有限次元 A_∞ 代数の表現論

梶浦宏成　(千葉大学 · 大学院理学研究院)

概 要

A_∞ 代数はもともとはホモトピー論における H 空間の研究において導入された [23, 24]（例えば [17] などを見よ）が，この拡張として A_∞ 圏が，シンプレクティック多様体 M のラグランジュ部分多様体の成す深谷圏 $Fuk(M)$ の定式化として導入され（[4]），これがミラー対称性の圏論的定式化に応用されることとなった [16]．複素（代数）多様体上の連接層の導来圏は三角圏であるので，A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ から三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を構成する方法が提案され，ミラー対称なシンプレクティック多様体 M と複素多様体 $\check{M}$ に対して三角圏同値 $Tr(Fuk(M)) \simeq D^b(coh(\check{M}))$ が成り立つというのが圏論的（あるいはホモロジー的）ミラー対称性予想である．

現在（状況によっては定式化をほどよく改良しつつ），この予想が成り立つような例が多数議論されている．一方，A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ が幾何学由来のものであるかどうかに関わらず，それから三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を構成することを具体的に実行すれば新しい三角圏の例が得られることが期待できる．(このような，A_∞ 代数の表現論への応用に関する解説として例えば [15] がある．) 本稿では特に，ある程度よいクラスの $\mathcal{C}$ に対して，$Tr(\mathcal{C})$ を箙の表現論の次数付き，高次積付き拡張のようなものとして構成できることについて，いくつかの具体例を使って紹介したい．

1　A_∞ 代数　(A_∞-algebras)

定義 1 (A_∞ 代数 (Stasheff [23, 24])) $(A, \mathfrak{m} := \{m_k\}_{k\geq 1})$ が A_∞ 代数であるとは，$A = \oplus_{r\in\mathbb{Z}} A^r$ は $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間，$\mathfrak{m} := \{m_k : A^{\otimes k} \to A\}_{n\geq 1}$ が次数 $|m_k| = (2-k)$ の線形写像であって，それらが $n = 1, 2, ...$ について以下の A_∞ 関係式を満たすもののことである．

$$0 = \sum_{k+l=n+1} \sum_{j=0}^{k-1} \pm\, m_k(a_1, \cdots, a_j, m_l(a_{j+1}, \cdots, a_{j+l}), a_{j+l+1}, \cdots, a_n)\ .$$

ここで，各 $i = 1, ..., n$ について，a_i は次数 a_i の斉次の元である（$a_i \in A^{|a_i|}$）とし，$|m_k| = (2-k)$ であるとは，

$$|m_k(a_1, ..., a_k)| = (2-k) + |a_1| + \cdots + |a_k|$$

が成り立つことをいう．

A_∞ 関係式を $n = 1, 2, 3$ のときについてみてみると以下のようになる．$m_1 = d$,

$m_2 = \cdot$, $x, y, z \in V$ と表すことにして

$$
\begin{aligned}
n=1) &\quad d^2 = 0\ , \\
n=2) &\quad d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + (-1)^{|x|} x \cdot d(y)\ , \\
n=3) &\quad (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = d(m_3)(x, y, z) \\
&\quad \cdots\cdots .
\end{aligned}
$$

つまり，$n=1$ の条件より，(A, d) が鎖複体を成し，$n=2$ の条件より d は積 $\cdot$ に関してライプニッツ則を満たし，$n=3$ の条件より積 $\cdot$ がホモトピー m_3 を込めて結合的である．[1] この意味で，$m_4, m_5, \cdots$ はより高次のホモトピーを定めている．

$m_3 = 0$ のとき，積 $\cdot$ は厳密に結合的となる．よってこのとき，$(A, \cdot)$ は次数付き代数，$(A, d, \cdot)$ は次数付き微分代数（DG 代数）を成す．つまり，A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ で $m_3 = m_4 = \cdots = 0$ となるものは DG 代数である．

一方，A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ で $m_1 = 0$ となるものを**極小** A_∞ 代数という．

例 2 極小 A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ で高次の積を持つものの例として以下がある．A は $e^0 = id, e^2, e^5$ で生成させる次数付きベクトル空間とする．ただし e^r の次数は r とする．id は積 m_2 に関する恒等元とする．つまり

$$m_2(id, e^*) = m_2(e^*, id) = e^*.$$

さらに非自明な A_∞ 積

$$m_3(e^2, e^2, e^2) = e^5$$

を入れる．これは A_∞ 代数を成す．特に m_1 を入れてない（$m_1 = 0$）ので極小である．id(strictly unit) を成分に含む A_∞ 関係式は常に自動的に満たされることとなる．この例は，それ以外の非自明な A_∞ 関係式がないような簡単な例となっている．

A_∞ 代数において現れる符号を簡略化するためには，懸垂を考えるとよい．次数付きベクトル空間 A の**懸垂**

$$s : A \to s(A) = A[1]$$

とは，$(A[1])^r := A^{r+1}$ で定められる $s(A)$, あるいは s のことである．

このとき，A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ から $A[1]$ 上に誘導される A_∞ 積

$$m_k^{A[1]} : (A[1])^{\otimes k} \to A[1]$$

は k によらずすべて $|m_k| = 1$ となり，A_∞ 関係式における符号もとても簡単になる．特に，A_∞ 代数を A_∞ 写像で移すようなことを考える際には懸垂したところで行うのがよい．以下 $m_k^{A[1]}$ のことも単に m_k と書くことにする．

---

[1] $d(m_3) := d \circ m_3 + m_3(d \otimes id \otimes id + id \otimes d \otimes id + id \otimes id \otimes d)$ とする．

定義 3 A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$，$(A', \mathfrak{m}')$ が与えられているとき，A_∞ **写像** $\mathfrak{f} : (A, \mathfrak{m}) \to (A', \mathfrak{m}')$ とは次数を保つ線形写像の集まり $\mathfrak{f} := \{f_k : (A[1])^{\otimes k} \to A'[1]\}_{k \geq 1}$ であって，$n = 1, 2, \ldots$ について以下の関係式を満たすもののことである．

$$\begin{aligned} &\sum_{i \geq 1} \sum_{k_1 + \cdots + k_n = n} m'_i (f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_i})(a_1, ..., a_n) \\ &= \sum_{\substack{i+1+j=k \\ i+l+j=n}} f_k (\mathbf{1}^{\otimes i} \otimes m_l \otimes \mathbf{1}^{\otimes j})(a_1, ..., a_n). \end{aligned}$$

この関係式の $n = 1$ の場合から，$m'_1 f_1 = f_1 m_1$，つまり $f_1 : (A, m_1) \to (A', m'_1)$ は鎖写像を成す．

定義 4 A_∞ 写像 $\mathfrak{f} : (A, \mathfrak{m}) \to (A', \mathfrak{m}')$ で，$f_1 : (A, m_1) \to (A', m'_1)$ が擬同型写像（コホモロジーの間の同型を誘導する写像）であるものを，A_∞ **擬同型写像**という．特に，f_1 自体が同型写像であるとき，$\mathfrak{f}$ を A_∞ 同型写像をいう．

A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ に対し，次数付き微分テンソル余代数 $(T^c(A[1]), d := [\mathfrak{m}, \ ], \Delta)$ を構成することができる．これはバー構成と呼ばれている．このとき，A_∞ 写像は次数付き微分テンソル余代数の間の写像を定める．このことから，A_∞ 写像の合成が再び A_∞ 写像になることがわかる．さらに，A_∞ 擬同型写像の合成が A_∞ 擬同型写像となることもわかる．

一方，A_∞ 擬同型写像 $\mathfrak{f} : (A, \mathfrak{m}) \to (A', \mathfrak{m}')$ が存在するとき，逆向きに A_∞ 擬同型写像 $\mathfrak{g} : (A', \mathfrak{m}') \to (A, \mathfrak{m})$ が存在することも知られている．つまり，A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ と $(A', \mathfrak{m}')$ の同値性を，A_∞ 擬同型写像 $\mathfrak{f} : (A, \mathfrak{m}) \to (A', \mathfrak{m}')$ が存在するということによって定めることができる．

A_∞ 代数に関して，例えば以下の 2 つの重要な定理がある．

定理 5 (極小模型定理 (Kadeishvili [7])) A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ に対し，そのコホモロジー $H(A) := H(A; d)$ 上の A_∞ 代数 $(H(A), \mathfrak{m}')$ と A_∞ 擬同型写像 $(H(A), \mathfrak{m}') \to (A, \mathfrak{m})$ が存在する．

このとき特に $m'_1 = 0$，つまり $(H(A), \mathfrak{m}')$ は極小 A_∞ 代数を成す．このような $(H(A), \mathfrak{m}')$ を $(A, \mathfrak{m})$ の**極小模型**という．$(A, \mathfrak{m})$ の極小模型は $H(A)$ 上の A_∞ 同型を除いて一意的である．

$m'_1 = 0$ なので，$H(A, \mathfrak{m}) := (H(A), m'_2)$ は次数付き代数を成す．これを $(A, \mathfrak{m})$ の**コホモロジー代数**という．

定理 6 (A_∞ 米田の補題 (Fukaya [5]) の系) 任意の恒等元を持つ A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ はある恒等元を持つ DG 代数と A_∞ 擬同型となる．つまり，A_∞ 擬同型写像

$$\mathfrak{f} : (A, \mathfrak{m}) \to \text{ある DG 代数}$$

が存在する．

A_∞ 代数を A_∞ 擬同型で分類することを考えると，上の２つの定理より，恒等元を持つ A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ は，極小 A_∞ 代数にとりかえることも，DG 代数にとりかえることもできる．一方，DG 代数の間の同値関係は通常 DG 代数の擬同型写像（$= f_1$ のみから成る A_∞ 写像）のジグザグの列によって定められる．

$$\text{DG 代数} \to \leftarrow \to \ \cdots \ \to \leftarrow \text{DG 代数}'$$

そして実は，２つの DG 代数が DG 代数として同値であることは，それらが A_∞ 代数として A_∞ 擬同型であることが必要十分である．それならば，恒等元を持つ A_∞ 代数は，それと A_∞ 擬同型な DG 代数にとりかえて議論すればよいということになる．それはその通りであるのだが，それらをむしろ A_∞ 代数の枠組みで扱うことの利点は以下の通りである．まず，DG 代数の同値はジグザグを考えなければならないが，A_∞ 擬同型は逆が存在するという意味で扱いやすい．特に，A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ に対し，その極小模型 $(H(A), \mathfrak{m}')$ を具体的に構成する方法が存在し，$(A, \mathfrak{m})$ と A_∞ 擬同型な A_∞ 代数のうち $(H(A), \mathfrak{m}')$ はベクトル空間としては一番小さくなる．逆に $(A, \mathfrak{m})$ と A_∞ 擬同型な DG 代数をとると一般にベクトル空間としては巨大になる．例えばコホモロジーは有限次元であっても DG 代数は無限次元になってしまったりするわけである．このような場合，DG 代数を DG 代数の枠組で具体的に分類等行うのは困難であるが，これらを A_∞ 代数の枠組で，極小 A_∞ 代数にして扱えば，有限次元ベクトル空間の線形代数の話に落ちるわけである．

A_∞ 代数のこのような有用性は有理ホモトピー論にも応用できる（[13] とその参考文献）．以下，同様の観点から A_∞ 圏について議論する．

2　A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ (A_∞-categories)

A_∞ 代数の元を射に格上げしたものが A_∞ 圏である．

定義 7 (Fukaya[4]) A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ とは，対象の集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{X_1, X_2, \cdots\}$ と，各対象 X, Y に対して $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間

$$\mathcal{C}(X, Y) := \oplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}^r(X, Y)$$

と，さらに $k = 1, 2, \ldots$ に対して次数 $2 - k$ の線形写像

$$m_k : \mathcal{C}(X_1, X_2) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}(X_k, X_{k+1}) \to \mathcal{C}(X_1, X_{k+1})$$

が与えられいてそれらが A_∞ 代数の関係式を満たすもののことである．

特に $m_3 = m_4 = \cdots = 0$ である A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ を DG 圏という．

例 8 ４つの対象 $X_1, \ldots, X_4$ から成る以下の $\mathcal{C}$ は A_∞ 圏となる．

$$\mathcal{C} := \quad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\rho_{12}"] \arrow[rrr, bend left, "\rho_{14}"] & X_2 \arrow[r, "\rho_{23}"] & X_3 \arrow[r, "\rho_{34}"] & X_4 \end{tikzcd}$$

ただし，ρ_{ij} は，次数を

$$|\rho_{12}| = |\rho_{23}| = |\rho_{34}| = 1, \quad |\rho_{14}| = 2$$

とする $\mathcal{C}(X_i, X_j)$ の基底とし，非自明な A_∞ 積

$$m_3(\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{34}) = \rho_{14}$$

入れる.（恒等射を入れても入れなくても $\mathcal{C}$ は A_∞ 圏となる．つまり $\mathcal{C}(X_i, X_i) = 0$ 又は $\mathcal{C}(X_i, X_i) = K \cdot id_{X_i}$）.

以下 A_∞ 圏というときには恒等射を持つもののことをいうことにする.

A_∞ 代数のときと同様，A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ のコホモロジー $H(\mathcal{C})$ が，射についてコホモロジーをとってできる次数付き圏として定義される．特に，ゼロ次のコホモロジーのみを考えると，$\mathcal{C}$ が恒等射を持つ A_∞ 圏ならば $H^0(\mathcal{C})$ は普通の意味の圏となる.

２つの A_∞ 圏の間の A_∞ **関手**が，A_∞ 写像の拡張として定義される．A_∞ 関手は,（その f_1 の部分によって）A_∞ 圏のコホモロジーの間の（次数を保つ）関手を定める．A_∞ 圏の間の A_∞ **同値関手**は，A_∞ 関手であって，そのコホモロジーの次数付き圏としての同値を与えるもののことをいう.（少し安直な定義に見えるが使ってみると妥当な定義であることが分かってくる.）

3 三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の構成法

ホモロジー的ミラー対称性の定式化の際に A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ から三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を構成する方法が Kontsevich [16] によって提案された．シンプレクティック多様体 M 上の深谷圏 $Fuk(M)$ は A_∞ 圏として定式化され，それとミラー双対な複素多様体 $\check{M}$ 上の連接層の導来圏は三角圏であるが，この構成によって 2 つの圏を三角圏として比べることを可能にする．実際，三角圏同値

$$Tr(Fuk(M)) \simeq D^b(coh(\check{M}))$$

が存在するであろうというのがホモロジー的ミラー対称性予想である.

この $Tr(\mathcal{C})$ の構成法は， Bondal-Kapranov [3] による DG 圏から三角圏を構成する方法の自然な拡張であり，Fukaya [5] においてより明示的に定式化されているが，以下の 3 ステップから成る.（解説が [22, 9] などにある.）

Step 1. A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ から次数シフトで閉じる加法的 A_∞ 圏 $\tilde{\mathcal{C}}$ を構成する.

Step 2. $\tilde{\mathcal{C}}$ における片側捻り複体の成す A_∞ 圏 $Tw(\mathcal{C})$ を構成する.

Step 3. $Tr(\mathcal{C}) := H^0(Tw(\mathcal{C}))$ と定める.

以下これらについて簡単に説明する．
Step 1. $\tilde{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ の形式的次数シフトの有限直和

$$\mathcal{X} := X_1[r_1] \oplus \cdots \oplus X_l[r_l], \qquad X_* \in \mathcal{C}.$$

達を対象とする加法 A_∞ 圏（つまり対象の直和が存在し，射の空間が直和と両立している A_∞ 圏）とする．ここで，射の空間は，

$$\tilde{\mathcal{C}}^r(X_i[r_i], X_j[r_j]) := \mathcal{C}^{r+r_j-r_i}(X_i, X_j)$$

によって（加法的に拡張することにより）定める．$\tilde{\mathcal{C}}$ の A_∞ 構造 $\tilde{\mathfrak{m}}_*$ としては m_* から自然に誘導されるものを考えたい．ただ，この $\tilde{m}_*$ の決め方は（符号を除けば m_* そのものを加法的に拡張したものを考えるのであるが）自然な符号の決め方はいくらかある．[12] をみよ．
Step 2. さて加法的 A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ が定まったとき，$\tilde{\mathcal{C}}$ における**捻り複体** $(\mathcal{X}, \Phi)$ とは組

$$\mathcal{X} \in \tilde{\mathcal{C}}, \qquad \Phi \in (s\tilde{\mathcal{C}})^0(\mathcal{X}, \mathcal{X})$$

であって以下 A_∞ モーラー・カルタン方程式

$$\tilde{m}_1(\Phi) + \tilde{m}_2(\Phi, \Phi) + \tilde{m}_3(\Phi, \Phi, \Phi) + \cdots = 0.$$

を満たすもののことである．$\mathcal{X} := X_1[n_1] \oplus \cdots \oplus X_l[n_l]$ に対し，Φ を

$$\Phi := \{\phi_{ij} \in s\tilde{\mathcal{C}}^0(X_i[n_i], X_j[n_j])\}_{i,j=1,\ldots,l}$$

と行列表示しよう．捻り複体 $(\mathcal{X}, \Phi)$ が片側捻り複体であるとは，$i \geq j$ のとき $\phi_{ij} = 0$ であるときをいう．つまり

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi_{12} & \phi_{13} & \cdots & \phi_{1l} \\ 0 & 0 & \phi_{23} & \cdots & \phi_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \phi_{(l-1)l} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

となっている．
さて，A_∞ 圏 : $Tw(\mathcal{C})$ を以下で定める．

- 対象は片側捻り複体 $(\mathcal{X}, \Phi)$ とする．
- 片側捻り複体 $(\mathcal{X}, \Phi), (\mathcal{Y}, \Psi)$ に対し，射の空間は単に

$$Tw(\mathcal{C})((\mathcal{X}, \Phi), (\mathcal{Y}, \Psi)) := \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

とする．

- A_∞ 構造 m_n^{Tw} は，各射 $\varphi_{i(i+1)} \in sTw(\mathcal{C})((\mathcal{X}_i, \Phi_i), (\mathcal{X}_{i+1}, \Phi_{i+1}))$ に対し

$$
\begin{aligned}
&m_n^{Tw}(\varphi_{12}, \ldots, \varphi_{n(n+1)}) \\
&:= \sum_{k_1, \ldots, k_{n+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \tilde{m}_*((\Phi_1)^{k_1}, \varphi_{12}, (\Phi_2)^{k_2}, \ldots, \varphi_{n(n+1)}, (\Phi_{n+1})^{k_{n+1}})
\end{aligned}
$$

  と定める．ただし $* = n + k_1 + \cdots + k_{n+1}$ である．

この m_n^{Tw} が実際に A_∞ 関係式を満たすことを示すのは比較的簡単である [5].
Step 3.　さて，$Tw(\mathcal{C})$ のゼロ次のコホモロジー $Tr(\mathcal{C}) = H^0(Tw(\mathcal{C}))$ をとると通常の意味の圏になることは明らかである．つまり，$\mathrm{Ob}(Tw(\mathcal{C})) = Tr(\mathcal{C})$ であり，射の空間 $Tr(\mathcal{C})((\mathcal{X}, \Phi), (\mathcal{Y}, \Psi))$ は $(Tw(\mathcal{C})((\mathcal{X}, \Phi), (\mathcal{Y}, \Psi)), m_1^{Tw})$ のゼロ次のコホモロジーであり，圏 $Tr(\mathcal{C})$ の合成は m_2^{Tw} から誘導される．($m_3^{Tw}, m_4^{Tw}, \ldots$ は捨てられる．)

三角構造は以下のように入っている．まずシフト関手 $T : Tr(\mathcal{C}) \to Tr(\mathcal{C})$ は，

$$
T(X) = X[1], \qquad X \in \mathcal{C} \subset Tr(\mathcal{C})
$$

を満たす加法的自己同型関手として自然に定められる（符号の問題について [12] をみよ）．

そして，m_1^{Tw}-closed な射 $\Psi \in Tw(\mathcal{C})^0((\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}}), (\mathcal{Y}, \Phi_{\mathcal{Y}}))$ の写像錘 $C(\Psi) \in Tw(\mathcal{C})$ が，

$$
\begin{aligned}
C(\Psi) &:= (\mathcal{X}[1] \oplus \mathcal{Y}, \Phi), \\
\Phi &= \begin{pmatrix} \Phi_{\mathcal{X}[1]} & \Psi \\ 0 & \Phi_{\mathcal{Y}} \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

として定義される．ただし $T(\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}}) =: (\mathcal{X}[1], \Phi_{\mathcal{X}[1]})$ とした．これより，$Tr(\mathcal{C})$ における完全三角系列が，写像錘から定まる三角系列と同型なものとして定義される．

4　順序付き A_∞ 圏と例外的生成系

あとでいくらか説明するが，順序付き A_∞ 圏から得られる三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ はかなり性質がよい．

定義 9 A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ が順序付き A_∞ 圏 **(directed A_∞-category)** であるとは，$\mathcal{C}$ が有限個の対象 $X_1, \ldots, X_n$ から成り，各 $H(\mathcal{C}(X_i, X_j), m_1) =: H(\mathcal{C}(X_i, X_j))$ が有限次元であり，特に

$$
\begin{aligned}
H(\mathcal{C}(X_i, X_i)) &= K \cdot id_{X_i}, \\
H(\mathcal{C}(X_i, X_j)) &= 0, \quad \text{if } i > j
\end{aligned}
$$

であるときをいう．

このとき，$(X_1, \ldots, X_n)$ は（それらを $Tr(\mathcal{C})$ の対象とみなして）三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の例外的生成系を成す．

定義 10 三角圏 $\mathcal{T}$ の対象の列

$$\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n)$$

が三角圏 $\mathcal{T}$ の例外的生成系 **(full exceptional collection)** であるとは，$\mathcal{E}$ が三角圏 $\mathcal{T}$ を生成し，かつ

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(E_i, E_i[r]) &\simeq \delta_{r0} \cdot K, \\ \mathcal{T}(E_i, E_j[r]) &= 0 \qquad (i > j, \quad \text{any } r).\end{aligned}$$

を満たすときをいう．例外的生成系 $\mathcal{E}$ がさらに $r \neq 0$ について $\mathcal{T}(E_i, E_j[r]) = 0$ を満たすとき，$\mathcal{E}$ を強例外的生成系 **(full strongly exceptional collection)** という．

5 $Tr(\mathcal{C})$ の性質について

A_∞ 圏から得られる三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ について分かっていることをいくつか紹介しておく．
1. $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$（$A_\infty$ 圏同値）ならば $Tr(\mathcal{C}) \simeq Tr(\mathcal{C}')$（三角圏同値）が成り立つ．（例えば [22].）

これより，三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ は極小 A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ について考えれば十分であることが分かる．
2. $\mathcal{C}$ は対象 $X_1, \ldots, X_n$ からなる順序付き極小 A_∞ 圏とする．（極小なので $H(\mathcal{C}(X_i, X_j)) = \mathcal{C}(X_i, X_j)$ であることに注意する．）さらに $r \neq 0$ について

$$\mathcal{C}^r(X_i, X_j)) = 0$$

であるとする．（このとき $(X_1, \ldots, X_n)$ は $Tr(\mathcal{C})$ の強例外的生成系を成す．）この射代数を

$$A := \tilde{\mathcal{C}}^0(\mathcal{X}, \mathcal{X}), \qquad \mathcal{X} = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$$

とおく．このとき

$$Tr(\mathcal{C}) \simeq D^b(\mathrm{mod}{-}A)$$

が成り立つ．（$D^b(\mathrm{mod}{-}A)$ は有限生成右 A 加群の有界導来圏のことである．）実際，この対応は関手 $\tilde{\mathcal{C}}^0(\ \ , \mathcal{X}) : Tr(\mathcal{C}) \to D^b(\mathrm{mod}{-}A)$ によって与えられる．特にこれによって各 X_i は直既約射影 A 加群 P_i に移される．

$$\mathcal{C} \ni X_i \mapsto P_i = \tilde{\mathcal{C}}^0(X_i, \mathcal{X}) \in \mathrm{mod}{-}A$$

(Bondal [2]).
3. 上の 2. の A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ について，三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の A_∞ 増強は一意的である [10]．ただし，三角圏 $\mathcal{T}$ の A_∞ **増強**とは，$\mathcal{T} \simeq Tr(\mathcal{C}') = H^0(Tw(\mathcal{C}'))$ となるようなある A_∞ 圏 $\mathcal{C}'$ が存在するときの $Tw(\mathcal{C}')$ のことである．A_∞ 増強の同値性についても [10] で適切に定義されている．

この証明において本質的なことは，$H(\mathcal{C})$ の A_∞ 拡張 [11] (A_∞-decoration [13]) が自明であるということだけである．つまり，$\mathcal{C}$ が，$H(\mathcal{C})$ の A_∞ 拡張が自明な A_∞ 圏で

あるとき，三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の A_∞ 増強は一意的（$Tw(\mathcal{C})$ と同値なものしかない）であることがいえる [11]．このような $\mathcal{C}$ の例として，2. の例から「順序付き」という条件をはずしたもの，つまり有限個の対象と，次数ゼロの射のみからなる極小 A_∞ 圏がある．射が次数ゼロのもののみであるとき，次数勘定から高次 A_∞ 積は自明になるしかないからである．ただし「順序付き」という条件をはずしているのでこの場合一般には $Tr(\mathcal{C}) \simeq D^b(\mathrm{mod}{-}A)$ は成り立たない．一般には $Tr(\mathcal{C})$ から，その対象の直和成分をすべて付け加えてできる三角圏 $Tr^\pi(\mathcal{C})$ のほうがよい概念であることがある．

4.　A_∞ 増強の非一意性について：

三角圏 $\mathcal{T}$ で，その A_∞ 増強が一意的でないようなものの例が Rizzardo-Van Den Bergh [20] において構成されている．[10] では例外的生成系を持つ三角圏でそのような例を構成したつもりであったが，証明にギャップがあることが Van Den Bergh によって指摘され（[20]），いまだ修正されていない．

5.　A_∞ 増強を持たない三角圏の例：

もともと Muro-Schwede-Strickland[18] において，A_∞ 増強を持たない（$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上の）三角圏の例が構成されていたが，Rizzardo-Van Den Bergh [21] では，体 K 上の三角圏で A_∞ 増強を持たないものの例が構成されている．

以上のことに加えて，順序付き A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ から得られる三角圏 $Tr(\mathcal{C})$) の持つよい性質のひとつとして以下がある．

定理 11 $\mathcal{C}$ を順序付き A_∞ 圏とする．このとき，$\tilde{\mathcal{C}}$ の片側捻り複体 $(\mathcal{X}, \Phi)$ に対し，必ずある $\tilde{\mathcal{C}}$ の片側捻り複体 $(\mathcal{X}', \Phi')$ で，$Tr(\mathcal{C})$ において $(\mathcal{X}, \Phi)$ と同型で，かつ恒等射を Φ' の成分に持たないものが存在する．

この事実は [10] でも触れられてはいるが，証明は例えば [26] にある．

6　$Tr(\mathcal{C})$ の構成の具体例

定理 11 より，順序付き A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ から得られる三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の対象の分類問題は，Gabriel-Roiter [6] などで解説されている箙の表現の分類の次数付き拡張のような線形代数的手法によって具体的に実行できる.（ただし，箙の表現における「関係式」から来る制約条件は今の場合モーラー・カルタン方程式にとってかわられる.）これについてはある程度 [10] において説明されている．ここではいくつかの簡単な例における具体的な実行例を紹介する．

例 12 $\mathcal{C}$ を例 8 で扱った順序付き極小 A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ とする．

$$\mathcal{C} := \quad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\rho_{12}"] \arrow[rrr, bend left, "\rho_{14}"] & X_2 \arrow[r, "\rho_{23}"] & X_3 \arrow[r, "\rho_{34}"] & X_4 \end{tikzcd}$$

つまり $\mathcal{C}$ は X_1 から X_4 の 4 つの対象からなり，射の空間 $\mathcal{C}(X_i,X_j)$ は $j=i$, $j=i+1$, $(i,j)=(1,4)$ のときのみ非自明であり，それらの次元 1 であり，$\mathcal{C}(X_i,X_i)$ の基底は恒等射 id_{X_i}, その他の場合の $\mathcal{C}(X_i,X_j)$ の基底を ρ_{ij} と表す．特に ρ_{ij} の次数を

$$|\rho_{12}|=|\rho_{23}|=|\rho_{34}|=1,\quad |\rho_{14}|=2$$

と定め，A_∞ 積構造は恒等射を含む m_2 以外の非自明なものとして

$$m_3(\rho_{12},\rho_{23},\rho_{34})=\rho_{14}$$

のみを入れる．

このー $\mathcal{C}$ に対し，三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の対象として例えば以下のようなものがある．

$$(X_1,0)\qquad (X_2,0)\qquad (X_3,0)\qquad (X_4,0)$$

$$(X_1\oplus X_2,\left(\begin{smallmatrix}0&\rho_{12}\\0&0\end{smallmatrix}\right))\qquad (X_2\oplus X_3,\left(\begin{smallmatrix}0&\rho_{23}\\0&0\end{smallmatrix}\right))\qquad (X_3\oplus X_4,\left(\begin{smallmatrix}0&\rho_{34}\\0&0\end{smallmatrix}\right))$$

$$(X_1\oplus X_4[1],\left(\begin{smallmatrix}0&\rho_{14}\\0&0\end{smallmatrix}\right))$$

$$(X_1\oplus X_2\oplus X_3,\left(\begin{smallmatrix}0&\rho_{12}&0\\0&0&\rho_{23}\\0&0&0\end{smallmatrix}\right))\qquad (X_2\oplus X_3\oplus X_4,\left(\begin{smallmatrix}0&\rho_{23}&0\\0&0&\rho_{34}\\0&0&0\end{smallmatrix}\right))$$

$$(X_1\oplus X_2\oplus X_4[1],\left(\begin{smallmatrix}0&\rho_{12}&\rho_{14}\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right))\qquad (X_1[-1]\oplus X_3\oplus X_4,\left(\begin{smallmatrix}0&0&\rho_{14}\\0&0&\rho_{34}\\0&0&0\end{smallmatrix}\right))$$

実は $Tr(\mathcal{C})$ の直既約対象の同型類はこれら 12 個の対象とその次数シフトでつきる [19]．まず，例えば $(X_1\oplus X_2\oplus X_3\oplus X_4,\Phi)$,

$$\Phi=\begin{pmatrix}0&\rho_{12}&0&0\\0&0&\rho_{23}&0\\0&0&0&\rho_{34}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

という対象は存在しない．なぜならば，これは以下のように A_∞ モーラー・カルタン方程式を満たさない．

$$\tilde{m}_1(\Phi)+\tilde{m}_2(\Phi,\Phi)+\tilde{m}_3(\Phi,\Phi,\Phi)=\tilde{m}_3(\Phi,\Phi,\Phi)=\begin{pmatrix}0&0&0&\rho_{14}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq 0\ .$$

上の 12 個の対象の他に，例えば

$$(X_1\oplus X_2\oplus X_3\oplus X_4[1],\left(\begin{smallmatrix}0&\rho_{12}&0&\rho_{14}\\0&0&\rho_{23}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right))\quad (X_1[-1]\oplus X_2\oplus X_3\oplus X_4,\left(\begin{smallmatrix}0&0&0&\rho_{14}\\0&0&\rho_{23}&0\\0&0&0&\rho_{34}\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right))$$

という対象があるが，実はこれらは直既約でない．うまく同型で移すと

$$(X_1\oplus X_2\oplus X_3\oplus X_4[1],\left(\begin{smallmatrix}0&\rho_{12}&0&\rho_{14}\\0&0&\rho_{23}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right))\simeq(X_1\oplus X_2\oplus X_3,\left(\begin{smallmatrix}0&\rho_{12}&0\\0&0&\rho_{23}\\0&0&0\end{smallmatrix}\right))\oplus(X_4[1],0)$$

などとなっていることが分かる．

例 13 実は上の例において $Tr(\mathcal{C})$ は D_4 型箙の道代数 A_4 上の有限生成右加群の導来圏 $D^b(\mathrm{mod}{-}A_4)$ と三角圏同値である．より一般に，以下の順序付き極小 A_∞ 圏

$$\mathcal{C}_n := \quad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\rho_{12}"] \arrow[rrrr, bend left, "\rho_{1n}"] & X_2 \arrow[r, "\rho_{23}"] & X_3 \arrow[r] & \cdots \quad X_{n-1} \arrow[r, "\rho_{(n-1)n}"] & X_n \end{tikzcd}$$

$$|\rho_{i(i+1)}| = 1, \quad |\rho_{1n}| = 2$$

$$m_{n-1}(\rho_{12}, \cdots, \rho_{(n-1)n}) = \rho_{1n}.$$

を考えると，三角圏同値

$$Tr(\mathcal{C}_n) \simeq D^b(\mathrm{mod}{-}A_n)$$

が存在する．ただし A_n は D_n 型箙の道代数である．[19] では，この事実を $\mathcal{C}_n$ の成す例外的生成系を $D^b(\mathrm{mod}{-}A_n)$ の強例外的生成系に変異で具体的に移すことによって示している．

例 14 以下のような次数付き圏を極小 A_∞ 圏（あるいは微分の自明な DG 圏）とみなす．

$$\mathcal{C} := \quad X \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} Y$$

ここで，射の基底の次数は

$$|\alpha| = 0, \quad |\beta| = n \neq 0$$

とする．このとき，すべての直既約対象と既約射が具体的に [25] で分類されている． 直既約対象は図示すると

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[dr, "\beta"] & \cdots \\ X[-n] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & Y[-n] \\ X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & Y \\ X[n] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & Y[n] \\ \cdots & \cdots \end{tikzcd}$$

というような形になる．長さは有限であり，始まりと終わりの頂点が $X[*]$ になっているか $Y[*]$ になっているかで種類が分かれる．

注意 15 この $\mathcal{C}$ はクロネッカー箙の次数付き拡張である．つまり，$n = 0$ のときの $\mathcal{C}$ はクロネッカー箙と呼ばれているものである．このとき $Tr(\mathcal{C}) \simeq D^b(coh(\mathbb{CP}^1))$ であり，$Tr(\mathcal{C})$ の構造についてはよく研究されている [1, 6]．

「新しい三角圏を具体的に構成したい」という目的からすれば，これらの例はまだ不十分である．実際，例 12, 13 は結果的には有限次元代数の有限生成加群の導来圏になっているし，例 14 の場合 $\mathcal{C}$ はただの代数ではなく次数付き代数ではあるが，高次の A_∞ 積は存在しない．実はこの次数付き代数は，次数付き gentle 代数と呼ばれるもののうちの性質のよいものになっている．そのようなよいクラスの次数付き代数に付随する三角圏の構造が [14] で決定されていて，[25] の結果は [14] における結果の特別な場合とみることもできるだろう．一方，三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を具体的に構成可能（例えば直既約対象が加算個となるなど）なような A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ の例は，$\mathcal{C}$ が高次の A_∞ 積を持っていてもまだいくらでもある．特にそのような極小順序付き A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ の中で，変異を行っても高次の A_∞ 積が消えないようなクラスのものがどのくらいあるのか，そのようなものを今後探していきたいと思っている．

参考文献

[1] A.A. Beilinson, Coherent sheaves on P^n and problems of linear algebras. *Func. Anal. Appl.* 12:214–216, 1978.

[2] A. Bondal, Representations of associative algebras and coherent sheaves. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 53:25–44, 1989; translation in *Math. USSR-Izv.* 34:23–42, 1990.

[3] A. I. Bondal and M. M. Kapranov. Enhanced triangulated categories. *Math. USSR-Sb.*, 70:93–107, 1991.

[4] K. Fukaya. Morse homotopy, A^∞-category, and Floer homologies. In *Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993).*

[5] K. Fukaya. Floer homology and mirror symmetry. II. In *Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry*, volume 34 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 31–127. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002. (Baltimore, MD, 1999).

[6] P. Gabriel and A. V. Roiter. *Representations of finite-dimensional algebras.* Springer, 1997.

[7] T Kadeishvili. The algebraic structure in the homology of an $A(\infty)$-algebra. *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR (Russian)*, 108:249–252, 1982.

[8] T. Kadeishvili. Cohomology C_∞-algebra and rational homotopy type. arXiv:0811.1655.

[9] 梶浦宏成. 数物系のための圏論：導来圏，三角圏，A_∞ 圏を中心に. 数理科学 *SGC* ライブラリ 75, 2010.

[10] H. Kajiura. On A_∞-enhancements for triangulated categories. *Journal of Pure and Applied Algebra* 217.8:1476-1503, 2013.

[11] 梶浦宏成. 三角圏の A_∞ 増強について (ミラー対称性の展望). 数理解析研究所講究録 1918: 42-58, 2014.

[12] H. Kajiura. Comments on the shifts and the signs in A_∞-categories, arXiv:1811.12664.

[13] H. Kajiura. Cyclicity in homotopy algebras and rational homotopy theory. Georgian mathematical journal, 25.4:545-570, 2018.

[14] M. Kalck and D. Yang. Derived categories of graded gentle one-cycle algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra* 222.10: 3005-3035, 2018.

[15] B. Keller, Introduction to A-infinity algebras and modules. Homology Homotopy Appl. 3:1–35, 2001.

[16] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.

[17] M. Markl, S. Shnider and J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs, 96. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[18] F. Muro, S. Schwede, and N. Strickland, Triangulated categories without models. *Invent. Math.* 170: 231–241, 2007.

[19] 野原康治．A_∞ 圏から三角圏を構成する方法と例外的対象系の変異について．千葉大学大学院理学研究科修士論文，2016 年 2 月.

[20] A. Rizzardo and M. Van den Bergh. A note on non-unique enhancements. arXiv:1701.00830.

[21] A. Rizzardo and M. Van den Bergh. A k-linear triangulated category without a model. arXiv:1801.06344.

[22] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, *Zurich Lectures in Advanced Mathematics*, European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2008.

[23] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:293–312, 1963.

[24] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:313–327, 1963.

[25] 富岡啓介．ある DG 圏から得られる三角圏の構造について．千葉大学大学院理学研究科修士論文，2016 年 2 月.

[26] 安田圭人．三角 A_∞ 圏における対象の性質について．千葉大学大学院理学研究科修士論文，2016 年 2 月.