対数的 CALABI-YAU 多様体の変形

佐野 太郎

1. はじめに

本稿では Calabi-Yau 多様体とは, 標準因子 K_X が自明な compact Kähler 多様体 X のこととする. Calabi-Yau 多様体は代数幾何のみならず微分幾何, 数理物理においてもよく研究されている対象である. Calabi-Yau 多様体の変形には障害がないことが知られている. Tian, Todorov の論法は解析的なもので $SU(n)$ なる仮定がついていたが, Ran, 川又により代数的な証明が得られ, その仮定も外れた. これにより Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間は局所的には滑らかということになる.

本稿ではその "対数的" 一般化について論じる. 対数的 Calabi-Yau 多様体というと, 双有理幾何学においては正規射影多様体 X とその上の $\mathbb{Q}$-因子 B のペアであって $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$ かつ (X, B) が lc 対となるものをいうことが多い. Calabi–Yau 対とも呼ばれる. 滑らかな (弱)Fano 多様体 X に対し十分大きな $m > 0$ に対して多重反標準系 $|-mK_X|$ は滑らかな元 D_m を持つが, $(X, \frac{1}{m}D_m)$ は Calabi-Yau 対の典型例となる. X と因子のペアの変形を考えることで, 非障害性の対数的一般化が得られる. またその応用として弱 Fano 多様体の変形の非障害性が得られる.

本稿ではさらに, 正規交差多様体であって双対化層 ω_X が自明である正規交差 Calabi-Yau 多様体も考える. 川又–並河は正規交差 Calabi-Yau 多様体の対数変形理論を展開し, マイルドな条件のもとでそれらが滑らかな Calabi-Yau 多様体に変形できることを示した. 本稿では川又–並河の理論の応用により非ケーラー Calabi-Yau 3-fold でピカール数が任意に大きくなる例が構成できることについて論じる.

本稿では複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数スキーム, および複素解析空間の変形を考える.

2. Calabi-Yau 多様体の変形と T^1-lifting

まずは Calabi–Yau 多様体の変形の非障害性が T^1-lifting property によって示されることを復習する (cf. [Nam96]). そのため変形関手やその非障害性などの定義を準備する.

定義 2.1. X を代数スキーム (または複素解析空間) とする. $\mathcal{A}$ を Artin 局所 $\mathbb{C}$-代数 A で剰余体が $\mathbb{C}$ となるもののなす圏, $(Sets)$ を集合のなす圏とする. このとき X の変形関手 $\mathrm{Def}_X \colon \mathcal{A} \to (Sets)$ を $A \in \mathcal{A}$ に対し

$$\mathrm{Def}_X(A) := \{(X \hookrightarrow X_A) \mid X_A \to \operatorname{Spec} A : \text{平坦}, X_A \times_A \mathbb{C} \simeq X\}/\simeq$$

とすることで定める. ここで二つのデータ $(X \hookrightarrow X_A)$ と $(X \hookrightarrow X'_A)$ が同値であるとは, ある A-同型 $\Phi \colon X_A \to X'_A$ であって X の埋め込みと compatible になるものが存在することとする.

Def_X が**非障害 (unobstructed)** であるとは任意の $A, A' \in \mathcal{A}$ とその間の全射 $A' \to A$ に対して, 変形の制限写像

$$r_{A'A}\colon \mathrm{Def}_X(A') \to \mathrm{Def}_X(A)$$

が全射であることとする.

X がコンパクト解析空間であるとき, 半普遍変形 $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathrm{Def}(X) \ni 0$, つまり次の性質を持つ変形があることが知られている: X の任意の小変形は底変換により ϕ から誘導され, 誘導の仕方は接空間のレベルで一意的である. (底点 0 は $X \simeq \phi^{-1}(0)$ を満たす点のことである.) この ϕ は倉西族とよばれ, 底空間 $\mathrm{Def}(X)$ は倉西空間と呼ばれる. 倉西空間の底点での局所環の完備化 $\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Def}(X),0}$ の環としての同型類は一意的であることがわかる. また次の事実がある.

事実 2.2. コンパクト解析空間 X に対し, 倉西空間 $\mathrm{Def}(X)$ が底点 0 で滑らかであることと, 変形関手 Def_X が非障害であることは同値である.

よって倉西空間の特異性を調べるには, Artin 環上の無限小変形を考えれば十分であることがわかる. また次のように特別な Artin 環のみ調べれば非障害性は判定できる.

事実 2.3. Def_X が非障害であることと, 任意の $n \geq 0$ と $A_n := \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$ に対して制限写像 $\mathrm{Def}_X(A_{n+1}) \to \mathrm{Def}_X(A_n)$ が全射であることは同値である.

X がコンパクト複素多様体の時には, 変形の障害空間は $H^2(X, \mathcal{T}_X)$ により与えられた ($\mathcal{T}_X$ は X の接束). つまり, Artin 環 $A, A' \in \mathcal{A}$ が完全列

$$\xi := (0 \to J \to A' \to A \to 0)$$

をなし $\mathfrak{m}_{A'}J = 0$ を満たす時 (このような ξ を Artin 環の**拡大**という), 障害写像 $o_\xi\colon \mathrm{Def}_X(A) \to H^2(X, \mathcal{T}_X) \otimes_{\mathbb{C}} J$ が存在し, 列

$$\mathrm{Def}_X(A') \xrightarrow{r_{A'A}} \mathrm{Def}_X(A) \xrightarrow{o_\xi} H^2(X, \mathcal{T}_X) \otimes J$$

が完全となって ($\eta_A \in \mathrm{Def}_X(A)$ に対し, $o_\xi(\eta_A) = 0$ であることと $\eta_{A'} \in \mathrm{Def}_X(A')$ であって $r_{A'A}(\eta_{A'}) = \eta_A$ となることは同値.) さらに "関手性" を持つ. 特に $H^2(X, \mathcal{T}_X) = 0$ の時には Def_X は非障害である.

例 2.4. X を滑らかな射影多様体とする. 次の場合には倉西空間 $\mathrm{Def}(X)$ は滑らかである.

(i) $\dim X = 1$.
(ii) X が Fano 多様体, つまり反標準因子 $-K_X$ が豊富.
(iii) X がアーベル多様体 (複素トーラスでも良い).

(i), (ii) においては共に $H^2(X, \mathcal{T}_X) = 0$ であることが, (i) では 1 次元であること, (ii) では小平–中野消滅定理から従う.

(iii) では $\dim X \geq 2$ の時には $H^2(X, \mathcal{T}_X) \neq 0$ であるが, 複素トーラスの普遍変形族は具体的に構成できる. 変形 $\phi_X\colon \mathcal{X} \to \Delta^{\tau_X}$ を一つ構成し, 小平–Spencer 写像が全単射であることがチェックできれば半普遍性が従う. (詳細は小平–Spencer の論文 [KS58, 14 (γ)] にて.)

一般には複素多様体 X の倉西空間は特異点を持つことが多い．例えば Vakil は次の結果を示した: $\mathbb{Z}$ 上定義された有限型 $\mathbb{C}$-スキーム T に対し, 射影平面 S であってその倉西空間 $\mathrm{Def}(S)$ が T と滑らかな射を通じて同値になるようなものが存在する．例えば K_S が豊富になるような例が構成されている．

にも関わらず標準因子が自明の時には, Bogomolov, Tian, Todorov, Ran ([Ran92]), 川又 ([Kaw92]) らにより次の定理が示された．

定理 2.5. X を Calabi-Yau 多様体とする (つまり X はコンパクト Kähler 多様体で $K_X \sim 0$ なるもの．)．このとき Def_X は非障害である．

注意 2.6. Todorov の論文 ([Tod89]) を見ると, $SU(n)$-多様体なるものの変形が扱われている．これは $H^0(X, \Omega^i_X) = 0$ $(0 < i < \dim X)$ をみたすので定理における Calabi-Yau 多様体よりは狭いクラスである．例えばアーベル多様体やハイパーケーラー多様体は含まれないが, これが分類論的には最も難しい場合かもしれない．Ran による代数的な証明では K_X が torsion かつ X がコンパクト Kähler という条件のみから非障害性が示されている．簡略化された代数的証明は川又により得られた．

上の定理の証明では T^1-lifting property という性質が有効に使われた．

定義 2.7. $A_n := \mathbb{C}[t]/(t^{n+1}), B_n := A_n \otimes_{\mathbb{C}} A_1 \simeq \mathbb{C}[t,u]/(t^{n+1}, u^2) \in \mathcal{A}$ とおく．またコンパクト解析空間 X と $X_n \in \mathrm{Def}_X(A_n)$ に対して,

$$T^1(X_n/A_n) := \{(X_n \hookrightarrow Y_n)\colon (X \hookrightarrow Y_n) \in \mathrm{Def}_X(B_n), Y_n \times_{B_n} A_n \simeq X_n\}/\simeq$$

とおく．($(X_n \hookrightarrow Y_n) \simeq (X_n \hookrightarrow Y_n')$ は $\Phi\colon Y_n \to Y_n'$ で $\Phi(X_n) = X_n$ を満たすこととする．)

コンパクト解析空間 X の変形関手 Def_X が T^1**-lifting property** を満たすとは, 任意の $n \geq 0$ に対して

$$T^1(X_n/A_n) \to T^1(X_{n-1}/A_{n-1})$$

が全射となることである．

次の命題が重要である．

定理 2.8. ([Ran92], [Kaw92], [FM99]) コンパクト解析空間 X に対し, Def_X が非障害であることと T^1-lifting property をみたすことは同値である．

また次の命題が基盤となる．

命題 2.9. ([Del68, Théorème 5.5]) X をコンパクト複素多様体で Hodge to de Rham スペクトル系列

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega^\bullet_X) \simeq H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

が E_1-退化するものとする．この時, $A \in \mathcal{A}$ と $X_A \in \mathrm{Def}_X(A)$ に対してスペクトル系列

$$H^q(X_A, \Omega^p_{X_A/A}) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X_A, \Omega^\bullet_{X_A/A}) \simeq H^{p+q}(X, A)$$

も E_1-退化する．また $H^q(X_A, \Omega^p_{X_A/A})$ は自由 A 加群となり, Artin 環の底変換と可換になる．

定理 *2.5* の証明のスケッチ．一般に $(X \hookrightarrow X_n) \in \mathrm{Def}_X(A_n)$ に対して,

$$T^1(X_n/A_n) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_n}}(\Omega^1_{X_n/A_n}, \mathcal{O}_{X_n})$$

となる．命題 2.9 より相対標準束 ω_{X_n/A_n} は自明となるので

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_n}}(\Omega^1_{X_n/A_n}, \mathcal{O}_{X_n}) \simeq H^1(X_n, \Omega^{d-1}_{X_n/A_n})$$

を得る $(d := \dim X)$．よって T^1-lifting property は底変換写像

$$H^1(X_n, \Omega^{d-1}_{X_n/A_n}) \to H^1(X_{n-1}, \Omega^{d-1}_{X_{n-1}/A_{n-1}})$$

の全射性と同値になり, これは命題 2.9 から従う． □

注意 2.10. 定理の証明から, X をコンパクト複素多様体で $K_X \sim 0$ をみたし Hodge to de Rham スペクトル系列が E_1-退化するものとすると, その倉西空間 $\mathrm{Def}(X)$ は滑らかである．しかしスペクトル系列が退化しない場合には標準束が自明でも倉西空間が特異点を持つ例がある ([Ghy95]).

3. Calabi-Yau 対, 弱 Fano 多様体の変形

この節では Calabi-Yau 対の変形について述べる．まず, 閉部分空間との対 (X, D) の変形を導入する．

定義 3.1. X を $\mathbb{C}$-代数スキーム (または複素解析空間), $D \subset X$ をその閉部分スキーム (解析空間) とする．変形関手 $\mathrm{Def}_{(X,D)}\colon \mathcal{A} \to (Sets)$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}_{(X,D)}(A) := \{&(X \hookrightarrow X_A, D \hookrightarrow D_A, D_A \hookrightarrow X_A) \mid \\ &(X \hookrightarrow X_A) \in \mathrm{Def}_X(A), (D \hookrightarrow D_A) \in \mathrm{Def}_D(A)\}/\simeq\end{aligned}$$

により定める．二つのデータ $(X \hookrightarrow X_A, D \hookrightarrow D_A, D_A \hookrightarrow X_A)$ と $(X \hookrightarrow X'_A, D \hookrightarrow D'_A, D'_A \hookrightarrow X'_A)$ が同値とは, A-同型 $\Phi\colon X_A \xrightarrow{\simeq} X'_A$ と $\Psi : D_A \to D'_A$ であって D, X の埋め込みと compatible になるものが存在することとする．

$\mathrm{Def}_{(X,D)}$ の非障害性は Def_X の場合と同様に定義される．

Def_X や $\mathrm{Def}_{(X,D)}$ は次で定義される “変形関手” の一種である．

定義 3.2. 共変関手 $F\colon \mathcal{A} \to (Sets)$ が $F(\mathbb{C}) = \{*\}$ をみたし, $f\colon A \to B$ と $f'\colon A' \to B$ とそこから自然に誘導される写像 $\phi\colon F(A \times_B A') \to F(A) \times_{F(B)} F(A')$ が次の “Schlessinger の条件”(H1), (H2), (H3) を満たすとする:

(H1) f が全射のとき ϕ も全射.
(H2) $A = A_1 := \mathbb{C}[t]/(t^2)$ のとき ϕ は全単射.
(H3) $T^1_F := F(A_1)$ は有限次元 $\mathbb{C}$-線形空間.

F が**変形関手**であるとは Artin 環の拡大 $e := (0 \to J \to A' \to A \to 0)$ に対して “障害写像”$o_e\colon F(A) \to T^2_F \otimes J$ が定義され次を満たすこととする:

(i) $F(A') \to F(A)$ の像が $o_e^{-1}(0)$ と一致.
(ii) o_e は Artin 環の拡大に対し関手的.

変形関手 F が**非障害**とは, 上のような Artin 環の拡大に対し $F(A') \to F(A)$ が全射であることとする. また, F が **T^1-lifting property** を満たすとは, 自然に誘導される写像

$$F(B_n) \to F(A_n) \times_{F(A_{n-1})} F(B_{n-1})$$

が任意の $n \geq 1$ に対して全射になることとする.

Fantechi–Manetti は次の事実を示した.

事実 3.3. ([FM99]) 変形関手 F が非障害であることと, T^1-lifting property をみたすことは同値である.

注意 3.4. F が表現可能であるときには川又による証明が機能する. 実は X が Calabi–Yau の時には Def_X は表現可能である. $(X \hookrightarrow X_A) \in \mathrm{Def}_X(A)$ に対し, 相対標準層 $\omega_{X_A/A}$ が命題 2.9 から自明となる. また $H^0(X_A, \mathcal{T}_{X_A/A}) \simeq H^0(X_A, \Omega^{d-1}_{X_A/A})$ となって ($d := \dim X$), 無限小自己同型が lift することが事実 2.9 から従うからである (ただし $\Omega^i_{X_A/A} := \wedge^i \Omega^1_{X_A/A}$, $\mathcal{T}_{X_A/A} := (\Omega^1_{X_A/A})^\vee$($\vee$ は双対.)).

例 3.5. X がコンパクト複素多様体で $D \subset X$ がその滑らかな因子であるとき, Def_X や $\mathrm{Def}_{(X,D)}$ は変形関手である. もちろんその他にも Hilbert 関手や層の変形関手など様々な変形関手が存在する.

次の定理は Calabi-Yau 対に対する BTT 定理の一般化と言える.

定理 3.6. ([San14], [Iac15]) コンパクト Kähler 多様体 X であって, ある $m > 0$ に対し線形系 $|-mK_X|$ が滑らかな因子 D を含むものが与えられたとする.
このとき変形関手 $\mathrm{Def}_{(X,D)}$ は非障害である.

T^1-lifting property と共に, 再びスペクトル系列の退化が証明のキーとなる. 証明は Deligne によるものとほぼ同様である.

命題 3.7. コンパクト Kähler 多様体 X とその滑らかな因子 D が与えられたとし, $A \in \mathcal{A}$ 上で $(X_A, D_A) \in \mathrm{Def}_{(X,D)}(A)$ を考える.
このときスペクトル系列

$$E_1^{p,q} := H^q(X_A, \Omega^p_{X_A/A}(\log D_A)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X_A, \Omega^\bullet_{X_A/A}(\log D_A))$$

は E_1-退化する. また $H^q(X_A, \Omega^p_{X_A/A}(\log D_A))$ は自由 A-加群であり, Artin 環の底変換と可換である. ($\Omega^p_{X_A/A}(\log D_A)$ は D_A に沿って極を許す相対対数微分層である.)

定理 3.6 の証明のスケッチ. BTT 定理での $T^1(X_n/A_n)$ と同様の空間を使って $\mathrm{Def}_{(X,D)}$ の T^1-lifting property は記述できる. すると T^1-lifting property は $(X_n, D_n) \in \mathrm{Def}_{(X,D)}(A_n)$ と $X_{n-1} := X_n \times_{A_n} A_{n-1}, D_{n-1} := D_n \times_{A_n} A_{n-1}$ に対して底変換写像

$$H^1(X_n, \mathcal{T}_{X_n/A_n}(-\log D_n)) \to H^1(X_{n-1}, \mathcal{T}_{X_{n-1}/A_{n-1}}(-\log D_{n-1}))$$

が任意の $n \geq 1$ に対し全射であることと同値であることがわかる. ただし $i = n-1, n$ に対し $\mathcal{T}_{X_i/A_i}(-\log D_i) := (\Omega^1_{X_i/A_i}(\log D_i))^\vee$ とおく.

簡単のため, $m=1$ のときの説明をする. このとき事実 3.7 より
$$H^0(X_n, \omega_{X_n/A_n} \otimes \mathcal{O}_{X_n}(D_n)) \simeq A_n$$
であることが従うので, $\omega_{X_n/A_n} \otimes \mathcal{O}_{X_n}(D_n) \simeq \mathcal{O}_{X_n}$ である. これを使うと上の写像は
$$H^1(X_n, \Omega^{d-1}_{X_n/A_n}(\log D_n)) \to H^1(X_{n-1}, \Omega^{d-1}_{X_{n-1}/A_{n-1}}(\log D_{n-1}))$$
($d := \dim X$ とする) となり, この全射性は事実から従う.

m が一般の時には DGLA を使った方法しか今の所知られていない ([Iac15]). しかし次の仮定 (*) をおけば T^1-lifting と分岐被覆のテクニックのみで DGLA を使わずに証明ができる:

(*) 任意の $n \geq 1$ および $(X_n, D_n) \in \mathrm{Def}_{(X,D))}(A_n)$ に対して
$$\omega^{\otimes m}_{X_n/A_n} \otimes \mathcal{O}_{X_n}(D_n) \simeq \mathcal{O}_{X_n}.$$
この仮定は $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ の時や $m=1$ の時には満たされる. □

上の $\mathrm{Def}_{(X,D)}$ の非障害性の系として, 次の Def_X の非障害性が得られる.

系 3.8. ([San14]) X を弱 Fano 多様体とする, つまり反標準因子 $-K_X$ はネフかつ巨大とする. このとき Def_X は非障害である.

証明. まず基底点自由化定理より, 十分大きい $m>0$ をとると線形系 $|-mK_X|$ は自由となり滑らかな元 D をもつ. この D に関し $\mathrm{Def}_{(X,D)}$ を考え, 忘却射 $\Phi\colon \mathrm{Def}_{(X,D)} \to \mathrm{Def}_X$ を $A \in \mathcal{A}$ と $(X_A, D_A) \in \mathrm{Def}_{(X,D)}(A)$ に対し
$$\Phi((X_A, D_A)) := (X_A) \in \mathrm{Def}_X(A)$$
により定める. 以下が証明のキーとなる.

主張 3.9. 忘却射 $\Phi\colon \mathrm{Def}_{(X,D)} \to \mathrm{Def}_X$ は滑らかである, つまり $A, A' \in \mathcal{A}$ と $A' \twoheadrightarrow A$ に対し
$$\mathrm{Def}_{(X,D)}(A') \to \mathrm{Def}_{(X,D)}(A) \times_{\mathrm{Def}_X(A)} \mathrm{Def}_X(A')$$
は全射となる.

主張の証明. これを示すには $H^1(D, \mathcal{N}_{D/X}) = 0$ ($\mathcal{N}_{D/X}$ は法束) を言えば良い. 完全列
$$H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \to H^1(D, \mathcal{N}_{D/X}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)$$
があって, この両端が 0 であることが川又–Viehweg 消滅定理より従う. よって $H^1(D, \mathcal{N}_{D/X}) = 0$ が従う. □

この主張と定理 3.6 から Def_X が非障害であることが従う. □

例 3.10. 弱 Fano 多様体は双有理幾何学, Fano 多様体の双有理的研究において頻繁に出てくる対象である. Fano 多様体の場合とは違って $H^2(X, \mathcal{T}_X) \neq 0$ なる例も存在する. 例えば $X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))$ とすれば, これは $\mathbb{P}(1,1,1,3)$ の vertex での爆発となり弱 Fano であるが, $H^2(X, \mathcal{T}_X) \neq 0$ である. よって T^1-lifting property のような方法が必要である.

この例では線形系 $|-K_X|$ が滑らかな元を持つが, 一般には任意の $m>0$ に対し $|-iK_X|$ $(i=1,\dots,m-1)$ が滑らかな元を持たないような Fano 多様体 X が存在することが知られている. よって証明で巡回被覆を取る必要がある.

例 3.11. $\mathrm{Def}_{(X,D)}$ が非障害でも Def_X が障害を持つ例は次のようなものがある.

$C\subset\mathbb{P}^3$ を滑らかな射影曲線で $[C]\in\mathrm{Hilb}(\mathbb{P}^3)$ が特異点で, かつ C が滑らかな 4 次曲面 S に含まれるとする. (Sernesi による例が存在する ([Har10, Exercise 13.2])) このとき $X\to\mathbb{P}^3$ を C での爆発とすると, $|-K_X|$ は $D:=\mu_*^{-1}(S)$ を含むので Calabi-Yau 対となる. よって $\mathrm{Def}_{(X,D)}$ は非障害である. しかし $\mathrm{Def}(X)$ は Hilbert スキームと同じタイプの特異点を持つことがわかるので, Def_X は障害を持つ.

例 3.12. ω_X^{-1} がネフかつ巨大という仮定をどの程度弱められるか, という問を考える.

まず ω_X^{-1} がネフだが Def_X が障害を持つ例は存在する. 例えば T を 2 次元以上の複素トーラスとし $X=T\times\mathbb{P}^1$ とすると, そのような例になる ([KS58]). 実際, ω_X^{-1} は自由ですらある.

ω_X^{-1} が巨大だが Def_X が障害を持つ例も存在する. $C\subset\mathbb{P}^3$ を滑らかな射影曲線であって $[C]\in\mathrm{Hilb}(\mathbb{P}^3)$ が特異点であり, かつ C が滑らかな 3 次曲面に含まれているとする (Mumford による有名な C の例がある). このとき $X\to\mathbb{P}^3$ を C での爆発とすると ω_X^{-1} は巨大だが, $\mathrm{Def}(X)$ は Hilbert scheme の $[C]$ での特異点と同様の特異点を持つ.

例えば X が有理連結で ω_X^{-1} がネフ (または自由) であるときに Def_X が非障害かどうか, といった問は興味深いが, 決定的な答を見つけるには至っていない.

4. Calabi-Yau 多様体の有界性問題と正規交差多様体のログ変形

次の問題は代数多様体の分類において重要である.

問題 4.1. 射影的 Calabi-Yau 多様体の微分同相型は有限個か？

1 次元, 2 次元では楕円曲線, K3 曲面の位相型はそれぞれ一つしかない. しかし Calabi-Yau 3-fold の例は toric 多様体の中の完全交差の特異点解消により, 多くの例が構成されている. 具体的な数字としては 3 万個以上の位相型の存在が確認されている.

変形同値な複素多様体は微分同相であるので, Calabi-Yau 3-fold の変形同値類が有限個しかないのであれば微分同相型も有限個である. Gross は楕円ファイバー構造を持つ Calabi-Yau 3-fold は双有理有界な族をなすことを示した. 特にそのような Calabi-Yau 3-fold のベッチ数, 位相的オイラー数は有界である. おそらくこれが Calabi-Yau 多様体の有界性について現在知られている最も強い結果の一つである. 射影的でない Calabi-Yau 多様体を考えると, 次のように無限個の例がある.

例 4.1. (1)([Fri91]) Friedman は滑らかな 5 次超曲面 $X=X_5\subset\mathbb{P}^4$ で無限個の互いに disjoint な $(-1,-1)$-曲線 $C_i(i=1,2,\dots)$ を含むものを構成した. このとき $X\to X_m$ を $C_1,\dots,C_m$ の解析的な収縮とする (Grauert の定理より

存在). すると Friedman の変形の定理により, X_m を変形して滑らかな複素多様体 Y_m が得られることが従う. 第 2 ベッチ数 $b_2(Y_m)=0$ であるため Y_m は Kähler でないが, そのオイラー数は $e(Y_m)=-200-2m$ と計算できる. よって $Y_m (m=1,2,\ldots)$ は射影的でない Calabi-Yau 3-fold の微分同相型の無限個の系列を与えている.
(2) 小木曽 ([Ogu94]), 宮岡 ([Fri91]) は射影的 Calabi-Yau 3-fold の (解析的)flop により $H^2(X,\mathbb{Z})$ の生成元 D の $|D^3|$ がいくらでも大きくなる例を構成し, Moishezon Calabi-Yau 3-fold の微分同相類の無限個の系列が次のように得られることを示した.

滑らかな $(2,4)$-完全交差 $X=X_{2,4}\subset\mathbb{P}^5$ は Calabi-Yau 3-fold となるが, それを上手くとると任意の $d\geq 1$ に対し $(-1,-1)$-曲線 $C_d\subset X$ であって次数 d のものを X が含むようにできる.　この C_d の flop $X \dashrightarrow Y_d$ をとれば条件を満たす例となる. 実際 Y_d 上の $H\in|\mathcal{O}_X(1)|$ の強変換を H_d としたとき, $H_d^3=8-d^3$ となる.
(3) Ghys により標準束が自明で $b_2(X)$ がいくらでも大きくなる X の例は挙げられていた. $SL(2,\mathbb{C})$ に固有不連続な自由作用を持つ離散群 Γ での商として例は構成され, よって基本群は Γ になる.

Fine–Panov ([FP10]) は単連結かつ標準束が自明な例で b_2 が大きくなる例を構成した. 彼らの例は $SL(2,\mathbb{C})$ の同じく離散群による商から構成されるが, 固定点を持つ作用による商の crepant resolution として構成される. すると $H^0(X,\Omega^i_X)\neq 0$ を $i=1,2$ について満たすことがわかり, “強 Calabi-Yau 性” を満たさない.

川又–並河 ([KN94]) は正規交差多様体のログ構造つきの変形理論を展開し, 次の結果を得た. まず d-半安定なる概念を導入する.

定義 4.2. ([Fri83]) SNC 多様体 $X=\bigcup_{i=1}^N X_i$ に対して, $D:=\operatorname{Sing}X$ とし,

$$\mathcal{O}_D(X):=(\otimes_{i=1}^N\mathcal{I}_{X_i}/\mathcal{I}_{X_i}\mathcal{I}_D)^\vee\in\operatorname{Pic}D$$

とする (無限小法束と呼ばれる). X が **d-半安定**であるとは, $\mathcal{O}_D(X)\simeq\mathcal{O}_D$ となることとする.

注意 4.3. $N=2$ の時には $\mathcal{O}_D(X)\simeq\mathcal{N}_{D/X_1}\otimes\mathcal{N}_{D/X_2}$ となり, これが自明ならば d-半安定となる.

X が半安定退化の中心ファイバーとして現れる時, X は d-半安定となる. 逆は一般には不成立であるが, Calabi-Yau の場合には次が成り立つ.

定理 4.4. $n\geq 3$ に対し X を n 次元 proper な単純正規交差 (SNC) スキームで次の条件を満たすものとする:

(i) 双対化層 ω_X が自明.
(ii) X は d-半安定
(iii) $H^{n-1}(X,\mathcal{O}_X)=0$, $H^{n-2}(X_i,\mathcal{O}_{X_i})=0$ $(i=1,\ldots,N)$ を満たすとする　($X=\bigcup_{i=1}^N X_i$ は既約成分への分解).

このとき X の円盤 Δ^1 上の変形 $\phi\colon\mathcal{X}\to\Delta^1$ であって $\mathcal{X}$ が滑らかで, かつ一般ファイバー $\mathcal{X}_t:=\phi^{-1}(t)$ は滑らかかつ標準因子が自明となるものが存在する.

注意 4.5. 川又–並河は X が Kähler SNC 多様体であるという仮定のもとで定理を証明した．鍵となるのは Kähler SNC Calabi-Yau 多様体のログ構造付き変形の非障害性である．論文の証明で肝要なのは, 各既約成分やその stratum 上で Hodge-to-de Rham スペクトル系列が E_1-退化するということであった．よって既約成分 X_i が Kähler や固有代数多様体であると仮定するだけで十分である．ただし X が射影的でない場合には一般ファイバー $\mathcal{X}_t$ が代数的でないものになりうる．

定理 4.4 を使うと Calabi-Yau 多様体を SNC 多様体の変形として構成できる．Lee ([Lee10]) は新しい Calabi-Yau 多様体の構成について調べた．射影的でない SNC 多様体の対数変形により, 次の例が橋本氏との共同研究で得られた．

定理 4.6. ([HS]) 任意の正の整数 $a > 0$ に対し, 射影的でないコンパクト 3 次元複素多様体 $X = X(a)$ で $K_X \sim 0$, $b_2(X) = a + 3$, $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 = H^0(X, \Omega^i_X)$ $(i = 1, 2)$ を満たすものが存在する．

この多様体 $X(a)$ は SNC Calabi-Yau 多様体を変形することで構成される．まず SNC 多様体を滑らかな多様体の gluing として構成するには次の命題を使う．

命題 4.7. X_1, X_2 を滑らかな固有代数多様体, $D_i \subset X_i$ $(i = 1, 2)$ をそれらの滑らかな因子で同型 $\psi\colon D_1 \simeq D_2$ を持つものとする．このとき固有な SNC スキーム X_0 であって閉埋め込み $\iota_i\colon X_i \hookrightarrow X_0$ を持ち Cartesian 図式

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, hook, "\psi\circ i_2"] & X_1 \arrow[d, hook, "\iota_1"] \\ X_2 \arrow[r, hook, "\iota_2"] & X_0 \end{tikzcd}$$

を満たすものが存在する ($j = 1, 2$ に対し $i_j\colon D_j \hookrightarrow X_j$ は包含写像)．これを $X_1 \cup^{\psi} X_2$ とかき, $i_1\colon D_1 \hookrightarrow X_1$ と $i_2 \circ \psi\colon D_1 \hookrightarrow X_2$ による push-out という．

例 4.8. 例えば $X_1 = X_2 = \mathbb{P}^3$ として, $S = D_1 = D_2 \subset \mathbb{P}^3$ を滑らかな 4 次曲面とする．このとき $\psi := \mathrm{id}_S$ とすると, SNC 多様体 $X_0 := X_1 \cup^{\psi} X_2$ ができる．これの双対化層 ω_{X_0} は $K_{X_i} + D_i \sim 0$ であることから自明であることがわかる．しかし $\mathcal{N}_{S/X_1} \otimes \mathcal{N}_{S/X_2} \simeq \mathcal{O}_S(8)$ であるため, d-半安定ではない．

今 $\mu\colon Y_1 \to \mathbb{P}^3$ を滑らかな曲線 $C \in |\mathcal{O}_S(8)|$ による爆発として, $Y_2 = \mathbb{P}^3$ とする．$S_1 \subset Y_1$ を S の強変換, $\mu_S\colon S_1 \to S$ を μ が誘導する同型とする．すると $Y_0 := Y_1 \cup^{\mu_S} Y_2$ は d-半安定であり, 定理 4.4 の条件を満たすものとなる．ここで注意したいのは, S が非自明な自己同型を持つ場合, それで twist した閉埋め込みによる push-out は一般には違う SNC 多様体になることである．定理 4.6 での例もそのようにして構成される．

謝辞

講演の機会を下さった世話人の先生方, 特に高橋篤史先生, 吉永正彦先生に感謝いたします．

References

[Del68] P. Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1968), no. 35, 259–278. MR 0244265

[FM99] Barbara Fantechi and Marco Manetti, *On the T^1-lifting theorem*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 1, 31–39. MR 1658200 (99j:14009)

[FP10] Joel Fine and Dmitri Panov, *Hyperbolic geometry and non-Kähler manifolds with trivial canonical bundle*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 3, 1723–1763. MR 2679581

[Fri83] Robert Friedman, *Global smoothings of varieties with normal crossings*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 1, 75–114. MR 707162 (85g:32029)

[Fri91] ———, *On threefolds with trivial canonical bundle*, Complex geometry and Lie theory (Sundance, UT, 1989), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 103–134. MR 1141199

[Ghy95] Étienne Ghys, *Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de* $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, J. Reine Angew. Math. **468** (1995), 113–138. MR 1361788

[Har10] Robin Hartshorne, *Deformation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 257, Springer, New York, 2010. MR 2583634

[HS] Kenji Hashimoto and Taro Sano, *Examples of non-Kähler Calabi-Yau 3-folds with arbitrarily large b_2*, in preparation.

[Iac15] Donatella Iacono, *Deformations and obstructions of pairs* (X,D), Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 19, 9660–9695. MR 3431606

[Kaw92] Yujiro Kawamata, *Unobstructed deformations. A remark on a paper of Z. Ran: "Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle" [J. Algebraic Geom.* **1** *(1992), no. 2, 279–291; MR1144440 (93e:14015)]*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 2, 183–190. MR 1144434

[KN94] Yujiro Kawamata and Yoshinori Namikawa, *Logarithmic deformations of normal crossing varieties and smoothing of degenerate Calabi-Yau varieties*, Invent. Math. **118** (1994), no. 3, 395–409. MR 1296351

[KS58] K. Kodaira and D. C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures. I, II*, Ann. of Math. (2) **67** (1958), 328–466. MR 0112154

[Lee10] Nam-Hoon Lee, *Calabi-Yau construction by smoothing normal crossing varieties*, Internat. J. Math. **21** (2010), no. 6, 701–725. MR 2658406

[Nam96] Yoshinori Namikawa, *Calabi-Yau manifolds and deformation theory*, Sūgaku **48** (1996), no. 4, 337–357. MR 1614448

[Ogu94] Keiji Oguiso, *Two remarks on Calabi-Yau Moishezon threefolds*, J. Reine Angew. Math. **452** (1994), 153–161. MR 1282199

[Ran92] Ziv Ran, *Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 2, 279–291. MR 1144440

[San14] Taro Sano, *Unobstructedness of deformations of weak Fano manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2014), no. 18, 5124–5133. MR 3264677

[Tod89] Andrey N. Todorov, *The Weil-Petersson geometry of the moduli space of* $\mathrm{SU}(n \geq 3)$ *(Calabi-Yau) manifolds. I*, Comm. Math. Phys. **126** (1989), no. 2, 325–346. MR 1027500

神戸市灘区六甲台町 1-1, 神戸大学理学部数学科
E-mail address: tarosano@math.kobe-u.ac.jp