ヤン・バクスター方程式からホップ亜代数へ

澁川 陽一 (Youichi SHIBUKAWA)*

概要

ヤン・バクスター方程式と関連した例を通じて，ホップ代数の一般化であるホップ亜代数を紹介する．

1 イントロダクション

n を正の整数とし，集合 $\{X_{ij}, (X^{-1})_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ 上の自由 $\mathbb{C}$ 代数を $\mathbb{C}\langle X_{ij}, (X^{-1})_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\rangle$ と表す．この自由代数の元

(1) $X_{ij}X_{kl} - X_{kl}X_{ij} \quad (i, j, k, l = 1, \ldots, n)$
(2) $\sum_{k=1}^{n} X_{ik}(X^{-1})_{kj} - \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$
(3) $\sum_{k=1}^{n} (X^{-1})_{ik}X_{kj} - \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$

で生成された両側イデアル I による商 $\mathbb{C}\langle X_{ij}, (X^{-1})_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\rangle/I$ を A_P と書くことにする (ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ・シンボル)．この A_P は双代数である [1, 第 2 章 §1]．その構造射 (余積 $\Delta : A_P \to A_P \otimes A_P$，余単位射 $\varepsilon : A_P \to \mathbb{C}$) は次のように定義される (2 つの写像が代数準同型になるよう拡張する)．

(1) $\Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}$
(2) $\Delta((X^{-1})_{ij}) = \sum_k (X^{-1})_{kj} \otimes (X^{-1})_{ik}$
(3) $\varepsilon(X_{ij}) = \varepsilon((X^{-1})_{ij}) = \delta_{ij}$

さらに A_P はホップ代数にもなる [1, 第 2 章 §1]．その構造射である対合射 $S : A_P \to A_P$ は，生成元上次のように定義される (反自己同型として拡張する)．

$$S(X_{ij}) = (X^{-1})_{ij}; S((X^{-1})_{ij}) = X_{ij}.$$

A_P から $\mathbb{C}$ への代数準同型全体のなす集合 M と一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ は集合として同型である．実際，次の写像がこの同型を与える．

$$M \ni F \mapsto (F(X_{ij}))_{i,j} \in GL_n(\mathbb{C}).$$

そこで，これが群としての同型になるように M に群構造を与えることができる [1, 第 4 章 例 4.3], [17, Example 9.7]．このとき，余積 Δ を用いると M の積が，余単位射 ε を用いると M の単位元が，対合射 S を用いると逆元が定義できるようになっている．実際，$F, G \in M$ に対し

- 積 $FG = F \otimes G \circ \Delta$;

* 北海道大学理学研究院数学; shibu@math.sci.hokudai.ac.jp

- 単位元 $1_M = \varepsilon$;
- $F(\in M)$ の逆元は $F \circ S$ ($\mathbb{C}$ が可換であるため $F \circ S \in M$ に注意).

実は定義だけではなく，余積が余結合律 $(\Delta \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$ をみたすことから M の積が結合的となるなど，$GL_n(\mathbb{C})$ が群であることと A_P がホップ代数であることがよく対応している．

このホップ代数 A_P は，n 次元ベクトル空間 $V = \oplus_i \mathbb{C} v_i$ のテンソル積 $V \otimes V$ 上の線形写像 $P : V \otimes V \to V \otimes V$ $(P(v \otimes w) = w \otimes v)$ と関係が深い．基底 $\{v_i \otimes v_j\}$ に関する P の行列表示の成分を P_{ij}^{kl} とするとき (すなわち $P(v_k \otimes v_l) = \sum_{i,j} v_i \otimes v_j P_{ij}^{kl}$)，$X_{ij}X_{kl} - X_{kl}X_{ij} = \sum_{a,b} P_{ik}^{ab} X_{bj} X_{al} - \sum_{a,b} P_{ab}^{lj} X_{kb} X_{ia}$ となるので，A_P の定義関係式を与える両側イデアル I の生成元は

$$(1)\ \sum_{a,b} P_{ik}^{ab} X_{bj} X_{al} - \sum_{a,b} P_{ab}^{lj} X_{kb} X_{ia} \quad (i,j,k,l = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

$$(2)\ \sum_{k=1}^{n} X_{ik} (X^{-1})_{kj} - \delta_{ij} \quad (i,j = 1, \ldots, n)$$

$$(3)\ \sum_{k=1}^{n} (X^{-1})_{ik} X_{kj} - \delta_{ij} \quad (i,j = 1, \ldots, n)$$

である．少々強引ではあるが，これをもって「定義関係式を通じて，線形写像 $P : V \otimes V \to V \otimes V$ がホップ代数 A_P を決定している」と見ることにする．

写像 P が量子ヤン・バクスター方程式 [2, 3, 20, 21] (今の場合は，ブレイド関係式と同じ) $(P \otimes 1)(1 \otimes P)(P \otimes 1) = (1 \otimes P)(P \otimes 1)(1 \otimes P)$ の解であることに注目して，「この構成の枠組みを活かして，量子ヤン・バクスター方程式の解からいろいろなホップ代数を構成しよう」と試みるのは自然であろう．実際，[6] では，量子ヤン・バクスター方程式の解から一般線型群 $GL_n(\mathbb{C})$ の q-analog 上の関数環と呼ばれるホップ代数を構成している．

講演では更に飛躍して，「上で説明した構成の枠組みを一般化して，一般化されたヤン・バクスター方程式の解からホップ代数の一般化を構成しよう」と試み，この立場からホップ亜代数について具体例と合わせて紹介した．

この報告では講演内容を抜粋し，双代数の一般化である左双亜代数，およびホップ代数の一般化であるホップ亜代数の定義を与えた上で，ホップ代数 A_P の一般化となるホップ亜代数が構成できることを簡単に紹介する．

2 左双亜代数 A_σ

A と L を積に関する単位元をもつ環とし (環 A の単位元を 1_A，環 L の単位元を 1_L と書く)，$s_L : L \to A$ と $t_L : L^{op} \to A$ を

$$s_L(l) t_L(l') = t_L(l') s_L(l) \quad (\forall l, l' \in L). \tag{2.1}$$

をみたす環準同型とする．ただし，L^{op} は環 L の反環 (反同型環) である．式 (2.1) により，環 A は両側 L 加群となる (この加群を記号 ${}_L A_L$ で表す)．

$$l \cdot a \cdot l' = s_L(l) t_L(l') a \quad (l, l' \in L, a \in A). \tag{2.2}$$

定義 2.1. 両側 L 加群のなすテンソル圏における余モノイド (comonoid) $({}_LA_L, \gamma_L : A \to A \otimes_L A, \pi_L : A \to L)$ が次をみたすとき，$A_L = (A, L, s_L, t_L, \gamma_L, \pi_L)$ を左双亜代数 (left bialgebroid) という [4, 5].

$$\sum_{(a)} a_{(1)} t_L(l) \otimes a_{(2)} = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} s_L(l), \tag{2.3}$$
$$\gamma_L(1_A) = 1_A \otimes 1_A,$$
$$\gamma_L(ab) = \gamma_L(a)\gamma_L(b), \tag{2.4}$$
$$\pi_L(1_A) = 1_L,$$
$$\pi_L(as_L(\pi_L(b))) = \pi_L(ab) = \pi_L(at_l(\pi_L(b))) \quad (\forall l \in L, \forall a, b \in A).$$

ただし式 (2.3) では，Sweedler による sigma notation [18, Section 1.2] と呼ばれる記号法を用いている．

$$\gamma_L(a) = \sum_i a_{1i} \otimes a_{2i} = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \in A \otimes_L A.$$

注意 2.2. 定義 2.1 に現れる余モノイドは，テンソル圏におけるモノイドの双対である (モノイドの定義に現れる構造射 (の矢印) を逆向きにしたもの).

注意 2.3. 式 (2.3) により，式 (2.4) の右辺は well-defined となる (環 L が必ずしも可換であるとは限らないことに注意)．つまり，式 (2.3) の下で，$\sum_{(a),(b)} a_{(1)}b_{(1)} \otimes_L a_{(2)}b_{(2)}$ ($\gamma_L(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}, \gamma_L(b) = \sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)}$) は代表元の取り方に依存せず定まるので，これを $\gamma_L(a)\gamma_L(b)(\in A \otimes_L A)$ と書く．このようなことが左双亜代数の定義には含意されている．

注意 2.4. 左双亜代数は [19] における $\times_L$-bialgebra と同じものである．

以下，$\mathbb{K}$ を体，H を空でない集合，R を $\mathbb{K}$ 代数とし，$M_H(R)$ を集合 H から体 $\mathbb{K}$ への写像全体のなす $\mathbb{K}$ 代数とする．G を集合 H の置換群 $\mathfrak{S}(H)$ の反群の部分群とし，その任意の元 $\alpha \in G$ に対し，$T_\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(L, L)$ を $T_\alpha(f)(\lambda) = f(\lambda\alpha)$ ($\lambda \in H, \alpha \in G$) と定める (ただし $\lambda\alpha := \alpha(\lambda)$)．さらに，有限集合 X から群 G への写像 $\deg : X \to G$ が存在することを仮定する．

L_{ab}，$(L^{-1})_{ab}$ $(a, b \in X)$ を不定元として，自由代数 $\mathbb{K}\langle (M_H(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_H(R)^{op}) \coprod \{L_{ab} : a, b \in X\} \coprod \{(L^{-1})_{ab} : a, b \in X\}\rangle$ を考える．$\sigma^{ab}_{cd} \in M_H(R)$ $(a, b, c, d \in X)$ に対し，以下の (1)–(5) の元で生成される上記自由代数の両側イデアルを I_σ とする．

(1) $\xi + \xi' - (\xi + \xi')$, $c\xi - (c\xi)$, $\xi\xi' - (\xi\xi')$ $(\forall c \in k, \xi, \xi' \in M_H(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_H(R)^{op})$.
ただし，$\xi + \xi'$ における記号 $+$ は自由代数での和を表し，$(\xi + \xi')$ での記号 $+$ は代数 $M_H(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_H(R)^{op}$ での和を表す．他の生成元におけるスカラー倍や積も同様．

(2) $\displaystyle\sum_{c \in X} L_{ac}(L^{-1})_{cb} - \delta_{ab}\emptyset$, $\displaystyle\sum_{c \in X} (L^{-1})_{ac}L_{cb} - \delta_{ab}\emptyset$ $(\forall a, b \in X)$.

(3) $(T_{\deg(a)}(f) \otimes 1_{M_H(R)})L_{ab} - L_{ab}(f \otimes 1_{M_H(R)})$,
$(1_{M_H(R)} \otimes T_{\deg(b)}(f))L_{ab} - L_{ab}(1_{M_H(R)} \otimes f)$,
$(f \otimes 1_{M_H(R)})(L^{-1})_{ab} - (L^{-1})_{ab}(T_{\deg(b)}(f) \otimes 1_{M_H(R)})$,
$(1_{M_H(R)} \otimes f)(L^{-1})_{ab} - (L^{-1})_{ab}(1_{M_H(R)} \otimes T_{\deg(a)}(f)) \quad (\forall f \in M_H(R)(= M_H(R)^{op}), a, b \in X)$.

(4) $\sum_{x,y \in X}(\sigma^{xy}_{ac} \otimes 1_{M_H(R)})L_{yd}L_{xb} - \sum_{x,y \in X}(1_{M_H(R)} \otimes \sigma^{bd}_{xy})L_{cy}L_{ax}$ $(\forall a, b, c, d \in X)$.

(5) $\emptyset - 1_{M_H(R)} \otimes 1_{M_H(R)}$.

この両側イデアル I_σ による自由代数 $\mathbb{K}\langle (M_H(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_H(R)^{op}) \coprod \{L_{ab} : a, b \in X\} \coprod \{(L^{-1})_{ab} : a, b \in X\}\rangle$

の商を A_σ とする．A_σ の定義関係式 (4) と式 (1.1) を比較すると，これが A_P の一般化になっていることが (σ が P の一般化になっていることと合わせて) 推察されるだろう．

定理 2.5 ([7])**.** 写像 $\deg : X \to G$ と $\sigma^{bd}_{ac} \in M_H(R)$ が

- $\deg(b) \circ \deg(d)(\lambda) \neq \deg(a) \circ \deg(c)(\lambda) \Rightarrow \sigma^{bd}_{ac}(\lambda) = 0 \quad (\forall \lambda \in H)$
- $\sigma^{bd}_{ac}(\lambda) \in \mathrm{Center}(R)$

をみたすならば，商 A_σ は左双亜代数である (Cf. [14, 15])．

この定理の左双亜代数において，$s_L : M_H(R) \to A_\sigma$，$t_L : M_H(R)^{op} \to A_\sigma$ は次のような写像である．

$$s_L : M_H(R) \ni f \mapsto f \otimes 1_{M_H(R)} \in A_\sigma;\ t_L : M_H(R)^{op} \ni f \mapsto 1_{M_H(R)} \otimes f \in A_\sigma.$$

$\gamma_{M_H(R)} : A_\sigma \to A_\sigma \otimes_{M_H(R)} A_\sigma$ については，主要な生成元上の値のみを記す．

$$\begin{aligned}
&\gamma_{M_H(R)}(f \otimes g) = (f \otimes 1) \otimes (1 \otimes g);\\
&\gamma_{M_H(R)}(L_{ab}) = \sum_{c \in X} L_{ac} \otimes L_{cb};\ \gamma_{M_H(R)}((L^{-1})_{ab}) = \sum_{c \in X} (L^{-1})_{cb} \otimes (L^{-1})_{ac}.
\end{aligned}$$

最後に $\pi_{M_H(R)} : A_\sigma \to M_H(R)$ を定義するため，まず，$\mathbb{K}$ 代数の準同型 $\varepsilon : A_\sigma \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M_H(R))$ を次のように定める．

$$\varepsilon(f \otimes g) = \rho_l(f)\rho_r(g); \varepsilon(L_{ab}) = \delta_{ab} T_{\deg(a)}; \varepsilon((L^{-1})_{ab}) = \delta_{ab} T_{\deg(a)^{-1}} \quad (f, g \in M_H(R)).$$

ただし，$f, g \in M_H(R)$ に対し $\rho_l(f), \rho_r(g) \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M_H(R))$ を $\rho_l(f)(h)(\lambda) = (fh)(\lambda) = f(\lambda)h(\lambda), \rho_r(g)(h) = hg$ と定義する ($\lambda \in H, h \in M_H(R)$)．定理 2.5 の条件は，この ε が well-defined となることを保証する．そして，$\pi_{M_H(R)} : A_\sigma \to M_H(R)$ は ε を用いて次のように定義される．

$$\pi_{M_H(R)}(a) = \varepsilon(a)(1_{M_H(R)}) \quad (a \in A_\sigma).$$

3　ホップ亜代数 A_σ

$A_L = (A, L, s_L, t_L, \Delta_L, \pi_L)$ を左双亜代数，$S : A \to A$ を環 A 上の反自己同型，L' を反環 L^{op} と同型な環とする (この同型写像を $\nu : L^{op} \to L'$ としておく)．

式 (2.2) で，環 A 上の左 L 加群構造 ${}_LA$ と右 L 加群構造 A_L を導入した．

$${}_LA : l \cdot a = s_L(l)a; A_L : a \cdot l = t_L(l)a \quad (l \in L, a \in A).$$

これと同様にして，環 A 上に L' 加群構造を導入することができる (左 L' 加群構造を ${}^{L'}A$，右 L' 加群構造を $A^{L'}$ と書く)．

$${}^{L'}A : r \cdot a = a s_L(\nu^{-1}(r)); A^{L'} : a \cdot r = a S(s_L(\nu^{-1}(r))) \quad (r \in L', a \in A).$$

命題 3.1. 写像 $S : A \to A$，$s_L : L \to A$，$t_L : L^{op} \to A$ が

$$S \circ t_L = s_L \tag{3.1}$$

をみたすならば，次の性質をもつ加群の準同型 $S_{A \otimes_L A} : A_L \otimes {}_LA \to A^{L'} \otimes {}^{L'}A$ が一意的に存在する．

$$S_{A \otimes_L A}(a \otimes b) = S(b) \otimes S(a)(a, b \in A).$$

$\Delta_L(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ を Sweedler's sigma notation [18, Section 1.2] とするとき，式 (3.1) より $\sum_{(a)} S(a_{(1)})a_{(2)}$ が well-defined となることに注意すると，次も成り立つことがわかる．

命題 3.2. 写像 $S : A \to A$，$s_L : L \to A$，$t_L : L^{op} \to A$，$\pi_L : A \to L$ が式 (3.1) と

$$\sum_{(a)} S(a_{(1)})a_{(2)} = t_L \circ \pi_L \circ S(a) \quad (\forall a \in A) \tag{3.2}$$

をみたすならば，次の性質をもつ加群の準同型 $S_{A \otimes_{L'} A} : A^{L'} \otimes {}^{L'} A \to A_L \otimes {}_L A$ が一意的に存在する．

$$S_{A \otimes_{L'} A}(a \otimes b) = S(b) \otimes S(a)(a, b \in A).$$

写像 $\Delta_{L'} : A \to A^{L'} \otimes {}^{L'} A$ を $\Delta_{L'} := S_{A \otimes_L A} \circ \Delta_L \circ S^{-1}$ と定義する．

定義 3.3. 4 つの式 (3.1)，(3.2)，

$$(\Delta_L \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta_{L'} = (\mathrm{id}_A \otimes \Delta_{L'}) \circ \Delta_L, (\Delta_{L'} \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta_L = (\mathrm{id}_A \otimes \Delta_L) \circ \Delta_{L'}$$

をみたす左双亜代数 A_L と環 A の反自己同型 $S : A \to A$ の組 (A_L, S) に対し，次の性質をもつ写像 $S_{A \otimes_{L'} A}$ の逆写像 $S^{-1}_{A \otimes_{L'} A}$ が存在するとき，組 (A_L, S) をホップ亜代数 (Hopf algebroid) という [4, 5]．

$$S_{A \otimes_L A} \circ \Delta_L \circ S^{-1} = S^{-1}_{A \otimes_{L'} A} \circ \Delta_L \circ S.$$

定理 3.4 ([7])**.** 適切な $\sigma^{ab}_{cd} \in M_H(R)$ に対し，定理 2.5 の A_σ はホップ亜代数となる．ただし，$L' = M_H(R)^{op}$，$\nu = \mathrm{id}_{M_H(R)^{op}}$．

講演では，群の一般化である擬群 (quasigroup) を用いて上の定理における $\sigma^{ab}_{cd} \in M_H(R)$ を構成した [7, 9, 10, 11, 12, 13, 16]．この $\sigma^{ab}_{cd} \in M_H(R)$ から定まるホップ亜代数 A_σ において，$\mathbb{K}$ 代数の反自己同型 $S : A_\sigma \to A_\sigma$ は，生成元上，次のように定義される．

$$S(f \otimes g) = g \otimes f; S(L_{ab}) = (L^{-1})_{ab}; S((L^{-1})_{ab}) = L_{ab} \quad (f, g \in M_H(R)).$$

講演の最後では，$M_H(R)$ を一般化して得られる A_σ についても紹介した [8]．

謝辞

講演の機会を与えていただいた藏野和彦氏および増岡彰氏にまず感謝申し上げる．また，講演当日の朝に北海道胆振東部地震が発生したことから，両氏を始めとして多くの方々にご心配いただいた．皆様のお心遣いに心からの感謝を申し上げたい．

本研究は科研費 (17K05187) の助成を一部受けたものである．

参考文献

[1] 阿部英一: ホップ代数. 岩波書店, 1977.

[2] R. J. Baxter: Partition function of the eight-vertex lattice model. Ann. Physics **70** (1972), 193–228.

[3] R. J. Baxter: Solvable eight-vertex model on an arbitrary planar lattice. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **289** (1978), no. 1359, 315–346.

[4] G. Böhm: An alternative notion of Hopf algebroid. Hopf algebras in noncommutative geometry and physics, 31–53, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **239**, Dekker, New York, 2005.

[5] G. Böhm and K. Szlachányi: Hopf algebroids with bijective antipodes: axioms, integrals, and duals. J. Algebra **274** (2004), no. 2, 708–750.

[6] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, and A. Takhtajan: Quantization of Lie groups and Lie algebras. Algebraic Analysis, 129–139, Academic, Boston, 1989.

[7] Y. Otsuto: Left bialgebroid および rigid 性と Hopf algebroid. 修士論文 (2018), 北海道大学.

[8] Y. Otsuto and Y. Shibukawa: in preparation.

[9] H. O. Pflugfelder: Quasigroups and loops: introduction. Sigma Series in Pure Mathematics, 7. Heldermann Verlag, Berlin, 1990.

[10] Y. Shibukawa: Dynamical Yang-Baxter maps. Int. Math. Res. Not. **2005**, no. 36, 2199–2221.

[11] Y. Shibukawa: Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 4, 1157–1182.

[12] Y. Shibukawa: Survey on dynamical Yang-Baxter maps. Noncommutative structures in mathematics and physics, 239–244, K. Vlaam. Acad. Belgie Wet. Kunsten (KVAB), Brussels, 2010.

[13] Y. Shibukawa: Dynamical braided monoids and dynamical Yang-Baxter maps. Quantum groups and quantum topology (Kyoto 2010), 80–89, RIMS Kôkyûroku **1714**, Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., Kyoto, 2010.

[14] Y. Shibukawa: Hopf algebroids and rigid tensor categories associated with dynamical Yang-Baxter maps. J. Algebra **449** (2016), 408–445.

[15] Y. Shibukawa and M. Takeuchi: FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps. J. Algebra **323** (2010), no. 6, 1698–1728.

[16] J. D. H. Smith and A. B. Romanowska: Post-modern algebra. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[17] R. Street: Quantum Groups. A Path to Current Algebra. Australian Mathematical Society Lecture Series, **19**. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[18] M. E. Sweedler: Hopf algebras. Mathematics Lecture Note Series W. A. Benjamin, Inc., New York 1969.

[19] M. Takeuchi: Groups of algebras over $A \otimes \overline{A}$. J. Math. Soc. Japan **29** (1977), no. 3, 459–492.

[20] C. N. Yang: Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312–1315.

[21] C. N. Yang: S matrix for the one-dimensional N-body problem with repulsive or attractive δ-function. Phys. Rev. **168** (1968), 1920–1923.