非可換代数幾何における周期写像について

岩成勇

1. 局所周期写像

X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上に定義された滑らかでコンパクトな代数多様体とする．

$$f : \mathcal{X} \longrightarrow S$$

を X の変形とする．即ち S を複素多様体, f はスムースな固有全射で基点 $0 \in S$ 上のファイバー $f^{-1}(0)$ と X との間に同型 $f^{-1}(0) \simeq X$ が定まっているものとする．このとき局所周期写像を考えよう．いくつかの構成方法があるが次のように構成することができた．S を可縮とする．Ehresmann ファイブレーション定理から, f は可微分多様体として自明な変形である : 以下を可換図式にするような微分同相写像 $h : \mathcal{X} \to X \times S$ がある

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & X \times S \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\
& S. &
\end{tikzcd}$$

従って, i と n を固定すると, $s \in S$ 上のファイバー X_s の Hodge フィルトレーショ

$$F^i H^n_{DR}(X_s) \subset H^n_{DR}(X_s)$$

と比較同型と h により誘導される同型

$$H^n_{DR}(X_s) \simeq H^n(X_s, \mathbb{C}) \simeq H^n(X, \mathbb{C})$$

を組み合わせると $F^i H^n_{DR}(X_s)$ は $H^n(X, \mathbb{C})$ の部分空間 W_s を定める．$s \in S$ に対し部分空間 $W_s \subset V := H^n(X, \mathbb{C})$ が定まった．r を $F^i H^n_{DR}(X_s)$ の次元, $\mathrm{Grass}(r, V)$ をグラスマン多様体とすると, $s \mapsto [W_s \subset V]$ から周期写像

$$P : S \longrightarrow \mathrm{Grass}(r, V)$$

が定義される．これは正則であり Griffiths 横断性を満たすのであった．

2. From E_∞ to E_1

上記の局所周期写像を非可換代数幾何の設定で考えたい．これについての筆者の研究とバックグラウンドの概要を紹介するのが本稿の主目的の 1 つである．

どのように非可換への拡張を考えるかということを説明するため最初に次のことに注意する．前節で紹介した周期写像はモジュライ理論的な意味で大局的には

$$\{\ \text{数学的対象}\ X\ \text{の変形}\ \} \mapsto \{ X\ \text{の不変量}\ I(X)\ \text{の変形}\ \}$$

Date: 2018.

2018 年 9 月に東京工業大学で行われた代数学シンポジウムの筆者の講演に関するノートです．
所属：東北大学理学研究科数学専攻
e-mail: iwanari@math.tohoku.ac.jp.

の対応を表し, X の変形にしたがってどれだけ不変量が変形するかを測っているといえる．そこでこの節では非可換代数幾何における数学的対象 X とその変形に対して変形を誘導するような Hodge 構造に類似した不変量を紹介する．

2.1. **非可換代数幾何での空間.** いきなりではあるが圏を空間と思うことにする．一口に圏といっても, ガロア圏, 淡中圏, アーベル圏, 三角圏など様々なタイプの圏がある．ここでは Bondal, Orlov, Kontsevich, Drinfeld らに従って三角圏を考える．k を体とし (簡単のため以下では全て k は標数 0 の体とする），三角圏に k-線形構造もいれておくことにする．三角圏ではいくつかの理由でうまく振舞わないことがあるので, k 上の pretriangulated differential graded 圏[1]あるいは k-線形安定∞-圏 (cf. [13]) を主たる空間と思う対象とし, 圏同値で同一視していく．三角圏は DG 圏あるいは k-線形安定 ∞-圏のホモトピー圏として現れる．DG 圏の圏と k-線形安定∞-圏の圏に標準的な圏同値があるので両者は同じものの異なるモデルとおもってもらってよい（詳しくは [1] 参照)[2]．

いくつか例を挙げる．

例 2.1. (i) 簡単のため本稿ではスキームといえばネータースキームを指すことにする．スキームに対して, X 上の準連接複体の圏を擬同型で局所化することにより, 擬同型を同値とするような DG 圏あるいは安定∞-圏 $\mathcal{D}(X)$ が定義される．そのホモトピー圏は従来の導来圏 $D_{qc}(X)$ である．これにより X を非可換代数幾何の空間 $\mathcal{D}(X)$ に移行することが出来る．$\mathcal{D}(X)$ から X の様々な不変量を構成できる．例えば K 理論や Hochschild 不変量を $\mathcal{D}(X)$ から直接取り出すことが出来る．一方で一般に $\mathcal{D}(X)$ は X 全ての情報は持っていない．A をアーベル多様体, $\widehat{A}$ を双対アーベル多様体とすると, 向井の定理により, 同値 $\mathcal{D}(A) \simeq \mathcal{D}(\widehat{A})$ がある．

(ii) A を k 上 DG 代数とする．即ち, A は k-ベクトル空間のコチェイン複体で代数構造として,（可換とは限らない）結合的な積写像

$$m : A \otimes A \to A$$

と標準的な単位元の公理を満たす単位元 $1_A \in A^0$ をもつものである．つまりテンソルで標準的な対称モノイダル構造をいれたコチェイン複体の圏での単位的結合的代数対象である．左 DG A-加群 M とは, コチェイン複体 M で A の左作用 $A \otimes M \to M$ をもつものである．$\mathrm{LMod}^{dg}(A)$ を左 DG A-加群のなす圏とすると, この圏を適当に局所化することにより擬同型を同値とするような左 DG A-加群のなす DG 圏あるいは安定∞圏 $\mathrm{LMod}(A)$ を得る．同様に右 DG 加群の場合も DG 圏或いは安定∞圏 $\mathrm{RMod}(A)$ を得る．

(iii) Landau-Ginzberg 模型 $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ の行列因子化の圏 $\mathrm{MF}((X, f))$ は $k[u, u^{-1}]$-線形な DG 圏或いは安定∞圏をなす[3]．但し $k[u, u^{-1}]$ は可換な DG 代数で u はコホモロジカルに次数 2 の元である．いくつかの構成法やヴァージョンがある．ここでは $\mathrm{MF}((X, f))$ を特異性の圏 $\mathcal{D}^b_{coh}(X_0)/\operatorname{Perf}(X_0)$ として与えておく[4]．ここで $X_0 = f^{-1}(0)$,

$$\operatorname{Perf}(X_0) \subset \mathcal{D}^b_{coh}(X_0) \subset \mathcal{D}(X_0)$$

---

[1] 以下では特に断らない限り k 上の pretriangulated differential graded 圏を単に DG 圏と呼ぶことにする．

[2] 三角圏は知っているがこれらに詳しくない読者はこれらを「よい三角圏」と読み替えてもらっても以下直感的な理解には困らない

[3] ミラー対称性のシンプレクティック側として深谷-Seidel 圏や深谷圏も例として紹介すべきであるが筆者の不勉強により文献 [3], [15] を挙げるにとどめる

[4] 商は idempotent-complete なものとしてとっておくことにする

は左から perfect 複体のなす部分圏, 連接なホモロジー層をもつ有界複体のなす部分圏である.

圏を空間と思うことで様々な異なる出自の分野を統一的に考えることができる. DG 代数または A_∞ 代数を非可換代数幾何の空間とみなすという見方もあるが, それは DG 圏や安定∞圏を空間とみなす方針と関係し, あとで説明する周期写像の設定にもかかわるのでここで DG 代数と DG 圏或いは k-線形安定∞圏の関係について説明する.

DG 代数 A があたえられると

$$A \mapsto \mathrm{LMod}(A) \quad \text{または} \quad \mathrm{RMod}(A)$$

の対応によって DG 圏或いは安定∞圏を得る. 逆に presentable な[5]k-線形安定∞圏 $\mathcal{C}$ は, コンパクト生成対象 C を持てば, 自己準同型 DG 代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$ を構成することで, $S \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, S)$ の対応により圏同値

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{RMod}(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C))$$

を作ることが出来る (Keller, Schwede-Shipley, Bondal). 従ってコンパクト生成対象を持つ場合は全て上記の例の (ii) の形にできる. 実は (i) の $\mathcal{C} = \mathcal{D}(X)$ や (iii) の $\mathrm{MF}((X, f))$ の場合もマイルドな仮定の下にコンパクト生成対象の存在が示されている (Bondal-Van den Bergh, Dyckerhoff). 例えば, ネーター性のもとで $\mathcal{D}(X)$ はコンパクト生成対象をもつ. さて DG 代数を擬同型で同一視することを考えてみよう. $f : A \to B$ という DG 代数の射が擬同型のとき圏同値 $f^* : \mathrm{RMod}(B) \simeq \mathrm{RMod}(A)$ を誘導する. 一方圏同値 $\mathrm{RMod}(B) \simeq \mathrm{RMod}(A)$ は, A と B が森田同値であることを言っているだけなので擬同型と $\mathrm{RMod}(B) \simeq \mathrm{RMod}(A)$ には大きな差がある. 次の命題は森田理論を使って容易に示すことが出来るがその差を見やすくあらわしている:

命題 2.2. $\mathcal{S}t_\infty^*$ を *presentable* な安定∞圏とそのコンパクト生成対象の組 $(\mathcal{C}, C)$ のなす∞圏とする. ここで射 $(\mathcal{C}, C) \to (\mathcal{C}', C')$ は余極限を保つ（正確には k-線形な）関手 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ と同値 $f(C) \simeq C'$ である. DGA_k を k 上の *DG* 代数のなす∞圏とすると∞圏の圏同値

$$DGA_k \simeq \mathcal{S}t_\infty^*$$

で A を $(\mathrm{RMod}(A), A)$ に送るものがある.

これを見ると DG 代数は安定∞圏のコンパクト生成対象の選定に対応することが分かる. 幾何的な類似で言うと多様体に対して何か層を用意するようなものであるが, もっと分かりやすい見方は次の辞書である：

代数幾何	非可換代数幾何
代数多様体	DG 圏または安定∞圏
豊富束	コンパクト生成対象
偏極代数多様体	DG 代数

これは対応 $X \mapsto \mathcal{D}(X)$ に対して両者の概念が対応していることまで言っているわけでない. 例えば $\mathcal{D}(X)$ は X が準射影的でなくてもコンパクト生成対象をもつ.

DG 圏或いは安定∞圏を主たる空間としての対象とし, その変形を考え周期写像を考えたい. しかしいくつかの理由により（Hochschild コホモロジーと圏の変形の関係等）, 表面上 DG 代数 A を主たる空間としての対象と考える. ただしその変形の定式

[5] この概念を初見の人は無視してよい. 小さなダイアグラムに関する余極限をもち, 小さなある種の生成系を持つという意味. 詳しくは [12] 参照

化ではDG代数 A の代数としての変形より RMod(A) の変形に対応するようなより広いクラスの変形を考えることで変形の定式化を行うので, A が前面に出てきても舞台裏では RMod$(A) \simeq \mathcal{C}$ となるような圏 $\mathcal{C}$ を空間だと思いたいんだと読んでもらいたい.

以下の概念はスキームのスムース（smooth)、固有 (proper)[6]の類似である.

定義 2.3. $\mathcal{C}$ を k-線形な安定∞圏とする. ここで $\mathcal{C}$ は compactly generated であると仮定する. つまり小さな (small) な集合 Λ で添え字付けられたコンパクト生成系 $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在すると仮定する. このとき

- (i) 任意の二つのコンパクト対象 $C, C' \in \mathcal{C}$ に対して Hom コチェイン複体 $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(C, C')$ が RMod(k) のコンパクト対象である. つまり $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(C, C')$ のホモロジーは k 上有限次元で, さらに有限個の次数を除いてホモロジーは 0 になっている. このとき, $\mathcal{C}$ は k 上固有 (proper) という.
- (ii) $\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ を k-線形な (RMod(k) 上加群としての) 関手のなす安定∞圏とする. 恒等関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が $\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ においてコンパクト対象であるとき, $\mathcal{C}$ は k 上スムースという.

注 2.4. 固有性もスムース性も圏 $\mathcal{C}$ だけでなく k 上の構造 (つまりモノイダル圏 Mod(k) 上[7]の加群構造 $\mathrm{Mod}(k) \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$）に依拠した概念である. なお上の定義は k は体でなくとも一般の可換環スペクトラ k に対して適用できる.

例 2.5. X をスキームとする. X が k 上スムースのとき, $\mathcal{D}(X)$ は k 上スムースである. X が k 上固有 (proper) とすると, $\mathcal{D}(X)$ は k 上固有である.

$\mathcal{C} = \mathrm{RMod}(A)$ のとき上の概念は次の条件に翻訳される.

命題 2.6. *A を k 上 DG 代数とし, $\mathcal{C} = \mathrm{RMod}(A)$ とおく.*

- (i) *$\mathcal{C}$ が k 上固有である必要十分条件は A の各ホモロジー群が有限次元でさらに有限個の次数を除いて 0 になっていることである.*
- (ii) *$\mathcal{C}$ が k 上スムースである必要十分条件は A を $A-A$ 両側加群とみなしたときコンパクト対象であることである. A が $A-A$ 両側加群の∞圏でコンパクトであるとは, 言い換えると, 有限階数自由 $A-A$ 両側加群から有限余極限をとる, シフトをとる, レトラクトをとる操作を有限回繰り返すことで A を構成するできることである.*

2.2. **Hodge 構造.** DG 代数 A から定義される Hodge 構造の類似について説明する. いくつか異なる側面からの文献として [9], [5], [17] を挙げる. Hodge 構造を考えるために最初に考えたいのは de Rham コホモロジーの類似物である. 周期的巡回ホモロジー (periodic cyclic homology) $HP_*(A)$ を de Rham コホモロジーの対応物とみなすことができる. というのも, X を k 上スムースなスキームとし, DG 代数 A を $\mathcal{D}(X) \simeq \mathrm{RMod}(A)$ となるようにとると

$$HP_n(A) = \prod_{i\in\mathbb{Z}} H^{2i-n}_{DR}(X/k)$$

という同型がある. ここで右辺は代数的 de Rham コホモロジーである. 以下順番に Hochschild 系の複体を定義していきたいが, 周期的巡回ホモロジーは最後に定義され

---

[6] proper を固有と訳すのはいい訳語ではないと思う

[7] k は可換なので $\mathrm{LMod}(k) \simeq \mathrm{RMod}(k)$ であるから, 以下両者は区別せず Mod(k) と書くことにする. k の可換性から自然に対称モノイダル構造が入る. 有態に Mod(k) は k-ベクトル空間の複体のなす導来∞圏であり, 対称モノイダル構造はテンソル積ではいる.

るものなので Hochschild チェイン複体から定義していく．A を k 上 DG 代数とすると, derived なテンソル

$$HH_\bullet(A) = A \otimes^{\mathbb{L}}_{A\otimes A^{op}} A$$

で Hochschild チェイン複体を定義する．このテンソルを計算する複体のとり方はいくつかあるが[8], 以下の説明にその明示的なモデルを使うわけではないので省略する (詳しくは [7] 参照). なお $HH_\bullet(-)$ は複体, $HH_*(-)$ はそのホモロジー群をとった $\mathbb{Z}$-次数付きベクトル空間を表すことにする．ここで重要なのは $HH_\bullet(A)$ は（適切なモデルをとると）DG 代数

$$\Lambda = k[\epsilon]/(\epsilon^2), \qquad (|\epsilon| = -1)$$

上の加群を持つということである．ここで $|-|$ はコホモロジカルな次数で $k[-]$ は DG 代数として自由代数である. (標数 0 なので Koszul サインルールから, もし $k[-]$ を可換 DG 代数としての自由代数としてあらわすことにすれば $k[\epsilon]/(\epsilon^2) = k[\epsilon]$ であり [7] ではその流儀にしている.) この作用

$$k[\epsilon]/(\epsilon^2) \otimes HH_\bullet(A) \to HH_\bullet(A)$$

を考えてみると ϵ をかけることで複体の射 $B : HH_\bullet(A) \to HH_\bullet(A)[-1]$ で $B^2 = 0$ となるものが誘導されていることが分かる．B は Connes 作用素とよばれるもので与えられる．∂_{Hoch} を $HH_\bullet(A)$ の微分とすると, Λ-加群の構造は,

$$B^2 = 0, \;\; \partial_{Hoch}B + B\partial_{Hoch} = 0$$

をみたす B にほかならない．このような微分をもつ複体は混合複体 (mixed complex) と呼ばれる．混合複体は複体への S^1-作用と見ることが出来る．S^1 は可換な位相群であるから特異チェイン複体 $C_*(S^1, k)$ に可換 DG 代数構造が入る．ここでは簡単のためチェイン複体 C への S^1-作用を自己準同型 DG 代数への

$$C_*(S^1, k) \to \mathrm{End}_k(C)$$

射とする[9]．実は (Sullivan の意味の）形式性 (formality) があり $C_*(S^1, k)$ は DG 代数として $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ と擬同型であり

$$k[\epsilon]/(\epsilon^2) \to \mathrm{End}_k(C)$$

と同一視できる．これは左 $\Lambda = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 加群構造を C に与えることに対応する．可換な世界と比較すると, $HH_\bullet(A)$ が微分形式（代数幾何的には Hodge コホモロジー）, B が de Rham 微分の役割をする．

いま Connes 作用素 B によって Λ-加群になった (S^1-作用のはいった) $HH_\bullet(A)$ がある．そこから負巡回ホモロジー (negative cyclic homology) と周期的巡回ホモロジーを定義しよう．負巡回ホモロジーは, $HH_\bullet(A)$ からそのホモトピー S^1-固定点をとることで得られるが, ホモロジー代数的には k を $k[\epsilon]/(\epsilon^2) \to k[\epsilon]/(\epsilon) \simeq k$ によって Λ-加群と見ることによって derived Hom 複体 $\mathcal{RH}om_\Lambda(k, -)$ をとることになる．K を k の Λ-加群としての cofibrant な resolution

$$K := \cdots \xrightarrow{\cdot\epsilon} k\epsilon \xrightarrow{0} k \xrightarrow{\cdot\epsilon} k\epsilon \xrightarrow{0} k.$$

---

[8] 1 つの標準的なとり方: 片側の A を $A\otimes A^{op}$-加群として bar resolution をとり, つまり自由 $A\otimes A^{op}$-加群の単体的なダイアグラム (simplicial diagram) をつくり, $\otimes_{A\otimes A^{op}} A$ をとってから totalization をとる．Connes 作用素は simplicial diagram に更に円周的な対称性があり cyclic 圏でパラメトライズされるダイアグラムに伸ばせることから入る．例えば [11] 参照

[9] 正確には DGA_k での射とみるべきである．

とする．一番右端が次数 0 次である．$\mathcal{RH}om_\Lambda(k,-)$ をとるには Hom 複体 $\mathrm{Hom}_\Lambda(K,-)$ をとればよい．負巡回ホモロジー $HN_*(A)$ を与える複体を

$$HN_\bullet(A) := \mathrm{Hom}_\Lambda(K, HH_\bullet(A))$$

で定義する．K の次数 $-2i$ にある k のなかの $1 \in k$ を 1_{2i} とかくと，$f : K \to HH_\bullet(A)$ は，$\{1_{2i}\}_{i\geq 0}$ の行き先で一意的に決まり，計算すると複体としての同型

$$HN_\bullet(A) = \mathrm{Hom}_\Lambda(K, HH_\bullet(A)) \simeq (HH_\bullet(A)[[t]], \partial_{Hoch} + tB)$$

があることがわかる．ここで t は（コホモロジー的に）次数 2 の元で，$HH_\bullet(A)[[t]]$ の次数 r は，$\prod_{i\geq 0, 2i-l=r} HH_l(A) \cdot t^i$ で与えられ，微分は $\partial_{Hoch} + tB$ で与えられる (ここの $HH_l(A)$ はホモロジーではなく次数 l 部分である)．特に，注意したいのは $k[t]$ を t で生成される DG 代数とすると[10], $HN_\bullet(A)$ は $k[t]$-加群である．$k[t] = \mathrm{Hom}_\Lambda(K,k) = \mathcal{RH}om_\Lambda(k,k)$ の合成による作用と見てよい．

周期的巡回ホモロジー $HP_*(A)$ を与える複体 $HP_\bullet(A)$ を

$$HP_\bullet(A) := (HH_\bullet(A)[[t]] \otimes_{k[t]} k[t,t^{-1}], \partial_{Hoch} + tB)$$

で定める．$HH_\bullet(A)((t)) = HH_\bullet(A)[[t]] \otimes_{k[t]} k[t,t^{-1}]$ とおく．$HP_\bullet(A)$ は特に $k[t,t^{-1}]$-加群である．さて，$HP_*(A)$ は de Rham コホモロジーの類似だと述べた．

$$HN_\bullet(A) = HH_\bullet(A)[[t]] \subset HH_\bullet(A)((t)) = HP_\bullet(A)$$

を考える．これは Hodge 複体の (Rees 構成）の非可換版の対応物である．このデータで Hodge フィルトレーションとみなす．以上 DG 代数に対して Hochschild 不変量を定義してきたが，これらは森田同値で保たれる．従って $A \mapsto \mathrm{RMod}(A)$ という構成を経由していると考えてよい．実際，上記の定義の拡張として DG 圏や安定∞圏に対しても Hochschild 不変量が定義できる．

一般の DG 代数 A に対して，Hodge フィルトレーション（の Rees 構成）の類似物 $HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$ が定義できたが，A がスムースかつ固有の場合にはペアリングも定義することが出来る．この Hodge 構造のペアリングは次節の局所周期写像には関係はないが，ついでに説明する．A に対して，$\mathrm{RMod}(A)$ を考えよう．このとき (実は) $\mathrm{RMod}(A)$ がスムースかつ固有であることの必要十分条件は compactly generated な k-線形安定∞圏のなす対称モノイダル∞圏において (射はコンパクト対象を保つもののみを考える．対称モノイダル構造については [13] 参照)，双対対象が存在することである（dualizable)．さらに双対対象 (dual object) は $\mathrm{RMod}(A^{op}) \simeq \mathrm{LMod}(A)$ で与えられる．evaluation 写像は，

$$\eta : \mathrm{RMod}(A) \times \mathrm{LMod}(A) \to \mathrm{Mod}(k), \qquad (M,N) \mapsto M \otimes_A N$$

で与えられる．安定∞圏のなす∞圏から $HH_\bullet(-)$ をとる関手は対称モノイダルであり，$HH_\bullet(A) = HH_\bullet(\mathrm{RMod}(A))$ は双対対象 $HH_\bullet(A^{op}) = HH_\bullet(\mathrm{LMod}(A))$ を持つ．つまり上の η は

$$HH_\bullet(A) \otimes HH_\bullet(A^{op}) \to HH_\bullet(k) \simeq k$$

を誘導する．ここで $HH_\bullet(A^{op}) = A \otimes^{\mathbb{L}}_{A^{op}\otimes A} A \simeq A \otimes^{\mathbb{L}}_{A\otimes A^{op}} A = HH_\bullet(A)$ を用いるとペアリングができる

$$HH_\bullet(A) \otimes_k HH_\bullet(A) \to HH_\bullet(k) \simeq k.$$

これらは Λ-加群とみなすことができ，$\mathrm{Hom}_\Lambda(K,-)$ をとることで

$$HH_\bullet(A)[[t]] \otimes_{k[t]} HH_\bullet(A)[[t]] \to k[t]$$

[10] ホモトピー論的には $k[t]$ は $BS^1 = B B\mathbb{Z}$ のコホモロジー環と見てよい

をえる． $\otimes_{k[t]} k[t,t^{-1}]$ をとると，

$$HH_\bullet(A)((t)) \otimes_{k[t,t^{-1}]} HH_\bullet(A)((t)) \to k[t,t^{-1}]$$

が誘導される． なおこの構成は A を k-上スムースかつ固有な安定∞圏 $\mathcal{C}$ にしてもそのまま適用できる．ここで今まで出てきたものの類似を辞書としてまとめておくと

可換	非可換
微分形式又は Hodge コホモロジー	$HH_\bullet(A)$
de Rham 微分	Connes 作用素
de Rham 複体	$HP_\bullet(A)$
Hodge フィルトレーション	$HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$
交叉ペアリング	$HN_\bullet(\mathrm{RMod}(A) \times \mathrm{LMod}(A) \to \mathrm{Mod}_k)$

Kaledin による Hodge-to-de Rham スペクトル系列の退化を紹介しよう．ここで $HH_l(A)$ を $HH_\bullet(A)$ のホモロジカルに次数 l 部分とする．

$$F^i HH_\bullet(A)((t))_n = \prod_{r \geq i} HH_{n+2r}(A) \cdot t^r \subset HH_\bullet((t))_n = \prod_{r \in \mathbb{Z}} HH_{n+2r}(A) \cdot t^r$$

とおくことでフィルトレーションを $HP_\bullet(A)$ にいれる．部分商

$$F^i HH_\bullet(A)((t))/F^{i+1} HH_\bullet(A)((t))$$

は $HH_\bullet(A) \cdot t^i$ と同型であり，このフィルトレーションから得られるスペクトル系列を

$$HH_*(A)((t)) \Rightarrow HP_*(A).$$

とかく．各 E_1-stage は $HH_j(A) \cdot t^i$ の形をしており Hodge-to-de Rham スペクトル系列の非可換類代数幾何における対応物とみなせる．このスペクトル系列は孤立特異点から生まれる Hodge 構造（[16] 参照）などに退化を支持する例があり，実際 A がスムースかつ固有のとき Kontsevich-Soibelman によって E_1-退化が予想されていた．その退化は Kaledin によって示された:

定理 2.7 ([10])**.** *DG 代数 A が k 上スムースかつ固有であるとする．このとき*

$$HH_*(A)((t)) \Rightarrow HP_*(A)$$

は E_1-stage で退化する．

3. DG Lie 代数と変形理論

3.1. DG Lie 代数. この節では DG Lie 代数を用いた変形理論を論じる．我々の周期写像は DG Lie 代数の写像として構成される．

DG Lie 代数と変形理論の関係について説明する方法は理論的な説明と例示による説明が考えられるが，ここでは後者をとる．代数多様体の変形を思い出す．X を $\mathbb{C}$ 上スムースな代数多様体とするとその変形についての局所モジュライの接ベクトル空間は接束 T_X のコホモロジー

$$H^1(X, T_X)$$

と (non-canonical) 同一視できた．これは X の $\mathrm{Spec}\, k[x]/(x^2)$ への変形の同値類と対応する．では X の $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[x]/(x^{n+1})$ $(n \geq 2)$ への変形はどうかというとこれはコホモロジーであらわすことが出来ない．しかし T_X が Lie 代数の層の構造をもっている．

これを使うと $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]/(x^{n+1})$ への変形も記述できる. T_X が Lie 代数の層であることから, derived な大域切断を DG Lie 代数[11]として

$$\mathcal{R}\Gamma(X, T_X)$$

とることが出来る. (そのようにとる方法はいくつかあるが解析的な状況であれば Dolbeault resolution をとって大域切断をとれば明示的な DG Lie 代数を得ることが出来る.) 一般に局所 Artin k-代数 R に対して X の $\operatorname{Spec} R$ への変形同値類は DG Lie 代数 $\mathcal{R}\Gamma(X, T_X)$ を用いて記述できる (大雑把に言えば $\mathcal{R}\Gamma(X, T_X)$ が局所モジュライの役割をしていると思ってよい[12]). 一般の nilpotent DG Lie 代数 L に対して関手を定義する (例えば [7] 参照).

定義 3.1. $\mathrm{MC}(L) = \{\alpha \in L^1 | \ d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\}$ を Maurer-Cartan 元の集合とする. $\exp(L^0)$ を nilpotent Lie 代数 L^0 から Baker-Campbell-Hausdorff 積で得られる群とする. L^0 は L^1 に $L^0 \to \mathrm{End}_k(L^1)$, $\alpha \mapsto [\alpha, -] - d\alpha$ で作用する. この作用から $\exp(L^0)$ が L^1 に作用する:

$$\mu \mapsto e^{\alpha} \bullet \mu := e^{ad(\alpha)}\mu - \int_0^1 (e^{ad(s\alpha)} d\alpha) ds$$

(μ in L^1). この作用は Maurer-Cartan 元をたもつので, $\overline{\mathrm{MC}}(L) = \mathrm{MC}(L)/\exp(L^0)$ とおく.

Art_k を剰余体を k とする局所 Artin k-代数の圏, Set を集合の圏とする. V を DG Lie 代数とすると, $R \mapsto \overline{\mathrm{MC}}(V \otimes_k m_R)$ によって関手

$$\mathrm{Spf}(V) : \mathsf{Art}_k \to \mathrm{Set}$$

を定義する. m_R は R の極大イデアルで $V \otimes_k m_R$ は $[s \otimes m, s' \otimes m'] = [s, s'] \otimes mm'$ によって nilpotent DG Lie 代数になっているものとする.

注 3.2. DG Lie 代数の擬同型な写像 $V \to V'$ があれば自然同値 $\mathrm{Spf}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spf}(V')$ が誘導されることが示されている.

X の $\operatorname{Spec} R$ への変形同値類の集合は, $\mathrm{Spf}(\mathcal{R}\Gamma(X, T_X))(R)$ と同一視できる[13]. このような基本的な例の結果から, 一般の状況で DG Lie 代数が変形理論を（局所モジュライの形式近傍のレベルで）統制することが期待されてきた[14]. このアプローチのよいところは

1. 変形理論にホモロジー代数の手法を取り入れることができる
2. 導来代数幾何（derived algebraic geometry) の局所版である
3. 導来代数幾何では, DG Lie 代数の∞圏と導来変形問題の∞圏が圏同値になるという DG Lie 代数と変形問題の綺麗な対応がある [14]

といった点である. 1 では, 例えば Goldman-Millson の representation variety の特異点の研究や Poisson 多様体の変形量子化 (Kontsevich) は古典的かつ代表的な応用である. 3 では, 大雑把に

$$\{\text{DG Lie 代数}\} \quad \Leftrightarrow \{\text{DG Artin 環上に定義された形式 } \infty\text{-スタック}\}$$

の対応が示されていてこのアプローチの基本定理といってよい. これは, DG Lie 代数と可換 DG 代数との間の Koszul 双対性の幾何学的な表れとも思える. また変形問題

[11] チェイン複体 L にブラケット $[-,-] : L \times L \to L$ が入っていて Lie 代数の関係式 (Jacobi 恒等式等) を満たすもの (参考文献参照)

[12] 局所モジュライを基点付き形式スキーム（又はスタック）と思うと導来代数幾何の枠組みではそのループ空間をとる事が出来る. 正確に言えば DG Lie 代数はそのループ空間の接束のなす Lie 代数に対応している

[13] 同一視はある意味自然である

[14] これを derived 変形理論の哲学と呼ぶ人もいる

を導来代数幾何の設定で定式化することが自然であることを言っているのであるが, ここではそのことに深く突っ込んでいかず先に進もう.

3.2. Curved A_∞-変形と Hochschild コチェイン. 再び A を標数 0 の体 k 上の DG 代数とする. これの変形を考えたいのであるが, DG 代数としての変形ではなく curved A_∞-代数として変形する. そこで curved A_∞-代数をインフォーマルに復習する. 正確な定義は [7] やそこにある参考文献等を参照してほしい. DG 代数には結合律をみたす積 $A \otimes A \to A$ が入っていたが, A_∞-代数ではその結合律を等号ではなくホモトピーで関係付ける形にする[15]. Curved A_∞-代数とは, データとしては $\mathbb{Z}$-次数付き k-ベクトル空間 V と次数付きベクトル空間の写像の族 $\{b_i\}_{i\geq 0}$

- $b_0 : k \to V[2]$
- $b_1 : V \to V[1]$
- $b_2 : V^{\otimes 2} \to V$
- $b_3 : V^{\otimes 3} \to V[-1]$
- $b_4 : V^{\otimes 4} \to V[-2]$
- $\cdots$

で適当な A_∞-関係式と呼ばれる合成に関する条件をみたすものである. $b_0 = 0$ のとき A_∞-代数と呼ばれ, このとき b_1 が V の微分 ($b_1^2 = 0$), $b_2 : V \otimes V \to V$ が積, $b_3 : V^{\otimes 3} \to V[-1]$ が b_2 の積の結合律に関するホモトピー, b_4 はそのホモトピーの結合律に関する... というデータになっている（従って $b_i = 0$ ($i > 2$) ならば DG 代数である）. $b_0 \neq 0$ の場合が A_∞-代数でない curved A_∞-代数で, このとき一般には $b_1^2 = 0$ が成立しないためホモロジーをとることすら出来ない. 従ってホモロジー代数的な取り扱いがよくない[16].

定義 3.3. A を k 上 DG 代数とする. $R \in \mathsf{Art}_k$ とする. A の R 上 curved A_∞-変形とは, curved A_∞-代数 $A \otimes_k R$ (次数付き R-加群 $A \otimes_k R$ に curved A_∞-構造をいれたもの）で, $A \otimes_k R/m_R$ がもとの DG 代数の構造になるものとする ($1_A \otimes 1_R \in A \otimes_k R$ が単位元であることも課す）. $R \in \mathsf{Art}_k$ に対して $\mathsf{DAlg}_A(R)$ を A の R 上 curved A_∞-変形の同型類の集合とする（変形の同型は自然に定義しておく）. $R \mapsto \mathsf{DAlg}_A(R)$ で変形問題に関する関手

$$\mathsf{DAlg}_A : \mathsf{Art}_k \to \mathrm{Set}$$

を定義する.

$HH^\bullet(A)$ を Hochschild コチェイン複体とする. そのホモロジー $HH^*(A)$ をとると, Hochschild cohomology $\mathrm{Ext}^i_{A\otimes A^{op}}(A, A) = HH^i(A)$ になっている. よく知られているように $HH^*(A)$ は Gerstenhaber 代数になる. $HH^*(A)$ の代数構造のうち Lie 代数構造は, 適切な複体をとると $HH^\bullet(A)[1]$ の Lie 代数構造にまでもちあがり, $HH^\bullet(A)[1]$ は DG Lie 代数になる. これと変形との関係は次で示される:

命題 3.4 ([7])**.** 自然な同値

$$\mathsf{DAlg}_A \simeq \mathrm{Spf}(HH^\bullet(A)[1])$$

がある.

この同値はかなり簡単な対応で示される.

---

[15] トポロジーから生まれた概念で, 位相空間の基点付きループ空間 $\Omega_* S$ にモノイドの構造をループの連結で入れようとすると strict な結合律を満たさないことから高次のホモトピーをとりいれることで派生した代数の概念である

[16] curved A_∞-代数はもっと洗練された概念によって置き換わるべきであると思う

例 3.5. ここでDAlg_Aの雰囲気を古典的な場合を通して考えておく．$\mathsf{DAlg}_A(k[x]/(x^2)) \simeq \mathrm{Spf}(HH^\bullet(A)[1])(k[x]/(x^2))$ であるから,

$$\mathsf{DAlg}_A(k[x]/(x^2)) \simeq \mathrm{Spf}(HH^\bullet(A)[1])(k[x]/(x^2)) \simeq HH^2(A)$$

である．X が k 上スムースな代数多様体で $\mathrm{RMod}(A) = \mathcal{D}(X)$ となっているとき, Hochschild-Kostant-Rosenberg の定理から, 同型

$$HH^2(A) \simeq H^0(X, \wedge^2 T_X) \oplus H^1(X, T_X) \oplus H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

がある．$H^1(X, T_X)$ はスキームの変形空間, $H^0(X, \wedge^2 T_X)$ は非可換方向の変形空間, $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{O}_X$ を twisted 層に変形する空間に対応していると見なすことができる[17].

例 3.6. $X \subset \mathbb{P}^5$ を 3 次 4-fold とする．$\mathrm{Perf}(X)$ を perfect 複体のなす圏とする．

$$\mathcal{A}_X = \{F \in \mathrm{Perf}(X) |\ \mathcal{RH}om_{\mathrm{Perf}(X)}(\mathcal{O}_X(i), F) \simeq 0 \ \text{ for } i = 0, 1, 2\}$$

とおくと $\mathcal{A}_X$ はスムースかつ固有な Calabi-Yau 圏になり, コンパクト生成対象を取ることで, $\mathcal{A}_X$ はスムースかつ固有な 2 次元 Calabi-Yau 代数 A 上の perfect DG 加群の圏と同値になる．Hochschild ホモロジー $HH_*(\mathcal{A}_X) = HH_*(A)$ の各次元が K3 曲面の場合のそれと同じになり,

$$\dim HH_0(A) = 22, \quad \dim HH_{-2}(A) = \dim HH_2(A) = 1$$

で残りは 0 となる (このような圏を K3 圏という)． 2 次元 Calabi-Yau 構造から, $HH^2(A) \simeq HH_0(A)$ である．従って A の変形空間 (の接空間）は 22 次元である．

3.3. **Hodge フィルトレーションの変形.** 次に Hodge 複体の対応物として, 我々は

$$HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$$

を採用していた[18]．ここで（コ）ホモロジーをとらずに複体で考えることは非常に重要な点である．この変形に対する局所モジュライを DG Lie 代数として与えたい．そこで, いきなりフィルトレーションの変形を考えずに, 複体 $HN_\bullet(A)$, $HP_\bullet(A)$ 各々の変形問題を考える．

代数多様体 X 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ の変形を考えると,

$$H^1(X, \mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$$

と局所モジュライの接空間が同一視できた．スキームの例を考えると DG Lie 代数としては $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ を次数付き交換子（graded commutator）で Lie 代数の層とみなして $\mathcal{R}\Gamma(X, \mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$ に DG Lie 代数（或いは L_∞-代数）の構造を入れれば $\mathcal{E}$ の変形を（$\mathrm{Spf}(-)$ を通して）記述するであろうと容易に想像できる．複体の場合にもどる．(C, d) を微分 d をもつ k-ベクトル空間のコチェイン複体として, 変形問題の関手

$$\mathsf{D}_{C/k} : \mathsf{Art}_k \to \mathrm{Set}, \qquad R \mapsto \{C \text{ の } R \text{ への変形の同型類 }\}$$

但し $\{C$ の R への変形の同型類 $\} = \{$R−加群のコチェイン複体 $(C \otimes_k R, \tilde{d}, \tilde{d} \otimes_R k = d)\}/\sim$ を考える．このとき $\mathrm{End}_k(C)$ を自己準同型 Lie 代数とすると,

$$\mathsf{D}_{C/k} \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{End}_k(C))$$

と表すことが出来る．$k[t]$-加群 $HN_\bullet(A)$ の変形問題を考える．R への変形を $R[t]$-加群 $(HN_\bullet(A) \otimes_k R, \tilde{d}$ with $\tilde{d} \otimes_R k = \partial_{Hoch} + tB)$ とする．R への変形同型類の集合を

[17]最後の twisted 層への変形が現れることと変形問題に curved をこめた A_∞-変形を考えなければならないことは対応している

[18]以下 k は簡単のため複素数体とする

$\mathsf{D}_{HN_\bullet(A)/k[t]}(R)$ とかくと（変形の同型は適当に定義する）, $R \mapsto \mathsf{D}_{HN_\bullet(A)/k[t]}(R)$ で関手

$$\mathsf{D}_{HN_\bullet(A)/k[t]} : \mathsf{Art}_k \to \mathrm{Set}$$

を定める．これは, DG Lie 代数 $\mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A))$ で記述され, つまり同型

$$\mathsf{D}_{HN_\bullet(A)/k[t]} \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A)))$$

がある．同様に, $k[t,t^{-1}]$-加群 $HP_\bullet(A)$ の変形同値類を与える変形問題の関手

$$\mathsf{D}_{HP_\bullet(A)/k[t,t^{-1}]} : \mathsf{Art}_k \to \mathrm{Set}$$

を考えると, それは $\mathrm{End}_{k[t,t^{-1}]}(HP_\bullet(A))$ で記述される:

$$\mathsf{D}_{HP_\bullet(A)/k[t,t^{-1}]} \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{End}_{k[t,t^{-1}]}(HP_\bullet(A))).$$

以下 $k[t,t^{-1}]$ を $k[t^{\pm}]$ と書く．

次に, DG Lie 代数の図式

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A)) \arrow[d, "\iota"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{End}_{k[t^{\pm}]}(HP_\bullet(A)) \end{tikzcd}$$

を考える．右縦の射は基底変換 $\otimes_{k[t]} k[t^{\pm}]$ で誘導されるものである．この図式のホモトピーファイバーを $\mathbb{F}$ とおく．$\mathbb{F}$ はDG Lie代数の∞圏で, ファイバー積 $0 \times_{\mathrm{End}_{k[t^{\pm}]}(HP_\bullet(A))} \mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A))$ であり, 実際の DG Lie 代数としても明示的なモデルをとることがが出来る[19].

$$\widehat{\mathrm{Gr}} := \mathrm{Spf}\, \mathbb{F}$$

とおく．ここで, $\mathbb{F}$ と $\widehat{\mathrm{Gr}}$ は, $HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$ に依存しているがそれを示す記号を省略する．$\widehat{\mathrm{Gr}}$ はアファイン・グラスマン多様体と類似してることに注意する．構成から次のモジュライ解釈がある：W が $HN_\bullet(A)$ の R への変形であり, f が基底変換 $W \otimes_{R[t]} R[t^{\pm}]$ から自明な変形 $HP_\bullet(A) \otimes_k R^{triv}$ への変形の（$R[t^{\pm}]$ 上での）同型であるような組

$$(W, f : W \otimes_{R[t]} R[t^{\pm}] \xrightarrow{\sim} HP_\bullet(A) \otimes_k R^{triv})$$

を考える．このような組の（自然に定義した同型についての）同型類の集合と $\widehat{\mathrm{Gr}}(R)$ の間に（R について関手的な）同型がある．この組 (W, f) は, $HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$ の変形をみなせることに注意しよう．つまり, $HN_\bullet(A)$ は W へ変形しているが, f を通して全空間の自明な変形 $HP_\bullet(A) \otimes_k R^{triv}$ のなかへ埋め込まれていると考えられる[20].

別の見方をする．A をスムースかつ固有な DG 代数とする．このとき $\widehat{\mathrm{Gr}}$ は簡単な構造を持っている．Hodge-to-de Rham スペクトル系列の退化（定理 2.7）を用いると

$$\mathbb{F} \simeq (\mathrm{End}_{k[t^{\pm}]}(HH_*(A)((t))) / \mathrm{End}_{k[t]}(HH_*(A)[[t]]))[-1]$$

---

[19] ι の mapping cocone に適当に Lie 代数の構造を入れたものと考えても十分である．

[20] ホモトピー論的には部分複体 $HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A)$ というのは意味を成さないからこれを複体の射とみなすほうが正確である

がわかる．ここで $HH_*(A)(HH_*(A)[[t]], HH_*(A)((t)))$ は次数付きベクトル空間を微分のない複体とみなしたものである．右辺はアーベル DG Lie 代数である．GL_n のアファイン・グラスマン多様体の点集合（k-valued points）が

$$\mathrm{GL}_n(k((x)))/\,\mathrm{GL}_n(k[[x]])$$

とかけることを思い出すと，$\widehat{\mathrm{Gr}} = \mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ は,

"$\mathrm{GL}(HH_*(A))$ の形式的アファイン・グラスマン"

と思うことができる．

4.

この節の結果については [7] を参照．周期写像のモジュライ的意味を思い出すと，

$$\{A \text{ の curved } A_\infty\text{-変形}\} \mapsto \{HN_\bullet(A) \subset HP_\bullet(A) \text{ の変形}\}$$

を考えたい．左辺は命題 3.4, 右辺は 3.3 節参照．上のモジュライ理論的意味をもつ DG Lie 代数の写像 $HH^\bullet(A) \to \mathbb{F}$ を構成することを指導原理に掲げて考えていく．まず，$\tilde{A}$ を A の R 上 curved A_∞-変形としたとき，その Hochschild チェイン $HH_\bullet(\tilde{A})$ を定義でき，これは DG Λ-加群 $HH_\bullet(A)$ の R への変形になっている．そこから $HN_\bullet(A)$ の変形 $HN_\bullet(\tilde{A})$ が誘導される．基底変換 $\otimes_{k[t]}k[t^\pm]$ により，$HP_\bullet(A)$ の変形 $HP_\bullet(\tilde{A})$ も得られる．したがって，

$$\tilde{A} \mapsto HN_\bullet(\tilde{A}) \mapsto HP_\bullet(\tilde{A})$$

によって

$$\mathsf{DAlg}_A \xrightarrow{p} \mathsf{D}_{HN_\bullet(A)/k[t]} \xrightarrow{q} \mathsf{D}_{HP_\bullet(A)/k[t,t^{-1}]}$$

が誘導される．射 $\mathsf{DAlg}_A \to \mathsf{D}_{HN_\bullet(A)/k[t]}$ を $\mathsf{DAlg}_A \to \widehat{\mathrm{Gr}} = \mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ へ持ち上げたい．そのためには合成 $\mathsf{DAlg}_A \to \mathsf{D}_{HP_\bullet(A)/k[t,t^{-1}]}$ が $\mathrm{Spf}(0) = *$ を経由している必要がある．ここで $*$ は 1 点集合を値にとる定値関手である．これは任意の変形 $\tilde{A}$ に対して $HP_\bullet(\tilde{A})$ が $HP_\bullet(A)$ の自明な変形になっていることを要求している．この問題/困難は，その（ナイーブなモジュライの）意味を考えているだけで解消できるものではない．この問題は，

$(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ に入る代数構造と上の p, q を関係付ける

ことによって理解・解消される．そこで，$(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ に入る代数構造を一寸説明する．$HH^\bullet(A)[1]$ には Lie 代数の構造，$HH_\bullet(A)$ には S^1-作用が入っていた．実はこれ以外にも代数構造が入っていて，これら以外に

- 積 $\cdot : HH^\bullet(A) \otimes HH^\bullet(A) \to HH^\bullet(A)$
- Lie 代数作用 $L : HH^\bullet(A)[1] \otimes HH_\bullet(A) \to HH_\bullet(A)$
- 上の積 $\cdot$ に関する加群構造 $I : HH^\bullet(A) \otimes HH_\bullet(A) \to HH_\bullet(A)$

の代数作用素があり，

$$(\cdot, [-,-], L, I, B)$$

がいくつかの関係を満たすような代数構造を定めている．$(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ は，可微分多様体 M の

$$(T^\bullet_M, \Omega^\bullet_M) = (\oplus_{p\geq 0} T^{\wedge p}_M, \oplus_{q\geq 0}\Omega^q_M)$$

の対応物とみなせるが，$(\cdot, [-,-], L, I, B)$ は $(T^\bullet_M, \Omega^\bullet_M)$ における $T^\bullet_M$ の wedge 積，Schouten Lie 括弧，Lie 微分，contraction, de Rham 微分の類似にそれぞれなっている．ただ，$(T^\bullet_M, \Omega^\bullet_M)$ の場合のように代数構造の構成は単純ではない．代数構造

$(\cdot, [-,-], L, I, B)$ は, 2 つのカラーを持つカラー付きオペラッド（色付作用団）により記述される．例えば, $HH^\bullet(A)$ にはいる $(\cdot, [-,-])$ の構造は正確には $HH^\bullet(A)$ 上の E_2-代数構造のことであり, これは Deligne 予想（現在は解決されている）である．これらや Connes 作用素 B の拡張として, $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ に上記の代数構造が Kontsevich-Soibelman [6], Dolgushev-Tamarkin-Tsygan [2], Horel [4] により構成されている (次説も参照).

次は $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ の代数構造との関係をつくる第一歩である．

命題 4.1. *$HH^\bullet(A)[1]$ の $HH_\bullet(A)$ への Lie 代数作用は $HN_\bullet(A)$ への作用を誘導し, $L[[t]] : HH^\bullet(A)[1] \to \mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A))$ を誘導された DG Lie 代数の射とすると,*

$$p : \mathsf{DAlg}_A \to \mathsf{D}_{HN_\bullet(A)/k[t]}$$

は

$$\mathrm{Spf}(L[[t]]) : \mathrm{Spf}(HH^\bullet(A)[1]) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A)))$$

と同一視される． さらに, 合成 $q \circ p : \mathsf{DAlg}_A \to \mathsf{D}_{HP_\bullet(A)/k[t^\pm]}$ は

$$L((t)) : HH^\bullet(A)[1] \to \mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A)) \xrightarrow{\iota} \mathrm{End}_{k[t^\pm]}(HP_\bullet(A))$$

と $\mathrm{Spf}(-)$ をとることで同一視される．

さらに L だけでなく全ての構造をフルに使うことで次が示される:

定理 4.2 (非可換 Ehresmann ファイブレーション定理)**.** *DG Lie 代数の射*

$$L((t)) : HH^\bullet(A)[1] \to \mathrm{End}_{k[t^\pm]}(HP_\bullet(A))$$

は, ヌル-ホモトピック．つまり 0-写像と（写像空間の中で）ホモトピー同値．特に, A の curved A_∞-変形で引き起こされる $HP_\bullet(A)$ の変形は自明である．

周期的巡回ホモロジーは de Rham コホモロジーの対応物であった．これを「位相的不変量」とみなすと, A は変形してもその位相不変量が変形しないという 1 節ででてきた Ehresmann ファイブレーション定理型の結果とみなせる．Eheresmann ファイブレーション定理は古典的周期写像の構成でも肝であった．

上の結果を用いると次の可換図式を得る[21]

$$\begin{tikzcd}
HH^\bullet(A)[1] \arrow[dr, "\mathcal{P}"] \arrow[drr, "L[[t]]"] \arrow[ddr] & & \\
& \mathbb{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{End}_{k[t]}(HN_\bullet(A)) \arrow[d, "\iota"] \\
& 0 \arrow[r] & \mathrm{End}_{k[t^\pm]}(HP_\bullet(A))
\end{tikzcd}$$

四角は引き戻し図式（ホモトピーファイバー）である．図式中の $\mathcal{P} : HH^\bullet(A)[1] \to \mathbb{F}$ が所望の DG Lie 代数の射としての周期写像である．定理としてまとめると：

定理 4.3. *DG Lie 代数の射*

$$\mathcal{P} : HH^\bullet(A)[1] \to \mathbb{F}$$

は, 局所周期写像というべきもので,

[21] DG Lie 代数の∞圏のなかの可換図式をみなさないといけない所もあるがここでは無視する

- $\mathrm{Spf}(\mathcal{P}) : \mathsf{DAlg}_A \simeq \mathrm{Spf}(HH^\bullet(A)[1]) \to \mathrm{Spf}(\mathbb{F}) = \widehat{\mathrm{Gr}}$ は，この節の最初で述べたようなモジュライ理論的解釈が出来る．つまり，変形 $\tilde{A}$ を
$$(HN_\bullet(\tilde{A}), HN_\bullet(\tilde{A}) \otimes_{R[t]} R[t^\pm] \simeq HP_\bullet(A) \otimes_k R^{triv})$$
に送る．
- *Griffiths* 横断性を満たす，
- *Calabi-Yau* （スムースかつ固有）のとき局所トレリ定理を満たす．

周期写像を使った応用を紹介する． 次は，非可換代数幾何の Bogomolov-Tian-Todorov の定理というべきものであり，Katzarkov-Kontsevich-Pantev [5] によりアナウンスされていたものの証明は現れていないものである．

定理 4.4 ([5], [7])**.** *A をスムースで固有な Calabi-Yau DG 代数とする．このとき，$HH^\bullet(A)[1]$ はアーベルな DG Lie 代数と擬同型．特に，A の curved A_∞-変形は，非障害 (unobstructed).*

（我々の）証明であるが，3.3 で述べたように，A がスムースかつ固有であれば $\mathbb{F}$ はアーベル DG Lie 代数（と擬同型）であった．Calabi-Yau のときその性質が周期写像 $\mathcal{P} : HH^\bullet(A)[1] \to \mathbb{F}$ を通して $HH^\bullet(A)[1]$ に伝播することを示すことで証明される．

次にこれを用いて変形量子化について考える．$k[-1]$ をコホモロジカル次数 1 のところに k があるアーベル DG Lie 代数とみなすと，$\mathrm{Spf}(k[-1]) : \mathsf{Art}_k \to \mathrm{Set}$ は (本当の) 形式スキーム $\mathrm{Spf}(k[[x]])$ で表現される．ここで $k[[x]]$ は形式べき級数環で x-進位相を入れている．アーベル DG Lie 代数 L に対して，Lie 代数の射 $k[-1] \to L$ を与えることは，ホモトピーを除いて $H^1(L)$ 分ある．これから $\mathrm{Spf}(k[[x]]) \to \mathrm{Spf}(L)$ が定まり，これは，射影極限 $\lim_n \mathrm{Spf}(L)(k[x]/(x^{n+1}))$ の元とみなせる．この簡単な考察と DG 圏の変形の最近の結果から

定理 4.5. *$\mathcal{C}$ を DG 圏で，スムース，固有かつ Calabi-Yau とする．1 個のコンパクト生成対象を持つとする．このとき，$\alpha \in HH^2(\mathcal{C})$ を与えると，それに対して $\mathcal{C}$ の変形量子化 $\widehat{\mathcal{C}} = \{\mathcal{C}_n\}_{n\geq 0}$ が決まる．ここで $\mathcal{C}_n$ は，$\mathcal{C}$ の $k[x]/(x^{n+1})$ 上 DG 圏への変形で，族 $\{\mathcal{C}_n\}_{n\geq 0}$ は $\mathcal{C}$ の $k[[x]]$ 上への形式的変形をあらわす．*

5.

前節で説明した周期写像の構成やその性質には，
$$(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$$
のもつ代数構造が重要であった．ここで $HH^\bullet(A)$, $HH_\bullet(A)$ は（コ）ホモロジーをとっていない複体であること，そのレベルでの構造が重要であることを再度強調しておきたい．その代数構造の構成について，[8] において最近得られた簡明な構成法も踏まえつつ説明する．この構造は，[6] や [4] では位相的オペラッド（から得られた DG オペラッド），[2] では calculus オペラッドとよばれる生成元と関係式で定義される DG オペラッドとして扱われている．これらのオペラッドは擬同型（のジグザグ）で DG オペラッドとして同一視できることが示されている Willwacher [18] 参照．特に前者の位相的オペラッドは形式性を持つ．ここで繰り返しを恐れずにどのような代数構造であったかをインフォーマルに記述する．$HH^\bullet(A)$ には E_2-代数の構造が入っている．この事実は Deligne 予想と呼ばれていた (様々な方法で解決されているが，現在でもそう呼ばれることが多い）．E_n-代数とは，多重ループ空間の研究の過程で生まれた概念で，n-重ループ空間 $\Omega^n S$（の特異チェイン複体）は，E_n-代数になっている．直感的には，E_2-代数は 2 重ループ空間が持っているような代数構造ということになる．2 重ループ空間 $\Omega^2 S$ をみると，2 回ループを取っているので，「最初のループ」による結合的積構造と「2 個目のループ」による結合的積構造の二つがあり，

その二つの演算が互いに整合性を持っていることが分かる．この整合性の部分を（オペラッドレベルでよくみると）E_2-代数 A は，１つシフトすれば $A[1]$ に DG Lie 代数 (正確には L_∞-代数というべきかもしれない）の構造がはいる．（複体における）E_2-代数は, (コ）ホモロジーをとると Gerstenhaber 代数になることが知られており, Hochschild コホモロジー $HH^*(A)$ は Gerstenhaber 代数であったことから $HH^\bullet(A)$ が E_2-代数になることが予想されていた．一方 $HH_\bullet(A)$ は Connes 作用素由来の S^1-作用（混合複体になっているともいえる）をもっていた．この E_2-代数 $HH^\bullet(A)$ が, $HH_\bullet(A)$ に S^1-作用とある意味整合性を持つように作用する．これら全ての構造は上記のオペラッド上の代数として記述される．位相的なオペラッド上の代数のことを導入者の名前をとって KS-代数と呼ぶことにする．この代数構造の構成は,（この周辺のオペラッド関連の論文を読んだことがある人はご存知かもしれないが）大変複雑で, オペラッドの様々な resolution や様々なモデル, 複雑な式によるチェイン写像を繰り返し用いるものであった．[4] では, factorization ホモロジーを用いて見通しがよくなったがそれでも Hochschild コホモロジーのスイス・チーズオペラッド代数作用の複雑な構成に依拠している．KS-代数構造は, 前節みた周期写像のみならず非可換代数幾何に重要なものである．[8] では $(HH^\bullet(A), HH_\bullet(A))$ を KS-代数構造をコンセプチュアルに明快な構成を与えた．その構成では, どうしてそのような構造が入るのかも分かる仕組みになっており, 拡張として安定∞圏やその同変版（つまり位相群作用付き安定∞圏）, 非加法性版など様々な設定に適用できる方法を与えている．例えば, 位相群作用付き安定∞圏は Landau-Ginzberg 模型の設定に適用する際重要になってくる．構成のポイントを何点か挙げると

- KS-代数のデータを簡単な代数構造の組み合わせ (A, B, M) に分解する．ここで A は, 結合代数の圏の結合代数, B は S^1 作用付き結合代数で A の Hochschild チェイン, M は S^1-作用のついた同変左 B-加群.
- 安定∞圏 $\mathcal{C}$ にその Hochschild コチェインの左加群作用を圏化された意味でいれ, Hochschild チェインをとる.

定理の形でまとめると

定理 5.1 ([8])**.** *R を可換環スペクトラムとする．$\mathcal{C}$ を小さな R-線形安定∞圏とする．このとき，コンセプチュアルな構成方法で（特にモデルに依拠しない方法で）$(HH^\bullet(\mathcal{C}), HH_\bullet(\mathcal{C}))$ に KS-代数構造が入る．*

References

[1] L. Cohn, Differential graded categories are K-linear stable ∞-categories, arXiv:1308.2587
[2] V. Dolgushev, D. Tamarkin and B. Tsygan, Formality of the homotopy calculus algebra of Hochschild (co)chains, available at arXiv:0807.5117.
[3] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Intersection Floer Theory: Anomaly and Obstruction American Mathematical Society (2009)
[4] G. Horel, Factorization homology and Kontsevich Soibelman calculus, J. Noncomm. Geom. Vol 11. (2017) pp. 703–740
[5] L.Katzarkov, M.Kontsevich and T.Pantev, Hodge theoretic aspects of mirror symmetry, available at arxiv:0806.0107
[6] M. Kontsevich and Y. Soibelman, Notes on A_∞-algebras, A ∞-categories and noncommutative geometry. I, “Homological Mirror Symmetry: New Developments and Perspectives” (A.Kapustin et al. (Eds.)), Lect. Notes in Physics 757 (Springer, Berlin Heidelberg 2009) pp. 153–219.
[7] I. Iwanari, Period mappings for noncommutative algebras, preprint
[8] I. Iwanari, Differential calculus of infinity-categories, preprint
[9] D. Kaledin, Motivic structures in non-commutative geometry, Proc. ICM 2010, available at arXiv:1003.3210
[10] D. Kaledin, Spectral sequences for cyclic homology, available at arXiv:1601.00637
[11] J.-L. Loday, Cyclic Homology, Springer-Verlag (1992).

[12] J. Lurie, Higher Topos Theory, Annals of Mathematics Studies, 170. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
[13] J. Lurie, Higher Algebra, draft 2017.
[14] J. Lurie, Spectral algebraic geometry, draft under constrcution 2017
[15] P. Seidel, Fukaya categories and Picard-Lefschetz Theory, European Math. Soc., 2008.
[16] K. Saito and A. Takahashi, From primitive forms to Frobenius manifolds, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 78 (2008), 31–48.
[17] C. Weibel, The Hodge filtrations and cyclic homology, K-theory 12 (1997), 145–164.
[18] T. Willwacher, The homotopy braces formality morphism, Duke Math. J. Vol.165, (2016), 1815–1964.

E-mail address: `iwanari@math.tohoku.ac.jp`