であるために、“ $j \gg 0$ なら $\alpha_j \beta = 0$ ”が成り立つ”ことを条件として加える。

頂点代数の中で、Virasoro 元を含み、齊次空間が有限次元となるなどの条件を満たすものを頂点作用素代数と呼んでいる。次に、 V を頂点作用素代数とし、 V -加群 A, B の元達の積を考える。特に、 V -加群 C に対して、積の C への像を調べる。言い換えると、 $v \in A$, $u \in B$, $w \in C^\vee$ (dual) に対する 3 点相関関数 $\langle w, \mathcal{Y}(v, x) u \rangle$ を考えるわけである（ここで、 $\mathcal{Y}(v, x)$ はある交絡作用素である。）この段階では、 $\mathcal{Y}(v, x)$ の形は不明であり、局所可換性と加群という条件以外は分からぬ。この形を少し考察しよう。

定義 領域 U 上の局所交絡作用素

$$\mathcal{Y} : A \otimes B \rightarrow C \otimes \mathcal{O}(U)$$

とは、($v \in A$, $u \in B$, $\theta \in C^\vee$, $z \in U$ に対する値を $\langle \theta, \mathcal{Y}(v, z) u \rangle$ で表示) $\alpha \in V, m \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$(I1) \langle \theta, [\alpha_m, \mathcal{Y}(v, z)] u \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} \langle \theta, \mathcal{Y}(\alpha_j v, z) u \rangle z^{m-j},$$

$$(I2) \langle \theta, \mathcal{Y}(\alpha_m v, z) u \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} (-1)^j \langle \theta, \{ \alpha_{m-j} z^j \mathcal{Y}(v, z) u - (-1)^m \mathcal{Y}(v, z) \alpha_j z^{m-j} u \} \rangle,$$

$$(I3) \langle \theta, \mathcal{Y}(L(-1)v, z) u \rangle = \frac{d}{dz} \langle \theta, \mathcal{Y}(v, z) u \rangle$$

を満たすものである。ここで、 $\langle \theta, \alpha_m \mathcal{Y}(v, z) u \rangle$ は $\langle (\alpha_m)^* \theta, \mathcal{Y}(v, z) u \rangle$ のことである。ここで $(\alpha_m)^*$ は α_m の隨伴作用で、 $\mathcal{O}(U)$ は U 上の正則関数の集合を表す。

これが本来考えるべき交絡作用素だが、歴史的には最初に $\mathcal{Y}(v, z)$ として、 \mathbb{C} -冪級数型のもの

$$\mathcal{Y}(v, z) = \sum_{m \in \mathbb{C}} v_m z^{-m-1}$$

(加群が完全可約ならこれで十分) のみを扱い、昨今は、logarithm 関数 $\log(z)$ の有限幂を含む logarithmic 交絡作用素

$$\mathcal{Y}(v, z) = \sum_{k=0}^K \sum_{m \in \mathbb{C}} v_{m,k} z^{-m-1} \log^k(z)$$

(V が C_2 -cofinite なら十分) の研究へと進んできた。ただ、後で示すように、今回もこれで十分である。ここでは、この集合を $I\left(\begin{smallmatrix} C \\ AB \end{smallmatrix}\right)$ で表す。

§2 今回の結果 Huang と Lepowsky[1995] が fusion 積の概念 $\boxtimes_{p(x)}$ を導入している。

- V -加群 A, B の fusion 積 $(A \boxtimes B, \mathcal{Y}^{AB})$ とは $A \boxtimes B$ が V -加群であり、 $\mathcal{Y}^{AB} \in I\left(\begin{smallmatrix} A \boxtimes B \\ AB \end{smallmatrix}\right)$ であって、任意の交絡作用素 $\mathcal{Y} \in I\left(\begin{smallmatrix} C \\ AB \end{smallmatrix}\right)$ に対して、写像 $\phi : A \boxtimes B \rightarrow C$ があって、 $\phi \circ \mathcal{Y}^{AB} = \mathcal{Y}$ を満たすものである。
- 一般に、VOA 加群の fusion 積が存在するとは限らないが、今回の設定 “ C_1 -cofinite N-gradable 加群”(射は V -homo) のカテゴリーの範囲では、fusion 積 $A \boxtimes B$ が存在する [M2014]。この時、fusion 積と全射交絡作用素 $\mathcal{Y}^{AB} \in I\left(\begin{smallmatrix} A \boxtimes B \\ AB \end{smallmatrix}\right)$ との対 $(A \boxtimes B, \mathcal{Y}^{AB})$ で扱うほうが扱い易い。

用語： V -加群 W が ” C_1 -cofinite” とは、

$$C_1(W) := \text{span}_{\mathbb{C}}\{\alpha_{-1}w \in W \mid w \in W, \alpha \in V, \text{wt}(\alpha) \geq 1\}$$

が余有限次元 ($\dim V/C_1(W) < \infty$) を持つことである。また、

- (2) **N-gradable** とは、 $\alpha \in V$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\alpha_k W_{(m)} \subseteq W_{(m+\text{wt}(\alpha)-k-1)}$ を満たす分解 $W = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} W_{(m)}$ を持つことである。

これはかなり広い範囲の加群をカバーする。

- 物理において、「energy level は下限を持つ」と考えることが多いので、対応する加群は N-gradable となる。
- 既知の有限型 VOA は C_2 -cofinite なので、直既約加群は C_1 -cofinite N-gradable。
- 有限リーダ数から構成されたアフィン VOA では、トップ加群が有限次元である直既約 N-加群はすべて C_1 -cofinite である。
- 格子 VOA を作る時の基本である Heisenberg 代数 VOA も上と同様である。

以下、 \mathcal{NC}_1 で C_1 -cofinite N-gradable 加群の集合を表す。

§2.1 Huang[2005] の結果

- Huang は C_1 -cofinite N-gradable 加群に対する 4 点相関関数が確定特異点を持つ微分方程式を満たすことを証明。その応用として、 C_2 -cofinite という強い条件の下で、fusion 積

の結合律を示した。

強い条件を課した理由は、各 $y_0 \in \mathbb{C}$, $\vec{\xi} = (\theta, v, u, w)$ 毎に、微分方程式の解として展開

$$\langle \theta, \mathcal{Y}(v, x)\mathcal{Y}(u, y_0)w \rangle = \sum_{k=0}^K \sum_{m \in \mathbb{C}} r_{m,k}(\vec{\xi}; y_0)(x - y_0)^{-m-1} \log^k(x - y_0)$$

を得ることが出来るので、形式的作用素を $\mathcal{Y}^3, \mathcal{Y}^4$ を使って

$$\langle \theta, \mathcal{Y}(v, x)\mathcal{Y}(u, y_0)w \rangle = \langle \theta, \mathcal{Y}^3(\mathcal{Y}^4(v, x - y_0)u, y_0)w \rangle$$

という展開は得られる。ただその後、 $\mathcal{Y}^3, \mathcal{Y}^4$ が交絡作用素であることを示したいが、

- (1) \mathcal{Y}^4 の truncation property が不明？
- (2) \mathcal{Y}^3 の形が不明？

という問題が残る。Huang はこれらを解決するために強い条件を使った。今回は、解の姿が分かり易いベクトル型微分方程式 Fuchsian system を使って、この問題を解決した。

§3 ベクトル型微分方程式 [Heu2019]

定義 1 $A \in M_{r \times r}(\mathcal{O}(U))$ をある領域 $z_0 \in U \subseteq \mathbb{C}$ (*open*) 上で正則関数であるような成分を持つ正方行列値関数とする。特に、 $A_n \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$ があって $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - z_0)^n$ と表示できる。この時、

$$\frac{d}{dz} Y = \frac{A}{z - z_0} Y$$

となる微分方程式を（ベクトル型）Fuchsian system と呼ぶ。特に、 $A \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$ の時（即ち、 $A = A_0$ ）には、Euler system と呼ぶ。

§3.1 オイラー系の解

$A = A_0$ の場合には、 $\exists G \in GL_r(\mathbb{C})$ が存在して、 GAG^{-1} は Jordan 標準形となり、しかも

$$\frac{d}{dz}(GY) = G \frac{d}{dz} Y = \frac{GAG^{-1}}{z - z_0}(GY)$$

なので、解を求めるには、 $A = A_0$ が Jordan 細胞 $J_r(a)$ の場合を調べれば良い。この時、 $Y = {}^t(f_1, \dots, f_r)$ は $(z - z_0) \frac{d}{dz} f_i = af_i + f_{i+1}$ を満たすので、ベクトル解の成分 f_j は $\{(z - z_0)^a \log^s(z - z_0) \mid 0 \leq s < r\}$ の線形和となることが分かる。

定義 2 (Def 3.6 in Heu2019) $\frac{d}{dz} Y = \frac{A}{z - z_0} Y$ が Levelt normal form であるとは、 $\text{ad}(b_s)(A_k) = kA_k$ を満たすものである。ここで、 $A_0 = b_s + b_n$ は Dunford 分解である。

§3.2 ベクトル型 Fuchsian system の解 [Heu2019]

Levelt normal form を経由して次のような関係がある。

$$\begin{array}{ll}
\frac{d}{dz}Y = \frac{1}{z}AY & A = \sum_{n=0}^{\infty} A_0 z^n \in M_{r,r}(\mathbb{C})[[z]] \\
\Updownarrow & \text{正則ゲージ変換 } \text{GL}_r(\mathbb{C}[[z]]) \text{ によって移る} \\
\frac{d}{dz}Y = \frac{1}{z}A'Y & A' \text{ Levelt normal form} \\
\downarrow & \text{解析ゲージ変換 } \text{diag}(z^{\ell_j})\text{GL}_r(\mathbb{C}[[z]]) \text{ によって移る} \\
& \text{ここで } \ell_j \in \mathbb{Z}, 0 \leq \Re(d_j) - \ell_j < 1, A(0), A'(0) \text{ の固有値 } \exists d_j. \\
\frac{d}{dz}Y = \frac{1}{z}A'(0)Y & \text{Euler system}
\end{array}$$

それゆえ、次の結果を得る。

Fuchsian system の解 —————

定理 3 $\{d_1, \dots, d_r\}$ を A_0 の固有値の集合とし、 $\ell_i \in \mathbb{Z}$ を $0 \leq \Re(d_i) - \ell_i < 1$ を満たすように選ぶ。ここで $\Re(d_i)$ は d_i の実数部分。この時、 $\frac{d}{dz}Y = \frac{A}{z}Y$ の解の成分は

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{t=0}^K r_{i,m,t}^j z^{d_j - \ell_i + m} \log^t(z)$$

と書ける。 $(r_{i,m,t}^j \in \mathbb{C}$ であり、 K は A_0 の中の Jordan 細胞のサイズの最大値。) 特に、 z の幕の実数部分の最小値や $\log(z)$ の幕は A_0 の固有値や Jordan 細胞のサイズで決まる。

定理 4 (H2019 Th1.6) 行列幕級数 $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k$ ($A_k \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$) の収束半径を $R > 0$ とする。この時、 $\frac{d}{dz}Y = \frac{A}{z-z_0}Y$ を満たす形式的幕級数 $Y = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k (z - z_0)^k$ ($Y_k \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$) の収束半径は R 以上である

§4 C_1 -cofinite \mathbb{N} -gradable 加群の性質

$W = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} W_{(m)} \in \mathcal{NC}_1$ が直既約なら、

- (1) $\dim W_{(m)} < \infty$ 。
- (2) $L(0)$ の固有値 s の一般固有空間 W_s も有限次元、
- (3) $d = \exists d(W) \in \mathbb{C}$ が存在して、 $W = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} W_{d+m}$ である。

それゆえ、 $W^\vee = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \text{Hom}(W_{(m)}, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{d \in \mathbb{C}} \text{Hom}(W_d, \mathbb{C})$ であり、制限双対は次数の取り方に依存せず、一意的に決まる。

用語 各 s に対して、 W_s の元 w を齊次元と呼び、 $\text{wt}(w) = s$ で表す。 W は直既約加群なので、 $W_{(m)}$ を W_{d+m} と定義することで \mathbb{N} -次数分解 $W = \bigoplus_{m=0}^{\infty} W_{(m)}$ を得る。以下、 $w \in W_{(m)}$ を $\text{gr}(w) = m$ と書き、 w の次数と呼ぶ。

$A, B, C \in \mathcal{NC}_1$ と、 $v \in A, u \in B, \theta \in C^\vee$ と局所交絡作用素 $\mathcal{Y}(v, z) \in I\left(\begin{smallmatrix} C \\ AB \end{smallmatrix}\right)$ に対して、後で証明する方法で（適切な有限集合 $\Gamma = \{(\theta^i, v^i, u^i) : i \in Z\}$ を取って）、ベクトル型関数

$$Y = (\langle \theta^i, \mathcal{Y}(v^i, z)u^i \rangle)_{i \in Z}$$

は Euler system を満たす。それゆえ、次を得る。

logarithm 交絡作用素 —————

定理 5 $A, B, C \in \mathcal{NC}_1$ とすると、局所交絡作用素は、*logarithmic* 交絡作用素（の U への制限）である。

この結果は結合律の証明の最終段階で利用する。

§5 4 点相関関数

記号 直既約 $A, B, C \in \mathcal{NC}_1$ に対して、 $\Omega = (A \boxtimes (B \boxtimes C))^\vee \times A \times B \times C$ と置き、 $\vec{\xi}$ で 4 組の 1 つ $(\theta, v, u, w) \in \Omega$ を表す。例えば、 $F_{h,k}^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y) = F_{h,k}^{A(BC)}(\theta, v, u, w; x, y)$ である。また、 $\alpha \in V$ に対して、 $\alpha_n^{[i]}$ で、 Ω の i 番目座標への作用 α_n を表す。例えば、 $\alpha_n^{[2]}\vec{\xi} = (\theta, \alpha_n v, u, w)$ である。

$((A \boxtimes B) \boxtimes C, \mathcal{Y}^{(AB)C})$ と $(A \boxtimes (B \boxtimes C), \mathcal{Y}^{A(BC)})$ の logarithmic 交絡作用素を ($v \in A, u \in B, \delta \in A \boxtimes B$ に対して)

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^{A(BC)}(v, x) &= \sum_{h=0}^{K_1} \mathcal{Y}_h^{A(BC)}(v, x) \log^h(x), \\ \mathcal{Y}^{BC}(u, y) &= \sum_{k=0}^{K_2} \mathcal{Y}_k^{BC}(u, y) \log^k(y), \\ \mathcal{Y}^{AB}(v, x - y) &= \sum_{h=0}^{K_3} \mathcal{Y}_h^{AB}(v, x - y) \log^h(x - y), \\ \mathcal{Y}^{(AB)C}(\delta, y) &= \sum_{k=0}^{K_4} \mathcal{Y}_k^{(AB)C}(\delta, y) \log^k(y),\end{aligned}$$

と書き、 $\theta \in (A \boxtimes (B \boxtimes C))^\vee, \theta' \in ((A \boxtimes B) \boxtimes C)^\vee$ に対し、4 点相関関数を

$$\begin{aligned}F^{12}(\vec{\xi}; x, y) &= F^{A(BC)}(\theta, v, u, w; x, y) \\ &:= \langle \theta, \mathcal{Y}^{A(BC)}(v, x) \mathcal{Y}^{BC}(u, y) w \rangle, \\ F^{34}(\vec{\xi}'; x, y) &= F^{(AB)C}(\theta', v, u, w; x - y, y) \\ &:= \langle \theta', \mathcal{Y}^{(AB)C}(\mathcal{Y}^{AB}(v, x - y) u, y) w \rangle, \\ F_{h,k}^{12}(\vec{\xi}; x, y) &= F_{h,k}^{A(BC)}(\theta, v, u, w; x, y) \\ &:= \langle \theta, \mathcal{Y}_h^{A(BC)}(v, x) \mathcal{Y}_k^{BC}(u, y) w \rangle, \\ F_{h,k}^{34}(\vec{\xi}'; x, y) &= F_{h,k}^{(AB)C}(\theta', v, u, w; x - y, y) \\ &:= \langle \theta', \mathcal{Y}_h^{(AB)C}(\mathcal{Y}_k^{AB}(v, x - y) u, y) w \rangle\end{aligned}$$

で表す。ここで、 $\vec{\xi}' = (\theta', v, u, w)$ かつ $\theta' \in ((A \boxtimes B) \boxtimes C)^\vee$ である。

補題 6 (Borcherds 恒等式) $\alpha \in V, n \in \mathbb{Z}$ に対し、次の等式を得る。ここで、右辺の式の係数は、(1A) ~ (4A) では $\iota_{x,y}$ ($|x| > |y| > 0$) での展開、(1B) ~ (4B) では $\iota_{y,x-y}$ ($|y| > |x - y| > 0$) での展開を考えている：

$$\begin{aligned}(1A) \quad &F^{12}((\alpha_n)^{*[1]}\vec{\xi}; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{12}(\alpha_j^{[2]}\vec{\xi}; x, y) x^{n-j} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{12}(\alpha_j^{[3]}\vec{\xi}; x, y) y^{n-j} + F^{12}(\alpha_n^{[4]}\vec{\xi}; x, y). \\ (1B) \quad &F^{34}((\alpha_n)^{*[1]}\vec{\xi}'; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{34}(\alpha_j^{[2]}\vec{\xi}'; x, y) \iota_{y,x-y} \{x^{n-j}\} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{34}(\alpha_j^{[3]}\vec{\xi}'; x, y) y^{n-j} + F^{34}(\alpha_n^{[4]}\vec{\xi}'; x, y).\end{aligned}$$

- $$(2A) F^{12}(\alpha_n^{[2]}\vec{\xi}; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{12}((\alpha_{n-j})^{*[1]}\vec{\xi}; x, y)(-x)^j$$
- $$- \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{12}(\alpha_i^{[3]}\vec{\xi}; x, y)\iota_{x,y}\{(-x+y)^{n-j}\} - \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{12}(\alpha_j^{[4]}\vec{\xi}; x, y)(-x)^{n-j}.$$
- $$(2B) F^{34}(\alpha_n^{[2]}\vec{\xi}; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{34}((\alpha_{n-j})^{*[1]}\vec{\xi}; x, y)\iota_{y,x-y}\{(-x)^j\}$$
- $$- \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{34}(\alpha_j^{[3]}\vec{\xi}; x, y)(-x+y)^{n-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{34}(\alpha_j^{[4]}\vec{\xi}; x, y)\iota_{y,x-y}\{(-x)^{n-j}\}.$$
- $$(3A) F^{12}(\alpha_n^{[3]}\vec{\xi}; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^j F^{12}((\alpha_{n-j})^{*[1]}\vec{\xi}; x, y)y^j$$
- $$- \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{12}(\alpha_j^{[2]}\vec{\xi}; x, y)\iota_{x,y}\{(x-y)^{n-j}\} - \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^{j+n} F^{12}(\alpha_i^{[4]}\vec{\xi}; x, y)y^{n-j}.$$
- $$(3B) F^{34}(\alpha_n^{[3]}\vec{\xi}; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^j F^{34}((\alpha_{n-j})^{*[1]}\vec{\xi}; x, y)y^j$$
- $$- \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{34}(\alpha_j^{[2]}\vec{\xi}; x, y)(x-y)^{n-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^{j+n} F^{34}(\alpha_j^{[4]}\vec{\xi}; x, y)y^{n-j}.$$
- $$(4A) F^{12}(\alpha_n^{[4]}\vec{\xi}; x, y) = F^{12}((\alpha_n)^{*[1]}\vec{\xi}; x, y) - \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{12}(\alpha_j^{[2]}\vec{\xi}; x, y)x^{n-j}$$
- $$- \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{12}(\alpha_j^{[3]}\vec{\xi}; x, y)y^{n-j}.$$
- $$(4B) F^{34}(\alpha_n^{[4]}\vec{\xi}; x, y) = F^{34}((\alpha_n)^{*[1]}\vec{\xi}; x, y) - \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{34}(\alpha_j^{[2]}\vec{\xi}; x, y)\iota_{y,x-y}\{x^{n-j}\}$$
- $$- \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} F^{34}(\alpha_j^{[3]}\vec{\xi}; x, y)y^{n-j}.$$

ここで、 $(\alpha_m)^*$ は α_m の隨伴作用であり、展開は、

$$\iota_{x,y}\{(x-y)^s\} := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{s}{j} x^{s-j}(-y)^j,$$

$$\iota_{y,x-y}\{x^s\} := \iota_{y,x-y}\{(y+(x-y))^s\} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{s}{j} y^{s-j}(x-y)^j$$

観察 1 ○ 右辺の係数はすべて $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, \tau_{x,y}\{(x-y)^{\pm 1}\}, \tau_{y,x-y}\{x^{\pm 1}\}]$ の元。

○ 各 $m = 1, \dots, 4$ に対して、(mA) における $F^{12}(\alpha_n^{[m]}\vec{\xi}; x, y)$ の RHS の $F^{12}(\alpha_j^{[\ell]}\vec{\xi}; x, y)$ の係数と (mB) における $F^{34}(\alpha_n^{[m]}\vec{\xi}; x, y)$ の RHS の $F^{34}(\alpha_j^{[\ell]}\vec{\xi}; x, y)$ の係数は展開 ($\iota_{x,y}$ か $\iota_{x-y,y}$) を除いて一致する。特に領域 $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < |x-y| < |y| < |x|\}$ で考えると、(mA) と (mB) の右辺への展開は一致している。

Borcherds 恒等式の価値

- (i) 局所交絡作用素の性質 (I 1), (I 2) は、truncation property が分かれれば、これから逆に導き出せる。
- (ii) F^{12} の式を $\iota_{x-y,y}$ で展開しても、Borcherds 恒等式 (mA) は成り立っている。しかも、上の考察より、(mA) = (mB) なので、それは F^{34} 型の Borcherds 恒等式である。もし形式的な作用素の積なら、(i) より、局所交絡作用素の積となることが分かる

恒等式の証明は、局所可換と結合法則で展開し、次の恒等式の係数でまとめるだけ。

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} \binom{j}{\ell} x^{n-j} y^{j-\ell} Z^{\ell} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{n}{\ell} \iota_{x,y}\{(x+y)^{n-\ell}\} Z^{\ell} \\ \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \binom{n-j}{i} \binom{n}{j} (-1)^{i+j} (x-y)^j y^i Z^{i+j} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{n}{\ell} (-1)^{\ell} \iota_{y,x-y}\{x^{\ell}\} Z^{\ell} \end{aligned}$$

§6 主定理の証明の流れ

まずは、片方の変数を固定し、一変数関数と考える。

§6.1. 2つの Fuchsian system の作成

微分方程式を得る為に、有限集合を使う。 V -加群 W に対して、次の記号を準備する。

設定

- P_W を $W = P_W + C_1(W)$ を満たす齊次元で張られた補空間とし、
- $P_W \subseteq \tilde{P}_W$ で $\dim \tilde{P}_W < \infty$ を満たし、かつ齊次空間の直和となるものをとり、
- $N \in \mathbb{N}$ を 1つ固定し、
- $W_{(\leq N)}^\vee = \bigoplus_{m=0}^N \text{Hom}(W_{(m)}, \mathbb{C})$ を定義し、
- $\Omega_N = \{(\theta, v, u, w) \in (A \boxtimes (B \boxtimes C))_{(\leq N)}^\vee \times A \times B \times C\}$ と置き、
- $\tilde{P}_A, \tilde{P}_B, \tilde{P}_C, (A \boxtimes (B \boxtimes C))_{(\leq N)}^\vee$ 達の齊次元からなる基底 $J_{\tilde{P}_A}, J_{\tilde{P}_B}, J_{\tilde{P}_C}, J_N$ を固定しておく。さらに、4組 $\mathcal{J}_N = J_N \times J_{\tilde{P}_A} \times J_{\tilde{P}_B} \times J_{\tilde{P}_C}$ と $\mathcal{J}_N^0 = J_N \times J_{P_A} \times J_{P_B} \times J_{P_C}$ を定義しておく。これらは有限集合である。
- $\vec{\xi} = (\theta, v, u, w) \in \mathcal{J}_N$ に対して、 $\text{gr}^{234}(\vec{\xi}) = \text{gr}(v) + \text{gr}(u) + \text{gr}(w)$ と置く。

○ 先に、 θ, v, u, w が与えられた場合、空間 $\langle \mathcal{J}_N \rangle$ は $N, \tilde{P}_A, \tilde{P}_B, \tilde{P}_C$ を大きくとると、 $(A \boxtimes (B \boxtimes C))_{(\leq N)}^\vee, \tilde{P}_A, \tilde{P}_B, \tilde{P}_C$ は、 θ, v, u, w 達を含むように出来るので、そこでそれらを固定し、議論を始める。

まずは、 $n = -1$ の時の Borcherds 恒等式を再度詳細に見てみる。

表 1: $n = -1$ の場合の Borcherds 恒等式

Borcherds 恒等式	D: 係数	q	$D \times (x-y)^q$ と $D \times y^q$
(2A) $F(\alpha_{-1}^{[2]}\vec{\xi}) \times$	1	0	1
$= \sum_{j=0}^{\infty} F(((\alpha_{-1-j})^*)^{[1]}\vec{\xi}) \times x^j$	$\text{wt}(\alpha)$	負幕は無い	
$+ \sum_{j=0}^{\infty} F(\alpha_j^{[3]}\vec{\xi}) \times \iota_{x,y}\{(x-y)^{-j-1}\}$	j+1	1 と $(x-y)^{-j-1}y^{j+1}$	
$+ \sum_{j=0}^{\infty} F(\alpha_j^{[4]}\vec{\xi}) \times x^{-j-1}.$	j+1	$((x-y)/x)^{j+1}$ と $(y/x)^{j+1}$	
(3A) $F(\alpha_{-1}^{[3]}\vec{\xi}) \times$	1	0	1
$= \sum_{j=0}^{\infty} F(((\alpha_{-1-j})^*)^{[1]}\vec{\xi}) \times y^j$	$\text{wt}(\alpha)$	負幕は無い	
$- \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j F(\alpha_j^{[2]}\vec{\xi}) \times \iota_{x,y}\{(x-y)^{-j-1}\}$	j+1	1 と $(x-y)^{-j-1}y^{j+1}$	
$+ \sum_{j=0}^{\infty} F(\alpha_j^{[4]}\vec{\xi}) \times y^{-j-1}.$	j+1	$y^{-j-1}(x-y)^{j+1}$ と 1	
(4A) $F(\alpha_{-1}^{[4]}\vec{\xi}) \times$	1	0	1
$= F(((\alpha_{-1})^*)^{[1]}\vec{\xi}) \times$	1	$\text{wt}(\alpha)$	負幕は無い
$- \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j F(\alpha_j^{[3]}\vec{\xi}) \times y^{-j-1}$	j+1	$(x-y)^{j+1}y^{-j-1}$ と 1	
$- \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j F(\alpha_j^{[2]}\vec{\xi}) \times x^{-j-1}.$	j+1	$((x-y)/x)^{j+1}$ と $(y/x)^{j+1}$	

最初の列は $n = -1$ に対する Borcherds 恒等式で、 $F(\vec{\xi})$ は $F_{h,k}^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y)$ を表す。

q は (mA) の 4 つ組 $\alpha_j^{[i]}\vec{\xi}$ に対する $\text{gr}^{234}(\alpha_{-1}^{[m]}\vec{\xi}) - \text{gr}^{234}(\alpha_j^{[i]}\vec{\xi})$ を表す。

観察 2 $\text{gr}((\alpha_{-1-j})^*\theta) < \text{gr}(\theta)$ なので、 $\alpha \in V_{\geq 1}, j \in \mathbb{N}$ に対して、 $(\alpha_{-1-j})^*\theta \in (A \boxtimes (B \boxtimes C))_{(< N)}^\vee$ を得る。 $j \in \mathbb{N}$ に対しては、 $\text{gr}(\alpha_j w) = \text{gr}(\alpha_{-1} w) - j - 1$ なので、RHS の各項の

4成分の合計次数は LHS の合計次数より小さい。それゆえ、 $\alpha \in V$ を使って $\alpha_{-1}\delta$ 型の元 ($C_1(A), C_1(B)$ または $C_1(C)$ の元) が出てくる限り右辺への展開を繰り返すと、最終的に次を得る。

観察 2 の結論

$F_{h,k}^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y)$ は $\{F_{h,k}^{A(BC)}(\vec{\mu}; x, y) : \vec{\mu} \in \mathcal{J}_N^0\}$ 達の線形和で表示でき、係数は $\mathbb{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, \iota_{x,y}\{(x-y)^{-1}\}]$ から取れる。

観察 3 $D \times (x-y)^q$ の場合、負幕は x または y の幕のみである。

$D \times y^q$ の場合は、負幕は $(x-y)$ または x の幕のみである。

それゆえ、次数を動かして、

$$\begin{aligned} G_{h,k}^{A(BC):y}(\vec{\xi}; x_0, y) &= F_{h,k}^{A(BC)}(\vec{\xi}; x_0, y) y^{\text{gr}^{234}(\vec{\xi})}, \\ G_{h,k}^{A(BC):x-y}(\vec{\xi}; x, y_0) &= F_{h,k}^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y_0) (x-y_0)^{\text{gr}^{234}(\vec{\xi})} \end{aligned}$$

を考えると、 $G^{A(BC)}$ に対する次の簡約定理を得る。

定理 7 $\forall \vec{\xi} = (\theta, v, u, w) \in \Omega_N$, $\alpha \in V$ と $x_0 \neq 0 \neq y_0$ に対して、次を得る。

(1) $G_{h,k}^{A(BC):y}(\vec{\xi}; x_0, y)$ は $\{G_{h,k}^{A(BC):y}(\vec{\mu}; x_0, y) : \vec{\mu} \in \mathcal{J}_N^0\}$ の線形和で、係数は

$\mathbb{C}[\iota_{x_0,y}\{(x_0-y)^{-1}\}][y] \subseteq \mathbb{C}[[y]]$ から取れる。

(2) $G_{h,k}^{A(BC):x-y}(\vec{\xi}; x, y_0)$ は $\{G_{h,k}^{A(BC):x-y}(\vec{\mu}; x, y_0) : \vec{\mu} \in \mathcal{J}_N^0\}$ の線形和で、係数は

$\mathbb{C}[x, \iota_{y_0,x-y_0}\{x^{-1}\}][x-y_0] \subseteq \mathbb{C}[[x-y_0]]$ から取れる。

しかも、係数を法 $\mathbb{C}[[x-y_0]](x-y_0)$ で考えると、

$$\begin{aligned} G_{h,k}^{A(BC):x-y}(\alpha_{-1}^{[2]} \vec{\xi}; x, y_0) &\equiv \sum_{j=0}^{\infty} G_{h,k}^{A(BC):x-y}(\alpha_j^{[3]} \vec{\xi}; x, y_0) \\ G_{h,k}^{A(BC):x-y}(\alpha_{-1}^{[3]} \vec{\xi}; x, y_0) &\equiv \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} G_{h,k}^{A(BC):x-y}(\alpha_j^{[2]} \vec{\xi}; x, y_0) \\ G_{h,k}^{A(BC):x-y}(\alpha_{-1}^{[4]} \vec{\xi}; x, y_0) &\equiv 0 \end{aligned}$$

を得る。これらが *Fuchsian system A* の定数行列 A_0 に対応している。即ち、この展開は定数係数と $[2] \rightarrow [3]$, $[3] \rightarrow [2]$ の移動のみで、他は 0 となっている。

$L(-1)$ -微分を使うことで、

$$\begin{aligned} F^{A(BC)}(L(-1)^{[3]} \vec{\xi}; x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} F^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y), \\ F^{A(BC)}(L(-1)^{[2]} \vec{\xi}; x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} F^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y) \end{aligned}$$

が成り立っている。上記により、 $\lambda_{\vec{\mu}, p, q}^{34, \vec{\xi}, h, k}(x_0, y) \in \mathbb{C}[\iota_{x_0,y}\{(x_0-y)^{-1}\}][y]$ と

$\lambda_{\vec{\mu}, p, q}^{23, \vec{\xi}, h, k}(x, y_0) \in \mathbb{C}[x, \iota_{y_0,x-y_0}\{x^{-1}\}][x-y_0]$ が存在して、形式的 \mathbb{C} -幕級数として、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} G_{h,k}^{A(BC):y}(\vec{\xi}; x_0, y) &= \frac{1}{y} \sum_{\vec{\mu} \in \mathcal{J}_N^0} \sum_{(p,q) \in K^2} \lambda_{\vec{\mu}, p, q}^{34, \vec{\xi}, h, k}(x_0, y) G_{p,q}^{A(BC):y}(\vec{\mu}; x_0, y), \\ \frac{\partial}{\partial x} G_{h,k}^{A(BC):x-y}(\vec{\xi}; x, y_0) &= \frac{1}{x-y_0} \sum_{\vec{\mu} \in \mathcal{J}_N^0} \sum_{(p,q) \in K^2} \lambda_{\vec{\mu}, p, q}^{23, \vec{\xi}, h, k}(x, y_0) G_{p,q}^{A(BC):x-y}(\vec{\mu}; x, y_0) \end{aligned}$$

となる。 $r=|\mathcal{J}_N||K^2|$ と置き、行列値関数

$$\begin{aligned}\Lambda^{23}(x, y_0) &= \left(\lambda_{\vec{\mu}, p, q}^{23, \vec{\xi}, h, k}(x, y_0) \right)_{(\vec{\xi}, h, k), (\vec{\mu}, p, q) \in \mathcal{J}_N \times K^2} \in M_{r \times r}(\mathcal{O}(\mathbb{D}_{|y_0|}(y_0))) \\ \Lambda^{34}(x_0, y) &= \left(\lambda_{\vec{\mu}, p, q}^{34, \vec{\xi}, h, k}(x_0, y) \right)_{(\vec{\xi}, h, k), (\vec{\mu}, p, q) \in \mathcal{J}_N \times K^2} \in M_{r \times r}(\mathcal{O}(\mathbb{D}_{|x_0|}(0)))\end{aligned}$$

を定義する。ここで、 $\mathbb{D}_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ であり、 $\mathcal{O}(U)$ は U の正則関数全体を表す。また、 $\vec{\mu} \notin \mathcal{J}_N^0$ なら、 $\lambda_{\vec{\mu}, p, q}^{23, \vec{\xi}, h, k} = 0 = \lambda_{\vec{\mu}, p, q}^{34, \vec{\xi}, h, k}$ である。この時、 $L(-1)$ -微分を使うことで、

$$\begin{aligned}F^{A(BC)}(L(-1)^{[3]}\vec{\xi}; x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} F^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y), \\ F^{A(BC)}(L(-1)^{[2]}\vec{\xi}; x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} F^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y)\end{aligned}$$

を得る。

ベクトル型微分方程式

定理 8 $x_0 \neq 0$ と $N \in \mathbb{N}$ を固定する。この時、ベクトル値関数

$$G^y(x_0, y) := \left(G_{h, k}^{A(BC):y}(\vec{\xi}; x_0, y) \right)_{\vec{\xi} \in \mathcal{J}_N, (h, k) \in K^2}$$

は $\mathbb{D}_{|x_0|}(0)$ 上で、極 $\{0\}$ を持つ *Fuchsian system*

$$\frac{d}{dy} G^y(x_0, y) = \frac{\Lambda^{34}(x_0, y)}{y} G^y(x_0, y) a \quad (D1)$$

を満す。同様に、 $0 \neq y_0$ と $N \in \mathbb{N}$ を固定すると、ベクトル値関数

$$G^{x-y}(x, y_0) := \left(G_{h, k}^{A(BC):x-y}(\vec{\xi}; x, y_0) \right)_{\vec{\xi} \in \mathcal{J}_N, (h, k) \in K^2}$$

は $\mathbb{D}_{|y_0|}(y_0)$ 上で、極 $\{y_0\}$ を持つ *Fuchsian system*

$$\frac{d}{dx} G^{x-y}(x, y_0) = \frac{\Lambda^{23}(x, y_0)}{x - y_0} G^{x-y}(x, y_0) \quad (D2)$$

を満す。しかも、*D1* と *D2* の定数行列 $\Lambda^{34}(x_0, 0)$ と $\Lambda^{23}(y_0, y_0)$ のゼロでない固有値（重複は無視）の集合は $C_1(A), C_1(B)$ の補空間 P_A と P_B の基底 J_{P_A} と J_{P_B} の選択だけで決まる。

$G^{A(BC)}$ の (D1) と $G^{(AB)C}$ の (D2) の系として次を得る。

系 9 $F_{h, k}^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y)$ と $F_{h, k}^{(AB)C}(\vec{\xi}; x - y, y)$ は $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < |y| < |x|\}$ と $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < |x - y| < |y|\}$ 上でそれぞれ絶対収束する。

§6.2 1 値関数と $\tau_{y, x-y}$ での展開

4 点相関関数と微分方程式の解は形の違う多価関数なので、そのままでは比較できない。そこで、領域を小さくして、その上で規則を決めて branch を取り、両方を一価関数とみてから等式で結ぶことで、4 点相関関数の新しい展開を得る。即ち、まず、

$$\mathcal{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < |x - y| < |y| < |x|, x, y, x - y \notin \mathbb{R}^{\leq 0}\}$$

を考え、 $-\pi < \Im(\log(x)), \Im(\log(y)), \Im(\log(x-y)) < \pi$ とし、 $(x-y)^d = e^{2\pi id \log(x-y)}$ などで $x^d, y^d, (x-y)^d$ の branches を決めておく。次に、 $y_0 \notin \mathbb{R}^{\leq 0}$ を固定し、 $G_{h,k}^{A(BC):x-y}(\vec{\xi}; x, y_0)$ に対して、領域 $\mathcal{D}_{(x,y_0)}^2 = \{x \in \mathbb{C} \mid (x, y_0) \in \mathcal{D}^2\}$ 上での主 branch $\tilde{G}_{h,k}^{A(BC):x-y}(\vec{\xi}; x, y_0)$ を取る。すると、 $\frac{d}{dx} Y = \frac{A}{x-y_0} Y$ の $A(0)$ の固有値は P_A, P_B, P_C のみで決まるので、 N の取り方によらない有限集合 ${}^3\Delta' = \{d_1, \dots, d_p\} \subseteq \mathbb{C}$ が存在して、(D2) の解の成分はある ${}^3r_{d+m,t} \in \mathbb{C}$ があって、

$$\sum_{d \in \Delta'} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{t=0}^K r_{d+m,t} (x - y_0)^{d+m} \log^t(x - y_0)$$

と $\mathbb{D}_{|y_0|}(y_0)$ 上で書ける。これがすべての $y = y_0 \notin \mathbb{R}^{\leq 0}$ と $\vec{\xi}$ に対して成り立つので、 $r_{d+m,t}^{h,k}(\vec{\xi}, y) \in \mathbb{C}$ と $K(\vec{\xi}) \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$\tilde{G}_{h,k}^{A(BC):x-y}(\vec{\xi}; x, y) = \sum_{d \in \Delta'} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{t=0}^{K(\vec{\xi})} r_{d+m,t}^{h,k}(\vec{\xi}, y) (x - y)^{d+m} \log^t(x - y)$$

という展開式を得る。同じ規則で決まる $F^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y)$ の \mathcal{D}^2 上への branch を

$$\tilde{F}^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y) = \tilde{F}(\langle \theta, \mathcal{Y}^{A(BC)}(v, x) \mathcal{Y}^{BC}(u, y) w \rangle)$$

と表す。 $\dim P_C < \infty$ なので、 $\Delta = \Delta' - \max\{\text{gr}(w) \mid w \in P_C\}$ と置く。 $\tilde{G}_{h,k}^{A(BC):x-y}$ から $\tilde{F}^{A(BC)}$ に戻す為に、 $\tilde{G}_{h,k}^{A(BC):x-y}$ の各 h, k 毎に、 $(x - y)^{-\text{gr}^{234}(\vec{\xi})} \log^h(x) \log^k(y)$ を掛けてから h, k の総和をとり、且つ $\log(x)$ を

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} \left(\frac{x-y}{y} \right)^{j+1} + \log(y)$$

で置き換えることで、 $\tilde{F}^{A(BC)}$ の $\tau_{y,x-y}$ での展開を得る。

log 型への展開

$$\vec{\xi} = (\theta, v, u, w) \in \Omega \text{ で } w \in P_C \text{ なるものに対して、} \mathcal{D}^2 \text{ 上で、}$$

$$\tilde{F}^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y) = \sum_{t=0}^{K(\vec{\xi})} \sum_{-s-1 \in \Delta + \mathbb{N} - \text{gr}(v) - \text{gr}(u)} g_{s,t}(\vec{\xi}; y) (x - y)^{-s-1} \log^t(x - y)$$

と表示できる。

(重要点 1) 上記の Δ は N や \mathcal{J}_N に依存して定義されているが、各 Fuchsian system の定数行列のジョルダン細胞は一定なので、同じ Δ を使って表示でき、 $\log(x - y)$ の最大冪も一定なので、 N にも \mathcal{J}_N の取り方にも依存しないで Δ が定義できることが分かる。

$g_{s,t}(\vec{\xi}; y)$ は $\vec{\xi} \in (A(BC))^{\vee} \times A \times B \times C$ 上で多重線形なので、写像

$$A \times B \rightarrow \text{Hom}(C, A(BC)) \otimes \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0})$$

と見ることが出来る。即ち log 型作用素 \mathcal{Y}^4 と忠実な形式作用素 \mathcal{Y}^3 を使って、

形式作用素による表示

$$\tilde{F}^{A(BC)}(\vec{\xi}; x, y) = \langle \theta, \mathcal{Y}^3(\mathcal{Y}^4(v, x-y)u, y)w \rangle$$

と \mathcal{D}^2 上で表示できる。(当然、右辺も関数として branch を取ったもので考える。)

(重要点2) Δ は有限集合であり、 $(x-y)$ の幕は $d+n$ ($d \in \Delta, n \in \mathbb{N}$) と書けるので、 $\mathcal{Y}^4(v, x-y)u = \sum v_{n,k}u(x-y)^{-n-1}\log^k(x-y)$ の truncation 性質が出てくる。

(重要点3) Borcherds 恒等式 $(B1) \sim (B4)$ から $\mathcal{Y}^3, \mathcal{Y}^4$ が(局所)交絡作用素であることが出てくる。

ゆえに fusion 積の普遍性より、全射

$$\phi : (A \boxtimes B) \boxtimes C \rightarrow A \boxtimes (B \boxtimes C)$$

があって、

$$\tilde{F}(\langle \theta, \mathcal{Y}^{A(BC)}(v, x)\mathcal{Y}^{BC}(u, y)w \rangle) = \tilde{F}(\langle \phi^*(\theta), \mathcal{Y}^{(AB)C}(\mathcal{Y}^{AB}(v, x-y)u, y)w \rangle)$$

が成り立つ。ここで、 $\phi^* : (A \boxtimes (B \boxtimes C))^\vee \rightarrow ((A \boxtimes B) \boxtimes C)^\vee$ は ϕ の双対。これにより、最終目的の同型の片方の写像が定義できることになる。出発点を逆にして、同様な方法で写像 $\phi' : A \boxtimes (B \boxtimes C) \rightarrow (A \boxtimes B) \boxtimes C$ を構成すると、構成法より、 ϕ' は、小さな領域上で上記の ϕ の逆写像と一致していることがわかる。これにより、 ϕ は同型となり、主定理の証明が完成したことになる。

5点相関関数 $\langle \theta, \mathcal{Y}(v, x)\mathcal{Y}(u, y)\mathcal{Y}(w, z)d \rangle$ などに対するペンタゴンダイアグラムに関しても、より小さな領域を考えることで、上の同型がその領域に置ける値によって決まるところから図の可換性出てくる。

参考文献

- [M2021] *Associativity of fusion products of C_1 -cofinite \mathbb{N} -gradable modules of vertex operator algebra*, arXiv:2105.01851 ver.3
- [Huang2005] Y.-Z. Huang, *Differential equations and intertwining operators*, Commun. Contemp. Math. 7 (2005), 375-400.
- [M2014] *C_1 -cofiniteness and fusion products for vertex operator algebras*, Conformal field theories and tensor categories, 271-279, Math. Lect. Peking Univ., Springer, Heidelberg, 2014.
- [Heu2019] V. Heu, *Linear complex differential equations*, mini-courses at Foliations and algebraic geometry, Summer School in Mathematics 2019.

Affine Yangians and rectangular W -algebras

小寺 謙介

1 イントロダクション

プレプリント [KU] (上田衛さんとの共同研究) の内容について解説をする。タイトルにあるアファインヤンギアンと長方形 W 代数は、どちらもアファイン Lie 代数を拡張した代数で、出自の異なる 2 つの代数の間の代数射を構成するのが主結果 (定理 5.2) である。

2 つの代数を簡単に紹介する。まずアファインヤンギアンだが、その前にアファインでない、普通のヤンギアンについて述べる。ヤンギアンは Drinfeld が導入した量子群で、可解格子模型の Yang-Baxter 方程式・R 行列に起源を持つ。ヤンギアンの表現論で最も重要なことの 1 つは表現のテンソル積の構造を決定することで、R 行列の解析と直接的に結びついている。テンソル積表現の研究は 80 年代から現在に至るまで精力的に続いており多くの結果があるが、既約表現のテンソル積の既約性など、基本的な未解決な問題も数多く残されている。アファインヤンギアンは、ヤンギアンが有限型 Cartan 行列のデータから定義されるところをアファイン型のデータに変えることで定義される。元々のヤンギアンはそれ自体がアファイン的な対象なので、アファインヤンギアンはダブルアファイン的なものである。もう 1 つのダブルアファイン型の量子群である量子トロイダル代数と並んで、その表現論の研究の進展が期待されている。余積の構成 (Guay [G2], Guay-中島-Wendlandt [GNW]), A 型の場合の evaluation 写像の構成 (Guay [G2], 小寺 [K]), 箱多様体やアファイン Laumon 空間を使った表現の構成 (Varagnolo [V], Feigin-Finkelberg-Negut-Rybnikov [FFNR]) などの研究で、その性質が徐々に明らかになってきた。

一方、 W 代数は 2 次元共形場理論の対称性として導入された頂点代数である。最も一般的な定義は Kac-Roan-脇本 [KRW] によるもので、有限次元の複素簡約 Lie 代数と幕零元のペアおよび複素数 k のデータから BRST コホモロジーを使って定義される。

ここで扱うものは、一般線型 Lie 代数と長方形型の幕零元に付随する特別な場合である。\$W\$ 代数は Drinfeld-Sokolov 階層の量子化という側面を持つ他、AGT 対応を通じて 4 次元ゲージ理論にも現れることが近年の研究で指摘されている (Alday-Gaiotto-立川 [AGT], Maulik-Okounkov [MO], Schiffmann-Vasserot [SV], Braverman-Finkelberg-中島 [BFN])。

\$W\$ 代数は有限 \$W\$ 代数と呼ばれる代数のアファイン版である。\$A\$ 型の長方形型幕零元に付随する有限 \$W\$ 代数とヤンギアンの関係は Ragoucy-Sorba [RS] によって発見された。Brundan-Kleshchev [BK] はシフトヤンギアンというヤンギアンの部分代数を導入し、一般的の \$A\$ 型有限 \$W\$ 代数をその商として記述した。我々の結果は [RS] のアファイン版である。また、[BK, Section 12] を参考にして代数射を構成した。

代数射の構成の要点は次の 3 つである。

1. 長方形 \$W\$ 代数（正確にはそのカレント代数）は Miura 写像と呼ばれる代数射によってアファイン Lie 代数の普遍包絡代数のテンソル積の完備化 \$U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)_{\text{comp}}^{\otimes l}\$ の部分代数とみなせる。

2. 荒川-Molev の結果によって長方形 \$W\$ 代数（のカレント代数）の生成元

$$\{W_{i,j}^{(r)}(m) \mid i, j = 1, \dots, n \text{ および } r = 1, \dots, l \text{ および } m \in \mathbb{Z}\}$$

が知られている。

3. アファインヤンギアン \$Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)\$ の余積と evaluation 写像を組み合わせて代数射

$$\Phi_l: Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)_{\text{comp}}^{\otimes l}$$

を定義し、\$\Phi_l\$ の像が長方形 \$W\$ 代数の Miura 写像による像に含まれることを示す。それには \$\Phi_l\$ の像を荒川-Molev の生成元で表示すればよい。

この後 2, 3 節でアファイン Lie 代数と長方形 \$W\$ 代数について準備をし、4 節でアファインヤンギアンの余積と evaluation 写像を導入する。主結果である代数射 \$\Phi_l\$ の構成は 5 節で行う。\$\Phi_l\$ の構成に余積を使うことから、この結果はアファインヤンギアンのテンソル積表現と関係が深く、今後の研究に役立つことを期待している。\$W\$ 代数の方にもテンソル積表現に対応するものがあり、放物誘導と呼ばれる。余積と放物誘導の正確な関係について、最後の 6 節で触れる。

なお [U] では、アファインヤンギアンの生成元に対して長方形 \$W\$ 代数の元を定め、それが関係式を満たすことを直接チェックして定理 5.2 と同じ結果を証明している。

2 アファイン Lie 代数

$\mathfrak{gl}_n = \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ を \mathbb{C} 上の一般線型 Lie 代数とする. (i, j) 成分が 1 で他の成分が 0 の行列を $e_{i,j}$ とし, $I_n = \sum_{i=1}^n e_{i,i}$ とする.

$$\mathfrak{sl}_n = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mid \text{tr } X = 0\}, \quad \mathfrak{z}_n = \mathbb{C}I_n$$

とすれば,

$$\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{z}_n$$

と分解する. それぞれのアファイン Lie 代数を

$$\hat{\mathfrak{sl}}_n = \mathfrak{sl}_n[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c, \quad \hat{\mathfrak{z}}_n = \mathfrak{z}_n[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c'$$

とする. Lie ブラケットは trace フォームを使って

$$\begin{aligned} [Xt^m, Yt^{m'}] &= [X, Y]t^{m+m'} + m\delta_{m+m', 0} \text{tr}(XY)c, \quad (X, Y \in \mathfrak{sl}_n) \\ [I_nt^m, I_nt^{m'}] &= m\delta_{m+m', 0}nc' \end{aligned}$$

で与える. c, c' は中心元である.

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$U(\hat{\mathfrak{sl}}_n^\alpha) = U(\hat{\mathfrak{sl}}_n)/(c - \alpha), \quad U(\hat{\mathfrak{z}}_n^{\alpha+n}) = U(\hat{\mathfrak{z}}_n)/(c' - (\alpha + n))$$

とし,

$$U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha) = U(\hat{\mathfrak{sl}}_n^\alpha) \otimes U(\hat{\mathfrak{z}}_n^{\alpha+n})$$

とする. 以下では Xt^m のことを $X(m)$ と表す.

一般に $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A_d$ を次数付き代数としたとき

$$A_{\text{comp}} = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \lim_{\leftarrow m} \left(A_d / \sum_{r > m} A_{d-r} A_r \right)$$

と定義する ([A, A.2] を参照. A の standard degree-wise completion と呼ばれる). 以後で使う次数に関する完備化は、すべてこのようにして定義する. $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)$ の次数付けを $\deg X(m) = m$ で定め、完備化を $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)_{\text{comp}}$ と表す. 同様に、テンソル積 $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}$ の次数に関する完備化を $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}_{\text{comp}}$ と表す. 次節でこの $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}_{\text{comp}}$ の中に部分代数 \mathcal{W}_l を定義する.

3 長方形 W 代数

長方形 W 代数 \mathcal{W}_l を定義する。これから述べる定義は普通のものとは違っていて、両者が一致するのは荒川-Molev の結果（定理 3.3）である。この節の後半で本来の定義との関係を説明する。

レベルと呼ばれるパラメータ $k \in \mathbb{C}$ を固定する。 $N = ln$ とし、 $\alpha \in \mathbb{C}$ を $\alpha = k + N - n$ とする。各 $s = 1, \dots, l$ に対して

$$e_{i,j}^{[s]}(m) = 1^{\otimes(s-1)} \otimes e_{i,j}(m) \otimes 1^{\otimes(l-s)} \in U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}$$

とし、

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e_{i,j}^{[s]}(m) z^{-m-1} \in U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}[[z, z^{-1}]]$$

という元を (i, j) 成分とする $n \times n$ 行列を $A^{[s]}(z)$ と表す。 τ を

$$[A^{[s]}(z), \tau] = \alpha \partial_z A^{[s]}(z) \quad (3.1)$$

を満たす形式的な元として

$$(\tau + A^{[1]}(z))(\tau + A^{[2]}(z)) \cdots (\tau + A^{[l]}(z)) = \tau^l + \sum_{r=1}^l \tau^{l-r} W^{(r)}(z) \quad (3.2)$$

によって $W^{(r)}(z)$ を定義する。 $W^{(r)}(z)$ は $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}[[z, z^{-1}]]$ の元を成分とする行列である。 $W^{(r)}(z)$ の (i, j) 成分を $W_{i,j}^{(r)}(z)$ とし、 $W_{i,j}^{(r)}(z)$ の z^{-m-r} の係数を $W_{i,j}^{(r)}(m)$ ($m \in \mathbb{Z}$) とする。まとめると

$$W^{(r)}(z) = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} W_{i,j}^{(r)}(m) z^{-m-r} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

である。

定義 3.1 $W_{i,j}^{(r)}(m)$ ($i, j = 1, \dots, n$ および $r = 1, \dots, l$ および $m \in \mathbb{Z}$) によって位相的に生成される $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}_{\text{comp}}$ の部分代数を \mathcal{W}_l とする。

\mathcal{W}_l は、 l 以外に n と α にも依存するが、記号にはそれを含めないことにする。

例 3.2 $l = 2$ のときを考える. τ の定義 (3.1) の意味は, (3.2) の左辺を展開して $A^{[s]}(z)\tau$ が出てきたら $\tau A^{[s]}(z) + \alpha\partial_z A^{[s]}(z)$ に置き換えよ, ということである.

$$\begin{aligned} (\tau + A^{[1]}(z))(\tau + A^{[2]}(z)) &= \tau^2 + A^{[1]}(z)\tau + \tau A^{[2]}(z) + A^{[1]}(z)A^{[2]}(z) \\ &= \tau^2 + \tau(A^{[1]}(z) + A^{[2]}(z)) + A^{[1]}(z)A^{[2]}(z) + \alpha\partial_z A^{[1]}(z) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} W^{(1)}(z) &= A^{[1]}(z) + A^{[2]}(z), \\ W^{(2)}(z) &= A^{[1]}(z)A^{[2]}(z) + \alpha\partial_z A^{[1]}(z) \end{aligned}$$

となる. これより

$$\begin{aligned} W_{i,j}^{(1)}(m) &= e_{i,j}^{[1]}(m) + e_{i,j}^{[2]}(m) = e_{i,j}(m) \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,j}(m), \\ W_{i,j}^{(2)}(m) &= \sum_{\substack{m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \\ m_1 + m_2 = m}} \sum_{a=1}^n e_{i,a}^{[1]}(m_1) e_{a,j}^{[2]}(m_2) - (m+1)\alpha e_{i,j}^{[1]}(m) \\ &= \sum_{\substack{m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \\ m_1 + m_2 = m}} \sum_{a=1}^n e_{i,a}(m_1) \otimes e_{a,j}(m_2) - (m+1)\alpha e_{i,j}(m) \otimes 1 \end{aligned}$$

となり, \mathcal{W}_2 はこれらの元で生成される.

\mathcal{W}_l と本来の長方形 W 代数との関係を述べる. まず, 本来の長方形 W 代数は頂点代数である. $N = ln$ とする.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N, \quad f = \begin{bmatrix} O & & & O \\ I_n & O & & \\ & I_n & \dots & \\ & & & O \\ O & & & I_n & O \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}$$

のペアおよび複素数 k から BRST 複体をつくり, その 0 次コホモロジーをとることで頂点代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ が定義される ([FF, KRW]). 正確には, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ の中心 $\mathfrak{z}_N = \mathbb{C}I_N$ が定める Heisenberg 代数の部分のレベルを指定する必要があり, ここでは

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_N, f) \otimes V^{k+N}(\mathfrak{z}_N)$$

となるようにする. $V^{k+N}(\mathfrak{z}_N)$ はレベル $k + N$ の Heisenberg 頂点代数である.

ここでは頂点代数の定義はしないが, 頂点代数 V に対してそのカレント代数 $\mathfrak{U}(V)$ という位相的に完備な結合代数を定義できることに注意する ([A, Section 3.11]). 頂点代数の表現 (加群) とはそのカレント代数の表現 (加群) と同じことである.

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の話にもどる。 $V^\alpha(\mathfrak{sl}_n)$ をレベル α の普遍アファイン頂点代数とし、 $V^{\alpha+n}(\mathfrak{z}_n)$ をレベル $\alpha + n$ の Heisenberg 頂点代数とすると、

$$\nu: \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \rightarrow \left(V^\alpha(\mathfrak{sl}_n) \otimes V^{\alpha+n}(\mathfrak{z}_n) \right)^{\otimes l}$$

という頂点代数の单射代数射が存在する。 ν を Miura 写像と呼ぶ。そのカレント代数版

$$\nu: \mathfrak{U}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \rightarrow \mathfrak{U}\left(\left(V^\alpha(\mathfrak{sl}_n) \otimes V^{\alpha+n}(\mathfrak{z}_n) \right)^{\otimes l} \right) \cong U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}_{\text{comp}}$$

も同じ記号 ν で表す。

定理 3.3 (荒川-Molev [AM] Corollary 3.2) Miura 写像 $\nu: \mathfrak{U}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \rightarrow U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}_{\text{comp}}$ の像は \mathcal{W}_l と一致する。

定理 3.3 によって \mathcal{W}_l を $\mathfrak{U}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f))$ と同一視し、(やや不正確だが) 以下では長方形 W 代数と呼ぶ。この代数とアファインヤンギアンを関連付けることが目標である。

一般には、有限次元の複素簡約 Lie 代数と幂零元のペアおよび複素数 k から W 代数が定義される。ここでとった幂零元 f は、その Jordan 標準形のタイプを表す Young 図形が $n \times l$ の長方形の場合で、これが「長方形 W 代数」という名前の由来である。一般的 W 代数については、生成元の構成法は知られていない。

$n = 1$ のとき、 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ をプリンシパル W 代数と呼ぶ（このとき $N = l$ である）。Miura 写像の行先はランク N の Heisenberg 代数 $U(\hat{\mathfrak{z}}_1^{k+N})_{\text{comp}}^{\otimes N}$ で、定理 3.3 の記述は Fateev-Lukyanov による W 代数の定義を再現する。但し、今回の話では $n \geq 3$ とするので、 $n = 1$ の場合は扱わない。

4 アファインヤンギアン

これ以降、 $n \geq 3$ を仮定する。 a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) を

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \text{ のとき} \\ -1 & i = j \pm 1 \pmod{n} \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定める。 $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型 Cartan 行列である。

定義 4.1 アファインヤンギアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ は 2 つのパラメータ $\hbar, \varepsilon \in \mathbb{C}$ を持ち、次の生成元と関係式で定義される \mathbb{C} 上の結合代数である。

生成元 : $E_i^{(r)}, F_i^{(r)}, H_i^{(r)}$ ($i = 1, \dots, n$ および $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$)

定義関係式 : すべての i, j について

$$\begin{aligned} [H_i^{(r)}, H_j^{(s)}] &= 0, \\ [E_i^{(r)}, F_j^{(s)}] &= \delta_{ij} H_i^{(r+s-1)}, \\ [H_i^{(1)}, E_j^{(s)}] &= a_{ij} E_j^{(s)}, \quad [H_i^{(1)}, F_j^{(s)}] = -a_{ij} F_j^{(s)}; \end{aligned} \tag{4.1}$$

$i \neq j, j \pm 1 \pmod{n}$ について

$$[H_i^{(r)}, E_j^{(s)}] = 0, \quad [H_i^{(r)}, F_j^{(s)}] = 0, \quad [E_i^{(r)}, E_j^{(s)}] = 0, \quad [F_i^{(r)}, F_j^{(s)}] = 0; \tag{4.2}$$

$i = j \pm 1 \pmod{n}$ について

$$\begin{aligned} [E_i^{(r_1)}, [E_i^{(r_2)}, E_j^{(s)}]] + [E_i^{(r_2)}, [E_i^{(r_1)}, E_j^{(s)}]] &= 0, \\ [F_i^{(r_1)}, [F_i^{(r_2)}, F_j^{(s)}]] + [F_i^{(r_2)}, [F_i^{(r_1)}, F_j^{(s)}]] &= 0; \end{aligned} \tag{4.3}$$

すべての i について

$$\begin{aligned} [H_i^{(r+1)}, E_i^{(s)}] - [H_i^{(r)}, E_i^{(s+1)}] &= \hbar \left(H_i^{(r)} E_i^{(s)} + E_i^{(s)} H_i^{(r)} \right), \\ [H_i^{(r+1)}, F_i^{(s)}] - [H_i^{(r)}, F_i^{(s+1)}] &= -\hbar \left(H_i^{(r)} F_i^{(s)} + F_i^{(s)} H_i^{(r)} \right), \\ [E_i^{(r+1)}, E_i^{(s)}] - [E_i^{(r)}, E_i^{(s+1)}] &= \hbar \left(E_i^{(r)} E_i^{(s)} + E_i^{(s)} E_i^{(r)} \right), \\ [F_i^{(r+1)}, F_i^{(s)}] - [F_i^{(r)}, F_i^{(s+1)}] &= -\hbar \left(F_i^{(r)} F_i^{(s)} + F_i^{(s)} F_i^{(r)} \right); \end{aligned} \tag{4.4}$$

$i \neq n$ について

$$\begin{aligned} [H_i^{(r+1)}, E_{i+1}^{(s)}] - [H_i^{(r)}, E_{i+1}^{(s+1)}] &= -\hbar H_i^{(r)} E_{i+1}^{(s)}, \\ [H_i^{(r+1)}, F_{i+1}^{(s)}] - [H_i^{(r)}, F_{i+1}^{(s+1)}] &= \hbar F_{i+1}^{(s)} H_i^{(r)}, \\ [H_{i+1}^{(r+1)}, E_i^{(s)}] - [H_{i+1}^{(r)}, E_i^{(s+1)}] &= -\hbar E_i^{(s)} H_{i+1}^{(r)}, \\ [H_{i+1}^{(r+1)}, F_i^{(s)}] - [H_{i+1}^{(r)}, F_i^{(s+1)}] &= \hbar H_{i+1}^{(r)} F_i^{(s)}, \\ [E_i^{(r+1)}, E_{i+1}^{(s)}] - [E_i^{(r)}, E_{i+1}^{(s+1)}] &= -\hbar E_i^{(r)} E_{i+1}^{(s)}, \\ [F_{i+1}^{(r+1)}, F_i^{(s)}] - [F_{i+1}^{(r)}, F_i^{(s+1)}] &= \hbar F_{i+1}^{(r)} F_i^{(s)}; \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
[H_n^{(r+1)}, E_1^{(s)}] - [H_n^{(r)}, E_1^{(s+1)}] &= -\hbar H_n^{(r)} E_1^{(s)} + (n\hbar + \varepsilon) [H_n^{(r)}, E_1^{(s)}], \\
[H_n^{(r+1)}, F_1^{(s)}] - [H_n^{(r)}, F_1^{(s+1)}] &= \hbar F_1^{(s)} H_n^{(r)} - (n\hbar + \varepsilon) [F_1^{(s)}, H_n^{(r)}], \\
[H_1^{(r+1)}, E_n^{(s)}] - [H_1^{(r)}, E_n^{(s+1)}] &= -\hbar E_n^{(s)} H_1^{(r)} + (n\hbar + \varepsilon) [E_n^{(s)}, H_1^{(r)}], \\
[H_1^{(r+1)}, F_n^{(s)}] - [H_1^{(r)}, F_n^{(s+1)}] &= \hbar H_1^{(r)} F_n^{(s)} - (n\hbar + \varepsilon) [H_1^{(r)}, F_n^{(s)}], \\
[E_n^{(r+1)}, E_1^{(s)}] - [E_n^{(r)}, E_1^{(s+1)}] &= -\hbar E_n^{(r)} E_1^{(s)} + (n\hbar + \varepsilon) [E_n^{(r)}, E_1^{(s)}], \\
[F_1^{(r+1)}, F_n^{(s)}] - [F_1^{(r)}, F_n^{(s+1)}] &= \hbar F_1^{(r)} F_n^{(s)} - (n\hbar + \varepsilon) [F_1^{(r)}, F_n^{(s)}]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

少し説明をする。まず、 $r = 1$ に対する生成元 $E_i^{(1)}, F_i^{(1)}, H_i^{(1)}$ ($i = 1, \dots, n$) の満たす関係式は、アファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_n$ の定義関係式と同じである（関係式 (4.1), (4.2), (4.3) で $r = s = r_1 = r_2 = 1$ とする）。従って $U(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ から $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ に代数射ができるが、これは単射である ([G2, Theorem 6.1], [GRW, Theorem 6.9])。以下では、 $e_{i,j}(m) = e_{i,j} t^m$ などの $\hat{\mathfrak{sl}}_n$ の元と、対応する $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の元を同じ記号で表す。

次に、 $i \neq n$ に対する生成元 $E_i^{(r)}, F_i^{(r)}, H_i^{(r)}$ ($i = 1, \dots, n-1$ および $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) の満たす関係式は、ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ の定義関係式と同じである（関係式 (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) で添字に n が現れないもの）。 $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ から $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ への代数射も単射である ([G2, Corollary 6.1], [GRW, Theorem 6.9])。

以上から、 $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ は部分代数として $U(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ と $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ を含み、それら 2 つの部分代数で生成される。生成元の数は減らすことができて、 $r = 1, 2$ に対するものが全体を生成する。

関係式 (4.6) は複雑だが、 $n\hbar + \varepsilon = 0$ とおくと (4.5) と同じ形になる。 $n\hbar + \varepsilon = 0$ の場合の定義関係式は、ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ の定義関係式をそのままアファイン A 型に拡張したものである。Dynkin 図形にサイクルがあるというアファイン A 型の性質によって、さらに 1 パラメータを関係式に加えて変形することができる。この変形は Guay が [G1, Definition 3.3] で導入した（量子トロイダル代数が A 型の場合に 2 パラメータを持つことはそれ以前から知られていた）。 $n\hbar + \varepsilon$ を改めて 1 つのパラメータと扱って関係式 (4.6) を書いてもよいのだが、他の文献との関係もあって今回はこのように書くことにした。アファインヤンギアンから長方形 W 代数に代数射をつくる際には、2 つのパラメータの比と W 代数のレベルとの間に関係を課すので、独立なパラメータが 2 つあることが今回の話の重要なポイントの 1 つである。

定義 4.1 では、生成元の取り方を [KU, Definition 6.1] とは少し変えたため、定義関係式が一見異なっている（Guay の [G1, Definition 3.3], [G2, Definition 2.3] とも違う）。[KU] でのアファインヤンギアンの生成元の記号は $X_{i,r}^+, X_{i,r}^-, H_{i,r}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$

および $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) である. 次のように生成元の母函数を定義する.

$$\begin{aligned} E_i(z) &= \hbar \sum_{r \geq 1} E_i^{(r)} z^{-r}, & F_i(z) &= \hbar \sum_{r \geq 1} F_i^{(r)} z^{-r}, & H_i(z) &= 1 + \hbar \sum_{r \geq 1} H_i^{(r)} z^{-r}, \\ X_i^+(z) &= \hbar \sum_{r \geq 0} X_{i,r}^+ z^{-r-1}, & X_i^-(z) &= \hbar \sum_{r \geq 0} X_{i,r}^- z^{-r-1}, & H'_i(z) &= 1 + \hbar \sum_{r \geq 0} H_{i,r} z^{-r-1} \end{aligned}$$

[KU] の生成元との関係は次で与えられる. $i = 1, \dots, n-1$ について

$$E_i(z) = X_i^+ \left(z - \frac{i}{2} \hbar \right), \quad F_i(z) = X_i^- \left(z - \frac{i}{2} \hbar \right), \quad H_i(z) = H'_i \left(z - \frac{i}{2} \hbar \right);$$

$$E_n(z) = X_0^+ (z - (n\hbar + \varepsilon)), \quad F_n(z) = X_0^- (z - (n\hbar + \varepsilon)), \quad H_n(z) = H'_0 (z - (n\hbar + \varepsilon))$$

以降では $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の完備化も必要になる. $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の次数付けを

$$\deg E_n^{(r)} = 1, \quad \deg F_n^{(r)} = -1, \quad \text{他の生成元は次数 } 0$$

で定め, 完備化を $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\text{comp}}$ と表す. 同様に, テンソル積 $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)^{\otimes l}$ の次数に関する完備化を $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)^{\otimes l}_{\text{comp}}$ と表す.

ここで余積と evaluation 写像を導入する. 次節ではこれらを組み合わせて代数射を構成する. まず余積である. $\square(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ という記号を使う.

定理 4.2 (Guay [G2] Section 6, pp. 462, Guay-中島-Wendlandt [GNW] Definition 4.6, Theorem 4.9, Proposition 5.18, Section 7, Proposition 4.24) 次を満たす代数射 $\Delta: Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\text{comp}}^{\otimes 2}$ が存在する.

すべての i について

$$\Delta(E_i^{(1)}) = \square(E_i^{(1)}), \quad \Delta(F_i^{(1)}) = \square(F_i^{(1)}), \quad \Delta(H_i^{(1)}) = \square(H_i^{(1)});$$

$i = 1, \dots, n-1$ について

$$\begin{aligned} \Delta(E_i^{(2)}) &= \square(E_i^{(2)}) + \hbar \left(\sum_{a=1}^i e_{a,i+1} \otimes e_{i,a} - \sum_{a=i+1}^n e_{i,a} \otimes e_{a,i+1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m \geq 1} \sum_{a=1}^n (e_{a,i+1}(m) \otimes e_{i,a}(-m) - e_{i,a}(m) \otimes e_{a,i+1}(-m)) \right), \\ \Delta(F_i^{(2)}) &= \square(F_i^{(2)}) + \hbar \left(\sum_{a=1}^i e_{a,i} \otimes e_{i+1,a} - \sum_{a=i+1}^n e_{i+1,a} \otimes e_{a,i} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m \geq 1} \sum_{a=1}^n (e_{a,i}(m) \otimes e_{i+1,a}(-m) - e_{i+1,a}(m) \otimes e_{a,i}(-m)) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(H_i^{(2)}) &= \square(H_i^{(2)}) + \hbar \left(-e_{i,i} \otimes e_{i+1,i+1} - e_{i+1,i+1} \otimes e_{i,i} \right. \\ &\quad + \sum_{a=1}^i \left(e_{a,i} \otimes e_{i,a} - e_{a,i+1} \otimes e_{i+1,a} \right) - \sum_{a=i+1}^n \left(e_{i,a} \otimes e_{a,i} - e_{i+1,a} \otimes e_{a,i+1} \right) \\ &\quad \left. + \sum_{m \geq 1} \sum_{a=1}^n \left(e_{a,i}(m) \otimes e_{i,a}(-m) - e_{a,i+1}(m) \otimes e_{i+1,a}(-m) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e_{i,a}(m) \otimes e_{a,i}(-m) + e_{i+1,a}(m) \otimes e_{a,i+1}(-m) \right) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(E_n^{(2)}) &= \square(E_n^{(2)}) + \hbar \left(e_{n,1}(1) \otimes c \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m \geq 0} \sum_{a=1}^n \left(e_{a,1}(m+1) \otimes e_{n,a}(-m) - e_{n,a}(m+1) \otimes e_{a,1}(-m) \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(F_n^{(2)}) &= \square(F_n^{(2)}) + \hbar \left(c \otimes e_{1,n}(-1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m \geq 0} \sum_{a=1}^n \left(e_{a,n}(m) \otimes e_{1,a}(-m-1) - e_{1,a}(m) \otimes e_{a,n}(-m-1) \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(H_n^{(2)}) &= \square(H_n^{(2)}) \\ &\quad + \hbar \left(-e_{n,n} \otimes e_{1,1} - e_{1,1} \otimes e_{n,n} + e_{n,n} \otimes c + c \otimes e_{n,n} - e_{1,1} \otimes c - c \otimes e_{1,1} + c \otimes c \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m \geq 0} \sum_{a=1}^n \left(e_{a,n}(m) \otimes e_{n,a}(-m) - e_{a,1}(m+1) \otimes e_{1,a}(-m-1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e_{n,a}(m+1) \otimes e_{a,n}(-m-1) + e_{1,a}(m) \otimes e_{a,1}(-m) \right) \right) \end{aligned}$$

さらに Δ は余結合律 $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ を満たす.

次に evaluation 写像を導入する.

定理 4.3 (Guay [G2] Section 6, pp. 462–463, 小寺 [K] Theorem 3.8) パラメータの条件 $\alpha + n = -\varepsilon/\hbar$ の下で, 次を満たす代数射 $\text{ev}: Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)_{\text{comp}}$ が存在する.

$i = 1, \dots, n-1$ について

$$\begin{aligned} \text{ev}(E_i^{(1)}) &= e_{i,i+1}, & \text{ev}(F_i^{(1)}) &= e_{i+1,i}, & \text{ev}(H_i^{(1)}) &= e_{i,i} - e_{i+1,i+1}; \\ \text{ev}(E_n^{(1)}) &= e_{n,1}(1), & \text{ev}(F_n^{(1)}) &= e_{1,n}(-1), & \text{ev}(H_n^{(1)}) &= e_{n,n} - e_{1,1} + \alpha; \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n-1$ について

$$\begin{aligned} \text{ev}(E_i^{(2)}) &= \hbar \left(\sum_{a=1}^i e_{i,a} e_{a,i+1} + \sum_{m \geq 1} \sum_{a=1}^n e_{i,a}(-m) e_{a,i+1}(m) \right), \\ \text{ev}(F_i^{(2)}) &= \hbar \left(\sum_{a=1}^i e_{i+1,a} e_{a,i} + \sum_{m \geq 1} \sum_{a=1}^n e_{i+1,a}(-m) e_{a,i}(m) \right), \\ \text{ev}(H_i^{(2)}) &= \hbar \left(-e_{i,i} e_{i+1,i+1} + \sum_{a=1}^i (e_{i,a} e_{a,i} - e_{i+1,a} e_{a,i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m \geq 1} \sum_{a=1}^n (e_{i,a}(-m) e_{a,i}(m) - e_{i+1,a}(-m) e_{a,i+1}(m)) \right); \\ \text{ev}(E_n^{(2)}) &= \hbar \sum_{m \geq 0} \sum_{a=1}^n e_{n,a}(-m) e_{a,1}(m+1), \\ \text{ev}(F_n^{(2)}) &= \hbar \sum_{m \geq 0} \sum_{a=1}^n e_{1,a}(-m-1) e_{a,n}(m), \\ \text{ev}(H_n^{(2)}) &= \hbar \left(-e_{n,n}(e_{1,1} - \alpha) + \sum_{m \geq 0} \sum_{a=1}^n (e_{n,a}(-m) e_{a,n}(m) - e_{1,a}(-m-1) e_{a,1}(m+1)) \right) \end{aligned}$$

5 主結果：代数射の構成

W 代数のレベル k とパラメータ α との関係は $\alpha = k + N - n$ だった。さらに、アファインヤンギアンの evaluation 写像を定義するための関係式 $\alpha + n = -\varepsilon/\hbar$ を課す。従って

$$k + N = \alpha + n = -\varepsilon/\hbar$$

である。

$\beta \in \mathbb{C}$ に対して $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)$ の代数自己同型射 η_β を

$$e_{i,j}(m) \mapsto e_{i,j}(m) + \delta_{m,0} \delta_{i,j} \beta$$

で定義する。さらに $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)_{\text{comp}}^{\otimes l}$ の代数自己同型射 $\eta^{(l)}$ を

$$\eta^{(l)} = \eta_{(l-1)\alpha} \otimes \eta_{(l-2)\alpha} \otimes \cdots \otimes \eta_\alpha \otimes \text{id}$$

で定義する。 $\Delta^{l-1}: Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\text{comp}} \rightarrow Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\text{comp}}^{\otimes l}$ を

$$\Delta^0 = \text{id}, \quad \Delta^1 = \Delta, \quad \Delta^{l-1} = (\Delta \otimes \text{id}^{\otimes l-2}) \circ \Delta^{l-2}$$

で定義する。

定義 5.1

$$\Phi_l = \eta^{(l)} \circ \text{ev}^{\otimes l} \circ \Delta^{l-1}$$

と定義する。 Φ_l は $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\text{comp}}$ から $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)_{\text{comp}}^{\otimes l}$ への代数射である。

次が主定理である。

定理 5.2 (小寺-上田 [KU] Theorem 9.2) Φ_l の像は \mathcal{W}_l に含まれる。つまり、 Φ_l は $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\text{comp}}$ から \mathcal{W}_l への代数射を定める。さらに $\alpha = k + N - n \neq 0$ ならば Φ_l は全射である。

この定理により \mathcal{W}_l の表現は Φ_l を通じて $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の表現とみなすことができる。さらに $\alpha \neq 0$ ならば表現の既約性が保たれる。

定理 5.2 を証明するには、 $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の生成元 $E_i^{(r)}, F_i^{(r)}$ の Φ_l での行先を $r = 1, 2$ について調べ、 \mathcal{W}_l の生成元で具体的に記述すればよい。例えば $E_i^{(2)}$ の行先は次のようになる。 $i = 1, \dots, n-1$ について

$$\begin{aligned} \Phi_l(E_i^{(2)}) &= (-\hbar) \times \\ &\left(W_{i,i+1}^{(2)}(0) - \left(\sum_{a=1}^i W_{i,a}^{(1)}(0) W_{a,i+1}^{(1)}(0) + \sum_{m \geq 1} \sum_{a=1}^n W_{i,a}^{(1)}(-m) W_{a,i+1}^{(1)}(m) \right) \right); \\ \Phi_l(E_n^{(2)}) &= (-\hbar) \left(W_{n,1}^{(2)}(1) - \sum_{m \geq 0} \sum_{a=1}^n W_{n,a}^{(1)}(-m) W_{a,1}^{(1)}(m+1) \right) \end{aligned}$$

6 余積と放物誘導

最後にアファインヤンギアンの余積と長方形 W 代数の放物誘導との関係について述べる。

l_1, l_2 を $l = l_1 + l_2$ を満たす 1 以上の整数とする. それぞれに対して長方形 W 代数 $\mathcal{W}_{l_1}, \mathcal{W}_{l_2}$ が定義される. $\mathcal{W}_{l_1}, \mathcal{W}_{l_2}$ はそれぞれ $U(\hat{\mathfrak{sl}}_n^\alpha)_{\text{comp}}^{\otimes l_1}, U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)_{\text{comp}}^{\otimes l_2}$ の部分代数なので, $\mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\text{comp}} \mathcal{W}_{l_2}$ は $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)_{\text{comp}}^{\otimes l}$ の部分代数となる. 3 節で述べた長方形 W 代数の生成元の記述から, \mathcal{W}_l は $\mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\text{comp}} \mathcal{W}_{l_2}$ に含まれることがわかる. この包含写像を $\Delta_{l_1, l_2}: \mathcal{W}_l \rightarrow \mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\text{comp}} \mathcal{W}_{l_2}$ と表す. \mathcal{W}_{l_1} の表現 M_1 と \mathcal{W}_{l_2} の表現 M_2 が与えられれば, Δ_{l_1, l_2} を通じて $M_1 \otimes M_2$ は \mathcal{W}_l の表現となる. この操作を長方形 W 代数の表現の放物誘導と呼ぶ.

この操作は, 余積 Δ によってアファインヤンギアンのテンソル積表現を構成する操作とよく似ている. 実際, 前節での Φ_l の構成のしかたから, Δ_{l_1, l_2} と Δ がほぼ対応することがすぐにわかる. Δ との対応を正確に述べるために, 次のように Δ_{l_1, l_2} を少しだけ修正する必要がある. 前節の自己同型射 η_β ($\beta \in \mathbb{C}$) を使って

$$\tilde{\Delta}_{l_1, l_2} = (\eta_{-l_2 \alpha}^{\otimes l_1} \otimes \text{id}^{\otimes l_2}) \circ \Delta_{l_1, l_2}$$

と定義する. 簡単な計算で, $\tilde{\Delta}_{l_1, l_2}$ は Δ_{l_1, l_2} と同様に \mathcal{W}_l から $\mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\text{comp}} \mathcal{W}_{l_2}$ への单射代数射を定めることがわかる.

定理 6.1 (小寺-上田 [KU] Corollary 10.2) 代数射 $\Phi_l: Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\text{comp}} \rightarrow \mathcal{W}_l$ は次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\text{comp}} & \xrightarrow{\Phi_l} & \mathcal{W}_l \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \tilde{\Delta}_{l_1, l_2} \\ Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\text{comp}}^{\otimes 2} & \xrightarrow{\Phi_{l_1} \otimes \Phi_{l_2}} & \mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\text{comp}} \mathcal{W}_{l_2} \end{array}$$

以上より, アファインヤンギアンのテンソル積表現と長方形 W 代数の表現の放物誘導(但し $\tilde{\Delta}_{l_1, l_2}$ を通じて定義する) とが, 代数射 Φ_l を通じて対応することがわかった.

参考文献

- [AGT] Luis Fernando Alday, Davide Gaiotto, and Yuji Tachikawa, *Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories*, Lett. Math. Phys. **91** (2010), no. 2, 167–197.
- [A] Tomoyuki Arakawa, *Representation theory of \mathcal{W} -algebras*, Invent. Math. **169** (2007), no. 2, 219–320.
- [AM] Tomoyuki Arakawa and Alexander Molev, *Explicit generators in rectangular affine \mathcal{W} -algebras of type A*, Lett. Math. Phys. **107** (2017), no. 1, 47–59.

- [BFN] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima, *Instanton moduli spaces and \mathcal{W} -algebras*, Astérisque (2016), no. 385, vii+128.
- [BK] Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev, *Shifted Yangians and finite W -algebras*, Adv. Math. **200** (2006), no. 1, 136–195.
- [FFNR] Boris Feigin, Michael Finkelberg, Andrei Negut, and Leonid Rybnikov, *Yangians and cohomology rings of Laumon spaces*, Selecta Math. (N.S.) **17** (2011), no. 3, 573–607.
- [FF] Boris Feigin and Edward Frenkel, *Quantization of the Drinfel'd-Sokolov reduction*, Phys. Lett. B **246** (1990), no. 1-2, 75–81.
- [G1] Nicolas Guay, *Cherednik algebras and Yangians*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 57, 3551–3593.
- [G2] ———, *Affine Yangians and deformed double current algebras in type A*, Adv. Math. **211** (2007), no. 2, 436–484.
- [GNW] Nicolas Guay, Hiraku Nakajima, and Curtis Wendlandt, *Coprod for Yangians of affine Kac-Moody algebras*, Adv. Math. **338** (2018), 865–911.
- [GRW] Nicolas Guay, Vidas Regelskis, and Curtis Wendlandt, *Vertex representations for Yangians of Kac-Moody algebras*, J. Éc. polytech. Math. **6** (2019), 665–706.
- [KRW] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto, *Quantum reduction for affine superalgebras*, Comm. Math. Phys. **241** (2003), no. 2-3, 307–342.
- [K] Ryosuke Kodera, *On Guay's evaluation map for affine Yangians*, Algebr. Represent. Theory **24** (2021), no. 1, 253–267, correction 269–272, arXiv:1806.09884.
- [KU] Ryosuke Kodera and Mamoru Ueda, *Coprod for affine Yangians and parabolic induction for rectangular W -algebras*, arXiv:2107.00780.
- [MO] Davesh Maulik and Andrei Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*, Astérisque (2019), no. 408, ix+209.
- [RS] Eric Ragoucy and Paul Sorba, *Yangian realisations from finite \mathcal{W} -algebras*, Comm. Math. Phys. **203** (1999), no. 3, 551–572.
- [SV] Olivier Schiffmann and Eric Vasserot, *Cherednik algebras, W -algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on \mathbf{A}^2* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **118** (2013), 213–342.
- [U] Mamoru Ueda, *Affine super Yangians and rectangular W -superalgebras*,

arXiv:2002.03479.

- [V] Michela Varagnolo, *Quiver varieties and Yangians*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), no. 4, 273–283.

有限群の指標とシロー部分群

櫻井太朗 * (千葉大学)

目次

1	背景	2
1.1	有限性定理	2
1.2	ブロック	3
1.3	局所大域対応	4
2	定理	6
2.1	単純群への帰着	7
2.2	証明の概略	8
2.3	最近の進展	8
	付録 A Brandt の定理	9
	注	10
	参考文献	11

有限群の表現論における既約指標の個数と Sylow 部分群の位数との間にある関係について代数学シンポジウムでオンライン講演を行う機会をいただいた。講演では越谷重夫氏との共同研究 [9] に基づく結果（定理 2.2）を中心に据え定理の背景や証明の概略などについて発表をした。本稿はそれらと最近の進展について纏めたものである。

* <https://orcid.org/0000-0003-0608-1852>

1 背景

本稿を通して特に断りのない限り p は素数, G は有限群, P は G の Sylow p 部分群とする. また G の共役類全体を $\text{Cl } G$, 既約指標全体を $\text{Irr } G$ と表す.

1.1 有限性定理

今回の研究の原型となる結果が有限群論にある. そこから話を始めよう. 次の定理は類等式の手頃な応用例のひとつである [7, Theorem 12.2].

定理 1.1 (Landau). 与えられた自然数 k に対して

$$|\text{Cl } G| = k \implies |G| \leq n$$

となる自然数 n が存在する.

すなわち与えられた数の共役類をもつ有限群は同型を除いて有限個しか存在しない. すると次は有限群を具体的に決定してみようという問題になる. 実際に共役類の数に応じて有限群を分類すると表 1 のようになる. ここで表に現れている群は位数 n の巡回群

共役類の数	有限群の同型類
1	1
2	C_2
3	C_3, S_3
4	C_4, V_4, D_{10}, A_4

表 1 小さな有限群.

C_n ・次数 n の対称群 S_n ・Klein の四元群 V_4 ・位数 n の二面体群 D_n ・次数 n の交代群 A_n である. このような研究は Burnside による『有限群論』のノート A に見ることもできる古典的な問題であり [4], 現在は $k = 14$ までの分類がなされている [17]. 参考までにモンスター群 M でも共役類は 194 個しかない.

指標理論の基本的な結果によれば有限群の既約指標の数と共役類の数は等しいので Landau の有限性定理は次のように言い換えることができる¹.

定理 1.2. 与えられた自然数 k に対して

$$|\mathrm{Irr} G| = k \implies |G| \leq n$$

となる自然数 n が存在する.

すなわち与えられた数の既約指標をもつ有限群は同型を除いて有限個しか存在しない. こうした既約指標の数による有限群の統制をより細かく見ていきたい.

1.2 ブロック

表現論を考える上で多くの問題はブロックごとに考えることができる. ここでは有限群のモジュラー表現論に由来するブロックの概念を指標論的に定式化する.

定義 1.3 (ブロック). 位数が p と素な G の元からなる集合を

$$G_{p'} = \{g \in G : p \nmid |g|\}$$

とおく². 既約指標全体 $\mathrm{Irr} G$ 上の二項関係 \sim を

$$\chi \sim \psi \iff \sum_{g \in G_{p'}} \chi(g) \overline{\psi(g)} \neq 0$$

で定める. これにより $\mathrm{Irr} G$ を台集合とするグラフが定まり, その連結成分をブロック (block) という [15, p. 155]. 特に自明な既約指標 1_G を含む連結成分を主ブロック (principal block) といい記号 $\mathrm{Irr} B_0(G)$ で表す.

具体的には主ブロックが

$$\mathrm{Irr} B_0(G) = \left\{ \chi \in \mathrm{Irr} G : \sum_{g \in G_{p'}} \chi(g) \neq 0 \right\}$$

となることも知られている [15, p. 118]. Landau の有限性定理に相当する主張がブロックごとにも成り立つかどうかを問うたのが Brauer の第 21 問題 (Brauer's Problem 21) である [2]. 簡単のために主ブロックに限って予想を述べると次のようになる.

予想 1.4 (Brauer の第 21 問題). 与えられた自然数 k に対して

$$|\mathrm{Irr} B_0(G)| = k \implies |P| \leq n \tag{XXI_0}$$

となる自然数 n が存在するか?

すなわち与えられた数の主ブロックに属する既約指標をもつ有限群の Sylow p 部分群は同型を除いて有限個しか存在しないのではないか？定理 1.2 の仮定とは異なり既約指標全体ではなく主ブロックについてしか条件を課していないので、それに応じて結論も群全体ではなく Sylow p 部分群についてしか触れていない。実際、位数が p と素である G の正規部分群 N をとると

$$|\mathrm{Irr} B_0(G)| = |\mathrm{Irr} B_0(G/N)| \quad (\dagger)$$

が成り立つので、主ブロックに属する既約指標の数に関する制約から望みうる帰結はおよそ Sylow p 部分群に関する情報に限られる。Brauer の第 21 問題は主ブロックの場合 (XXI₀) に限っても一般には未解決である。ただし Alperin-McKay 予想を認めれば（そして Zelmanov によって制限 Burnside 問題が肯定的に解決されていることなどを使うと）肯定的に解決できることが知られている [12]。Alperin-McKay 予想については次節で改めて述べる。

1.3 局所大域対応

有限群に関するある種の性質はその局所部分群に関する性質へ還元されるという指導原理があり、これを有限群論における局所大域原理 (local-global principle) という。典型的な例としては Burnside の融合定理 (Burnside's fusion theorem) がある。

定理 1.5 (Burnside の融合定理). Sylow p 部分群 P の G における正規化群を $H = N_G(P)$ とする。もし P が可換ならば元 $x, y \in P$ に対して次の条件は同値である。

- 元 x, y は G において共役である。
- 元 x, y は H において共役である。

この主張は正規化群 H が P における融合を統制する (H controls fusion in P) と表現されることもある。一般に局所部分群は次のように定義される。

定義 1.6 (局所部分群). 有限群 G の非自明な p 部分群 Q の G における正規化群 $N_G(Q)$ のことを局所部分群 (local subgroup) という [15, p. 128]。

有限群の表現論における局所大域原理に関して中心的な問題は McKay 予想である [15]。新たに記号

$$\mathrm{Irr}_{p'} G = \{ \chi \in \mathrm{Irr} G : p \nmid \chi(1) \}$$

を導入すると予想は次のように述べられる。

予想 1.7 (McKay 予想). Sylow p 部分群 P の G における正規化群を $H = N_G(P)$ とするとき, 全单射

$$\mathrm{Irr}_{p'} G \rightarrow \mathrm{Irr}_{p'} H \quad (\text{MC})$$

が存在するか?

McKay 予想は奇数位数の群に対しては正しいことが有限単純群の分類を用いて [13] で示されたが一般の場合は未解決のままである.

McKay 予想をブロックごとに考えたのが Alperin-McKay 予想である. ここでは簡単にために主ブロックの場合のみを扱う. 同様の記号

$$\mathrm{Irr}_{p'} B_0(G) = \{ \chi \in \mathrm{Irr} B_0(G) : p \nmid \chi(1) \}$$

を導入すると予想は次のように述べられる.

予想 1.8 (Alperin-McKay 予想). Sylow p 部分群 P の G における正規化群を $H = N_G(P)$ とするとき, 全单射

$$\mathrm{Irr}_{p'} B_0(G) \rightarrow \mathrm{Irr}_{p'} B_0(H) \quad (\text{AMC}_0)$$

が存在するか?

前節で述べたように Alperin-McKay 予想を認めれば Brauer の第 21 問題は肯定的に解決できる. このような言い方になることからもわかる通り Alperin-McKay 予想も一般の場合は未解決のままである.

ここで少し寄り道をする. 有限群の指標理論において既約指標と共役類の間にある種の双対性があることが経験則として知られている. たとえば次数が 1 の既約指標の数は交換子部分群の指数 $|G : G'|$ と一致するのに対して, 位数が 1 の共役類の数は中心の位数 $|\mathrm{Z}(G)|$ と一致する. ここでは $\mathrm{Irr}_{p'} G$ の双対として記号

$$\mathrm{Cl}_{p'} G = \{ K \in \mathrm{Cl} G : p \nmid |K| \}$$

を導入する. McKay 予想の双対は正しい [15, p. 157].

命題 1.9 (McKay 予想の双対). Sylow p 部分群 P の G における正規化群を $H = N_G(P)$, 中心化群を $C = C_G(P)$ とするとき, 写像

$$\mathrm{Cl}_{p'} G \rightarrow \mathrm{Cl}_{p'} H, \quad K \mapsto K \cap C \quad (\text{MC}^*)$$

は全单射である.

これは Burnside の融合定理（定理 1.5）を Sylow p 部分群が非可換となる場合も含むように拡張したものと思うこともできる。証明もほとんど同じで Sylow の定理の手頃な応用例のひとつである。この局所大域対応は Brauer の第一主定理（Brauer's first main theorem）を証明する準備の中で述べられることが多く、すっきりとした結果であるにも関わらず専門家以外にはあまり知られていないように思う。この機会により広く知されることを願ってここで取り上げた。

2 定理

背景として有限群論において Landau の有限性定理（定理 1.1）が知られており小さな有限群の分類（表 1）が成されていること、また主ブロックでも Brauer の第 21 問題（予想 1.4）が考えられており Alperin-McKay 予想を認めさえすれば Sylow p 部分群に関する類似の有限性が成り立つことを述べた。すると次は Sylow p 部分群を具体的に決定してみようという問題になる。主ブロックに属する既約指標の数が小さい場合から順に Brauer-Nesbitt [3], Brandt [1], Belonogov [19] によって次の結果が得られている³。

定理 2.1 (Brauer-Nesbitt, Brandt, Belonogov).

$$\begin{aligned} |\mathrm{Irr} B_0(G)| = 1 &\iff P \cong 1. \\ |\mathrm{Irr} B_0(G)| = 2 &\iff P \cong C_2. \\ |\mathrm{Irr} B_0(G)| = 3 &\iff P \cong C_3. \end{aligned}$$

定理において主ブロックに属する既約指標の数や Sylow p 部分群の位数が小さいので実際より易しく見えるかもしれない。有限群 G としては $p = 3$ のとき Janko 群 J_1 のような散在型単純群の場合も $|\mathrm{Irr} B_0(J_1)| = 3$ として含んでいることに注意しておく。これらの結果を踏まえて [9] では次の場合を示した。

定理 2.2 (Koshitani-S).

$$|\mathrm{Irr} B_0(G)| = 4 \implies P \cong C_4, V_4, C_5.$$

実際にすべての場合が現れるが⁴逆は成立しない⁵。証明は有限単純群の分類に依っている。同様の方針で Belonogov の定理に対する別証明も与えた。以下では簡単のために Belonogov の定理の別証明を例に証明でどのような道具を使ったのかを紹介する。

2.1 単純群への帰着

まずは単純群がどのようにして議論の中に現れるかを紹介する。準備として標準的な記号の導入をする。

定義 2.3.

- 位数 $|N|$ が p と素となる G の正規部分群 N のうち最大のものを $O_{p'}(G)$ と定める。
- 指数 $|G : N|$ が p と素となる G の正規部分群 N のうち最小のものを $O^{p'}(G)$ と定める。

Sylow p 部分群が可換のとき次の構造定理が基本的である [8, Theorem 2.1].

定理 2.4 (Kimmerle-Sandling). Sylow p 部分群 P が可換とする。このとき p 群 Q と非自明な Sylow p 部分群をもつ非可換単純群 H_1, \dots, H_n が存在して次が成り立つ。

$$O^{p'}(G/O_{p'}(G)) \cong Q \times H_1 \times \cdots \times H_n.$$

例 2.5. 素数 $p \geq 5$ と一般線型群 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ を考える。このとき $O_{p'}(G)$ は中心 $Z(G)$ と一致し剩余群は射影一般線型群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$ となる。すると $O^{p'}(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p))$ は射影特殊線型群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ なので

$$O^{p'}(G/O_{p'}(G)) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$$

を得る。構造を模式的に書けば

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) \sim \begin{bmatrix} C_2 \\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p) \\ C_{p-1} \end{bmatrix}$$

となっている。

上の例のように Sylow p 部分群が可換の場合には位数が p と素な上下にある因子を削ぐと（ほとんど）単純群となることを Kimmerle-Sandling の定理は述べている。すると問題のひとつは Sylow p 部分群の可換性を確かめることである。これに関しては次の定理がある [10, 11].

定理 2.6 (Külshammer, Külshammer-Navarro-Sambale-Tiep). もし $|\mathrm{Irr} B_0(G)| = 3$ ならば Sylow p 部分群 P は可換である。

ここで [11, Theorem 3.6] では有限単純群の分類が用いられていることに注意しておく。さらに次の定理により問題を G から十分大きな正規部分群 N へ帰着することができる [5].

定理 2.7 (Alperin-Dade). 有限群 G の正規部分群 N が Sylow p 部分群 P を含み $G = C_G(P)N$ を満たすならば制限写像

$$\mathrm{Irr} B_0(G) \rightarrow \mathrm{Irr} B_0(N), \quad \chi \mapsto \chi_N$$

は全单射である。

これらの組合せにより Belonogov の定理に対する別証明を与えることができる。

2.2 証明の概略

ここでは $|\mathrm{Irr} B_0(G)| = 3 \implies P \cong \mathrm{C}_3$ を背理法で示す。反例となる組 (G, P) を考える。さらに位数 $|G|$ は最小であると仮定してよい。まず位数の最小性と (†) から $O_{p'}(G) \cong 1$ がわかる。また位数の最小性から $G = C_G(P)O^{p'}(G)$ も示せる。すると Alperin-Dade の定理から $|\mathrm{Irr} B_0(G)| = |\mathrm{Irr} B_0(O^{p'}(G))|$ が成り立つので位数の最小性から $G = O^{p'}(G)$ もわかる。定理 2.6 より Sylow p 部分群は可換なので Kimmerle-Sandling の定理から

$$G \cong Q \times H_1 \times \cdots \times H_n$$

となる p 群 Q と非自明な Sylow p 部分群をもつ非可換単純群 H_1, \dots, H_n が存在する。したがって

$$3 = |\mathrm{Irr} B_0(G)| = |\mathrm{Irr} B_0(Q)| \times |\mathrm{Irr} B_0(H_1)| \times \cdots \times |\mathrm{Irr} B_0(H_n)|$$

より $Q \cong 1$ かつ $n = 1$ がわかる。以上から位数最小の反例 G は非可換単純群である。ところが非可換単純群の中には主張の反例がないことが分類から確かめられる。これは矛盾。□

2.3 最近の進展

定理 2.2 に関する論文 [9] のプレプリントを arXiv にアップロードしたは 2020 年の 2 月であった。その後 2020 年の 10 月には次の定理が発表された [16]。

定理 2.8 (Rizo-Schaeffer Fry-Vallejo).

$$|\mathrm{Irr} B_0(G)| = 5 \implies P \cong \mathrm{C}_5, \mathrm{C}_7, \mathrm{D}_8, \mathrm{Q}_8.$$

これらの定理の仮定をさらに $|\mathrm{Irr}_{p'} B_0(G)|$ へ弱めた一般化が Hung-Schaeffer Fry-Vallejo [6] によって 2021 年の 6 月には発表されている。主ブロックとは限らない一般のブロックに関する 2021 年の 9 月には次の定理が発表された [14]。

定理 2.9 (Martínez-Rizo-Sanus). 素数 p と有限群 G と不足群 P をもつブロック B をとする。Alperin-McKay 予想が B について成り立つならば

$$|\mathrm{Irr} B| = 4 \implies P \cong \mathrm{C}_4, \mathrm{V}_4, \mathrm{C}_5.$$

このように幾つもの論文（プレプリント）が発表され、その後も活発に研究が進んでいる。

付録 A Brandt の定理

ここでは主ブロックに対する Brandt の定理 $|\mathrm{Irr} B_0(G)| = 2 \implies P \cong \mathrm{C}_2$ の指標論的な証明を与える。方針はおよそ Belonogov の方法に沿っている。実際にはもう少し強い主張

$$|\mathrm{Irr} B_0(G)| = 2 \implies |G_{p'}|/|G| = 1/2$$

を示す。

証明の概略。主ブロックに属する非自明な既約指標を α とおく。Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{|G|}/\mathbb{Q})$ の既約指標への自然な作用を考える。主ブロックは不变なので既約指標 α は有理数に値をとる。一般論から指標の値は代数的整数なので既約指標 α が整数に値をとることがわかる。

仮定より $|\mathrm{Irr} B_0(G)| \neq 1$ なので差集合 $G - G_{p'}$ は空でない。任意の元 $u \in G - G_{p'}$ をとるとブロックの直交関係

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr} B_0(G)} \chi(1) \overline{\chi(u)} = 0$$

から $1 + \alpha(1)\alpha(u) = 0$ である。既約指標 α は整数に値をとっていたので $\alpha(1) = 1$ と $\alpha(u) = -1$ を得る。

差集合 $G - G_{p'}$ の指示関数を既約指標へ展開することで

$$|G| = \sum_{g \in G - G_{p'}} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr} B_0(G)} \chi(u) \overline{\chi(g)} = 2|G - G_{p'}|$$

となることが示せるので $|G_{p'}|/|G| = 1/2$ を得る。一般に $p \nmid |G_{p'}|$ ゆえ $|P| = 2$ を得る。 \square

結論として $P \cong C_2$ を示すだけなら後半部分の代わりに指標 $\theta = 1_G + \alpha$ の Sylow p 部分群 P への制限を考えると

$$\langle \theta_P, 1_P \rangle = \frac{1}{|P|} \sum_{u \in P} \theta(u) = \frac{2}{|P|}$$

より $|P| = 2$ を得ることもできることに注意しておく。

謝辞

代数学シンポジウムにおける講演の機会を下さった方々に感謝の意を表します。

注

1. このように表現論的な定式化をすればアソシエーション・スキーム (association scheme) のような共役類に相当する概念がない場合にも類似を考えることができる。実際 D. G. Higman により 2 つの既約指標をもつ場合の結果 [18, Theorem 4.5.1] が知られている。また有限群の場合でもこの定式化によりブロックごとに類似を考えることができる。
2. 記号 p' は p と素である (prime to p) である印としてよく使われる。洒落の一種だが学生の頃に出会ってから数年間はそれに気がつかなかったので無縫は承知で明文化しておく。
3. Brauer-Nesbitt の定理と Brandt の定理は一般のブロックと不足群に対しても成り立つ。Belonogov の定理は主ブロックの場合しか未だに知られていない。
4. たとえば $(G, P) = (C_4, C_4), (V_4, V_4), (D_{10}, C_5)$ のとき $|\text{Irr } B_0(G)| = 4$ 。極端な例だと $(G, P) = (J_3, C_5)$ のときも $|\text{Irr } B_0(J_3)| = 4$ 。
5. たとえば $(G, P) = (C_5, C_5)$ のとき $|\text{Irr } B_0(G)| = 5$ 。

参考文献

- [1] J. Brandt, *A lower bound for the number of irreducible characters in a block*, J. Algebra **74** (1982), 509–515, doi:[10.1016/0021-8693\(82\)90036-9](https://doi.org/10.1016/0021-8693(82)90036-9).
- [2] R. Brauer, 有限群の表現, 現代の数学 I, 岩波書店, 東京, 1965, pp. 197–257.
- [3] R. Brauer and C. Nesbitt, *On the modular characters of groups*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 556–590, doi:[10.2307/1968918](https://doi.org/10.2307/1968918).
- [4] W. Burnside, 有限群論, 共立出版, 東京, 1970.
- [5] E. C. Dade, *Remarks on isomorphic blocks*, J. Algebra **45** (1977), 254–258, doi:[10.1016/0021-8693\(77\)90371-4](https://doi.org/10.1016/0021-8693(77)90371-4).

- [6] N. N. Hung, A. A. Schaeffer Fry, and C. Vallejo, *Height zero characters in principal blocks*, Preprint, 2021.
- [7] B. Huppert, *Character theory of finite groups*, de Gruyter, Berlin, 1998.
- [8] W. Kimmerle and R. Sandling, *Group-theoretic and group ring-theoretic determination of certain Sylow and Hall subgroups and the resolution of a question of R. Brauer*, J. Algebra **171** (1995), 329–346, doi:[10.1006/jabr.1995.1014](https://doi.org/10.1006/jabr.1995.1014).
- [9] S. Koshitani and T. Sakurai, *The principal p -blocks with four irreducible characters*, Bull. London Math. Soc. **53** (2021), 1124–1138, doi:[10.1112/blms.12488](https://doi.org/10.1112/blms.12488).
- [10] B. Külshammer, *Symmetric local algebras and small blocks of finite groups*, J. Algebra **88** (1984), 190–195, doi:[10.1016/0021-8693\(84\)90097-8](https://doi.org/10.1016/0021-8693(84)90097-8).
- [11] B. Külshammer, G. Navarro, B. Sambale, and P. H. Tiep, *Finite groups with two conjugacy classes of p -elements and related questions for p -blocks*, Bull. Lond. Math. Soc. **46** (2014), 305–314, doi:[10.1112/blms/bdt099](https://doi.org/10.1112/blms/bdt099).
- [12] B. Külshammer and G. R. Robinson, *Alperin-McKay implies Brauer’s problem 21*, J. Algebra **180** (1996), 208–210, doi:[10.1006/jabr.1996.0062](https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0062).
- [13] G. Malle and B. Späth, *Characters of odd degree*, Ann. of Math. (2) **184** (2016), 869–908, doi:[10.4007/annals.2016.184.3.6](https://doi.org/10.4007/annals.2016.184.3.6).
- [14] J. M. Martínez, N. Rizo, and L. Sanus, *The blocks with four irreducible characters*, <https://arxiv.org/abs/2109.10654>, 2021.
- [15] G. Navarro, *Character theory and the McKay conjecture*, Cambridge University Press, Cambridge, 2018.
- [16] N. Rizo, A. A. Schaeffer Fry, and C. Vallejo, *Principal blocks with 5 irreducible characters*, J. Algebra **585** (2021), 316–337, doi:[10.1016/j.jalgebra.2021.06.009](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2021.06.009).
- [17] A. Vera-López and J. Sangroniz, *The finite groups with thirteen and fourteen conjugacy classes*, Math. Nachr. **280** (2007), 676–694, doi:[10.1002/mana.200410508](https://doi.org/10.1002/mana.200410508).
- [18] P.-H. Zieschang, *An algebraic approach to association schemes*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [19] Б. А. Белоногов, *Конечные группы с небольшим главным p -блоком*, Теоретико-групповые исследования, УрО АН СССР, Свердловск, 1990, MR [1159126](https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1159126), Zbl [0808.20015](https://zbmath.org/?q=an:0808.20015), pp. 8–30.

ITERATED INTEGRALS, MOTIVIC GALOIS GROUPS, AND CYCLOTOMIC ASSOCIATORS

広瀬 稔（名古屋大学）

1. INTRODUCTION

交代的多重ゼータ値¹とは

$$\sum_{0 < m_1 < \dots < m_d} \frac{\epsilon_1^{m_1} \cdots \epsilon_d^{m_d}}{m_1^{k_1} \cdots m_d^{k_d}} \quad (k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \epsilon_i \in \{\pm 1\}, (k_d, \epsilon_d) \neq (1, 1)) \quad (1.1)$$

という形の無限級数で定義される実数である。交代的多重ゼータ値はモチヴィック交代的多重ゼータ値と呼ばれる対象に持ち上がり、さらにモチヴィック交代的多重ゼータ値の \mathbb{Q} -線形関係式の構造は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の混合テイトモチーフのモチヴィック Galois 群の構造と直接的に関係することが知られている。Drinfeld [4] は [9] で展開された Grothendieck のアイデアに関連して Grothendieck-Teichmüller 群と呼ばれる代数群を導入し、さらに Enriquez [5] はこれを一般化して円分的 Grothendieck-Teichmüller 群を導入した。本稿では次の二つの結果について解説する。

- モチヴィック交代的多重ゼータ値の全線型関係式が合流関係式とよばれる具体的な関係式によって全て与えられること。[12]
- $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の混合テイトモチーフのモチヴィック Galois 群がレベル 2 の円分的 Grothendieck-Teichmüller 群と一致すること。[10]

2. 多重 L 値について

多重ゼータ値とは正の整数 k_1, \dots, k_d であって $k_d > 1$ となるものに対して無限級数

$$\sum_{0 < m_1 < \dots < m_d} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_d^{k_d}} \quad (2.1)$$

で定義される実数で $\zeta(k_1, \dots, k_d)$ と表記される。 $k_d > 1$ は収束性のために必要となる条件である。ここで $k_1 + \dots + k_d$ は重さと呼ばれ d は深さとよばれる。また多重 L 値は多重ゼータ値の一般化であり、正の整数 N に対しレベル N の多重 L 値とは、正の整数 k_1, \dots, k_d と 1 の N 乗根 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_d$ であって、 $(k_d, \epsilon_d) \neq (1, 1)$ となるものに対して、無限級数

$$\sum_{0 < m_1 < \dots < m_d} \frac{\epsilon_1^{m_1} \cdots \epsilon_d^{m_d}}{m_1^{k_1} \cdots m_d^{k_d}} \quad (2.2)$$

で定義される実数である。また、レベル 2 の多重ゼータ値は交代的多重ゼータ値とも呼ばれる。多重 L 値の表記方法は文献により様々であるが、本稿では (2.2) を

$$\zeta \left(\begin{array}{ccc} \epsilon_1, & \dots, & \epsilon_d \\ k_1, & \dots, & k_d \end{array} \right) \quad (2.3)$$

¹英語で alternating multiple zeta value. 別名として、Euler 和 (Euler sum), レベル 2 の色付き多重ゼータ値 (colored multiple zeta value), レベル 2 の多重 L 値 (multiple L-value) などがある。

と表記する. この場合も同様に $k_1 + \dots + k_d$ は重さ, d は深さと呼ばれる. $N \geq 1$ に対し 1 の N 乗根全体を μ_N とする. 多重 L 値は反復積分記号

$$I(0; a_1, \dots, a_k; 1) := \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} \prod_{j=1}^k \frac{dt_j}{t_j - a_j} \quad (2.4)$$

を用いて

$$\zeta \begin{pmatrix} \epsilon_1, & \dots, & \epsilon_d \\ k_1, & \dots, & k_d \end{pmatrix} = (-1)^d I(0; (\epsilon_1 \cdots \epsilon_d)^{-1}, \{0\}^{k_1-1}, \dots, \epsilon_d^{-1}, \{0\}^{k_d-1}; 0) \quad (2.5)$$

と表される². よってレベル N の多重 L 値を考えることは, 反復積分

$$I(0; a_1, \dots, a_k; 1) \quad (a_1, \dots, a_k \in \{0, \mu_N\}, a_1 \neq 0, a_k \neq 1) \quad (2.6)$$

を考えることと本質的に同じである. ここで反復積分する微分形式

$$\frac{dt}{t - a_j} \quad (a_j \in \{0, \mu_N\}) \quad (2.7)$$

は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \mu_N, \infty\}$ 上で正則なので, このような反復積分は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \mu_N, \infty\}$ 上の反復積分とも呼ばれる³. この反復積分表示から多重 L 値が Kontsevich-Zagier[13] の意味での周期, あるいはより強く $\mathbb{Z}[\mu_N, N^{-1}]$ 上の混合テイトモチーフの周期となることが分かり, 多重 L 値が重要である理由の一つとなっている. また次の予想は証明困難だがまず間違いなく正しいであろうと広く信じられている.

予想 1. 重さの異なる多重 L 値の間には (非自明な) \mathbb{Q} -線形関係式が存在しない.

ここで, 多重 L 値の代数的取り扱いを導入しておこう. μ_N を 1 の N 乗根の全体とする. まず

$$\mathfrak{H}_N := \mathbb{Q}\langle e_z \mid z \in \{0\} \cup \mu_N \rangle \quad (2.8)$$

を $N+1$ 個の不定元で生成される非可換多項式環とし, 更に部分空間 $\mathfrak{H}_N^0 \subset \mathfrak{H}_N$ を

$$\mathfrak{H}_N^0 := \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \bigoplus_{\substack{a_1, \dots, a_k \in \{0\} \cup \mu_N \\ a_1 \neq 0, a_k \neq 1}} e_{a_1} \cdots e_{a_k}$$

で定める. また線形写像 $Z_N : \mathfrak{H}_N^0 \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$Z_N(e_{a_1} \cdots e_{a_k}) = I(0; a_1, \dots, a_k; 1) \quad (2.9)$$

で定める. 多重 L 値に関する最も基本的な問題は多重 L 値がどのような \mathbb{Q} -線形関係式を満たすかである. これは $\ker Z_N$ を決定するという問題に対応する. この問題に関連して Z_N の様々な具体的な元が構成されている. 一方 $\ker Z_N$ を上から抑えるのは無理数論に関わる問題であり極めて困難である. そのため, より筋の良い問題定式化のためには多重 L 値の代わりに第 4 節で説明するようなモチヴィック多重 L 値を使用するのが適切であると思われる.

² $\int_{0 < t_1 < \dots < t_k < t} \prod_{j=1}^k \frac{dt_j}{t_j - a_j}$ の t に関する幕級数展開を計算し, 最後に t に 1 を代入すれば証明できる

³ $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \mu_N, \infty\}$ 上の正則な微分形式は他に $\frac{dt}{(t-a_j)^2}$ 等もあるが, そのようなより一般の微分形式の反復積分値もやはり多重 L 値の線形和で表される.

3. 合流関係式

3.1. 反復積分と微分公式. 反復積分記号をより一般的に導入しておこう. $k \geq 0$ として, a_0, \dots, a_{k+1} を $k+2$ 個の複素数とする. また $\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ を a_0 から a_{k+1} へのパスとし更に $a_0 \neq a_1, a_k \neq a_{k+1}$ とする. このとき反復積分

$$I_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) := \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} \prod_{j=1}^k \frac{d\gamma(t_j)}{\gamma(t_j) - a_j} \quad (3.1)$$

は収束し, さらに γ の連続変形によって不変であることが分かる. 本稿では γ を省略した場合は γ は直線パスを表すものとする. $I_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})$ を a_0, \dots, a_{k+1} の関数とみなしたとき, $I_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})$ の全微分について次の公式が知られている [7, Theorem 2.1].

$$dI_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = \sum_{j=1}^k I_\gamma(a_0; a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_k; a_{k+1}) d \log \left(\frac{a_j - a_{j+1}}{a_j - a_{j-1}} \right). \quad (3.2)$$

また応用上は a_0, \dots, a_{k+1} が別の変数 z_1, \dots, z_n の有理式で, 更に $a_j \neq a_{j+1}$ が必ずしも成立しないような場合もある. このような場合 $d \log \left(\frac{a_j - a_{j+1}}{a_j - a_{j-1}} \right)$ が well-defined とは限らない. そのような一般の場合については全微分は

$$\sum_{r \in \{\pm 1\}} r \sum_{j=1}^k I_\gamma(a_0; a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_k; a_{k+1}) \begin{cases} d \log (a_j - a_{j+r}) & a_j \neq a_{j+r} \\ 0 & a_j = a_{j+r} \end{cases} \quad (3.3)$$

で与えられる [14, Lemma 3.3.30]. 特に p_0, \dots, p_{k+1} が z の有理式のとき,

$$\frac{d}{dz} I_\gamma(p_0; p_1, \dots, p_k; p_{k+1}) = \sum_{r \in \{\pm 1\}} \sum_{c \in \mathbb{C}} \frac{r}{z - c} \sum_{j=1}^k I_\gamma(p_0; p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_k; p_{k+1}) \text{ord}_{z=c}(p_j - p_{j+r}) \quad (3.4)$$

となる. ただし, $\text{ord}_{z=c}(0) = 0$ と置く. ここで c の動く範囲は複素数全体となっていが, 実際には c が $a_j - a_{j+r}$ の零点もしくは極となる場合のみ和に寄与するので (3.4) は実質的に有限和である.

3.2. 正規化極限と正規化された反復積分.

定義 2. $a \in \mathbb{C}$ とする. 関数 $f(z)$ の $z = a$ の周りでの挙動が

$$f(a \pm \epsilon) = c_0 + c_1 \log(\epsilon) + \dots + c_M \log^M(z) + O(\epsilon \log^M \epsilon) \quad (3.5)$$

となるとき, 正規化極限を

$$\underset{z \rightarrow a \pm 0}{\text{Reg}} f(z) := c_0 \quad (3.6)$$

で定義する.

極限値が存在するとき, それは正規化極限に一致する. また正規化極限値を用いることで $a_0 \neq a_1$ となる場合や $a_k \neq a_{k+1}$ となる場合にも反復積分の定義を拡張できる.

定義 3. $a_0 < a_{k+1}$ を実数, a_1, \dots, a_k を開区間 (a_0, a_{k+1}) に含まれない複素数とする. 正規化された反復積分を

$$I^{\text{reg}}(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) := \underset{\epsilon \rightarrow +0}{\text{Reg}} I(a_0 + \epsilon; a_1, \dots, a_k; a_{k+1} - \epsilon) \quad (3.7)$$

で定義する.

以下では, $I^{\text{reg}}(\dots)$ を単に $I(\dots)$ と書く.

3.3. 一般的な合流関係式. 微分方程式 (3.4) を繰り返し使うことで, 成分を z の有理関数とする反復積分は, 成分を定数とする 0 から z までの反復積分の \mathbb{C} -線形和に展開できる. より正確には次が成立する.

命題 4. a を正の実数, p_0, \dots, p_{k+1} を z の有理式とする. $p_0(z) \neq p_1(z)$, $p_k(z) \neq p_{k+1}(z)$ と仮定する. また $0 < z < a$ のとき $p_0(z) \neq p_{k+1}(z)$ であり, さらに $1 \leq j \leq k$ に対して $p_j(z)$ は $p_0(z)$ と $p_{k+1}(z)$ を結ぶ閉線分上に存在しないと仮定する. また更に $0 \leq j_1 < j_2 \leq k+1$ のとき $p_{j_1} - p_{j_2}$ は 0 であるかもしくは零点と極が開区間 $(0, a)$ に含まれないと仮定する. このとき $v^{(n)} \in \mathbb{C}, l^{(n)} \geq 0, c_1^{(n)}, \dots, c_{l^{(n)}}^{(n)} \in \mathbb{C} \setminus (0, a)$ が存在して

$$I(p_0; p_1, \dots, p_k; p_{k+1}) = \sum_n v^{(n)} I(0; c_1^{(n)}, \dots, c_{l^{(n)}}^{(n)}; z) \quad (3.8)$$

が成立する.

Proof. k に関する帰納法で証明する. $f(z) := I(p_0(z); p_1(z), \dots, p_k(z); p_{k+1}(z))$ と置く. 微分公式 (3.4) より

$$\frac{d}{dz} f(z) = \sum_{r \in \{\pm 1\}} \sum_{c \in \mathbb{C}} \sum_{j=1}^k \frac{\text{rord}_{z-c}(p_j - p_{j+r})}{z - c} I(p_0; p_1, \dots, \widehat{p_j}, \dots, p_k; p_{k+1}) \quad (3.9)$$

となるが, 帰納法の仮定より各 $j = 1, \dots, r$ に対して

$$I(p_0; p_1, \dots, \widehat{p_j}, \dots, p_k; p_{k+1}) = \sum_n v^{(j,n)} I(0; c_1^{(j,n)}, \dots, c_{l^{(j,n)}}^{(j,n)}; z) \quad (3.10)$$

となる $v^{(j,n)} \in \mathbb{C}, l^{(j,n)} \geq 0, c_1^{(j,n)}, \dots, c_{l^{(j,n)}}^{(j,n)} \in \mathbb{C} \setminus (0, a)$ が存在する. このとき

$$g(z) = \sum_{r \in \{\pm 1\}} \sum_{c \in \mathbb{C}} \sum_{j=1}^k \text{rord}_{z-c}(p_j - p_{j+r}) v^{(j,n)} I(0; c_1^{(j,n)}, \dots, c_{l^{(j,n)}}^{(j,n)}, c; z) \quad (3.11)$$

と置くと

$$\frac{d}{dz} I(0; c_1^{(j,n)}, \dots, c_{l^{(j,n)}}^{(j,n)}, c; z) = \frac{1}{z - c} I(0; c_1^{(j,n)}, \dots, c_{l^{(j,n)}}^{(j,n)}; z) \quad (3.12)$$

より

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{d}{dz} g(z) \quad (3.13)$$

が成立する. よって $\text{Reg}_{z \rightarrow +0} g(z) = 0$ より

$$f(z) = g(z) + \left(\text{Reg}_{z \rightarrow +0} f(z) \right) I(0; ; z) \quad (3.14)$$

となり示された. \square

式 (3.8) で $z = a$ を代入する (もしくは $z = a$ で発散している場合は正規化極限 $\text{Reg}_{z \rightarrow a-0}$ を考える) ことで反復積分の線型関係式が得られる. これが一般的な合流関係式のアイデアである.

3.4. 合流関係式の特別な場合. 前節で述べた一般的な合流関係式の特別な場合として次の二つがある.

- $a = 1, p_0 = 0, p_{k+1} = z, p_1, \dots, p_k \in \{0, 1, z\}$ のとき合流関係式は多重ゼータ値の関係式を与える. [11]
- $a = 1, p_0 = 0, p_{k+1} = z, p_1, \dots, p_k \in \{0, -1, z, -z^2\}$ のとき合流関係式は交代的多重ゼータ値の関係式を与える. [12]

本稿では1つめの関係式をレベル1の合流関係式, 2つめの関係式をレベル2の合流関係式と呼ぶことにする. これらの関係式を(交代的)多重ゼータ値の関係式として完全に定式化するには, 正規化極限をどのように(交代的)多重ゼータ値とみなすか指定する必要があるが, 本稿ではその詳細は省略する. レベル1の合流関係式およびレベル2の合流関係式はそれぞれ多重ゼータ値と交代的多重ゼータ値の全ての \mathbb{Q} -線型関係式を尽くすことが期待される. また, レベル1の合流関係式はアソシエータ関係式と同値になることが古庄[6]によって示されている. レベル2の合流関係式全体から生成される \mathfrak{H}_2^0 の部分空間を $I_{\text{CF}} \subset \mathfrak{H}_2^0$ で表すことにする.

4. モチヴィック多重L値について

4.1. 混合テイトモチーフの圏について. 体 F に対して Vect_F を F -ベクトル空間の圏とする. 以下では代数体は全て \mathbb{C} の部分体とみなす. 次の事実が知られている.

- 代数体 K に対し, \mathbb{Q} -線型淡中圏 $\text{MT}(K)$ が定まる.
- 二種類のファイバー関手 $\omega, \omega_B : \text{MT}(K) \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}$ がある.
- 部分 \mathbb{Q} -ベクトル空間 $\Gamma \subset K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ に対し, 部分淡中圏 $\text{MT}_\Gamma \subset \text{MT}(K)$ が定まる.

$\text{MT}(K)$ は K 上の混合テイトモチーフの圏と呼ばれる. また ω は標準ファイバー関手, ω_B はBetti実現関手と呼ばれる. さらに K の整数環 \mathcal{O}_K を含むような K の部分環 R に対して $\text{MT}_{R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}$ を R 上の混合テイトモチーフの圏と呼び, $\text{MT}(R)$ と表記する. 淡中圏の一般論より, \mathbb{Q} -代数亜群 $\text{Isom}_{\text{MT}(R)}^\otimes(\omega, \omega_B)$ が定まる. $\text{Isom}_{\text{MT}(R)}^\otimes(\omega, \omega_B)$ の関数環を \mathcal{H}_R で表す. \mathcal{H}_R は $\text{MT}(R)$ の効果的モチヴィック周期環と呼ばれる. \mathcal{H}_R は次数付き環の構造を持つ, つまり $\mathcal{H}_R = \sum_{k=0}^\infty \mathcal{H}_{R,k}$ と分解する. また周期写像と呼ばれる環準同型 $\rho : \mathcal{H}_R \rightarrow \mathbb{C}$ があり, ρ は単射であると予想されている. さらにモチヴィック $2\pi i$ と呼ばれる特殊な元 $\mu \in \mathcal{H}_{R,1}$ が存在し, さらに $\rho(\mu) = 2\pi i$ が成り立つ. また剩余環 $\mathcal{H}_R/\mu\mathcal{H}_R$ はHopf代数の構造をもち, さらに \mathcal{H}_R は $\mathcal{H}_R/\mu\mathcal{H}_R$ 余加群の構造を持つ. つまり余積

$$\Delta : \mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}_R/\mu\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_R \quad (4.1)$$

の構造を持つ. また $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を複素共役写像とするとき, 同型写像

$$\sigma^m : \mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}_{\overline{R}} \quad (4.2)$$

が存在し, $\sigma^m \circ \sigma^m = \text{id}$, $\sigma^m(\mu) = -\mu$, $\rho \circ \sigma^m = \sigma \circ \rho$ が成り立つ.

4.2. モチヴィック多重L値と主定理. K を代数体, $a_0, \dots, a_{k+1} \in K$ とし, γ を a_0 から a_{k+1} への $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ 上のパスとする. さらに $a_0 \neq a_1, a_k \neq a_{k+1}$ とする. このときモチヴィック反復積分

$$I_\gamma^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in \mathcal{H}_{K,k} \quad (4.3)$$

が定義され, さらに

$$\rho(I_\gamma^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})) = I_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \quad (4.4)$$

が成立する。また γ の複素共役を $\bar{\gamma}$ とするとき

$$\sigma^m(I_\gamma^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})) = I_{\bar{\gamma}}^m(\bar{a}_0; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k; \bar{a}_{k+1}) \quad (4.5)$$

となる。また $\mathcal{O}_K \subset R \subset K$ で任意の $0 \leq i, j \leq k+1$ に対して $a_i - a_j \in \{0\} \cup R^\times$ が成り立つとき

$$I_\gamma^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in \mathcal{H}_{R,k} \quad (4.6)$$

となる。以下、 $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[\mu_N, N^{-1}]}$ を単に $\mathcal{H}_N = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_{N,k}$ と書くことにする。 (4.6) の特別な場合として、 $a_0, \dots, a_{k+1} \in \{0, \mu_N\}$ のとき

$$I_\gamma^m(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) \in \mathcal{H}_{N,k} \quad (4.7)$$

となる。レベル N のモチヴィック多重 L 値は

$$\begin{aligned} \zeta^m \left(\begin{array}{ccc} \epsilon_1, & \dots, & \epsilon_d \\ k_1, & \dots, & k_d \end{array} \right) = \\ (-1)^d I^m(0; (\epsilon_1 \cdots \epsilon_d)^{-1}, \{0\}^{k_1-1}, \dots, \epsilon_d^{-1}, \{0\}^{k_d-1}; 1) \in \mathcal{H}_{N, k_1 + \dots + k_d} \end{aligned}$$

で定義される。さらに線形写像 $Z_N^m : \mathfrak{H}_N^0 \rightarrow \mathcal{H}_N$ を

$$Z_N(e_{a_1} \cdots e_{a_k}) := I^m(0; e_{a_1} \cdots e_{a_k}; 1) \quad (4.8)$$

で定める。このとき $Z_N = \rho \circ Z_N^m$ が成立する。次は本稿の一つ目の主定理である。

定理 5 ([12]). モチヴィック交代的多重ゼータ値の線型関係式はレベル 2 の合流関係式で尽くされる。つまり

$$\ker Z_2^m = I_{\text{CF}}. \quad (4.9)$$

証明の大まかな方針について述べておこう。 $I_{\text{CF}} \subset \ker Z_2^m$ が成り立つことは、より一般に合流関係式がモチヴィック反復積分についても成り立つことから分かる。 \mathfrak{H}_2^0 の次数 k 部分を $\mathfrak{H}_{2,k}^0$ で表すことにする。 I_{CF} および $\ker Z_2^m$ は各次数ごとに分解する、つまり

$$\begin{aligned} I_{\text{CF}} &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} (I_{\text{CF}} \cap \mathfrak{H}_{2,k}^0) \\ \ker Z_2^m &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\ker Z_2^m \cap \mathfrak{H}_{2,k}^0) \end{aligned}$$

となるので、

$$I_{\text{CF}} \cap \mathfrak{H}_{2,k}^0 = \ker Z_2^m \cap \mathfrak{H}_{2,k}^0 \quad (4.10)$$

を示せばよい。さらに $I_{\text{CF}} \subset \ker Z_2^m$ が既に分かっているので

$$\dim_{\mathbb{Q}} (I_{\text{CF}} \cap \mathfrak{H}_{2,k}^0) \geq \dim_{\mathbb{Q}} (\ker Z_2^m \cap \mathfrak{H}_{2,k}^0) \quad (4.11)$$

を示せばよい。また $\mathcal{H}_{2,k}$ の σ^m 不変な部分を $\mathcal{H}_{2,k}^{\text{real}} \subset \mathcal{H}_{2,k}$ で表すことになると、Deligne により

$$Z_2^m : \mathfrak{H}_{2,k}^0 \rightarrow \mathcal{H}_{2,k}^{\text{real}} \quad (4.12)$$

の全射性が示されており、さらにモチヴィック周期環の構造定理より $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_{2,k}^{\text{real}}$ は $k+1$ 番目の Fibonacci 数 F_{k+1} と一致する ($F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots$)。よって (4.11) は

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{H}_{2,k}^0 / (I_{\text{CF}} \cap \mathfrak{H}_{2,k}^0) \leq F_{k+1} \quad (4.13)$$

と同値である。ここで $k \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}\mathbb{I}(k) &:= \{(k_1, \dots, k_d) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d \mid d \geq 0, \sum_i |k_i| = k, k_d \neq 1\} \\ \mathbb{I}^D(k) &:= \{(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{I}(k) \mid k_1, \dots, k_{d-1} > 0, k_d < 0, k_2 \equiv \dots \equiv k_d \equiv 1 \pmod{2}\} \\ \text{と置き, 更に } w : \mathbb{I}(k) &\rightarrow \mathfrak{H}_{2,k}^0 \text{ を} \\ w(k_1, \dots, k_d) &:= (-2)^d e_{\epsilon_1} e_0^{|k_1|-1} e_{\epsilon_2} e_0^{|k_2|-1} \cdots e_{\epsilon_d} e_0^{|k_d|-1} \quad (\epsilon_{d+1} = 1, \epsilon_i = \epsilon_{i+1} \cdot \text{sgn}(k_i))\end{aligned}\tag{4.14}$$

で定める。このとき

$$\mathfrak{H}_{2,k}^0 = \bigoplus_{\mathbb{k} \in \mathbb{I}(k)} w(\mathbb{k}) \tag{4.15}$$

であり更に $\#\mathbb{I}^D(k) = F_{k+1}$ である。ここで各 $\mathbb{k} \in \mathbb{I}(k) \setminus \mathbb{I}^D(k)$ に対して、ある具体的な合流関係式 $f(\mathbb{k}) \in I_{\text{CF}} \cap \mathfrak{H}_{2,k}^0$ をうまく選んで計算すると

$$f(\mathbb{k}) = \sum_{\mathbb{k}' \in \mathbb{I}^D(k)} c_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'} w(\mathbb{k}') \tag{4.16}$$

と置いたときの係数 $c_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'}$ から作られる行列 $C = (c_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'})_{\mathbb{k}, \mathbb{k}' \in \mathbb{I}(k) \setminus \mathbb{I}^D(k)}$ が単三角行列⁴に2を法として合同となる。 $f(\mathbb{k}) \in I_{\text{CF}}$ より $C' = (c_{\mathbb{k}, \mathbb{k}'})_{\mathbb{k} \in \mathbb{I}(k) \setminus \mathbb{I}^D(k), \mathbb{k}' \in \mathbb{I}^D(k)}$ と置くと

$$C \cdot (w(\mathbb{k}))_{\mathbb{k} \in \mathbb{I}(k) \setminus \mathbb{I}^D(k)}^\top + C' \cdot (w(\mathbb{k}'))_{\mathbb{k}' \in \mathbb{I}^D(k)}^\top \equiv 0 \pmod{I_{\text{CF}}} \tag{4.17}$$

となる。さらに C は可逆行列となるので結局

$$(w(\mathbb{k}))_{\mathbb{k} \in \mathbb{I}(k) \setminus \mathbb{I}^D(k)}^\top = -C^{-1} C' \cdot (w(\mathbb{k}'))_{\mathbb{k}' \in \mathbb{I}^D(k)}^\top \pmod{I_{\text{CF}}} \tag{4.18}$$

となり、任意の $\mathbb{k} \in \mathbb{I}(k) \setminus \mathbb{I}^D(k)$ に対し、

$$w(\mathbb{k}) \in I_{\text{CF}} + \bigoplus_{\mathbb{k}' \in \mathbb{I}^D(k)} \mathbb{Q} w(\mathbb{k}') \tag{4.19}$$

となることが分かる。よって

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{H}_{2,k}^0 / (I_{\text{CF}} \cap \mathfrak{H}_{2,k}^0) \leq \#\mathbb{I}^D(k) = F_{k+1} \tag{4.20}$$

となり不等式(4.13)、つまり定理5が示された。

また上の議論を精密化することで次の結果を得ることも出来る。

定理 6 ([12]). 任意の $\mathbb{k} \in \mathbb{I}(k)$ に対し、 $Z_2^m(w(\mathbb{k}))$ は $\{Z_2^m(w(\mathbb{k}')) \mid \mathbb{k}' \in \mathbb{I}^D(k)\}$ の $\mathbb{Z}_{(2)} = \{p/q \in \mathbb{Q} \mid q \equiv 1 \pmod{2}\}$ 係数線形和となる。

上の定理で重要なのは $\mathbb{Z}_{(2)}$ -係数線形和となる点にあり、 \mathbb{Q} -係数線形和となることは [2][3] と同様の議論でも証明可能である。定理6のレベル1類似として次の予想を述べておきたい。

予想 7. 全てのモチヴィック多重ゼータ値 $\zeta^m(\mathbb{k})$ は Hoffman 基底 $\{\zeta^m(k_1, \dots, k_d) \mid k_1, \dots, k_d \in \{2, 3\}\}$ の $\mathbb{Z}_{(2)}$ -係数線形和となる。

これは Brown による次の定理の精密化である。

定理 8 (Brown [2]). 全てのモチヴィック多重ゼータ値 $\zeta^m(\mathbb{k})$ は Hoffman 基底 $\{\zeta^m(k_1, \dots, k_d) \mid k_1, \dots, k_d \in \{2, 3\}\}$ の \mathbb{Q} -係数線形和となる。

⁴ 対角成分が全て 1 となる三角行列のこと。ただし、ここでは $\mathbb{I}(k) \setminus \mathbb{I}^D(k)$ に何かしら都合の良い順序を入れたときに三角行列となるものとする。

5. モチヴィック GALOIS 群の基本群への作用との関係

モチヴィック多重 L 値の関係式 $\ker Z_N^{\sqcup}$ は Galois 群の基本群への作用を調べる Grothendieck-Teichmüller 理論と深く関係する。Grothendieck-Teichmüller 理論には絶対 Galois 群版とモチヴィック Galois 群版が考えられる。 $\ker Z_N^{\sqcup}$ と直接関係するのは後者であるが、前者に関して知られている結果についても触れておこう。まず \mathbb{Q} の絶対 Galois 群 $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ はエタール基本群の一般論より $\mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ のエタール基本群に作用する。また比較定理より $\mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ のエタール基本群は $\mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{C}}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ の位相的基本群の副有限完備化、つまりランク 2 の自由群の副有限完備化と同一視できる。この絶対 Galois 群の作用は忠実であることが Belyi[1] によって示されている。よって $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ はランク 2 の自由群の副有限完備化の自己同型群という組み合わせ論的な対象に埋め込まれることになる。埋め込みの像を近似するものとして GT と呼ばれる群があり、 $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \subset \text{GT}$ が知られているが、 $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \text{GT}$ かどうかは未解決である。

一方、絶対 Galois 群の類似物として淡中圏の一般論により定義される \mathbb{Q} -代数群 $\mathcal{G}(R) := \text{Aut}_{\text{MT}(R)}^{\otimes}(\omega)$ がある。 $\mathcal{G}(R)$ は R 上の混合テイトモチーフのモチヴィック Galois 群と呼ばれる。 $\mathcal{G}(R)$ は半直積 $\mathcal{U}(R) \rtimes \mathbb{G}_m$ となっている。 \mathbb{Q} の絶対 Galois 群が $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty, 1\}$ の基本群に作用するのと同様に、 $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty, 1\}$ のモチヴィック基本群 $\text{Spec}((\mathfrak{H}_1, \sqcup))$ に作用する。これをレベル N に一般化することも可能である。つまり、 $N \geq 1$ に対して、 $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\mu_N, N^{-1}])$ は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty, \mu_N\}$ のモチヴィック基本群 $\text{Spec}((\mathfrak{H}_N, \sqcup))$ に作用する。

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\mu_N, N^{-1}]) \curvearrowright \text{Spec}((\mathfrak{H}_N, \sqcup)). \quad (5.1)$$

さて、次数 1 以上の部分を全て 0 に送るような (\mathfrak{H}_N, \sqcup) から \mathbb{Q} への環準同型があるが、これに対応する $\text{Spec}((\mathfrak{H}_N, \sqcup))$ の \mathbb{Q} -有理点を $\mathbf{1}$ で表す。 $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\mu_N, N^{-1}])$ の $\text{Spec}((\mathfrak{H}_N, \sqcup))$ への作用は $\mathbf{1}$ の行き先で完全に決定されることが知られている。よって Galois 作用 (5.1) は \mathbb{Q} -アフィンスキームの射

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\mu_N, N^{-1}]) \rightarrow \text{Spec}((\mathfrak{H}_N, \sqcup)); g \mapsto g \cdot \mathbf{1} \quad (5.2)$$

によって完全に決定される。また $\mathcal{A}_N := \mathcal{O}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\mu_N, N^{-1}]))$ は $\mathcal{H}_N/\mu\mathcal{H}_N$ と環として標準的に同型であり、更に射 (5.2) の双対

$$\mathfrak{H}_N \rightarrow \mathcal{A}_N \quad (5.3)$$

は合成写像

$$\mathfrak{H}_N \xrightarrow{Z_N^{\mathfrak{m}, \sqcup}} \mathcal{H}_N \xrightarrow{\text{mod } \mu} \mathcal{A}_N \quad (5.4)$$

で与えられる。ただし、 $Z_N^{\mathfrak{m}, \sqcup}$ は

$$Z_N^{\mathfrak{m}, \sqcup}(e_0^k \sqcup e_1^l \sqcup u) = \delta_{k,0}\delta_{l,0}Z_N^{\mathfrak{m}}(u) \quad (k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, u \in \mathfrak{H}_N^0) \quad (5.5)$$

で特徴付けられる \mathbb{Q} -線形写像である。よって、モチヴィック Galois 群の作用 (5.1) を調べることは、合成写像 $(\text{mod } \mu) \circ Z_N^{\mathfrak{m}, \sqcup}$ を調べることと同値であると言っても過言ではない。例えば作用 (5.1) が忠実であることを環準同型 (5.3) の全射性として定義するのは自然であろう。これについて $N = 1$ の場合は Brown [2] によって、また $N = 2, 3, 4, 8$ の場合は Deligne [3] によって (5.3) の全射性が示されている。これは前述の Belyi の結果の類似である。一方、 N が 5 以上の素数の場合は (5.3) は全射でないことが Goncharov[8] によって示されている。また、(5.3) が全射となるとき、 $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$ は $\text{Spec}((\mathfrak{H}_1, \sqcup))$ に閉部分スキームとして埋め込まれるが、その定義イデアルは $\ker(\mathfrak{H}_N \rightarrow \mathcal{A}_N)$ 、つまりモチヴィック多重 L 値 modulo μ の線形関係式全体となる。よってモチヴィック Galois 群の Grothendieck-Teichmüller 理論にとって、モチヴィック多重 L 値の \mathbb{Q} -線形関係式は本質的である。そして、 $\text{Spec}((\mathfrak{H}_N, \sqcup))$ の閉部分

スキームとしての $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$ を近似するものの一つが次節で紹介する円分的 Grothendieck-Teichmüller 群である。

6. 円分的 GROTHENDIECK-TEICHMÜLLER 群

6.1. **Grothendieck-Teichmüller 群.** \mathfrak{t}_s を t^{ij} ($1 \leq i, j \leq s, i \neq j$) を生成元とし, 関係式

$$t^{ij} = t^{ji}, [t^{ij}, t^{ik} + t^{jk}] = 0, [t^{ij}, t^{kl}] = 0 \quad (6.1)$$

(ただし, i, j, k, l は相異なる 1 以上 s 以下の整数) で割って得られる次数付き Lie 環, $\widehat{\mathfrak{t}}_s$ をその完備化とする。また $U\mathfrak{t}_s$ を普遍包絡環, $\widehat{U\mathfrak{t}_s}$ をその完備化とする。さらに幕級数 $g(X_0, X_1)$ および $\{1, 2, 3, 4\}$ の互いに交わらない部分集合 S_1, S_2, S_3 に対して

$$g^{S_1, S_2, S_3} = g\left(\sum_{i \in S_1, j \in S_2} t^{ij}, \sum_{j \in S_2, k \in S_3} t^{jk}\right) \in \mathfrak{t}_s \quad (6.2)$$

と置く。

定義 9 (Grothendieck-Teichmüller 群, [4]). \mathbb{Q} -スキーム **GRT**₁ を, 可換 \mathbb{Q} -代数 R に対して R -有理点の集合 **GRT**₁(R) を以下の条件を満たす $g(X_0, X_1) \in R\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ の集合とすることで定める。

- g は群的 ($\Leftrightarrow g \in \exp(\widehat{\mathfrak{t}}_s) \Leftrightarrow \Delta(g) = g \otimes g \Leftrightarrow g$ の係数はシャッフル関係式を満たす).
- $g^{1,2,34}g^{12,3,4} = g^{2,3,4}g^{1,23,4}g^{1,2,3}$
- g の X_0X_1 の係数は 0

このとき $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$ は **GRT**₁ の閉部分スキームとなる。数値計算の結果等からも $\mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \mathbf{GRT}_1$ であろうと予想されるが未解決である。

6.2. 円分的 Grothendieck-Teichmüller 群と主定理. $\mathfrak{t}_{s,N}$ を

$$t^{1i} \ (2 \leq i \leq s), \ t(a)^{ij} \ (i \neq j, 2 \leq i, j \leq s, a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \quad (6.3)$$

を生成元とし, 関係式

$$\begin{aligned} t(a)^{ij} &= t(-a)^{ji}, [t(a)^{ij}, t(a+b)^{ik} + t(b)^{jk}] = 0, [t^{1i}, t(a)^{jk}] = 0, [t(a)^{ij}, t(b)^{kl}] = 0 \\ &\left[t^{1i}, t^{1j} + \sum_{c \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} t(c)^{ij} \right] = 0, \left[t(a)^{ij}, t^{1i} + t^{1j} + \sum_{c \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} t(c)^{ij} \right] = 0 \end{aligned}$$

(ただし $a, b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ で i, j, k, l は相異なる 2 以上 s 以下の整数) で割って得られる次数付き Lie 環, $\widehat{\mathfrak{t}}_{s,N}$ をその完備化とする。また $U\mathfrak{t}_{s,N}$ を普遍包絡環, $\widehat{U\mathfrak{t}_{s,N}}$ をその完備化とする。さらに幕級数 $h(X_0, X_{\zeta^0}, \dots, X_{\zeta^{N-1}}) \in \mathbb{Q}\langle\langle X_0, X_{\zeta^0}, \dots, X_{\zeta^{N-1}} \rangle\rangle$ および $\{1, 2, 3, 4\}$ の互いに交わらない部分集合 S_1, S_2, S_3 で $1 \in S_1$ となるものに対して

$$\begin{aligned} h^{S_1, S_2, S_3} &= h \left(\sum_{j \in S_2} t^{1j} + \sum_{i \in S_1 \setminus \{1\}, j \in S_2} \sum_{a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} t(a)^{ij} + \sum_{\substack{i, j \in S_2 \\ j < j'}} \sum_{a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} t(a)^{ij}, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i \in S_2, j \in S_3} t(0)^{ij}, \dots, \sum_{i \in S_2, j \in S_3} t(N-1)^{ij} \right) \in \mathfrak{t}_{s,N} \end{aligned}$$

と置く。また冪級数 $g(X_0, X_1)$ および $\{2, 3, 4\}$ の互いに交わらない部分集合 S_1, S_2, S_3 に対して

$$g^{S_1, S_2, S_3} = g\left(\sum_{i \in S_1, j \in S_2} t(0)^{ij}, \sum_{i \in S_2, j \in S_3} t(0)^{ij}\right) \in \mathbf{t}_{s, N} \quad (6.4)$$

と置く。また

$$\delta : \mathbb{Q}\langle\langle X_0, X_{\zeta^0}, \dots, X_{\zeta^{N-1}} \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{Q}\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle \quad (6.5)$$

を $h(X_0, X_{\zeta^0}, \dots, X_{\zeta^{N-1}}) \mapsto h(X_0, X_1, 0, \dots, 0)$ で定める。また $R\langle\langle X_0, X_{\zeta^0}, \dots, X_{\zeta^{N-1}} \rangle\rangle$ の自己同型 σ および τ_s ($s \in \mu_N$) を

$$\tau_s(X_a) = X_{sa}, \quad \sigma(X_a) = \begin{cases} -X_0 - \sum_{c \in \mu_N} X_c & \text{if } a = 0 \\ X_{a^{-1}} & \text{if } a \in \mu_N \end{cases} \quad (6.6)$$

で定める。

定義 10 (円分的 Grothendieck-Teichmüller 群, [5]). \mathbb{Q} -スキーム $\mathbf{GRTM}_1(N)$ を、可換 \mathbb{Q} -代数 R に対して R -有理点の集合 $\mathbf{GRTM}_1(N, R)$ を以下の条件を満たす $h(X_0, X_{\zeta^0}, \dots, X_{\zeta^{N-1}}) \in R\langle\langle X_0, X_{\zeta^0}, \dots, X_{\zeta^{N-1}} \rangle\rangle$ の集合として定める。

- h は群的。
- $g := \delta(h) \in \mathbf{GRT}_1(R)$.
- $h^{1,2,34}h^{12,3,4} = g^{2,3,4}h^{1,23,4}h^{1,2,3}$.
- $\tau_\zeta(h)^{-1}\tau_\zeta(\sigma(h))\sigma(h)^{-1}h = 1$.
- $X_0 + \sum_{c \in \mu_N} \tau_c(h)^{-1}X_c\tau_c(h) + h^{-1}\sigma(h)(-X_0 - \sum_{c \in \mu_N} X_c)\sigma(h)^{-1}h = 0$.

$\mathbf{GRTM}_1(1) = \mathbf{GRT}_1$ である。また $\mathbf{GRTM}_1(N)$ は自然な方法で $\mathrm{Spec}((\mathfrak{H}_N, \mathbb{U}))$ の閉部分スキームとみなすことが出来る。前述した通り、 $N = 1, 2, 3, 4, 8$ に対してモチーヴィック Galois 群 $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\mu_N, N^{-1}])$ は $\mathrm{Spec}((\mathfrak{H}_N, \mathbb{U}))$ の閉部分スキームとなる。次は本稿の二つ目の主定理である。

定理 11 ([10]). $\mathrm{Spec}((\mathfrak{H}_2, \mathbb{U}))$ の閉部分スキームとして、 $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[1/2]) = \mathbf{GRTM}_1(2)$ 。

証明は定理 5 にくわえ、円分的 Grothendieck-Teichmüller 群の関係式からレベル 2 の合流関係式を導出することで示される。

REFERENCES

- [1] G.V. Belyĭ, On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1979, 43(2): 267–276.
- [2] F. Brown, Mixed Tate motives over \mathbb{Z} , *Ann. Math.*, 175 (2012), 949–976.
- [3] P. Deligne, Le groupe fondamental unipotent motivique de $\mathbb{G}_m - \mu_N$, pour $N = 2, 3, 4, 6$ ou 8, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* (2010), 101–141.
- [4] V.G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Algebra i Analiz* 2 (1990), no. 4, 149–181; translation in Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860.
- [5] B. Enriquez, Quasi-reflection algebras and cyclotomic associators. *Selecta Math. (N.S.)* 13 (2007), no. 3, 391–463.
- [6] H. Furusho, The pentagon equation and the confluence relations, arXiv:1809.00789 [math.QA].
- [7] A. B. Goncharov, Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, arXiv:math/0103059 .
- [8] A. B. Goncharov, The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P} - (\{0, \infty\} \cup \mu_N))$, *Duke Math. J.* 110 (2001), 397–487.
- [9] A. Grothendieck, Esquisse d'un programme. (French.) [Sketch of a program] With an English translation on pp. 243–283. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Geometric Galois actions, 1, 5–48, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [10] M. Hirose, The cyclotomic Grothendieck-Teichmüller group and the motivic Galois group, in preparation.

- [11] M. Hirose and N. Sato, ‘Iterated integrals on $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, z\}$ and a class of relations among multiple zeta values,’ *Adv. in Math.* 342 (2019), 163-182.
- [12] M. Hirose and N. Sato, The motivic Galois group of mixed Tate motives over $\mathbb{Z}[1/2]$ and its action on the fundamental group of $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \pm 1, \infty\}$, preprint, arXiv:2007.04288 [math.NT].
- [13] M. Kontsevich, and D. Zagier, Periods, Mathematics unlimited—2001 and beyond, 771–808, Springer, Berlin, 2001.
- [14] E. Panzer, Feynman integrals and hyperlogarithms, PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, 2014; arXiv:1506.07243 [math-ph].

三角群に関する Rademacher 記号とモジュラー結び目

松坂俊輝（名古屋大学高等研究院）

目次

1 Rademacher 記号	2
1.1 小史	2
1.2 群論的な特徴付け	3
1.3 三角群の場合への拡張	6
2 三角群に関する保型形式	7
2.1 モックモジュラー形式を用いた $\Delta_{p,q}(z)$ の構成	7
2.2 サイクル積分を用いた Rademacher 記号 $\psi_{p,q}(\gamma)$ の表示	11
3 モジュラー結び目の絡み数	12
3.1 Ghys の結果	12
3.2 (p, q) -トーラス結び目への拡張	13

序文

主題となるのは、Rademacher 記号と呼ばれる関数 $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ である。これは Dedekind の研究に由来する古典的な対象であるが、今なお古びることなく活発な研究が続けられている。本記事では、三角群 $\Gamma_{p,q}$ に関する Rademacher 記号 $\psi_{p,q} : \Gamma_{p,q} \rightarrow \mathbb{Z}$ を導入し、次に記すように、5種類の異なる特徴付けができるることを説明する。

1. Eq.(1.5) : 2-コサイクルによる特徴付け, $2pqW(\gamma_1, \gamma_2) = \psi_{p,q}(\gamma_1\gamma_2) - \psi_{p,q}(\gamma_1) - \psi_{p,q}(\gamma_2)$.
2. Theorem 1.10 : 準同型写像 $\chi_{p,q} : \tilde{\Gamma}_{p,q} \rightarrow \mathbb{Z}$ による表示, $\psi_{p,q}(\gamma) = \chi_{p,q}(\tilde{\gamma})$.
3. Eq.(2.6) : カスプ形式による特徴付け, $\log \Delta_{p,q}(\gamma z) - \log \Delta_{p,q}(z) = 2pq \log j(\gamma, z) + 2\pi i \psi_{p,q}(\gamma)$.
4. Theorem 2.11 : 調和 Maass 形式のサイクル積分による表示, $\int_{S_\gamma} E_2^{(p,q),*}(z) dz = \psi_{p,q}(\gamma)/r$
5. Theorem 3.6 : モジュラー結び目の絡み数による表示, $\mathrm{lk}(C_\gamma, \overline{K}_{p,q}) = \psi_{p,q}(\gamma)/r$.

本稿は 2021 年 9 月 3 日代数学シンポジウムにて行われた講演 “Triangle modular knots and Rademacher symbols” および東京電機大学の植木潤氏との共同研究 [30] に基づくものである。またこの共同研究は JSPS 科研費 JP20K14292 および JP19K14538 の助成を受けたものである。

記号について

本稿を通して用いる記号を以下にまとめておく. 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は一次分数変換 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ によって上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ に作用する. また保型因子 $j : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ を $j\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) = cz + d$ によって定める. また $z \in \mathbb{H}$ と実数 $\lambda > 0$ に対し, $q = e^{2\pi iz}$, $q_\lambda = e^{2\pi iz/\lambda}$ とおく. Section 1.3 以降, $2 \leq p < q$ を満たす互いに素な整数の組 (p, q) を一つ固定し, $r = pq - p - q$ とおいている.

1 Rademacher 記号

1.1 小史

Rademacher 記号の原型を最初に考えたのは Dedekind で, 1892 年の論文 [13] がある. ここでは Rademacher によるモノグラフ [38] を参考にして, いくつかの仕事を紹介したい. 上半平面 \mathbb{H} 上の正則関数

$$(1.1) \quad \log \Delta(z) = 2\pi iz - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^{-1} q^n$$

について, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 作用に関する変換則 $\log \Delta(\gamma z) - \log \Delta(z)$ を記述することを考える. まず $e^{\log \Delta(z)} = \Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$ が重さ 12 のカスプ形式である, つまり, 任意の $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して $\Delta(\gamma z) = j(\gamma, z)^{12} \Delta(z)$ が成り立つことから, ある関数 $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在して,

$$\log \Delta(\gamma z) - \log \Delta(z) = \begin{cases} 6 \log(-j(\gamma, z)^2) + 2\pi i \Phi(\gamma) & \text{if } c \neq 0, \\ 2\pi i \Phi(\gamma) & \text{if } c = 0 \end{cases}$$

が成り立つ. ここで右辺の対数関数の枝を $\mathrm{Im} \log z \in [-\pi, \pi]$ と選んでいる. この関数 Φ が今日 **Dedekind 和** と呼ばれている ($\gcd(a, c) = 1, c > 0$ なる整数 a, c に対して定義される) 関数

$$s(a, c) = \sum_{k=1}^{c-1} \left(\binom{k}{c} \right) \left(\binom{ka}{c} \right) = \frac{1}{4c} \sum_{k=1}^{c-1} \cot \frac{\pi k}{c} \cot \frac{\pi ka}{c}$$

を用いて表示できる, というのが Dedekind の結果である. ただし, $((x)) = x - \lfloor x \rfloor - 1/2$ ($x \notin \mathbb{Z}$), 0 ($x \in \mathbb{Z}$) とおいている.

Theorem 1.1 (Dedekind [13]). 任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し,

$$\Phi(\gamma) = \begin{cases} \frac{a+d}{c} - 12 \operatorname{sgn} c \cdot s(a, |c|) & \text{if } c \neq 0, \\ \frac{b}{d} & \text{if } c = 0. \end{cases}$$

1956 年 Rademacher [37] は Dedekind の仕事に注目し, Dedekind 和のより詳細な研究を行っている. その中で, Dedekind の関数 Φ を僅かに修正した整数値関数

$$\Psi(\gamma) = \Phi(\gamma) - 3 \operatorname{sgn}(c(a+d))$$

を導入し, これがいくつかの点で Φ よりも優れていることを指摘する. 例えば, この Ψ は類不変である. つまり, 任意の $\gamma, g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し, $\Psi(g^{-1}\gamma g) = \Psi(\gamma)$ が成り立つ. 他にも, $\Psi(\gamma) = \Psi(-\gamma) = -\Psi(\gamma^{-1})$ や, $\operatorname{tr} \gamma > 0$ を満たす任意の $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し,

$$\log \Delta(\gamma z) - \log \Delta(z) = 12 \log j(\gamma, z) + 2\pi i \Psi(\gamma)$$

が成り立つ. これらの関数 Φ, Ψ は共に Dedekind や Rademacher の名を冠して呼ばれることがあるが, ここでは Duke–Imamoğlu–Tóth [18] にならって, Φ を **Dedekind 記号**, Ψ を **Rademacher 記号** と呼び分けることにする.

次の式で定義される関数 $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ も非常に重要である.

$$(1.2) \quad R(\gamma, z) := \log \Delta(\gamma z) - \log \Delta(z) = 12 \log j(\gamma, z) + 2\pi i \psi(\gamma).$$

やはり僅かな差はあるが, $\mathrm{tr} \gamma > 0$ のときに $\psi(\gamma) = \Psi(\gamma)$ であることから, この関数 ψ のことも **Rademacher 記号** と呼ぶことにする. この ψ は残念ながら類不变ではないが, 次節で説明するように Φ や Ψ よりも自然な対象に思えるのである.

1.2 群論的な特徴付け

1970 年, 浅井 [2, 3] は保型形式を用いることなく, 普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ を用いることで, より素朴に Rademacher 記号 $\psi(\gamma)$ を定義している. 多少天下り的ではあるが, Petersson [35] によって与えられた次の関数 W を考える.

Definition 1.2. 関数 $W : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z}$ を

$$W(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{2\pi i} \left(\log j(\gamma_1, \gamma_2 z) + \log j(\gamma_2, z) - \log j(\gamma_1 \gamma_2, z) \right)$$

で定める. ここで, 対数関数の枝を $\mathrm{Im} \log j(\gamma, z) \in [-\pi, \pi]$ と選んでいる.

定義について補足する. まずこれは保型因子の関係式 $j(\gamma_1 \gamma_2, z) = j(\gamma_1, \gamma_2 z) j(\gamma_2, z)$ の偏角から得られるものである. よって $e^{2\pi i W(\gamma_1, \gamma_2)} = 1$ であるので, $W(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}$ が分かる. さらに W の定義式は $z \in \mathbb{H}$ について連続であるから, z の取り方に依存しない.

直接計算により,

$$W(\gamma_1 \gamma_2, \gamma_3) + W(\gamma_1, \gamma_2) = W(\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3) + W(\gamma_2, \gamma_3)$$

を確認できる. つまり W は 2-コサイクルである. また偏角の規約により, $-3\pi < 2\pi W(\gamma_1, \gamma_2) < 3\pi$ であることから, $W(\gamma_1, \gamma_2) \in \{-1, 0, 1\}$, つまり, W が有界コサイクルであることが分かる.

より明示的に W の値を記述することもできる. 浅井によると, 対数関数の枝として $[-\pi, \pi]$ を採用することがちょっとしたポイントで, これにより W の値を “wonderfully simple” に与えることができる. まず, 符号関数 $\mathrm{sgn} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \{-1, 1\}$ を次で定める¹: 任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対し,

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(\gamma) &= \begin{cases} \mathrm{sgn} c & \text{if } c \neq 0, \\ \mathrm{sgn} a = \mathrm{sgn} d & \text{if } c = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq \arg j(\gamma, z) < \pi, \\ -1 & \text{if } -\pi \leq \arg j(\gamma, z) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

この符号関数を用いることで, W 関数の値は次の単純な表にまとめられる.

¹通常の符号関数 $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ と同一の記号を用いるが, 誤解の恐れはないと思われる. 念のため, $\mathrm{sgn}(\gamma)$, $\mathrm{sgn} c$ のように括弧の有無で区別することにする.

$\text{sgn}(\gamma_1)$	$\text{sgn}(\gamma_2)$	$\text{sgn}(\gamma_1\gamma_2)$	$W(\gamma_1, \gamma_2)$
1	1	-1	1
-1	-1	1	-1
	otherwise		0

次は W 関数の重要な性質である.

Proposition 1.3 (Asai [2]). 次を満たす関数 $V : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ は存在しない: 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して $W(\gamma_1, \gamma_2) = V(\gamma_1\gamma_2) - V(\gamma_1) - V(\gamma_2)$ が成り立つ.

証明. $W(\gamma_1, \gamma_2) = V(\gamma_1\gamma_2) - V(\gamma_1) - V(\gamma_2)$ なる関数 $V : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在したと仮定すると,

$$0 = W\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = V\left(\begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right) - V\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right) - V\left(\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$0 = W\left(\begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right) = V\left(\begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right) - V\left(\begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - V\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right)$$

であることから, $V\left(\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = V\left(\begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ が成り立つ. また,

$$0 = W\left(\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = V\left(\begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - V\left(\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - V\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

であることから, $V\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$ を得る.

一方で, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考えると, $S^4 = I, U^6 = I$ および $V(I) = 0$ であることから, $V(-I) = 1/2, V(S) = -1/4, V(S^{-1}) = 1/4, V(U) = -1/6$ などが成り立つ. よって $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = US^{-1}$ から,

$$0 = W(U, S^{-1}) = V\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - V(U) - V(S^{-1}),$$

すなわち, $V\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1/12$ となり, これは矛盾する. \square

よって特に $[W] \in H^2(\text{SL}_2(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ は 0 でないコホモロジー類を定める. このとき, この 2-コサイクル W が定める $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ の \mathbb{Z} での中心拡大を考えよう (2-コサイクルと中心拡大の関係については, 例えれば Brown [11, Chapter IV] を見ると良い). つまり, 集合としての $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}$ に対し, 演算

$$(\gamma_1, n_1) \cdot (\gamma_2, n_2) = (\gamma_1\gamma_2, n_1 + n_2 + W(\gamma_1, \gamma_2))$$

を定めることでこれは群を成し, 特に $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ の \mathbb{Z} での中心拡大となる. さらに位相構造も合わせて考えることで, これを $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ の普遍被覆群と見ることもできるので (Asai [2, 3]), 以後この演算を備えた群を $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ と書くこととする.

この文脈において, Rademacher 記号 $\psi : \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ を定義する. まずコホモロジー群に関する事実として次が知られている.

Lemma 1.4. $H^1(\text{SL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) = H^1(\text{SL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{C}) = \{0\}, H^2(\text{SL}_2(\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

証明. 1 次コホモロジー群については, $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ の生成元 $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が有限位数を持つことから, 2 次コホモロジー群については, 融合積表示 $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ から従う (融合積については, Brown [11, Chapter II] や Serre [42] を参照). \square

つまり W 関数の定義域を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に制限すると, Proposition 1.3 から一変して, ある関数 $V : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ が (唯一つ) 存在して, 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$12W(\gamma_1, \gamma_2) = V(\gamma_1\gamma_2) - V(\gamma_1) - V(\gamma_2)$$

が成り立つ. この関数 V がまさに Rademacher 記号であるというのが, 浅井の主張である.

Theorem 1.5 (Asai [2]). (1.2) で定義した Rademacher 記号 $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ は

$$12W(\gamma_1, \gamma_2) = \psi(\gamma_1\gamma_2) - \psi(\gamma_1) - \psi(\gamma_2)$$

を満たす唯一の関数である.

証明. 定義 (1.2) より, 主張の右辺は

$$\frac{1}{2\pi i} \left(R(\gamma_1\gamma_2, z) - 12 \log j(\gamma_1\gamma_2, z) - R(\gamma_1, \gamma_2 z) + 12 \log j(\gamma_1, \gamma_2 z) - R(\gamma_2, z) + 12 \log j(\gamma_2, z) \right)$$

となるが, これは $12W(\gamma_1, \gamma_2)$ と等しい. \square

これは次のように言い換えることもできる. 射影 $P : \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}); (\gamma, n) \mapsto \gamma$ に対して, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Z}) := P^{-1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を定義する. つまり,

$$\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Z}) = \{(\gamma, n) \in \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R}) \mid \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z}\}$$

である. また各元 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して, 標準的な持ち上げを $\tilde{\gamma} = (\gamma, 0) \in \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ で定める.

Lemma 1.6. $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Z})$ は \tilde{S}, \tilde{U} によって生成される.

証明. まず $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が S, U で生成されることから, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Z})$ は $\tilde{S}, \tilde{U}, (I, 1)$ によって生成される. 直接計算により, $\tilde{S}^2 = (-I, 1) = \tilde{U}^3$ および $(-I, 1)^2 = (I, 1)$ が確認できるため, 主張が得られる. \square

準同型写像 $\chi : \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ を考える. 生成元の行き先を $\chi(\tilde{S}) = s$, $\chi(\tilde{U}) = u$ とおくと, 関係式 $(-I, 1) = \tilde{S}^2 = \tilde{U}^3$ から, $\chi((-I, 1)) = 2s = 3u$ が成り立つ. よって, ある整数 $m \in \mathbb{Z}$ が存在して, $s = 3m$, $u = 2m$ と表示できる. すなわち, χ は $m \in \mathbb{Z}$ のみで決まる. これを χ_m と書くこととする.

このとき, $V_m(\gamma) = \chi_m(\tilde{\gamma})$ で定まる関数 $V_m : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ をみる. まず定義から分かるところだが, $\chi_m((\gamma, n)) = \chi_m(\tilde{\gamma} \cdot (I, 1)^n) = V_m(\gamma) + 12mn$ が成り立つ. よって積 $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2 = (\gamma_1\gamma_2, W(\gamma_1, \gamma_2))$ から,

$$V_m(\gamma_1\gamma_2) = V_m(\gamma_1) + V_m(\gamma_2) - 12mW(\gamma_1, \gamma_2)$$

が成り立つ. つまり Theorem 1.5 から, V_{-1} が ψ に他ならないことが分かるのである.

Theorem 1.7. 準同型写像 $\chi : \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\chi(\tilde{S}) = -3$, $\chi(\tilde{U}) = -2$ によって定めるとき, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\psi(\gamma) = \chi((\gamma, n)) + 12n$$

が成り立つ.

Theorem 1.5 や Theorem 1.7 は, Rademacher 記号の保型形式を用いない素朴な定義になっている. この 2-コサイクルを用いる特徴付けは, Atiyah のオムニバス定理 [4, Theorem 5.60] や Barge–Ghys [5] が示すように, 一見ただの特殊関数に思える Rademacher 記号のもつ遍在性を捉える意味で非常に重要な観点である.

1.3 三角群の場合への拡張

ここまで議論によって、我々は3種類の Rademacher 記号の定義、(1.2), Theorem 1.5, Theorem 1.7を持っている。このうち2つ目の定義を用いることで、三角群 $\Gamma_{p,q}$ に関する Rademacher 記号 $\psi_{p,q} : \Gamma_{p,q} \rightarrow \mathbb{Z}$ を導入する。

三角群の定義を行う。まず $2 \leq p < q$, $\gcd(p, q) = 1$ を満たす整数の組 (p, q) を一つ固定し、

$$S_p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\pi/p) \end{pmatrix}, \quad U_q = \begin{pmatrix} 2\cos(\pi/q) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{p,q} = -U_q S_p = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。ここで $\lambda = 2(\cos(\pi/p) + \cos(\pi/q))$ である。また、 $r = pq - p - q$ とおく。

Definition 1.8. 三角群 $\Gamma_{p,q} = \Gamma(p, q, \infty)$ とは、 S_p, U_q で生成される $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の部分群である。

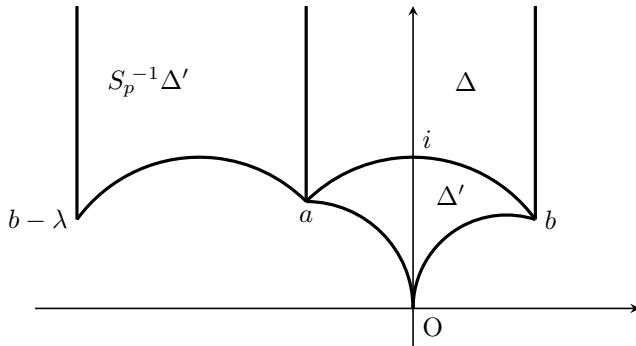
定義より $\Gamma_{2,3} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ となる。三角群は一般に合同部分群ではないものの、 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と多くの性質を共有する。例えば生成元は $S_p^p = U_q^q = -I$ を満たし、次の融合積との同型

$$(1.3) \quad \Gamma_{p,q} \cong \langle S_p \rangle *_{(-I)} \langle U_q \rangle \cong \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$$

が成り立つ。また作用 $\Gamma_{p,q} \curvearrowright \mathbb{H}$ に関する基本領域も単純である。 \mathbb{H} 内の三角形 $\Delta = \Delta(p, q, \infty)$ を

$$\Delta(p, q, \infty) = \{z \in \mathbb{H} \mid -\cos(\pi/p) \leq \operatorname{Re}(z) \leq \cos(\pi/q), |z| \geq 1\}$$

によって定める。この三角形の内角は $\pi/p, \pi/q, 0$ となっている。また Δ' を測地線 $\{e^{i\theta} \mid 0 < \theta < \pi\}$ に関する Δ の鏡像とする。このとき、 $D_{p,q} = \Delta \cup \Delta'$ が $\Gamma_{p,q}$ の基本領域となる。モジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合によく知られた基本領域は、 $S_2^{-1}\Delta' \cup \Delta = \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1/2, |z| \geq 1\}$ で与えられる。



三角形 Δ の頂点 $a = e^{\pi i(1-1/p)}$, $b = e^{\pi i/q}$, $i\infty$ はそれぞれ $S_p, U_q, T_{p,q}$ の固定点である。このとき、 a, b を楕円点、 $i\infty$ をカスプと呼ぶ。基本領域 $D_{p,q}$ において各楕円点を挟む2辺は $\Gamma_{p,q}$ の作用で移りあい、 $\Gamma_{p,q} \backslash \mathbb{H}$ は種数 0 となる。Gauss-Bonnet の定理より、

$$(1.4) \quad \operatorname{vol}(\Gamma_{p,q} \backslash \mathbb{H}) = \int_{D_{p,q}} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{2\pi r}{pq}$$

であるから、三角群 $\Gamma_{p,q}$ は第1種 Fuchs 群となる。

Rademacher 記号 $\psi_{p,q} : \Gamma_{p,q} \rightarrow \mathbb{Z}$ を定義していく。まず (1.3) から Lemma 1.4 の拡張が得られる。

Lemma 1.9. $H^1(\Gamma_{p,q}; \mathbb{Z}) = H^1(\Gamma_{p,q}; \mathbb{C}) = \{0\}$, $H^2(\Gamma_{p,q}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z}$.

したがって, Definition 1.2 で定義した W 関数の定義域を $\Gamma_{p,q}$ に制限すると, ある関数 $\psi_{p,q} : \Gamma_{p,q} \rightarrow \mathbb{Z}$ が唯一つ存在して, 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{p,q}$ に対して,

$$(1.5) \quad 2pqW(\gamma_1, \gamma_2) = \psi_{p,q}(\gamma_1\gamma_2) - \psi_{p,q}(\gamma_1) - \psi_{p,q}(\gamma_2)$$

が成り立つ. この関数 $\psi_{p,q}$ を三角群 $\Gamma_{p,q}$ に関する **Rademacher 記号** と呼ぶ. 同様の議論から Theorem 1.7 の拡張も得られる.

Theorem 1.10. 群 $\tilde{\Gamma}_{p,q} = P^{-1}(\Gamma_{p,q})$ は \tilde{S}_p, \tilde{U}_q で生成される. 準同型写像 $\chi_{p,q} : \tilde{\Gamma}_{p,q} \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\chi_{p,q}(\tilde{S}_p) = -q$, $\chi_{p,q}(\tilde{U}_q) = -p$ で定めるとき, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\psi_{p,q}(\gamma) = \chi_{p,q}((\gamma, n)) + 2pqn$$

が成り立つ.

2 三角群に関する保型形式

前節では 2-コサイクル W を用いることで, 三角群に関する Rademacher 記号 $\psi_{p,q} : \Gamma_{p,q} \rightarrow \mathbb{Z}$ を自然に導入した. では (1.2) のように, 保型形式を用いて $\psi_{p,q}$ を特徴づけることはできるだろうか. 以下では重さ $2pq$ のカスプ形式 $\Delta_{p,q}(z)$ の構成法を一つ紹介し, 期待される関係式

$$\log \Delta_{p,q}(\gamma z) - \log \Delta_{p,q}(z) = 2pq \log j(\gamma, z) + 2\pi i \psi_{p,q}(\gamma)$$

が成り立つことを示す. その後, Rademacher 記号がサイクル積分として表示できることも示し, モジュラー結び目との関係を記述するための準備を行う.

2.1 モックモジュラー形式を用いた $\Delta_{p,q}(z)$ の構成

発想の起点となるのは, (1.1) から直ちに従う次の等式である.

$$(2.1) \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \log \Delta(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} dq^n.$$

この右辺はよく $E_2(z)$ と書かれる関数で, モジュラーグループ $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 2 のモックモジュラー形式である. それならば, 三角群に関する重さ 2 のモックモジュラー形式からカスプ形式 $\Delta_{p,q}(z)$ を構成できるのではないか, というのがここでの発想である.

モックテータ関数 という名が世界に初めて姿を現したのは, 1920 年に Ramanujan が Hardy へと綴った最後の手紙である. 長い歴史の中で, Watson [45] や Selberg [41], Hickerson [23, 24], そして Andrews による Lost Notebook の発見から始まる一連の研究 [1] によって, 「 q -級数」としてのモックテータ関数の理論はゆっくりと発展してきた. しかしながら, その「モジュラー的な」性格については長らく謎に包まれていたのである.

2002 年の Zwegers の博士論文 [49] の登場は, モックテータ関数の研究を劇的に変えることとなった. まず彼は 3 通り (!) の方法でモックテータ関数の保型形式的な性質の記述に成功した. そして Bringmann-Ono [10] が指摘するには, Zwegers の考察した保型形式は, 同時期に Bruinier-Funke [12] が (異なる文脈で) 導入した調和 Maass 形式になっているというのである. こうした 2000 年初頭の急速な進展を受けて, モックモジュラー形式という概念が Zagier [48] によって導入された, という時代背景である.

Definition 2.1. 実解析的な²関数 $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ が次の条件を満たすとき, f は三角群 $\Gamma_{p,q}$ に関する重さ $k \in \mathbb{Z}$ の調和 Maass 形式であるという.

1. 任意の $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ に対し, $f(\gamma z) = j(\gamma, z)^k f(z)$ が成り立つ.

2. 双曲 Laplacian Δ_k を

$$\Delta_k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + iky \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

で定めるとき, $\Delta_k f(z) = 0$ が成り立つ.

3. ある定数 $\alpha > 0$ が存在して, $x \in \mathbb{R}$ について一様に $f(x + iy) = O(y^\alpha)$ as $y \rightarrow \infty$ が成り立つ³.

三角群 $\Gamma_{p,q}$ に関する重さ k の調和 Maass 形式の空間を $\mathcal{H}_k(\Gamma_{p,q})$ とおく.

周期性 $f(z + \lambda) = f(z)$ および, 条件 $\Delta_k f(z) = 0$ から, 調和 Maass 形式 $f \in \mathcal{H}_k(\Gamma_{p,q})$ は次の形の Fourier 級数展開を持つ.

$$(2.2) \quad f(x + iy) = \sum_{n \geq 0} c^+(n) q_\lambda^n + c^-(0) y^{1-k} + \sum_{n < 0} c^-(n) y^{-k/2} W_{-\frac{k}{2}, \frac{k-1}{2}}(4\pi|n|y/\lambda) e^{2\pi i n x/\lambda}.$$

ここで, 係数 $c^\pm(n) \in \mathbb{C}$ は複素定数であり, $q_\lambda = e^{2\pi iz/\lambda}$ とおいている. また $W_{\mu,\nu}(y)$ は W -Whittaker 関数である (Whittaker 関数については [29, Chapter VII] などを参照).

Definition 2.2. 調和 Maass 形式 $f \in \mathcal{H}_k(\Gamma_{p,q})$ に対し, Fourier 展開 (2.2) の正則部分

$$f^+(z) = \sum_{n \geq 0} c^+(n) q_\lambda^n$$

を $\Gamma_{p,q}$ に関する重さ k のモックモジュラー形式という.

残る非正則部分 $f(z) - f^+(z)$ については, 次の事実が基本的である.

Proposition 2.3 (Bruinier–Funke [12]). 重さ $k \in \mathbb{Z}$ の ξ -微分作用素を

$$\xi_k f = 2iy^k \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} f$$

で定義する. このとき任意の $f \in \mathcal{H}_k(\Gamma_{p,q})$ に対し, $\xi_k f \in \mathcal{M}_{2-k}(\Gamma_{p,q})$ が成り立つ. ここで, $\mathcal{M}_{2-k}(\Gamma_{p,q})$ は $\Gamma_{p,q}$ に関する重さ $2 - k$ の正則モジュラー形式の空間である.

Remark 2.4. 双曲 Laplacian Δ_k は ξ -微分作用素を用いて, $\Delta_k = -\xi_{2-k} \circ \xi_k$ と表すこともできる. このとき, $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ が正則モジュラー形式であることは, Definition 2.1 の条件 2 を

2'. $\xi_k f(z) = 0$

に取り替えることで定義できる. 特に, $\mathcal{M}_k(\Gamma_{p,q}) \subset \mathcal{H}_k(\Gamma_{p,q})$ となる. また, $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_{p,q})$ が $\lim_{z \rightarrow i\infty} f(z) = 0$ を満たすとき, f はカスプ形式であるという.

²ここで $f(z)$ が実解析的とは, $f(x + iy)$ を x と y に関する二変数関数とみたときに実解析的, という意味である

³カスプ条件は論文によってさまざまである. 例ええば調和 Maass 形式に関する標準的なテキスト [9] の Definition 4.2 では, 異なる条件が採用されている.

調和 Maass 形式 $f \in \mathcal{H}_k(\Gamma_{p,q})$ が (2.2) の形の Fourier 展開を持つとき,

$$\xi_k f(z) = (1-k)\overline{c^-(0)} - \sum_{n>0} \overline{c^-(n)} (4\pi n/\lambda)^{\frac{2-k}{2}} q_\lambda^n \in \mathcal{M}_{2-k}(\Gamma_{p,q})$$

が成り立つ. この $\xi_k f(z)$ をモックモジュラー形式 $f^+(z)$ のシャドーという.

Example 2.5. 重さ 2 の Eisenstein 級数

$$E_2^*(z) = E_2(z) - \frac{3}{\pi y} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} dq^n - \frac{3}{\pi y}$$

は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 2 の調和 Maass 形式である. よって正則部分 $E_2(z)$ はモックモジュラー形式, そのシャドーは $3/\pi \in \mathcal{M}_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}$ となる.

では, $\Delta_{p,q}(z)$ の構成を始める. 起点となるのは, 次の事実である.

Proposition 2.6. $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2(\Gamma_{p,q}) = 1$.

証明. まず $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2(\Gamma_{p,q}) \leq 1$ を示す. もし 0 でない $f, g \in \mathcal{H}_2(\Gamma_{p,q})$ が存在したとすると, $\xi_2 f, \xi_2 g \in \mathcal{M}_0(\Gamma_{p,q}) = \mathbb{C}$ である. もし $\xi_2 f = 0$ であったと仮定すると, $f \in \mathcal{M}_2(\Gamma_{p,q})$ となるが, $\mathcal{M}_2(\Gamma_{p,q}) = \{0\}$ であることから矛盾する. これは有理型モジュラー形式 $f \in \mathcal{M}_k^{\mathrm{mer}}(\Gamma_{p,q})$ に対する valence formula

$$(2.3) \quad v_\infty(f) + \frac{1}{p} v_a(f) + \frac{1}{q} v_b(f) + \sum_{\substack{P \in \Gamma_{p,q} \setminus \mathbb{H} \\ P \neq a, b}} v_P(f) = \frac{r}{2pq} k$$

から従う⁴ (ここで, $v_P(f)$ は $f(z)$ の $z = P$ における位数である). よって $\xi_2 f, \xi_2 g$ は共に 0 ではない複素定数なので, ある $c \in \mathbb{C}$ が存在して, $\xi_2(f - cg) = 0$ が成り立つ. したがって, $f - cg \in \mathcal{M}_2(\Gamma_{p,q}) = \{0\}$ となり, $f = cg$ と書ける.

次に $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2(\Gamma_{p,q}) \geq 1$ については, Eisenstein 級数を用いて調和 Maass 形式を具体的に構成する. ここでは Goldstein [21] による極限公式を用いることにする. 重さ 0 の実解析的 Eisenstein 級数を

$$E_0^{(p,q)}(z, s) = \frac{1}{\lambda^s} \sum_{\gamma \in (\Gamma_{p,q})_\infty \setminus \Gamma_{p,q}} \mathrm{Im}(\gamma z)^s, \quad (z \in \mathbb{H}, \mathrm{Re}(s) > 1)$$

で定義する. このとき, 次の形の極限公式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p,q}(z) &= \lim_{s \rightarrow 1} \left(E_0^{(p,q)}(z, s) - \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_{p,q} \setminus \mathbb{H})} \frac{1}{s-1} \right) \\ &= C_{p,q} - \frac{\log y}{\mathrm{vol}(\Gamma_{p,q} \setminus \mathbb{H})} + \frac{y}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{p,q}(n) q_\lambda^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_{p,q}(n)} \overline{q_\lambda}^n \end{aligned}$$

ここで, $C_{p,q}, c_{p,q}(n) \in \mathbb{C}$ はある複素定数である. このとき, 関数 $E_2^{(p,q),*}(z)$ を

$$(2.4) \quad E_2^{(p,q),*}(z) := \xi_0 \mathcal{L}_{p,q}(z) = -\frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_{p,q} \setminus \mathbb{H})} \frac{1}{y} + \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{p,q}(n) q_\lambda^n$$

(ただし, $d_{p,q}(n) = (-4\pi n/\lambda) c_{p,q}(n)$) で定義すると, これは 0 でない $\mathcal{H}_2(\Gamma_{p,q})$ の元となる. \square

⁴ 証明は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合の [28, Proposition 3.8] と同様である.

こうして, $\mathcal{H}_2(\Gamma_{p,q})$ の生成元 $E_2^{(p,q),*}(z)$ を構成できた. この正則部分を $E_2^{(p,q)}(z) = E_2^{(p,q),*}(z) + 1/\text{vol}(\Gamma_{p,q} \setminus \mathbb{H})y$ とおくと, 次が直ちに従う.

Lemma 2.7. 任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{p,q}$ に対し,

$$(cz + d)^{-2} E_2^{(p,q)}(\gamma z) - E_2^{(p,q)}(z) = \frac{pq}{r} \frac{c}{\pi i(cz + d)}.$$

関係式 (2.1) を参考に, こうして定義したモックモジュラー形式 $E_2^{(p,q)}(z)$ の原始関数

$$(2.5) \quad F_{p,q}(z) = \frac{2\pi irz}{\lambda} + r\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{p,q}(n)}{n} q_{\lambda}^n = \frac{2\pi irz}{\lambda} - 4\pi r \sum_{n=1}^{\infty} c_{p,q}(n) q_{\lambda}^n,$$

を考える. つまり, $F'_{p,q}(z) = 2\pi ir E_2^{(p,q)}(z)$ が成り立っている. このとき, $\Delta_{p,q}(z) = \exp F_{p,q}(z)$ が $\Gamma_{p,q}$ に関する重さ $2pq$ のカスプ形式になることを以下で示す.

関数 $F_{p,q}(z)$ を $\log \Delta_{p,q}(z)$ と見立てて, (1.2) と同様の関数

$$R_{p,q}(\gamma, z) = F_{p,q}(\gamma z) - F_{p,q}(z)$$

を定義する. このとき各 $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ に対し $F_{p,q}(z)$ の定義, および Lemma 2.7 より, $\frac{d}{dz}(R_{p,q}(\gamma, z) - 2pq \log j(\gamma, z)) = 0$ が成り立つ. よって, ある関数 $V_{p,q} : \Gamma_{p,q} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して,

$$R_{p,q}(\gamma, z) - 2pq \log j(\gamma, z) = 2\pi i V_{p,q}(\gamma)$$

が成り立つ. ここで, $\text{Im } \log j(\gamma, z) \in [-\pi, \pi]$ と枝を選択している.

Theorem 2.8. Rademacher 記号 $\psi_{p,q}$ を (1.5) で定義したものとすると, $V_{p,q} = \psi_{p,q}$ が成り立つ.

証明. 定義より $R_{p,q}(\gamma_1 \gamma_2, z) = R_{p,q}(\gamma_1, \gamma_2 z) + R_{p,q}(\gamma_2, z)$ が成り立つので,

$$2\pi i \left(V_{p,q}(\gamma_1 \gamma_2) - V_{p,q}(\gamma_1) - V_{p,q}(\gamma_2) \right) = 2pq \left(-\log j(\gamma_1 \gamma_2, z) + \log j(\gamma_1, \gamma_2 z) + \log j(\gamma_2, z) \right),$$

すなわち, $V_{p,q}(\gamma_1 \gamma_2) - V_{p,q}(\gamma_1) - V_{p,q}(\gamma_2) = 2pq W(\gamma_1, \gamma_2)$ が成り立つ. \square

Proposition 2.9. 関数 $\Delta_{p,q}(z) = \exp F_{p,q}(z)$ は $\Gamma_{p,q}$ に関する重さ $2pq$ のカスプ形式である. 特に, \mathbb{H} 上に零点を持たず, カスプ $i\infty$ に位数 $r = pq - p - q$ の零点を持つ (定数倍を除いて) 唯一の関数である.

証明. まず Theorem 2.8 より, $\psi_{p,q}(\gamma) \in \mathbb{Z}$ であることから,

$$\Delta_{p,q}(\gamma z) = \Delta_{p,q}(z) \exp(2pq \log j(\gamma, z) + 2\pi i \psi_{p,q}(\gamma)) = j(\gamma, z)^{2pq} \Delta_{p,q}(z)$$

が成り立つ. 次に $F_{p,q}$ の定義 (2.5) より, $\Delta_{p,q}(z) = q_{\lambda}^r + O(q_{\lambda}^{r+1})$ の形の Fourier 展開を持つので, カスプ $i\infty$ において位数 r の零点を持つカスプ形式となる. 上半平面上に零点を持たないことや唯一性は, $\Gamma_{p,q}$ に関する valence formula (2.3) から分かる. \square

こうして, $\log \Delta_{p,q}(z) = F_{p,q}(z)$ と枝を定めることで, 最初に期待していた等式

$$(2.6) \quad R_{p,q}(\gamma, z) = \log \Delta_{p,q}(\gamma z) - \log \Delta_{p,q}(z) = 2pq \log j(\gamma, z) + 2\pi i \psi_{p,q}(\gamma)$$

を得ることができた.

Eisenstein 級数を用いない $\Delta_{p,q}(z)$ の構成として, Hauptmodul を用いる方法もある. Hauptmodul (およびその微分) の有理関数を考えることで, 重さや零点・極の位置を調整し, Proposition 2.9 の性質を満たすカスプ形式を作る, という考え方である. 少々力技ではあるものの, Doran ら [16, Theorem 1] が示すように, 三角群 $\Gamma_{p,q}$ に関する Hauptmodul は 3 階の微分方程式で特徴付けられており, Fourier 係数を明示的に計算することが可能である. さて三角群の保型形式の Fourier 係数に関する Wolfart [46] の研究によると, 一般に Fourier 係数は超越数となる. しかしこの超越数部分は Doran らの Theorem 1 が記すように, 具体的に抜き出すことができる. となると古典的な $SL_2(\mathbb{Z})$ に関するモジュラー形式やモックモジュラー形式の研究から類推して, その Fourier 係数の数論的な性質が関心を惹くところであるが, 果たしてどうなっているのであろうか.

2.2 サイクル積分を用いた Rademacher 記号 $\psi_{p,q}(\gamma)$ の表示

最初に簡単にサイクル積分について紹介する. 実二次無理数 w (もしくは双曲元) に対するモジュラー形式 f のサイクル積分とは,

$$\int_{\overline{S}_w} f(z) Q_w(z, 1)^{k-1} dz$$

の形で定義される閉測地線 \overline{S}_w 上の積分である. Hecke [22] 由来の古典的な対象であるにもかかわらず, サイクル積分の豊かな性質が明らかになってきたのは, 比較的最近のことである. その契機となったのは, 金子 [26] および Duke–Imamoğlu–Tóth [17] によって独立に指摘された, 楕円モジュラー j 関数の「サイクル積分」と「特異モジュライ」との間の興味深い類似性であった.

Duke ら [17] が指摘した類似性は, ある重さ $1/2$ の調和 Maass 形式が存在し, その正則部分 (モックモジュラー形式部分) の Fourier 係数に「 j 関数のサイクル積分のトレース」が, 一方でシャドーの Fourier 係数に「 j 関数の虚二次点での値 (特異モジュライ) のトレース」が現れるというものである. 一方で金子 [26] の指摘する類似性は, 放物型/楕円型/双曲型の Fourier 級数展開 (Imamoğlu–O’Sullivan [25] 参照) を用いたもので, 楕円型/双曲型の Fourier 展開の定数項に, それぞれ虚二次点での値, サイクル積分が現れるというものである. 金子 [26, 27] は数値計算によって, サイクル積分が満たす様々な現象を観察しており, そのいくつかは, 近年 Bengoechea–Imamoğlu [6, 7] および村上 [34] によって証明が与えられている.

今回考えるのは, 前節で定義した調和 Maass 形式 $E_2^{(p,q),*}(z)$ のサイクル積分である. 楕円モジュラー j 関数の場合と異なり, そのサイクル積分値が有理数になることは特筆すべき点である.

ではサイクル積分を定義する. 双曲元 $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ (すなわち $|\operatorname{tr} \gamma| > 2$ を満たす γ) を一つ固定すると, 方程式 $\gamma z = z$ は相異なる実数 $w_\gamma > w'_\gamma$ を解に持つ (γ の固定点). 特に $\Gamma_{p,q} = SL_2(\mathbb{Z})$ のとき, 固定点は実二次無理数となる. このとき, 双曲元 γ は行列 $M_\gamma = \frac{1}{\sqrt{w_\gamma - w'_\gamma}} \begin{pmatrix} w_\gamma & w'_\gamma \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ を用いて

$$(2.7) \quad M_\gamma^{-1} \gamma M_\gamma = \begin{pmatrix} j(\gamma, w_\gamma) & 0 \\ 0 & j(\gamma, w'_\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\gamma & 0 \\ 0 & \xi_\gamma^{-1} \end{pmatrix}$$

のように対角化される. ここで技術的な仮定ではあるが, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の成分について $a + d > 2, c > 0$ が成り立つと仮定すると, $\xi_\gamma > 1$ と取ることができる (そうでなければ, γ を $\pm \gamma^{\pm 1}$ のいずれかに取り替えれば良い). 2 つの固定点 w_γ, w'_γ をつなぐ上半平面 \mathbb{H} 上の測地線を S_γ とおくと, γ は S_γ 上に作用する. このとき, S_γ の $\Gamma_{p,q} \backslash \mathbb{H}$ における像 \overline{S}_γ を考えると, これは閉測地線となる. さらに γ が原始的である, つまり他の元の幕の形で書けない, と仮定すると, この閉測地線 \overline{S}_γ と S_γ 上の任意の点 z_0 と γz_0 とをつなぐ測地線分が一対一に対応する.

Definition 2.10. 原始的な双曲元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{p,q}$ であって, $a + d > 2, c > 0$ を満たすものをとる. また二次形式を $Q_\gamma(X, Y) = cX^2 + (d - a)XY - bY^2$ と定義する⁵. このとき, $f \in \mathcal{H}_{2k}(\Gamma_{p,q})$ のサイクル積分は次で定義される.

$$\int_{\overline{S}_\gamma} f(z) Q_\gamma(z, 1)^{k-1} dz = \int_{z_0}^{\gamma z_0} f(z) Q_\gamma(z, 1)^{k-1} dz.$$

次の定理をモジュラー群の場合に示したのは, 本質的には Meyer [31] であると Zagier [47] は指摘している. つまり Theorem 2.11 は Meyer の結果の三角群への拡張を与える.

Theorem 2.11. 双曲元 $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ を Definition 2.10 と同様にとる. Rademacher 記号 $\psi_{p,q}$ を (1.5) で定義したものとすると,

$$\int_{\overline{S}_\gamma} E_2^{(p,q),*}(z) dz = \frac{1}{r} \psi_{p,q}(\gamma).$$

が成り立つ. ここで, $r = pq - p - q$ である.

証明. アイデアだけ述べる. まず S_γ 上の点として $z_0 = M_\gamma i$ を取り, $E_2^{(p,q),*}(z) = E_2^{(p,q)}(z) - 1/\text{vol}(\Gamma_{p,q} \setminus \mathbb{H})y$ のように正則部分と非正則部分に分けてそれぞれの積分を考える. 正則部分については, 関数 $F_{p,q}(z)$ が $2\pi ir E_2^{(p,q)}(z)$ の原始関数であることから,

$$\int_{z_0}^{\gamma z_0} E_2^{(p,q)}(z) dz = \frac{1}{2\pi ir} \left[F_{p,q}(z) \right]_{z_0}^{\gamma z_0} = \frac{1}{2\pi ir} R_{p,q}(\gamma, z_0)$$

となる. 一方で非正則部分については, 変数変換 $z = M_\gamma iy$ によって,

$$-\frac{1}{\text{vol}(\Gamma_{p,q} \setminus \mathbb{H})} \int_{z_0}^{\gamma z_0} \frac{dz}{\text{Im}(z)} = -\frac{pq}{2\pi r} \int_1^{\xi_\gamma^2} \frac{1}{\text{Im}(M_\gamma iy)} \frac{idy}{j(M_\gamma, iy)^2} = \dots = -\frac{1}{2\pi ir} \cdot 2pq \log j(\gamma, z_0)$$

が得られる. よって (2.6) から主張が従う. \square

3 モジュラー結び目の絡み数

古くから知られるように, 3次元多様体 $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \text{SL}_2(\mathbb{R})$ は 3 次元球面 S^3 における三葉結び目 (trefoil) $K_{2,3}$ の補空間 $S^3 - K_{2,3}$ と同相になる (Milnor [32, 84 ページ] 参照). この事実が数論で用いられた事例は皆無であったが, Ghys は 2006 年の ICM 講演 “Knots and dynamics” [19] において, 測地流の閉軌道としてこの $S^3 - K_{2,3}$ 内に構成できる結び目 (これをモジュラー結び目と呼ぶ) と, 三葉結び目 $K_{2,3}$ との絡み数が, Rademacher 記号 $\psi(\gamma)$ で書けることを示した. ここに現れる三葉結び目 $K_{2,3}$ を一般的の (p, q) -トーラス結び目 $K_{p,q}$ に拡張する, というのが, これから紹介する我々の結果である.

3.1 Ghys の結果

空間 $S^3 - K_{2,3} \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \text{SL}_2(\mathbb{R})$ 上の測地流を $\varphi^t : M \mapsto M \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ によって定めるとき, その閉軌道のことをモジュラー結び目と呼ぶ, というのは Ghys [19] による定義である. 点 $M \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ を初期値に持つような軌道 $M \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ を考えたとき, これが $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \text{SL}_2(\mathbb{R})$ における閉軌道であるとは, つまり, ある $t > 0$ と $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ が存在して,

$$M \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \gamma M$$

⁵ 固定点 w_γ, w'_γ は $Q_\gamma(z, 1) = 0$ の解となる.

が成り立つことである。これを γ の立場から見ると、 γ は $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ によって対角化され、その固有値が実数になっている状況である。そのような状況が成り立つのは、 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が双曲元、つまり $|\mathrm{tr} \gamma| > 2$ の場合、またその場合に限る。したがってモジュラー結び目は、双曲元 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と $M_\gamma^{-1}\gamma M_\gamma = \begin{pmatrix} \xi_\gamma & 0 \\ 0 & \xi_\gamma^{-1} \end{pmatrix}$ なる $M_\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を用いて、

$$C_\gamma(t) = M_\gamma \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad (0 \leq t \leq \log \xi_\gamma)$$

と特徴付けられる。さらに、 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ni C_\gamma(t) \mapsto C_\gamma(t) \cdot i \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ と射影したとき、その像は閉測地線 \overline{S}_γ と一致する。

モジュラー結び目の描像については、[20] で見ることができる。そこでも説明されているように、Ghys [19] の主張は大きく 2 種類に分けられる。一つ目は Lorenz 結び目との関係である。カオス現象の有名な例に Lorenz 方程式による \mathbb{R}^3 内のフローがある。Birman–Williams [8] はテンプレート理論を用いて、フロー内の閉軌道（これを Lorenz 結び目と呼ぶ）を研究しているが、Ghys はモジュラー結び目に対しても然るべきテンプレートを構成することで、「Lorenz 結び目とモジュラー結び目は (isotopy 類が) 同じもの」であるという驚くべき事実を示している。

二つ目は今回の主題でもある Rademacher 記号との関係である。双曲元 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を一つ固定したとき、 S^3 内にはモジュラー結び目 C_γ と（除かれている）三葉結び目 $K_{2,3}$ からなる絡み目が存在している。これらに然るべき向きが備わっているとき、絡み数という最も基本的な位相不変量が Rademacher 記号と一致している、つまり、

$$\mathrm{lk}(C_\gamma, K_{2,3}) = \psi(\gamma)$$

が成り立つというのである。さらに Ghys はこの一つの等式に対し、 $\log \Delta(z)$ の変換則を用いた保型形式的な証明、Rademacher 記号と Euler 類との関係を用いたトポロジー的な証明、テンプレート理論を用いた力学系的な証明の 3 つを与えている。次の節では、Ghys の第一証明を整理・拡張することで、一般的のトーラス結び目 $K_{p,q}$ に対しても「絡み数=Rademacher 記号」という形の等式を与える。

3.2 (p, q) -トーラス結び目への拡張

舞台となるのは、 (p, q) -トーラス結び目の補空間 $S^3 - K_{p,q}$ および、そのレンズ空間への像 $L(r, p-1) - \overline{K}_{p,q}$ である。これらの空間に対しても、前節に登場した同相 $S^3 - K_{2,3} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ と類似した同相が知られている。まずはこれを紹介する。

Section 1 と同様に、普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ と離散部分群 $\widetilde{\Gamma}_{p,q}$ を定義する。群 $\widetilde{\Gamma}_{p,q}$ が $\widetilde{S}_p, \widetilde{U}_q$ で生成されることを思い出し (Theorem 1.10)， $G_r < \widetilde{\Gamma}_{p,q}$ を $\widetilde{S}_p^r, \widetilde{U}_q^r$ で生成される指数 r の部分群と定義する。このとき、次が成り立つ。

- Raymond–Vasquez [39]， $G_r \backslash \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ は $S^3 - K_{p,q}$ と同相である。
- Tsanov [43]， $\Gamma_{p,q} \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cong \widetilde{\Gamma}_{p,q} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ は $L(r, p-1) - \overline{K}_{p,q}$ と同相である。

同相写像の具体的な表示については、Tsanov [43] を見ると良い。本稿の残りは、 $L(r, p-1) - \overline{K}_{p,q}$ の場合に話を限定し、Ghys の結果の拡張の主張および証明を述べることにする。 $S^3 - K_{p,q}$ の場合については、レンズ空間における結果と、被覆 $h : S^3 - K_{p,q} \rightarrow L(r, p-1) - \overline{K}_{p,q}$ の様子を詳細に調べることで従う。

Definition 3.1. 原始的な双曲元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{p,q}$ であって, $a+d > 2, c > 0$ を満たすものをとる. $M_\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ および $\xi_\gamma > 1$ を (2.7) と同様に定めるとき, $\Gamma_{p,q} \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 内の有向単純閉曲線 $C_\gamma(t)$ を

$$C_\gamma(t) = M_\gamma \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad (0 \leq t \leq \log \xi_\gamma)$$

で定める. このとき, $\Gamma_{p,q} \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cong L(r, p-1) - \overline{K}_{p,q}$ によるレンズ空間内の有向結び目を C_γ と書き, モジュラー結び目と呼ぶ.

次に絡み数を定義する. レンズ空間のホモロジ一群は $H_1(L(r, p-1); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ で与えられるため, 絡み数は $\frac{1}{r}\mathbb{Z}$ に値を取ることに注意しておく. まず任意の $y > 0$ に対し, 曲線

$$c_y(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad (0 \leq t \leq \lambda)$$

は $\Gamma_{p,q} \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 内の有向閉曲線をなす. この $L(r, p-1) - \overline{K}_{p,q}$ における像は $\overline{K}_{p,q}$ のメリディアン μ を定める.

Definition 3.2. 空間 $L(r, p-1) - \overline{K}_{p,q}$ 内の有向結び目 K に対し, 絡み数 $\mathrm{lk}(K, \overline{K}_{p,q}) \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}$ を, 同型

$$H_1(L(r, p-1) - \overline{K}_{p,q}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \frac{1}{r}\mathbb{Z}$$

によるホモロジー類 $[K]$ の像として定義する. ただしメリディアン μ に対し, $[\mu] \mapsto 1$ となるように符号を定める.

この定義のもとで $\mathrm{lk}(C_\gamma, \overline{K}_{p,q})$ を計算するために, 複素解析における回転数の概念の復習する.

Definition 3.3. 空間 \mathbb{C}^\times 内の有向閉曲線 C に対し, 回転数 $\mathrm{ind}(C, 0) \in \mathbb{Z}$ を, 同型

$$H_1(\mathbb{C}^\times; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$$

によるホモロジー類 $[C]$ の像として定義する. ただし反時計回りに向き付けられた単位円周 $\mathbf{T} = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ に対し, $[\mathbf{T}] \mapsto 1$ となるように符号を定める.

Cauchy の積分定理より

$$(3.1) \quad \mathrm{ind}(C, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z}$$

とよく知られた積分の形で表示することもできる. 回転数が持つこの 2 種類の定義をそれぞれ絡み数, サイクル積分と直接関係付けることで, 「絡み数 = Rademacher 記号」という形の等式を得る, というのが大まかな戦略となる.

まず回転数とサイクル積分の関係について述べる. Proposition 2.9 で構成したカスプ形式 $\Delta_{p,q}(z)$ に対し, リフト $\tilde{\Delta}_{p,q} : \Gamma_{p,q} \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を

$$\tilde{\Delta}_{p,q}(g) = j(g, i)^{-2pq} \Delta_{p,q}(gi)$$

によって定める. 定義について補足する. まず $\tilde{\Delta}_{p,q}(g)$ の定義式のそれぞれの因子が 0 に値を取らないため, このリフトは \mathbb{C}^\times に値を取る関数となる. また, 保型因子の関係式 $j(\gamma_1 \gamma_2, z) = j(\gamma_1, \gamma_2 z) j(\gamma_2, z)$ から, 任意の $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ に対し $\tilde{\Delta}_{p,q}(\gamma g) = \tilde{\Delta}_{p,q}(g)$ が成り立っている.

Proposition 3.4. モジュラー結び目 C_γ に対し, 次が成り立つ.

$$\text{ind}(\tilde{\Delta}_{p,q}(C_\gamma), 0) = \psi_{p,q}(\gamma).$$

証明. 回転数の積分表示 (3.1) より

$$\text{ind}(\tilde{\Delta}_{p,q}(C_\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Delta}_{p,q}(C_\gamma)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\log \xi_\gamma} \frac{d\tilde{\Delta}_{p,q}(C_\gamma(t))}{\tilde{\Delta}_{p,q}(C_\gamma(t))}$$

が成り立つ. あとは $\frac{d}{dz} \log \Delta_{p,q}(z) = 2\pi i r E_2^{(p,q)}(z)$ であることに注意すると

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\log \xi_\gamma} \frac{d\tilde{\Delta}_{p,q}(C_\gamma(t))}{\tilde{\Delta}_{p,q}(C_\gamma(t))} = r \int_{z_0}^{\gamma z_0} E_2^{(p,q),*}(z) dz$$

と変形される. したがって Theorem 2.11 より主張が得られる. \square

次に, 絡み数と回転数の関係について述べる.

Proposition 3.5. 関数 $\tilde{\Delta}_{p,q}$ はホモロジー群の同型 $H_1(\Gamma_{p,q} \setminus \text{SL}_2(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_1(\mathbb{C}^\times; \mathbb{Z})$ を誘導する.

証明. 大まかな証明のアイデアを述べる. 考えているホモロジー群はともに \mathbb{Z} と同型なので, 誘導される準同型 $(\tilde{\Delta}_{p,q})_* : H_1(\Gamma_{p,q} \setminus \text{SL}_2(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{C}^\times; \mathbb{Z})$ が全射であることを示せば十分である. Proposition 3.4 から $\psi_{p,q}(\gamma) = 1$ を満たす双曲元 $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ の存在に問題が帰着するのだが, W 関数を用いた Rademacher 記号の特徴付け (1.5) を用いることで, 具体的にそのような γ を構成できる. \square

この同型により, 空間 $L(r, p-1) - \overline{K}_{p,q}$ 内の有向結び目 K に対し,

$$\text{lk}(K, \overline{K}_{p,q}) = \frac{1}{r} \text{ind}(\tilde{\Delta}_{p,q}(K), 0)$$

が成り立つ. こうして次の定理が得られるのである.

Theorem 3.6. 双曲元 $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ を Definition 3.1 と同様にとる. このとき,

$$\text{lk}(C_\gamma, \overline{K}_{p,q}) = \frac{1}{r} \psi_{p,q}(\gamma)$$

が成り立つ.

論文 [30] では, S^3 版および, Ghys の第 2 証明に関する考察も行っている. テンプレート理論を用いる第 3 証明に関しては, Dehornoy–Pinsky による一連の研究 [36, 14, 15] が密接に関わっているはずである. また関連して $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合には, 絡み数の分布 (Sarnak–Mozzochi [40, 33]), Chebotarev 則 (植木 [44]), 2 つのモジュラー結び目の絡み数 (Duke–Imamoglu–Tóth [18]) など様々に派生した研究が行われている.

参考文献

- [1] George E. Andrews and Bruce C. Berndt, *Ramanujan's lost notebook. Part V*, Springer, Cham, 2018. MR 3838409

- [2] Tetsuya Asai, *The reciprocity of Dedekind sums and the factor set for the universal covering group of $\mathrm{SL}(2, R)$* , Nagoya Math. J. **37** (1970), 67–80. MR 260675
- [3] ———, *Rademacher's Φ -function*, 数論セミナー静岡, 2003.
- [4] Michael Atiyah, *The logarithm of the Dedekind η -function*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 335–380. MR 909232
- [5] J. Barge and É. Ghys, *Cocycles d'Euler et de Maslov*, Math. Ann. **294** (1992), no. 2, 235–265. MR 1183404
- [6] P. Bengoechea and Ö. Imamoglu, *Cycle integrals of modular functions, Markov geodesics and a conjecture of Kaneko*, Algebra Number Theory **13** (2019), no. 4, 943–962. MR 3951584
- [7] ———, *Values of modular functions at real quadratics and conjectures of Kaneko*, Math. Ann. **377** (2020), no. 1-2, 249–266. MR 4099636
- [8] Joan S. Birman and R. F. Williams, *Knotted periodic orbits in dynamical systems. I. Lorenz's equations*, Topology **22** (1983), no. 1, 47–82. MR 682059
- [9] Kathrin Bringmann, Amanda Folsom, Ken Ono, and Larry Rolen, *Harmonic Maass forms and mock modular forms: theory and applications*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 64, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. MR 3729259
- [10] Kathrin Bringmann and Ken Ono, *The $f(q)$ mock theta function conjecture and partition ranks*, Invent. Math. **165** (2006), no. 2, 243–266. MR 2231957
- [11] Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1994, Corrected reprint of the 1982 original. MR 1324339 (96a:20072)
- [12] Jan Hendrik Bruinier and Jens Funke, *On two geometric theta lifts*, Duke Math. J. **125** (2004), no. 1, 45–90. MR 2097357
- [13] Richard Dedekind, *Erläuterungen zu zwei fragmenten von. Riemann*, B. Riemanns gesammelte math. Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. 2. Auflage (1892), 466–478.
- [14] Pierre Dehornoy, *Geodesic flow, left-handedness and templates*, Algebr. Geom. Topol. **15** (2015), no. 3, 1525–1597. MR 3361144
- [15] Pierre Dehornoy and Tali Pinsky, *Coding of geodesics and Lorenz-like templates for some geodesic flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems **38** (2018), no. 3, 940–960. MR 3784249
- [16] Charles F. Doran, Terry Gannon, Hossein Movasati, and Khosro M. Shokri, *Automorphic forms for triangle groups*, Commun. Number Theory Phys. **7** (2013), no. 4, 689–737. MR 3228299
- [17] W. Duke, Ö. Imamoglu, and Á. Tóth, *Cycle integrals of the j -function and mock modular forms*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 2, 947–981. MR 2776366
- [18] ———, *Modular cocycles and linking numbers*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 6, 1179–1210. MR 3635902

- [19] Étienne Ghys, *Knots and dynamics*, International Congress of Mathematicians. Vol. I, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, pp. 247–277. MR 2334193
- [20] Étienne Ghys and Jos Leys, *Lorenz and modular flows: a visual introduction*, Monthly Essays in Mathematical Topics, American Mathematical Society http://www.josleys.com/articles/ams_article/Lorenz3.htm, 2011.
- [21] Larry Joel Goldstein, *Dedekind sums for a Fuchsian group. I*, Nagoya Math. J. **50** (1973), 21–47. MR 318065
- [22] E. Hecke, *Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen 3. Gattung aus dem Gebiet der elliptischen Modulfunktionen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), no. 1, 211–223. MR 3069450
- [23] D. Hickerson, *On the seventh order mock theta functions*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 661–677. MR 969248
- [24] ———, *A proof of the mock theta conjectures*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 639–660. MR 969247
- [25] Özlem Imamoglu and Cormac O’Sullivan, *Parabolic, hyperbolic and elliptic Poincaré series*, Acta Arith. **139** (2009), no. 3, 199–228. MR 2545926
- [26] Masanobu Kaneko, *Observations on the ‘values’ of the elliptic modular function $j(\tau)$ at real quadratics*, Kyushu J. Math. **63** (2009), no. 2, 353–364. MR 2568779
- [27] ———, 楕円モジュラー j 関数の実二次点での「値」とマルコフ二次無理数, 2010, 早稲田大学整数論研究集会報告集.
- [28] Neal Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 97, Springer-Verlag, New York, 1993. MR 1216136
- [29] Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Raj Pal Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Third enlarged edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 52, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966. MR 0232968
- [30] Toshiki Matsusaka and Jun Ueki, *Modular knots, automorphic forms, and the Rademacher symbols for triangle groups*, preprint. arXiv:2109.01114, 2021.
- [31] Curt Meyer, *Die Berechnung der Klassenzahl Abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern*, Akademie-Verlag, Berlin, 1957. MR 0088510
- [32] John Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 72, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971. MR 0349811
- [33] C. J. Mozzochi, *Linking numbers of modular geodesics*, Israel J. Math. **195** (2013), no. 1, 71–95. MR 3101243
- [34] Yuya Murakami, *A continuity of cycle integrals of modular functions*, Ramanujan J. **55** (2021), no. 3, 1177–1187. MR 4286781

- [35] Hans Petersson, *Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen, Teil I*, Math. Ann. **115** (1938), no. 1, 23–67. MR 1513171
- [36] Tali Pinsky, *Templates for geodesic flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (2014), no. 1, 211–235. MR 3163031
- [37] Hans Rademacher, *Zur Theorie der Dedekindschen Summen*, Math. Z. **63** (1956), 445–463. MR 79615
- [38] Hans Rademacher and Emil Grosswald, *Dedekind sums*, The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1972, The Carus Mathematical Monographs, No. 16. MR 0357299
- [39] Frank Raymond and Alphonse T. Vasquez, *3-manifolds whose universal coverings are Lie groups*, Topology Appl. **12** (1981), no. 2, 161–179. MR 612013
- [40] Peter Sarnak, *Linking numbers of modular knots*, Commun. Math. Anal. **8** (2010), no. 2, 136–144. MR 2587769
- [41] A. Selberg, *Über die mock-thetafunktionen siebenter ordnung*, Arch. Math. Naturvid. **41** (1938), no. 9, 3–15.
- [42] Jean-Pierre Serre, *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation. MR 1954121
- [43] Valdemar V. Tsanov, *Triangle groups, automorphic forms, and torus knots*, Enseign. Math. (2) **59** (2013), no. 1-2, 73–113. MR 3113600
- [44] Jun Ueki, *Modular knots obey the chebotarev law*, preprint. arXiv:2105.10745, May 2021.
- [45] G. N. Watson, *The Final Problem : An Account of the Mock Theta Functions*, J. London Math. Soc. **11** (1936), no. 1, 55–80. MR 1573993
- [46] J. Wolfart, *Eine arithmetische Eigenschaft automorpher Formen zu gewissen nicht-arithmetischen Gruppen*, Math. Ann. **262** (1983), no. 1, 1–21. MR 690003
- [47] Don Zagier, *Nombres de classes et fractions continues*, Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974), 1975, pp. 81–97. Astérisque, No. 24–25. MR 0374093
- [48] ———, *Ramanujan’s mock theta functions and their applications (after Zwegers and Ono-Bringmann)*, no. 326, 2009, Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008, pp. Exp. No. 986, vii–viii, 143–164 (2010). MR 2605321
- [49] Sander Zwegers, *Mock theta functions*, Ph.D. thesis, Utrecht University, 2002.

名古屋大学 高等研究院（多元数理科学研究科）
 464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町
 Email : matsusaka.toshiki@math.nagoya-u.ac.jp

コホモロジー理論の無限化とその応用

阿部 知行

1. 序説

コホモロジー理論は様々な数学において有用な普遍量を提供する有用な枠組みである。コホモロジーは一般に局所的な性質と大域的な性質のズレをあらわす量とも考えられるので、コホモロジーの元を局所的に構成するのは不可能である。例えば円周 S^1 を考えよう。 $H^1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(S^1), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ である。 S^1 は2枚の開区間 I_1, I_2 で覆うことができ、 $S^1 = I_1 \cup I_2$ である。 I_k は可縮なので $H^1(I_k) = 0$ となっており、 $H^1(S^1, \mathbb{Z})$ の非自明な元は $H^1(I_k)$ の元の貼り合わせで書くことはできない。一方で Meyer-Vietoris 完全列

$$H^0(I_1 \cap I_2, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(I_1, \mathbb{Z}) \oplus H^1(I_2, \mathbb{Z})$$

を考える。この完全列によると $H^1(S^1, \mathbb{Z})$ の非自明な元は $H^0(I_1 \cap I_2, \mathbb{Z})$ から「来ている」ことが分かる。感覚的な説明としては $H^1(S^1, \mathbb{Z})$ の元は $H^1(I_1, \mathbb{Z})$ の元と $H^1(I_2, \mathbb{Z})$ の元の組で $I_1 \cap I_2$ に制限すると一致するものと考えるのではなく、 $I_1 \cap I_2$ に制限するとホモトピックになるものと考えるのである。 $H^1(I_k, \mathbb{Z})$ には 0 という元しか存在していないが、 $I_1 \cap I_2$ でのホモトピーの取り方の自由度は $H^0(I_1 \cap I_2, \mathbb{Z})$ に現れてくるのである。この感覚的な説明を厳密に数学にしようとすると現代的には無限圏の概念が最も適切である。本論説では無限圏の立場からコホモロジーの貼り合わせがどうみられるかを中心に説明し、その技術の数論幾何学への応用を述べたいと思う。無限圏に関しては教科書 [L] が有名で、実際とてもよく書かれていると思う。ただかなり長いのでアイディアだけざっと知りたいという方には [G] がおすすめである。

2. 無限圏とは

無限圏は圏論と状況が異なり、「絶対的な定義」は存在していない。もう少し正確に書くと様々な定義が存在しており、どの定義もある意味で同等（同値ではない！）な理論を提供するのである。このあたりの事情は少し分かりにくいので、今回は無視して、以下の定義を採用する：

定義. — 無限圏とは位相空間で豊饒化（enrich）された圏のことを言う。もう少し具体的には無限圏 \mathcal{C} とは次の3つのデータ

- 対象の集合 $\text{Obj}(\mathcal{C})$;
- 二つの対象 $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ が与えられたとき、射の位相空間 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$;
- 3つの対象 $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ に対して合成と呼ばれる連続写像 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$

が与えられており、しかるべき公理（つまり合成の推移性と恒等射の存在）を満たしているものをいう。

注. — 上記の無限圏はより正確には位相圏と呼ばれるものである。近年無限圏が広く使われるようになったが、これは Lurie による教科書 [L] の影響が大きい。ここではいわゆる擬圏を無限圏の定義として採用しており、その影響もあり無限圏といえば擬圏をさすことが多い。擬圏は特殊な

单体的集合のことであり、指定するデータが位相圏に比べて圧倒的に少なく、それが Lurie が無限圏として採用した理由の一つである。一方で位相圏の方が感覚的な説明がしやすいので今回は位相圏を無限圏の定義として採用した。

このように射を位相空間にすると極めて豊富な構造を持つ。例えば二つの射 $f, g: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、これらは $M := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ という位相空間の二つの点としてとらえられる。 M は位相空間なので f と g を「道でつなぐ」という概念が考えられる。これら二つの点が H という道、つまり $H: [0, 1] \rightarrow M$ という連続写像で $H(0) = f, H(1) = g$ を満たすもの、が与えられているとする。この H は f と g の間の「2射」を与えるものと解釈できる。

無限圏があるとそれに付随する普通の圏が構成できる。 \mathcal{C} を無限圏とする。このとき $\text{h}\mathcal{C}$ を対象の集合を $\text{Obj}(\mathcal{C})$ で、 $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ に対して

$$\text{Hom}_{\text{h}\mathcal{C}}(X, Y) := \pi_0 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

として定義することによって $\text{h}\mathcal{C}$ が圏になることが簡単に確かめられる。 $\text{h}\mathcal{C}$ を \mathcal{C} のホモトピー圏と呼ぶ。この定義を用いて \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ が同値であるとは f をホモトピー圏 $\text{h}\mathcal{C}$ の中で考えると同型になっているものとして定義する。最終的に興味があるのはホモトピー圏であることが多いので、同値であるという概念に特別な意味があることは納得いただけると思う。

これまでの議論では、無限圏の理論とは基本的にただの豊饒圏の理論だという印象を受けるかもしれない。豊饒圏の理論と決定的な違いが現れるのは「無限圏の同値」の概念を導入する時である。 \mathcal{C} と \mathcal{D} を無限圏とし、 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を関手とする。これが豊饒圏の意味で同値であるとは任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して誘導される写像 $F(X, Y): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ が同相で F が質的全射であることであった。この定義で果たして欲しいものなのだろうか？例えば \mathcal{C}_0 として対象 $\{0, 1\}$ を持ち恒等射以外は $\text{Map}(0, 1) = \{\ast\}$ となっている無限圏とし、 \mathcal{C}_1 として対象 $\{0, 1\}$ を持ち恒等射以外は $\text{Map}(0, 1) = I$ ($I = [0, 1]$ という閉区間) という無限圏とする。 $\{\ast\}$ と I は同相でないことから \mathcal{C}_0 と \mathcal{C}_1 は豊饒圏としては同値ではない。一方で 2 圈の立場に立てば \mathcal{C}_1 の中の射 $0 \rightarrow 1$ は全て同値なので \mathcal{C}_0 と \mathcal{C}_1 は同値とするべきである。つまり、豊饒圏の意味での同値というのは無限圏論的な立場からすれば強すぎる概念なのである。この議論を突き詰めると我々に本当に必要な同値の概念は $F(X, Y)$ が同相というものではなくホモトピー同値なものであるということが分かる。本論説では定義にまで戻ることはないが重要な概念なので正確な定義を記しておく：

定義。 — 無限圏の間の関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が同値であるとは次の 2 つの条件を満たしていることをいう。

1. ホモトピー圏に誘導される関手 $\text{h}F$ が本質的全射。
2. 全ての対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して連続写像 $F(X, Y): \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(F(X), F(Y))$ はホモトピー同値である。

このように無限圏論はホモトピー論的な性格を持った圏論であるということができる。

例。 — 1. 圏 \mathcal{C} とその射の類 X が指定されると X に属する射が同値になるような最も小さい無限圏が存在し $\mathcal{C}[X^{-1}]$ と書く。この無限圏は存在は保証されているものの構成は抽象的で具体的な計算にはほとんど役立たない。

2. 無限圏論がまだ発展していなかった時はモデル圏を用いて無限圏的な操作を行っていた。 \mathcal{C} を单体的モデル圏として、 \mathcal{C}° を fibrant かつ cofibrant な対象からなる忠実充満部分圏とする。 W を weak equivalence からなる射の類とすれば、 $\mathcal{C}^\circ[W^{-1}]$ は比較的簡明な表記が存在する。
3. Quillen によって单体的集合の圏 Set_Δ に单体的モデル圏の構造が入れられた。このモデル圏に付随する無限圏を空間の無限圏と呼ぶ。この無限圏は従来の位相幾何学が対象してきた

「空間」のなす無限圏である。この無限圏の対象はいわゆる Kan 複体である。Kan 複体を知らない人は位相空間と思ってしまっても本論説では問題はない。無限圏 \mathcal{C} が与えられたとき $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ を空間の無限圏の対象としてみたものを $\text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ と書く。本論説では違いはほとんどないので $\text{Map}_{\mathcal{C}}$ は $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ のことだと思っておいてよい。

無限圏論では極限や Kan 拡張など圏論の基本的な操作を一般化することができる。これらの概念の説明も加えたいところだが、紙面の関係で深くは立ち入れない。ただ、極限の一種であるファイバー積が無限圏論でどのように扱われるかだけ簡単に説明したい。まず空間の無限圏の中でファイバー積がどのようになるか考えてみよう。空間の図式 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ が与えられたとき普通のファイバー積を $X \times_Z^{\text{top}} Y$ と書こう。これを考えると $X \rightarrow X'$ がホモトピー同値でも一般に $X \times_Z^{\text{top}} Y \rightarrow X' \times_Z^{\text{top}} Y$ はホモトピー同値とは限らない。この問題を解決するため古典的にはホモトピーファイバー積 $X \times_Z^h Y$ と呼ばれるものが考えられた。これは次の組を満たすデータの成す空間である：

$$x \in X, \quad y \in Y, \quad f(x) \sim g(y).$$

ここで \sim は Z の中の道 (path) を意味している。つまり $h: [0, 1] \rightarrow Z$ という連続写像で $h(0) = f(x), h(1) = g(y)$ となるものである。重要なことはこのように \times^h を定義するとホモトピー同値 $X \rightarrow X'$ に対して $X \times_Z^h Y \rightarrow X' \times_Z^h Y$ がホモトピー同値になることが示せる。実はこの \times^h が空間の無限圏の中でのファイバー積となっている。無限圏論の哲学からするとファイバー積は同値な射で保たれている必要がある。空間の無限圏ではホモトピー同値が同値になっているので普通のファイバー積ではなくホモトピーファイバー積が無限圏のファイバー積になっていることの傍証になるだろう。

より一般的な無限圏 \mathcal{C} に対してもファイバー積が同じように定義できるし、次のような普遍性からも定義できる。つまり、 $X \times_Z Y$ とは任意の $W \in \mathcal{C}$ に対して

$$\text{Map}_{\mathcal{C}}(W, X \times_Z Y) \rightarrow \text{Map}_{\mathcal{C}}(W, X) \times_{\text{Map}_{\mathcal{C}}(W, Z)} \text{Map}_{\mathcal{C}}(W, Y)$$

という標準射が同値となることを言う。ここで $\text{Map}_{\mathcal{C}}$ は空間となるので右辺に出てくるファイバー積は上で導入したホモトピーファイバー積のことである。普通の圏ならばファイバー積は同型を除いて一意に決まる。無限圏の場合は同値を除いて一意に決まるのは簡単にわかるが、もっと強い一意性がある。つまり F, F' が両方ともファイバー積であったとき $f: F \xrightarrow{\sim} F'$ という同値な射が存在する。ただこの同値は一意ではない。別の同値 g があったとする。この時ホモトピー（つまり 2 射） $f \rightarrow g$ がある。ただこのホモトピーも一意ではない。これがずっと続くのでどのような意味で一意なのか明らかにする必要がある。これを定式化するために、無限圏のホモトピー論的な性質を用いて「全てのファイバー積をパラメーター付けする空間」を考える。ホモトピー的に一意というのはこの空間が可縮であることを示している。無限圏論の一つの哲学は圏論で一意性で特徴づけしていた種々の性質をパラメーター空間の可縮性に置き換えることである。当然議論は格段に複雑になりホモトピー論的になるが古典的な圏論と驚くべきほど並行した理論ができるのである。

3. 6つの関手と両変ホモロジー理論

6つの関手の枠組みは Grothendieck によって導入された概念である。Grothendieck によれば「良い」コホモロジー理論があればその裏に 6 つの関手があり、それによってコホモロジーが生み出されるとされる。6 つの関手の枠組みはコホモロジー理論に比べ柔軟な枠組みで、より深い構造を炙り出すのである。簡単のため底体 k を固定する。 $\text{Sch}_{/k}$ を k 上の分離的かつ有限型なスキームの圏とする。このとき、6 つの関手の枠組みとは各 $X \in \text{Sch}_{/k}$ に対して三角圏 $D(X)$ を対応させ、射 $f: X \rightarrow Y$ に対して関手 $f_!, f_*: D(X) \rightarrow D(Y)$, $f^*, f^!: D(Y) \rightarrow D(X)$ という 4 つの関手と、 $\otimes, \mathcal{H}\text{om}$ という $D(X)$ の自己関手が与えられているもので、様々な関係を満たしている。例えば

- $D(X)$ は $\otimes, \mathcal{H}\text{om}$ によって閉モノイダル圏となっている。

- (f^*, f_*) , $(f_!, f^!)$ は随伴対になっている.
- 自然変換 $f_! \rightarrow f_*$ が存在し, f が固有ならこの自然変換は同値になっている.
- 射影公式, つまり $f_!(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}) \cong f_!\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ という同型がある.

などの性質を満たしている.

例. — 6つの枠組みを持っているコホモロジー論は色々と知られている. 代表的なものを挙げたい.

1. 最も始めに考案されたのは Weil 予想の解決を目的として構成されたエタール・コホモロジー論だと思われる. 標数 p の体 k と p とは異なる素数 ℓ が与えられたとき $D(X) = D_c^b(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$, つまり構成可能エタール $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 加群のなす導來圏を取ってればそれは 6つの枠組みを持つ.
2. k の標数が 0 のとき, 代数的 \mathcal{D} 加群の理論は 6つの関手の枠組みを与えてる. それの類似として k が正標数の時, 数論的 \mathcal{D} 加群と呼ばれる理論があり, それも 6つの関手の枠組みを持っている.
3. Hodge 理論も 6つの関手の枠組みを持っており, いわゆる Hodge 加群の理論である.
4. モチビックコホモロジーの理論も 6つの関手の枠組みを持つことが知られている. Voevodsky のアイディアに端を発し, Ayoub や Cisinski-Déglise らによって構築された ([Ay, CD] など).

6つの関手が与えられると大きく分けて二つの関手を定義できる. $X \in \text{Sch}_{/k}$ をとり, $\pi: X \rightarrow \text{Spec}(k)$ を構造射とする. $D(X)$ の単位対象を $\mathbf{1}_X$ と書き, 特に $\mathbf{1}_{\text{Spec}(k)}$ を $\mathbf{1}$ と書く. このとき,

$$\begin{aligned} H^n(X) &:= \text{Hom}_{D(\text{Spec}(k))}(\mathbf{1}, \pi_* \pi^* \mathbf{1}[n]), \\ H_n^{\text{BM}}(X) &:= \text{Hom}_{D(\text{Spec}(k))}(\pi_! \pi^* \mathbf{1}[n], \mathbf{1}). \end{aligned}$$

$H^n(X)$ は $X \rightarrow Y$ に対して $H^n(Y) \rightarrow H^n(X)$ という関手性があるのでコホモロジー理論である. $H_n^{\text{BM}}(X)$ はいわゆる Borel-Moore ホモロジーである. Fulton-MacPherson [FM] はこの二つの(コ)ホモロジー理論を統合し, 両変ホモロジー理論を定義した. 簡単に両変ホモロジー理論を導入しよう. まず, $\widehat{\text{Ar}}$ という圏を導入する. この圏の対象は $f: X \rightarrow Y$ という $\text{Sch}_{/k}$ の中の射の集合である. この対象は簡単のため X/Y と書くこともある. 二つの対象 $(f: X \rightarrow Y), (g: W \rightarrow Z)$ が与えられたとき射 $f \rightarrow g$ は最も自然なものではなく, 少々ひねったものである. つまり, 射とは図式

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\alpha} & W \times_Z Y & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow & \square & \downarrow \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

で α が固有なものである. 合成は自然なものである. この圏を用いることにより, 関手 $H_n^{\text{BM}}: \widehat{\text{Ar}}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Ab})$ を $f: X \rightarrow Y$ に対して $\text{Hom}_{D(Y)}(f_! f^* \mathbf{1}_Y, \mathbf{1}_Y)$ を対応させるものとして定義できる. これが実際に関手になっていることは 6つの関手の性質から分かる. このように定義すると

$$\begin{aligned} H_n^{\text{BM}}(X/\text{Spek}(k)) &\cong H_n^{\text{BM}}(X) \\ H_n^{\text{BM}}(X/X) &\cong H^{-n}(X) \end{aligned}$$

となっていることが確認でき, 二つの理論を統一的に記述していることが分かる. この H^{BM} は Fulton と MacPherson の両変ホモロジー理論の例になっている.

4. 両変ホモロジー理論の無限強化

前節では両変ホモロジー関手 H_n^{BM} を導入したが、これを「無限強化」したい。まず、なぜ無限強化が必要なのかを説明しよう。序説でも述べたように一般にコホモロジーの元は貼り合わせることができない。一方で哲学的には無限圏まで行けば貼り合わせができるはずで、それは古典論ではコホモロジー降下という形で現れてくるのであった。無限圏まで行ってしまえば元の貼り合わせができたり、写像錐を取る操作が関手的であったりと、従来「禁じられていた」操作がやりたい放題になってしまうという印象を持たれるかもしれない。実際にこれは正しいのだが、困難は実際に貼り合わせの図式を無限圏の中で構成するところにある。もう少し詳しく説明しよう。 X を多様体として $X = U \cup V$ という開被覆を取る。 $\alpha \in H^n(X)$ の元を貼り合わせのデータで記述しようとすると以下の 3 つのデータを与えることは同値である：

$$(4.1) \quad \alpha_U \in H^n(U), \quad \alpha_V \in H^n(V), \quad h: \alpha_U|_{U \cap V} \sim \alpha_V|_{U \cap V}.$$

ここで 3 番目のデータ h はホモトピーであり、無限圏的なデータである。ホモトピーを構成すること自体はそこまで難しいことではないし、これら 3 つのデータを取ることはそこまで苦労はないといえるだろう。では 3 枚の被覆 $X = U \cup V \cup W$ であったらどうか？この場合は次のようなデータが必要になってくる：

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \alpha_U &\in H^n(U), & \alpha_V &\in H^n(V), & \alpha_W &\in H^n(W) \\ h_{UV}: \alpha_U|_{U \cap V} &\sim \alpha_V|_{U \cap V}, & h_{VW}: \alpha_V|_{V \cap W} &\sim \alpha_W|_{V \cap W}, & h_{WU}: \alpha_W|_{W \cap U} &\sim \alpha_U|_{W \cap U} \\ H_{UVW}: h_{VW}|_{U \cap V \cap W} \circ h_{UV}|_{U \cap V \cap W} &\sim h_{WU}|_{U \cap V \cap W}. \end{aligned}$$

被覆の枚数がもっと多くなると必要とされるデータがどんどん増えてき、さらに高い次数のホモトピーも必要となってくる。こうなると強引に手で扱うのは難しいと理解いただけるのではないだろうか。

さて、このような貼り合わせの情報をまとめて無限圏の言葉で表現するにはどうすればよいだろうか。そのためにはまず上で～と書いたホモトピーの関係を正確に表す必要があり、導来無限圏 \mathcal{D} を導入する必要がある。とはいっても細かい定義をするのはここでは不可能なので、重要な性質のみを列挙する。つまり、次の性質を満たす無限圏 \mathcal{D} が存在する：

1. $h\mathcal{D} \cong D(\text{Ab})$ である。つまり、 \mathcal{D} のホモトピー圏はアーベル群のなすアーベル圏の導来圏となる。別の言い方をすると \mathcal{D} は $D(\text{Ab})$ の無限強化である。
2. \mathcal{D} は安定無限圏である。つまり、0 対象・任意のファイバー積・余ファイバー積が存在しており、ファイバー図式はすなわち余ファイバー図式となっている。

安定無限圏は無限圏の中でも大切なクラスで、アーベル圏の無限版のような趣を持っている。実際、一般にアーベル圏 \mathcal{A} に対して $D(\mathcal{A})$ の無限強化となるような安定無限圏 $D(\mathcal{A})$ を構成する一般的な手法が知られている。導来圏 $D(\mathcal{A})$ の中に定義されているシフト関手 [1] は \mathcal{D} の関手に持ち上げることができ、これも [1] と書く。安定無限圏は実にきれいな理論で、三角圏の定義の中ではシフト関手はデータの一つであったが、[1] は安定無限圏の中で定義される関手である。具体的に書くと [1] は $X \in \mathcal{D}$ を $0 \sqcup_X 0$ に移す関手である。普通の圏論的な思考では $0 \sqcup_X 0$ は 0 になってしまうが、高次ホモトピーの存在から意味のある対象が出てくることに注意する。

これを用いるとコホモロジーの貼り合わせは無限関手

$$H: \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$$

として表現できる。この無限関手は $\pi_0 \text{Map}(\mathbb{Z}[-n], H(X)) \cong H^n(X)$ を満たしているものと仮定する。つまり、 $H^n(X)$ の元を与えることは $\mathbb{Z}[-n] \rightarrow H(X)$ という \mathcal{D} の中の射を与えることと同値である。 $X = U \cup V$ の状況を考えよう。このとき

$$\text{Map}(\mathbb{Z}[-n], H(U)) \times_{\text{Map}(\mathbb{Z}[-n], H(U \cap V))} \text{Map}(\mathbb{Z}[-n], H(V)) \simeq \text{Map}(\mathbb{Z}[-n], H(U) \times_{H(U \cap V)} H(V)).$$

の元がどうなっているか考えよう。そのため $W \in \{U, V\}$ に対して $\rho_W: \text{Map}(\mathbb{Z}[-n], \text{H}(W)) \rightarrow \text{Map}(\mathbb{Z}[-n], \text{H}(U \cap V))$ とする。これは §2 で説明した空間の無限圏でのファイバー積の具体的な表記によれば上のファイバー積の元は次の 3 つのデータで表される：

$$f_U \in \text{Map}(\mathbb{Z}[-n], \text{H}(U)), \quad f_V \in \text{Map}(\mathbb{Z}[-n], \text{H}(V)), \quad \rho_U(f_U) \sim \rho_V(f_V).$$

ここで最後のホモトピーは $\text{Map}(\mathbb{Z}[-n], \text{H}(U \cap V))$ の中のホモトピーである。 $\text{Map}(\mathbb{Z}[-n], \text{H}(U))$ は空間であることから、ホモトピーも正確な意味で定義されているのである。この情報はまさに (4.1) と同じであることが分かるだろう。同じように 3 枚の被覆の場合も同様の無限圏の中の射影極限で表現することができ、このデータの具体的な表記が (4.2) であることが確かめられる。

このように関手 H に必要な貼り合わせの情報がすべて含まれていることが分かる。貼り合わせによってコホモロジーが復元できることは「 H が射影極限を保つ」という条件に対応することもここまで観察からわかると思う。つまりコホモロジー降下は H という射影極限を保つ無限関手を与えることとして解釈できるのである。

コホモロジー論は単純に $\text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ という関手でとらえられることが分かったが、両変ホモロジー理論の場合関手性がもっと複雑である。それを表現したのが次の定理である：

定理 (阿部 [A1]). — 「良い」 6 つの関手の枠組みを持つコホモロジー理論が与えられているとする。この時無限関手 $H^{\text{BM}}: \widehat{\text{Ar}}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ が存在して $H_n^{\text{BM}}(X/Y) \cong \text{Map}(\mathbb{Z}[n], H^{\text{BM}}(X/Y))$ という同型が存在し、 $\widehat{\text{Ar}}$ の射に対して両立する。

ここで「良い」 6 つの関手の枠組みを持つということを正確に定式化するのはかなり大変である。この気持ちだけを簡単に解説したい。両変ホモロジー関手の定義の中には $f_!$ が出てくる。一番の問題はこの $f_!$ を無限圏的に整合性が取れるように定義するのが極めて大変なことがある。まず一番基本になっている関手は引き戻し関手 f^* である。この右随伴を取ることにより f_* が定義される。 f が固有的な場合は $f_! \simeq f_*$ となるべきなので、 $f_!$ が f が固有の場合に定義できたと思える。次に j が開移入の時 $j_!$ は j^* の左随伴となっているべきなので $j_!$ は j^* から定まる。一般的の射 $f: X \rightarrow Y$ の場合、これを $X \xrightarrow{j} \overline{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y$ で j が開移入、 \bar{f} が固有的であるように分解し $f_! := \bar{f}_! \circ j_!$ となっているべきなので、 $f_!$ が定まるということであった。このように f^* が与えられていれば $f_!$ は（存在は別として）実質的に一意に定まってしまうのである。問題は分解は一意でないし、標準的にとれるわけでもないことがある。そのためどの分解でとっても実質的に同じものであることを示さなくてはならない。無限圏の場合データが極めて多いため、この事実を定式化するのさえとても大変である。この部分の構成は Lurie のアイディアのもと Gaitsgory と Rozenblyum [GR] によって行われ、6 つの関手の枠組みの無限強化は既に知られていた。6 つの関手が無限強化されていれば上の定理もすんなりと導出されると思うわけで、筆者もそう思ったのだが、実際にはこの無限強化された 6 つの関手の枠組みから上記の定理を出すためには非自明な議論が必要である。一番の問題はこの 6 つの関手の枠組みは $(\infty, 2)$ 圏と呼ばれる、2 圏の無限版という無限圏よりもさらに複雑なものから無限圏的なデータを取り出さなくてはならないことである。

5. 数論幾何への応用

ここまで（苦労して）両変ホモロジー理論を無限化したわけだが、もともとの筆者の動機は分岐理論のホモトピー的解釈にある。本論説とは主題が大きく違ってしまうので、細かい説明は残念ながら省かせていただき大枠のみ説明したい。 k を正標数な代数閉体とし、 $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ を次元が d の滑らかな射とする。 ℓ を $\text{char}(k)$ とは異なる素数として一つ固定し、 $\Lambda := \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ とおく。 \mathcal{F} を構成可能 Λ 加群のエタール層とする。この時、斎藤毅氏により \mathcal{F} の特性サイクル $\text{CC}(\mathcal{F})$ というものが定義されている ([S] を参照)。これは余説束 T^*X の d 次元サイクルであり、重要な性質として X が固有的だった時

$$(\text{CC}(\mathcal{F}), T_X^*X) = \chi(X, \mathcal{F})$$

というようにオイラー・ポアンカレ標数を計算する。ここで T_X^*X は T^*X の 0 切断である。特性サイクルは \mathcal{D} 加群の特性サイクルの理論を基本的なモデルとして存在が期待されてきたものである。 \mathcal{D} 加群の理論では特性サイクルが理論面においても応用面においても重要な研究対象であった。分岐理論と特性サイクルの類似性が 80 年代に Deligne や Laumon によって観察され始め、その頃から ℓ 進層の特性サイクルの理論を構成することが大きな目標とされてきた。特性サイクルの構成に関しては Beilinson による特性多様体（特性サイクルの台となっているべき T^*X の閉部分多様体）の構成に重複度の情報を付与することにより、遂に斎藤毅氏が特性サイクルが定義された。同時に斎藤氏（や Beilinson）によって様々な特性サイクルの性質が示されたが、特性サイクルの押し出しとの両立性に関しては予想として残された。予想を正確に紹介しないが、例えば以下の主張は予想の帰結となっている：

予想。 — $f: X \rightarrow Y$ を k 上滑らかな多様体間の固有射とする。 \mathcal{F} を X 上の構成可能層とした時

$$f_*(\mathrm{CC}(\mathcal{F}), T_X^*X) = (\mathrm{CC}(Rf_*\mathcal{F}), T_Y^*Y)$$

が $\mathrm{CH}_0(Y)$ の中で成立する。

重要なことはこの予想自体は従来の圈論のみで語られている予想で、無限圏は全く必要ない。しかし、本論説で無限強化をした動機は次の定理を証明することにある：

定理 (阿部 [A3]). — 上記の予想は $\mathrm{CH}_0(Y)$ に $\mathrm{char}(k)$ の逆数を添加した群の中で成立する。

証明の方針を簡単に説明したい。まず、平坦エタール系 FlEt_X という $\mathrm{Sch}_{/k}$ の（前）層を導入する。定義は込み入っているので詳しくは述べないが次の性質を持っている：

1. $\mathrm{FlEt}_X(\mathrm{Spec}(k)) = K_0 \mathrm{Cons}(X)$ である。ここで K_0 はグロタンディーク群で $\mathrm{Cons}(X)$ は X 上の構成可能層のなす圏である。
2. 一般に $\mathrm{FlEt}_X(T) \subset \prod_{t \in \mathrm{geom}(T)} K_0 \mathrm{Cons}(X_t)$ であり、 FlEt_X の制限射は $\prod_{t \in \mathrm{geom}(T)} (\dots)$ の制限射から誘導される。ここで $\mathrm{geom}(T)$ は T の幾何学的点の集合である。

FlEt は高次元底の近接隣体の理論の情報をまとめたものであるということを加えておきたい。

モチビックコホモロジー論の 6 つの関手の枠組み [Ay, CD] は既に述べた Gaitsgory-Rozenblyum の方法を用いることで容易に無限強化できることが知られている。このことから前節の定理をこの枠組みに対して適用することができ、特に $H^{\mathrm{BM}}: \widehat{\mathrm{Ar}}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ という無限関手が得られる。一つの重要な性質として、 $H_0^{\mathrm{BM}}(X/\mathrm{Spec}(k)) \cong \mathrm{CH}_0(X)[\mathrm{char}(k)^{-1}]$ というように、Chow 群を計算できることにある。 $\mathrm{char}(k)$ の逆数を添加しなくてはならないのは特異点の解消が知られていないことによっている。

話を元に戻す。押し出し公式を示すために特性サイクルの定義から見直す。特性サイクル（の 0 切断での引き戻し）は FlEt の言葉を用いると

$$\mathrm{FlEt}_X(\mathrm{Spec}(k)) \rightarrow H_0^{\mathrm{BM}}(X/\mathrm{Spec}(k)) \cong \mathrm{CH}_0(X)$$

という射ととらえることができる。まず第 1 ステップとしてはこのアーベル群の射を構成するのではなく、もっと強く前層の射

$$\widetilde{\mathrm{CC}}: \mathrm{FlEt}_X \rightarrow H_0^{\mathrm{BM}}(X_-/-)$$

という射を構成することを考えることである。ここで $H_0^{\mathrm{BM}}(X_-/-)$ は T に対して $H_0^{\mathrm{BM}}(X_T/T)$ を対応させる前層である。同様に H^{BM} を §4 の定理で構成したので、無限関手 $H^{\mathrm{BM}}(X_-/-)$ も考えることができ、これを $\mathrm{Sch}_{/k}$ 上の無限前層と思ったものである。この無限前層は後で用いる。

さて、この前層の射 $\widetilde{\mathrm{CC}}$ を構成するため $\mathrm{FlEt}_{X,0} \subset \mathrm{FlEt}_X$ という部分層を考える。これは台が次元 0 となる構成可能層から生成される部分群である。台の次元が 0 なら特性サイクルはただの

階数の情報なので $\widetilde{\text{CC}}_0 := \widetilde{\text{CC}}|_{\text{Fl}\acute{\text{E}}\text{t}_{X,0}}$ は跡射からすぐに構成できる。跡射の構成も自明ではなくこれは [A2] で構成したが、詳しくは立ち入らない。つまり $\widetilde{\text{CC}}_0$ を延長するというのが問題となる。実は延長が一意的にできるという次の定理を示すことができる：

定理 (延長定理). — 制限射 $\text{Map}(\text{Fl}\acute{\text{E}}\text{t}_X, H^{\text{BM}}(X_-/-)) \rightarrow \text{Map}(\text{Fl}\acute{\text{E}}\text{t}_{X,0}, H^{\text{BM}}(X_-/-))$ は空間のなす無限圏の中で同値である。

この定理のためには普通の前層 $H_0^{\text{BM}}(X_-/-)$ では不十分で無限前層 $H^{\text{BM}}(X_-/-)$ にする必要がある。これは証明の中で cdh 降下を用いなくてはならないことがある。 $H_0^{\text{BM}}(X_-/-)$ は cdh 層ではない。そのため高次ホモトピーまで考慮した無限層 $H^{\text{BM}}(X_-/-)$ を考える必要が出てくる。一つのカギはこの無限前層は cdh 層になっていることである。延長定理の証明は込み入っているので残念ながらこれ以上述べられない。

実はこの延長定理はより一般的な定理から導かれており、例えば $H^{\text{BM}}(X_-/-)$ を $H^{\text{BM}}(Y_-/-)$ に変えても成立する。この事実を認めれば押し出し公式を示すことは容易である。押し出し公式は次の可換が図式であることを示せばよい：

$$\begin{array}{ccc} \text{Fl}\acute{\text{E}}\text{t}_X & \longrightarrow & H^{\text{BM}}(X_-/-) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Fl}\acute{\text{E}}\text{t}_Y & \longrightarrow & H^{\text{BM}}(Y_-/-). \end{array}$$

延長定理によれば、これを示すためには $\text{Fl}\acute{\text{E}}\text{t}_{X,0}$ に制限して示せばよいことが分かる。これは跡射の性質から簡単に導かれ、証明が完結するわけである。このように、無限化したコホモロジー理論を用いることによって降下でコホモロジーの元を構成することができ、押し出し公式の証明を与える。無限圏の枠組みは非常に柔軟であり、これからますます興味深い応用が出てくるのではないかと期待している。

REFERENCES

- [A1] Abe, T.: *Enhanced bivariant homology theory attached to six functor formalism*, プレプリントは arxiv.org/abs/2008.01948 で入手可。
- [A2] Abe, T.: *Trace formalism for motivic cohomology*, プレプリントは arxiv.org/abs/2108.07459 で入手可..
- [A3] Abe, T.: *Ramification theory from homotopical point of view, I, II*, プレプリントはご要望があればお送りします。
- [Ay] Ayoub, J.: *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (I), (II)*, Astérisque **314**, **315**, (2007).
- [CD] Cisinski, D.-C., Déglise, F.: *Triangulated Categories of Mixed Motives*, Springer Monographs in Mathematics (2019).
- [FM] Fulton, W., MacPherson, R.: *Categorical framework for the study of singular spaces*, Mem. AMS **243**, AMS (1981).
- [GR] Gaitsgory, D., Rozenblyum, N.: *A study in derived algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs **221**, AMS (2017).
- [G] Groth, M.: *A short course on ∞ -categories*, arxiv.org/abs/1007.2925 で入手可。
- [L] Lurie, J.: *Higher topos theory*, Ann. Math. Studies **170**, (2009).
- [S] Saito, T.: *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*, Invent. Math. **207**, p.597-695 (2017).

阿部知行：

東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構 (WPI)

277-8583 千葉県柏市柏の葉 5-1-5

e-mail: tomoyuki.abe@ipmu.jp