正規化されたヒルベルト函数について

大関　一秀（山口大学　創成科学研究科）

Abstract. 与えられた局所環 $(R,\mathfrak{m})$ 内の $\mathfrak{m}$-準素イデアルのヒルベルト函数の挙動には，それを含む局所環 R や，Rees 代数および随伴次数環の構造といったイデアルの主要な情報が内包されていると考えられている．本報告では，解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環内に於ける $\mathfrak{m}$-準素イデアルの正規化されたヒルベルト函数について考察を行う．正規化されたヒルベルト函数は，1990 年頃に伊藤らによって，各ヒルベルト係数の値と随伴次数環の構造との関係解明を軸に，盛んにその挙動研究が行われた．これに対して，近年，Corso-Polini-Rossi [1]，Phuong [10] によって，Sally 加群の理論が正規化された第 1 ヒルベルト係数を制御する際に有効であることが示唆された．

本報告では，Sally 加群の構造とその役割を紹介するとともに，それらを用いて，正規化された第 1 および第 2 ヒルベルト係数による $\mathfrak{m}$-準素イデアルの構造の新たな分類を紹介する．

1. 導入

本報告の内容は，S. K. Masuti 氏と M. E. Rossi 氏との共同研究 [8] に基づくものである．

本報告を通して特に断らない限り，$(R,\mathfrak{m})$ を解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環とする．ただし，局所環 R が解析的不分岐であるとは，R の $\mathfrak{m}$-進完備化が被約であることである．局所環 R の Krull 次元を $d = \dim R > 0$ とし，簡単のため，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ は無限体であると仮定する．I を R の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとし，$J = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ を R の巴系イデアルであって，I の節減をなすものとする．(ただし，J が I の節減であるとは，ある整数 $r \geq 0$ に対して，等式 $I^{r+1} = JI^r$ が成り立つことをいう．この節減の概念は D. Rees によって導入されたものであり，後に登場する Rees 代数や随伴次数環の構造を解析する際に重要な役割を果たすものである）

本報告では，イデアルの整閉包の概念を積極的に用いる．まずは，その定義を紹介する．$x \in R$ が I 上整であるとは，ある整数 $n \geq 1$ と $a_i \in I^i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して，等式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ が成り立つことをいう．以下，

$$\overline{I} = \{x \in R \mid x \text{ は } I \text{ 上整}\}$$

と表し，イデアル I の整閉包と呼ぶ．R が解析的不分岐であるという仮定の下では，ある整数 $r \geq 0$ が存在して，任意の整数 $n \geq r$ に対して，等式 $\overline{I^{n+1}} = J\overline{I^n}$ が成り立つ，すなわち，J が I の正規化されたフィルトレーション $\{\overline{I^n}\}$ に対して節減となっていることが D. Rees によって証明されている．

与えられた $\mathfrak{m}$-準素イデアル I の構造を分類する際に，Rees 代数や随伴次数環の構造が鍵となる．以下，R 上の不定元 t に対して，

$$\mathcal{R}(I) = R[It] = \sum_{n \geq 0} I^n t^n \subseteq R[t], \quad \mathcal{R}'(I) = R[It, t^{-1}] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I^n t^n \subseteq R[t, t^{-1}]$$

と定め，それぞれ，イデアル I の Rees 代数，拡大 Rees 代数という．さらに，

$$G(I) = \mathcal{R}'(I)/t^{-1}\mathcal{R}'(I) \cong \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$$

と定め，イデアル I の随伴次数環という．

Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の $R[t]$ 内における整閉包を $\overline{\mathcal{R}}(I) = \overline{\mathcal{R}(I)}^{R[t]}$ と表し，拡大 Rees 代数 $\mathcal{R}'(I)$ の $R[t, t^{-1}]$ 内における整閉包を $\overline{\mathcal{R}'}(I) = \overline{\mathcal{R}'(I)}^{R[t,t^{-1}]}$ と表す．すると，イデアルの整閉包を用いて，それぞれ，

$$\overline{\mathcal{R}}(I) = \sum_{n \geq 0} \overline{I^n} t^n, \quad \overline{\mathcal{R}'}(I) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{I^n} t^n$$

と表すことができる．つまり，イデアルの整閉包とは Rees 代数の整拡大に対応する概念であるといえる．さらに，

$$\overline{G}(I) = \overline{\mathcal{R}'}(I)/t^{-1}\overline{\mathcal{R}'}(I) \cong \bigoplus_{n \geq 0} \overline{I^n}/\overline{I^{n+1}}$$

と定める．

これら Rees 代数や随伴次数環といった，イデアルに随伴する次数環の構造を決定する際に，ヒルベルト函数の理論が有効であると考えられている．次に，そのヒルベルト函数の定義を紹介する．

イデアル I は $\mathfrak{m}$-準素であることから，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，剰余環 R/I^{n+1} にアルティン環の構造が入る．従って，R-加群としての組成列の意味での長さ $\ell_R(R/I^{n+1})$ が定まり，これを n についての函数とみたものを I のヒルベルト函数という．

さらに，ある $\{\mathrm{e}_i(I) \in \mathbb{Z}\}_{0 \leq i \leq d}$ が存在して，十分大きな整数 $n \gg 0$ に対して，等式

$$\ell_R(R/I^{n+1}) = \mathrm{e}_0(I)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_1(I)\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d \mathrm{e}_d(I)$$

が成り立つことがよく知られている．この d 次の多項式をイデアル I のヒルベルト多項式と呼び，各係数 $\mathrm{e}_i(I)$ をイデアル I の第 i ヒルベルト係数と呼ぶ．

特に，先頭項係数の $\mathrm{e}_0(I)$ は，イデアル I の重複度と呼ばれ，局所環のヒルベルト函数の研究はこの重複度研究を軸に発展をしてきたといわれている．イデアル I の節減 J に対して，等式 $\mathrm{e}_0(I) = \mathrm{e}_0(J)$ が成り立ち，さらに，R がコーエン・マコーレイ局所環ならば，J はその巴系イデアルであることから，等式 $\mathrm{e}_0(I) = \ell_R(R/J)$ が成り立つ．つまり，コーエン・マコーレイ局所環内において，$\mathfrak{m}$-準素イデアル I の重複度 $\mathrm{e}_0(I)$ は自明であるといえる．

次に，正規化されたヒルベルト函数（正規ヒルベルト函数）について定義を述べる．イデアル I に対して，$\ell_R(R/\overline{I^{n+1}})$ を n の函数とみたものを，I の正規化されたヒルベル

ト函数（正規ヒルベルト函数）という．R が解析的不分岐であるという仮定の下では，ある整数 $\{\overline{\mathrm{e}}_i(I) \in \mathbb{Z}\}_{0\le i\le d}$ が存在し，十分大きい整数 $n \gg 0$ に対して，等式

$$\ell_R(R/\overline{I^{n+1}}) = \overline{\mathrm{e}}_0(I)\binom{n+d}{d} - \overline{\mathrm{e}}_1(I)\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d\overline{\mathrm{e}}_d(I)$$

が成り立つ．この d 次の多項式をイデアル I の正規化されたヒルベルト多項式（正規ヒルベルト多項式）と呼び，各係数 $\overline{\mathrm{e}}_i(I)$ を正規化されたヒルベルト係数（正規ヒルベルト係数）という．尚，等式 $\overline{\mathrm{e}}_0(I) = \mathrm{e}_0(I)$ が成り立つことから，正規化されたヒルベルト函数においても，その重複度 $\overline{\mathrm{e}}_0(I)$ は自明であるといえる．

本報告の目標は，正規化された第 1 ヒルベルト係数 $\overline{\mathrm{e}}_1(I)$ および第 2 ヒルベルト係数 $\overline{\mathrm{e}}_2(I)$ に注目し，Rees 代数や随伴次数環の構造の分類を行うものである．

ここで，本研究の先行結果を紹介する．伊藤 [6] によって，正規化された第 1 ヒルベルト係数 $\overline{\mathrm{e}}_1(I)$ に関して，不等式

$$\overline{\mathrm{e}}_1(I) \geq \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$$

が与えられた．さらに，次の 2 条件が同値となる．

(1) $\overline{\mathrm{e}}_1(I) = \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$ が成り立つ．

(2) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して，$\overline{I^{n+1}} = J\overline{I^n}$ が成り立つ.

この同値条件が成り立つとき，$d \geq 2$ ならば $\overline{\mathrm{e}}_2(I) = \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$ であり，整数 $3 \leq i \leq d$ に対して $\overline{\mathrm{e}}_i(I) = 0$ が成り立つ．さらに，$\overline{G}(I)$ はコーエン・マコーレイ環であり，$d \geq 3$ ならば $\overline{\mathcal{R}}(I)$ もコーエン・マコーレイ環となる．このことから，等式 $\overline{\mathrm{e}}_1(I) = \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$ を満たすようなイデアル I は良い性質を持つものであるといえる．尚，等式 $\ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I}) = \mathrm{e}_0(I) + (d-1)\ell_R(R/\overline{I}) - \ell_R(\overline{I}/\overline{I^2})$ が成り立つことから，上述の不等式の右辺は節減 J のとり方によらないものであることが分かる．

伊藤 [6] は，第 2 ヒルベルト係数 $\overline{\mathrm{e}}_2(I)$ についても次のような考察を行っている．$d \geq 2$ のとき不等式

$$\overline{\mathrm{e}}_2(I) \geq \overline{\mathrm{e}}_1(I) - \overline{\mathrm{e}}_0(I) + \ell_R(R/\overline{I})$$

が成り立ち，次の 2 条件が同値となる．

(1) $\overline{\mathrm{e}}_2(I) = \overline{\mathrm{e}}_1(I) - \overline{\mathrm{e}}_0(I) + \ell_R(R/\overline{I})$ が成り立つ．

(2) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して，$\overline{I^{n+1}} = J\overline{I^n}$ が成り立つ．

この同値条件が成り立つとき，$\overline{\mathrm{e}}_1(I) = \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$ であり，整数 $3 \leq i \leq d$ に対して $\overline{\mathrm{e}}_i(I) = 0$ が成り立つ．さらに，$\overline{G}(I)$ はコーエン·マコーレイ環であり，$d \geq 3$ ならば $\overline{\mathcal{R}}(I)$ もコーエン·マコーレイ環となる．よって，等式 $\overline{\mathrm{e}}_2(I) = \overline{\mathrm{e}}_1(I) - \overline{\mathrm{e}}_0(I) + \ell_R(R/\overline{I})$ を満たすイデアル I もまた良い性質も持つものであるといえる．

さらに，[6] では，正規化された第 3 ヒルベルト係数 $\overline{\mathrm{e}}_3(I)$ が非負であることを証明した上で，$\overline{\mathrm{e}}_3(I)$ の消滅性による随伴次数環 $\overline{G}(I)$ のコーエン・マコーレイ性の予想を与えている.（これは伊藤予想と呼ばれ，現在も未解決である）

上記の伊藤による一連の結果を考察するに，正規化された第 1 および第 2 ヒルベルト係数には，ヒルベルト函数全体の情報や Rees 代数・随伴次数環の構造が内包されていて，特に，他の不変量との相対的な関係が重要であると考えられる．

2. Sally 加群

近年，ヒルベルト函数の挙動研究は，Sally 加群の理論を導入することで急速な発展を見せている．本報告においても Sally 加群の理論を積極的に用いていきたい．

本節の目的は，Sally 加群の定義とその役割について紹介するものである．その準備として I-admissible filtration の概念を紹介する．

本節では，$(R, \mathfrak{m})$ は（解析的不分岐とは限らない）コーエン・マコーレイ局所環という仮定の下で十分である．局所環 R のイデアルの列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が I-admissible filtration であるとは，次の 3 条件を満たすことである．

(1) $R = I_0$ であり，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$I_n \supseteq I_{n+1}$ が成り立つ．
(2) 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して，$I_m \cdot I_n \subseteq I_{m+n}$ が成り立つ．
(3) ある整数 $k \geq 0$ が存在し，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$I^n \subseteq I_n \subseteq I^{n-k}$ が成り立つ．

例えば，I の冪による $\{I^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ や，R が解析的不分岐であるとき，$\{\overline{I^n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は I-admissible filtration をなす．本報告では，この I-admissible filtration という枠組みにおいて，Sally 加群の理論を紹介したい．

以下，$\mathcal{I} = \{I_n\} = \{I_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を I-admissible filtration とする．これに対して，

$$\mathcal{R}(\mathcal{I}) = \sum_{n\geq 0} I_n \subseteq R[t], \quad \mathcal{R}'(\mathcal{I}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n t^n \subseteq R[t, t^{-1}]$$

と定め，それぞれ，$\mathcal{I}$ の Rees 代数，拡大 Rees 代数という．さらに，

$$G(\mathcal{I}) = \mathcal{R}'(\mathcal{I})/t^{-1}\mathcal{R}'(\mathcal{I}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} I_n/I_{n+1}$$

と定め，$\mathcal{I}$ の随伴次数環という．尚，$\mathcal{I}$ が I-admissible であることと，$\mathcal{R}(\mathcal{I})$ が $\mathcal{R}(I)$ 上有限生成であることが同値である．

整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$\ell_R(R/I_{n+1})$ を $\mathcal{I}$ のヒルベルト函数と呼ぶ．ある整数 $\{\mathrm{e}_i(\mathcal{I})\}_{0\leq i\leq d}$ が存在し，十分大きい整数 $n \gg 0$ に対して，等式

$$\ell_R(R/I_{n+1}) = \mathrm{e}_0(\mathcal{I})\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_1(\mathcal{I})\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d \mathrm{e}_d(\mathcal{I})$$

が成り立つ (c.f.[7])．この d 次の多項式を $\mathcal{I}$ のヒルベルト多項式と呼び，各係数 $\mathrm{e}_i(\mathcal{I})$ を $\mathcal{I}$ のヒルベルト係数という．(先頭項係数 $\mathrm{e}_0(\mathcal{I})$ は $\mathcal{I}$ の重複度と呼ばれ，等式 $\mathrm{e}_0(\mathcal{I}) = \mathrm{e}_0(I) = \ell_R(R/J)$ が成り立つ）

ここで，Sally 加群の定義を紹介する．W. V. Vasconcelos [11] に従って，

$$S = S_J(\mathcal{I}) = \frac{\mathcal{R}(\mathcal{I})_{\geq 1} t^{-1}}{I_1 \mathcal{R}(J)} \cong \bigoplus_{n\geq 1} I_{n+1}/J^n I_1$$

と定め，$\mathcal{I}$ の J に関する Sally 加群という．Sally 加群について，次の基本性質が従う．

命題 1 ([11])．次が正しい．
(1) S は有限生成次数付き $\mathcal{R}(J)$-加群である．
(2) $\mathrm{Ass}_{\mathcal{R}(J)} S \subseteq \{\mathfrak{m}\mathcal{R}(J)\}$ である．従って，$S \neq (0)$ ならば，$\dim_{\mathcal{R}(J)} S = d$ である．ただし，$\mathrm{Ass}_{\mathcal{R}(J)} S$ は，$\mathcal{R}(J)$-加群 S の素因子全体の集合とする．

(3) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\ell_R(R/I_{n+1}) = \mathrm{e}_0(\mathcal{I})\binom{n+d}{d} - \{\mathrm{e}_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1)\}\binom{n+d-1}{d-1} - \ell_R(S_n)$$

が成り立つ．

(4) $\mathrm{e}_1(\mathcal{I}) = \mathrm{e}_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_{\mathcal{R}(J)_\mathfrak{p}}(S_\mathfrak{p})$ が成り立つ．ただし，$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(J)$ とする．

(5) $S \neq (0)$ とする．$\mathcal{R}(J)$-加群 S がコーエン・マコーレイではないとき，等式 $\operatorname{depth} G(\mathcal{I}) = \operatorname{depth}_{\mathcal{R}(J)} S - 1$ が成り立つ．さらに，S がコーエン・マコーレイ $\mathcal{R}(J)$-加群であることと，$\operatorname{depth} G(\mathcal{I}) \geq d-1$ が成り立つことが必要十分である．

このように，Sally 加群とは I-admissible filtration $\mathcal{I}$ と I の節減 J によって構成された次数付き加群のことである．主な役割として，Sally 加群 S のヒルベルト函数が $\mathcal{I}$ のヒルベルト函数の補正項となることや，随伴次数環 $G(\mathcal{I})$ の深さ評価が可能であるなど，$\mathcal{I}$ の主要な情報を含むものであるといえる．特に，命題 1 (3) の等式

$$\mathrm{e}_1(\mathcal{I}) = \mathrm{e}_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_{\mathcal{R}(J)_\mathfrak{p}}(S_\mathfrak{p})$$

を見るに，第 1 ヒルベルト係数 $\mathrm{e}_1(\mathcal{I})$ が相対的に小さい値をとるようなイデアルの分類に有効となる．実際，Corso-Polini-Rossi [1], Phuong [10] によって，等式 $\overline{\mathrm{e}}_1(I) = \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + 1$ を満たすような Sally 加群 $S_J(\{\overline{I^n}\})$ の構造解析が行われた．しかしながら，前述の伊藤の不等式およびその先の理論に対しては，この Sally 加群 S の理論を直接利用することは難しく，もう一工夫する必要がある．

Sally 加群が登場してから間もなく，M. V. Pinto によって次のような次数付き加群が導入された．

定義 2 ([12])**.** 整数 $\ell \geq 1$ に対して，次数付き $\mathcal{R}(J)$-加群を

$$C^{(\ell)} = C_J^{(\ell)}(\mathcal{I}) = \frac{\mathcal{R}(\mathcal{I})_{\geq \ell} t^{-1}}{I_\ell \mathcal{R}(J) t^{\ell-1}} \cong \bigoplus_{n \geq \ell} I_{n+1}/J^{n-\ell+1}I_\ell$$

と定め，$C^{(\ell)}$ の次数付き $\mathcal{R}(J)$-部分加群を

$$L^{(\ell)} = L_J^{(\ell)}(\mathcal{I}) = [C^{(\ell)}]_\ell \cdot \mathcal{R}(J)$$

と定める．

このとき，各整数 $\ell \geq 1$ に対して，$C^{(\ell)}$ も $L^{(\ell)}$ も有限生成な次数付き $\mathcal{R}(J)$-加群をなし，特に，$C^{(1)} = S$ となる．さらに，整数 $\ell \geq 1$ に対して，次数付き $\mathcal{R}(J)$-加群としての完全列

$$0 \to L^{(\ell)} \to C^{(\ell)} \to C^{(\ell+1)} \to 0$$

が成り立つ．すなわち，M. P. Pinto が導入した $C^{(\ell)}$ や $L^{(\ell)}$ は，Sally 加群 S の構造を分解するような次数付き加群であるといえる．

一方で，$\ell \geq 2$ のとき，$C^{(\ell)}$ の構造は複雑であり，命題 1 で紹介した Sally 加群 S のような良い性質を持つか否かは一般には不明である．これに対して，私たちの最近の研究で，$C^{(2)}$ については，ある仮定の下では比較的扱い易く，本研究に対しても有効であることが判明した．

以下，$C = C_J(\mathcal{I}) = C^{(2)}$，$L = L_J(\mathcal{I}) = L^{(1)}$ と定め，次数付き $\mathcal{R}(J)$-加群の完全列

$$0 \to L \to S \to C \to 0$$

に注目する．

命題 3 ([8, 9])**.** $J \cap I_2 = JI_1$ とする．このとき，次が正しい．

(1) $\operatorname{Ass}_{\mathcal{R}(J)} C \subseteq \{\mathfrak{m}\mathcal{R}(J)\}$ である．従って，$C \neq (0)$ ならば，$\dim_{\mathcal{R}(J)} C = d$ となる．ただし，$\operatorname{Ass}_{\mathcal{R}(J)} C$ は，$\mathcal{R}(J)$-加群 C の素因子全体の集合とする．

(2) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\begin{aligned}\ell_R(R/I_{n+1}) &= \mathrm{e}_0(\mathcal{I})\binom{n+d}{d} - \{\mathrm{e}_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_R(I_2/JI_1)\}\binom{n+d-1}{d-1} \\ &+ \ell_R(I_2/JI_1)\binom{n+d-2}{d-2} - \ell_R(C_n)\end{aligned}$$

が成り立つ．

(3) $\mathrm{e}_1(\mathcal{I}) = \mathrm{e}_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_R(I_2/JI_1) + \ell_{\mathcal{R}(J)_\mathfrak{p}}(C_\mathfrak{p})$ が成り立つ．ただし，$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(J)$ とする．

(4) $C \neq (0)$ とする．$\mathcal{R}(J)$-加群 C がコーエン・マコーレイではないとき，$\operatorname{depth} G(\mathcal{I}) = \operatorname{depth}_{\mathcal{R}(J)} C - 1$ が成り立つ．さらに，C がコーエン・マコーレイ $\mathcal{R}(J)$-加群であることと，$\operatorname{depth} G(\mathcal{I}) \geq d-1$ が成り立つことが必要十分である．

このように，$J \cap I_2 = JI_1$ という仮定の下では，次数付き加群 C も，S と同様に，ヒルベルト函数の理論，特に，第 1 ヒルベルト係数に対して有効な役割を果たすものであるといえる．

尚，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，等式 $J^n \cap \overline{I^{n+1}} = J^n\overline{I}$ が成り立つことが，Huneke [5] と伊藤 [6] によって証明されていることから，イデアル I の正規化されたフィルトレーション $\{\overline{I^n}\}$ を考える上では，$J \cap I_2 = JI_1$ という仮定は自然なものであるといえる．

この命題 3 の系として，次の結果が得られる．伊藤 [6] の正規化された第 1 ヒルベルト係数 $\overline{\mathrm{e}}_1(I)$ に関する結果（第 1 章にて紹介）もこれに従う．

系 4 ([2, 3, 6])**.** $(R, \mathfrak{m})$ をコーエン・マコーレイ局所環とし，$d = \dim R > 0$ とする．$\mathcal{I} = \{I_n\}$ を *I-admissible filtration* とし $J \cap I_2 = JI_1$ を仮定する．このとき，不等式

$$\mathrm{e}_1(\mathcal{I}) \geq \mathrm{e}_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_R(I_2/JI_1)$$

が成り立ち，さらに，次の 2 条件が同値となる．

(1) $\mathrm{e}_1(\mathcal{I}) = \mathrm{e}_0(\mathcal{I}) - \ell_R(R/I_1) + \ell_R(I_2/JI_1)$ が成り立つ．

(2) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して，$I_{n+1} = JI_n$ が成り立つ．

このとき，$d \geq 2$ ならば $\mathrm{e}_2(\mathcal{I}) = \ell_R(I_2/JI_1)$ であり，整数 $3 \leq i \leq d$ に対して $\mathrm{e}_i(\mathcal{I}) = 0$ が成り立つ．さらに，随伴次数環 $G(\mathcal{I})$ はコーエン・マコーレイ環であり，$d \geq 3$ ならば *Rees* 代数 $\mathcal{R}(I)$ もコーエン・マコーレイ環となる．

さらに，次の命題も本報告の主結果において重要である．

命題 5 ([8])**.** $1 \leq n \leq d$ とし，$J \cap I_2 = JI_1$ とする．このとき，$\mathcal{R}(\mathcal{I})$ が *Serre* の条件 (S_n) を満たすならば，C も $\mathcal{R}(J)/\operatorname{Ann}_{\mathcal{R}(J)} C$-加群として *Serre* の条件 (S_n) を満たす．

3. 主結果

これまで述べてきた通り，不等式 $\overline{\mathrm{e}}_1(I) \geq \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$ に対して，等式 $\overline{\mathrm{e}}_1(I) = \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$ を満たすような $\mathfrak{m}$-準素イデアルは良い性質を持つことが分かっている．これに対して，等式

$$\overline{\mathrm{e}}_1(I) = \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I}) + 1$$

を満たすような $\mathfrak{m}$-準素イデアル I の構造の解明が自然な問いとして与えられる．

前節にて紹介した次数付き $\mathcal{R}(J)$-加群 C の基本性質を用いることで，次の定理を与えた．これは本報告の主結果である．ただし，$\overline{C} = C_J(\{\overline{I^n}\})$ とし，$B = \mathcal{R}(J)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(J) \cong (R/\mathfrak{m})[X_1, X_2, \ldots, X_d]$ は剰余体 $R/\mathfrak{m}$ 上の d 変数多項式環とする．

定理 6 ([8])**.** $(R, \mathfrak{m})$ は解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環とし，$d = \dim R > 0$ とする．このとき，次の 3 条件が同値である．

(1) $\overline{\mathrm{e}}_1(I) = \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I}) + 1$ が成り立つ．
(2) ある整数 $m \geq 2$ に対して，次数付き $\mathcal{R}(J)$-加群としての同型 $\overline{C} \cong B(-m)$ が成り立つ．
(3) ある整数 $m \geq 2$ に対して，$\ell_R(\overline{I^{m+1}}/J\overline{I^m}) = 1$ であり，整数 $n \geq 3$（$n \neq m+1$）に対して，$\overline{I^{n+1}} = J\overline{I^n}$ が成り立つ．

このとき，次の条件が従う．

(i) $\overline{r}_J(I) := \min\{r \in \mathbb{Z} \mid$ 任意の $n \geq r$ に対して，$\overline{I^{n+1}} = J\overline{I^n}\} = m + 1$,
(ii) $d \geq 2$ のとき，$\overline{\mathrm{e}}_2(I) = \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I}) + m$ であり，$3 \leq i \leq d$ に対して，$\overline{\mathrm{e}}_i(I) = \binom{m-1}{2}$,
(iii) $\operatorname{depth} \overline{G}(I) \geq d - 1$,
(iv) $\overline{G}(I)$ がコーエン・マコーレイ環であることと，$\overline{I^3} \nsubseteq J$ が必要十分である．

ここで，主定理（定理 6）の根幹となる (1) $\Rightarrow$ (2) について証明の概要を紹介する．

定理 6 (1) $\Rightarrow$ (2) *の証明の概要*. 等式 $\overline{\mathrm{e}}_1(I) = \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I}) + 1$ が成り立つことから，命題 3 (3) より，$\ell_{\mathcal{R}(J)_\mathfrak{p}}(\overline{C}_\mathfrak{p}) = 1$ となる．よって，$\overline{C}$ は多項式環 B 上の階数 1 の捻じれのない加群となる．さらに，$\overline{\mathcal{R}}(I)$ は (S_2)-環である (c.f.[10]) ことから，命題 5 より，$\overline{C}$ は B-加群として Serre の条件 (S_2) を満たす．よって，$\overline{C}$ は多項式環 B 上の階数 1 の自由加群となる．以上より，次数付き $\mathcal{R}(J)$-加群としての同型 $\overline{C} \cong B(-m)$ がある整数 $m \geq 2$ に対して成り立つ． □

主定理（定理 6）を正規イデアルの場合に適用することで，次の系が得られる．ただし，I が正規イデアルであるとは，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，等式 $\overline{I^n} = I^n$ が成り立つことである．

系 7 ([8])**.** $(R, \mathfrak{m})$ は解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環とし，$d = \dim R > 0$ とする．I を正規 $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする．このとき，次の 3 条件が同値である．

(1) $\mathrm{e}_1(I) = \mathrm{e}_0(I) - \ell_R(R/I) + \ell_R(I^2/JI) + 1$ が成り立つ．
(2) 次数付き $\mathcal{R}(J)$-加群としての同型 $C_J(\{I^n\}) \cong B(-2)$ が成り立つ．
(3) $\ell_R(I^3/JI^2) = 1$ であり，$I^4 = JI^3$ が成り立つ．

このとき，次の条件が従う．

(*i*) $d \geq 2$ のとき，$\mathrm{e}_2(I) = \ell_R(I^2/JI) + 2$ であり，$d \geq 3$ のとき，$\mathrm{e}_3(I) = 1$, そして $4 \leq i \leq d$ に対して，$\mathrm{e}_i(I) = 0$ が成り立つ．

(*ii*) $\operatorname{depth} G(I) \geq d-1$ が成り立つ．

(*iii*) $G(I)$ がコーエン・マコーレイ環であることと，$I^3 \subsetneq J$ が必要十分である．

定理 6 および系 7 の条件を満たすような $\mathfrak{m}$-準素イデアルの具体例を紹介する．これは，Huckaba-Huneke によって与えられたものである．

例 8 ([4])**.** k は標数が 3 ではない体とする．$R = k[[X,Y,Z]]$ を体 k 上の 3 変数冪級数環とし，その極大イデアルを $\mathfrak{m} = (X,Y,Z)$ とする．このとき，$I = (X^4, X(Y^3+Z^3), Y(Y^3+Z^3), Z(Y^3+Z^3)) + \mathfrak{m}^5$ とすると，I は R の正規 $\mathfrak{m}$-準素イデアルをなし，次の条件が従う．

(1) $\ell_R(I^3/JI^2) = 1$ であり，$I^4 = JI^3$ が成り立つ．

(2) 次数付き $\mathcal{R}(J)$-加群としての同型 $C_J(\{I^n\}) \cong B(-2)$ が成り立つ．

(3) $\mathrm{e}_0(I) = 76$, $\mathrm{e}_1(I) = 48$, $\mathrm{e}_2(I) = 4$, $\mathrm{e}_3(I) = 1$ が成り立つ．

(4) $\operatorname{depth} G(I) = 2 = (\dim R - 1)$ が成り立つ．

この例より，定理 6 において $\overline{G}(I)$ がコーエン・マコーレイとは限らないことが分かる．

本報告の終わりに，主定理の応用を幾つか紹介する．

本報告の主定理を用いることで，Coro-Polini-Rossi による次の結果が系として得られる．

系 9 ([1])**.** $(R, \mathfrak{m})$ は解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環とし，$d = \dim R > 0$ とする．このとき，等式 $\overline{\mathrm{e}}_1(I) = \overline{\mathrm{e}}_0(I) - \ell_R(R/\overline{I}) + 1$ が成り立つならば，$\operatorname{depth} \overline{G}(I) \geq d-1$ である．

最後に，第 2 ヒルベルト係数に関する応用を紹介したい．

$d \geq 2$ のとき，第 2 ヒルベルト係数 $\overline{\mathrm{e}}_2(I)$ については，[6] より，不等式

$$\overline{\mathrm{e}}_2(I) \geq \overline{\mathrm{e}}_1(I) - \overline{\mathrm{e}}_0(I) + \ell_R(R/\overline{I}) \geq \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$$

が従う．さらに，等式 $\overline{\mathrm{e}}_2(I) = \overline{\mathrm{e}}_1(I) - \overline{\mathrm{e}}_0(I) + \ell_R(R/\overline{I})$ が成り立つことと，等式 $\overline{\mathrm{e}}_1(I) - \overline{\mathrm{e}}_0(I) + \ell_R(R/\overline{I}) = \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$ が成り立つことが同値となり，このとき，$\overline{r}_J(I) \leq 2$ であって，随伴次数環 $\overline{G}(I)$ はコーエン・マコーレイ環となる．すなわち，$\overline{\mathrm{e}}_2(I)$ の下限として $\ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$ が与えられていて，等式 $\overline{\mathrm{e}}_2(I) = \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I})$ を満たすイデアル I は良いものであることがわかる．さらに，その次の境界として，等式 $\overline{\mathrm{e}}_2(I) = \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I}) + 2$ をとり得ることになる．

これに対して，次の系を与える．

系 10 ([8])**.** $(R, \mathfrak{m})$ は解析的不分岐なコーエン・マコーレイ局所環とし，$d = \dim R \geq 2$ とする．このとき，$\overline{\mathrm{e}}_2(I) \leq \ell_R(\overline{I^2}/J\overline{I}) + 2$ ならば，$\operatorname{depth} \overline{G}(I) \geq d-1$ となる．さらに，$\overline{G}(I)$ がコーエン・マコーレイであることと，$\overline{I^3} \subsetneq J$ が必要十分条件となる．

一方で，等式 $\overline{\mathrm{e}}_2(I) = \overline{\mathrm{e}}_1(I) - \overline{\mathrm{e}}_0(I) + \ell_R(R/\overline{I}) + 1$ を満たすようなイデアル I の構造研究が，本研究の共同研究者である Masuti 氏と Rossi 氏に加えて，H. L. Truong 氏との共同研究として開始されていて，部分的な解答が得られている．

References

[1] A. Corso, C. Polini and M. E. Rossi, *Bounds on the normal Hilbert coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), 1919–1930.

[2] J. Elias and G. Valla, *Rigid Hilbert functions*, J. Pure and Appl. Algebra **71** (1991), 19–41.

[3] A. Guerrieri and M. E. Rossi, *Hilbert coefficients of Hilbert filtrations*, J. Algebra **199** (1998), 40–61.

[4] S. Huckaba and C. Huneke, *Normal ideals in regular rings*, J. Reine Angew. Math. **510** (1999), 63–82.

[5] C. Huneke, *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J. **34** (1987), 293–318. J. Algebra **117** (1988), 390–401.

[6] S. Itoh, *Coefficients of normal Hilbert polynomials*, J. Algebra **150** (1992), 101–117.

[7] T. Marley, *Hilbert functions of ideals in Cohen-Macaulay rings*, Ph. D. Thesis, Purdue University, (1989).

[8] S. K. Masuti, K. Ozeki, M. E. Rossi, *A filtration of the Sally module and the first normal Hilbert coefficient* , J. Algebra, to appear.

[9] K. Ozeki and M. E. Rossi, *The structure of the Sally module of integrally closed ideals*, Nagoya Math. J. **227** (2017), 49–76.

[10] T. T. Phuong, *Normal Sally modules of rank one*, J. Algebra **493** (2018), 236–250.

[11] W. V. Vasconcelos, *Hilbert Functions, Analytic Spread, and Koszul Homology*, Contemporary Mathematics, Vol **159** (1994), 401–422.

[12] M. Vaz Pinto, *Hilbert functions and Sally modules*, J. Algebra **192** (1997), 504–523.

〒 753-8512 山口県山口市吉田 1677-1 山口大学大学院 創成科学研究科 理学系学域 数理科学分野
Email address: `ozeki@yamaguchi-u.ac.jp`