平面代数曲線のトポロジーと 2 次被覆の “arithmetic”

徳永浩雄 [1]

イントロダクション

本稿で扱う対象は，“次数が (比較的) 低い平面代数曲線” という代数幾何の中でも古典的かつ初等的な対象である．研究することはもうないのではないか？と思われる御仁もいると思う．本稿では，少し見方を変えればまだそれなりにすることがありそうだという人が一人でも増える事を願いつつ話を進めたい．

$\mathcal{C}$ は被約な射影平面曲線とする．表題の “平面曲線 $\mathcal{C}$ のトポロジー” という用語は $\mathcal{C}$ 自身のトポロジーではなく，射影平面 $\mathbb{P}^2$ と $\mathcal{C}$ の対 $(\mathbb{P}^2, \mathcal{C})$ のトポロジーを指す．本稿で扱うような $\mathcal{C}$ のトポロジーの研究は Zariski の論文 [23]: On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve, Amer. J. Math. **51** (1929), 305–328, から始まる．[23] のイントロダクションでのべられているように ‘与えられた曲線を分岐曲線としてもつ分岐被覆の存在’ に関する問題はまず Enriques が考察した．Zariski の論文では問題をより明確に補空間 $\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}$ の基本群の問題へと帰着させ，計算法 [2] を与えるとともに，様々な例について計算した．Zariski の論文以降，“特異点として通常 2 重点しか持たない曲線の補空間の基本群は可換か”(Zariski 予想) など，$\mathcal{C}$ のトポロジーについては様々な研究がなされてきた．本稿で扱うテーマも論文 [23] で考察された例がその始まりである．まずその例を紹介することから始める．

Example 1. B_i $(i = 1, 2)$ は既約な 6 次曲線で，その特異点は 6 個の $(2, 3)$ 型 cusp のみとする．ただし，B_1 については，6 個の cusp をとおる 2 次曲線が存在するが，B_2 については，そのようなそのような 2 次曲線は存在しないものとする．このとき，二つの基本群 $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_1, *)$ と $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_2, *)$ は同型ではない．

実際，$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_1, *) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であり，$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_2, *) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ である．これらの計算の詳細については，岡による [14]，Degtyarev による 6 次曲線に関する一連の論文を参照されたい．

例 1 のような平面曲線の対は Zariski 対と呼ばれている．非常に大まかにいうと Zariski 対とは，被約な平面曲線の対 $(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)$ であって，以下の 2 条件を満たすものである：

(i) 各 i に対して，$\mathcal{B}^i$ の管状近傍 $T(\mathcal{B}^i)$ で $(T(\mathcal{B}^1), \mathcal{B}^1)$ が $(T(\mathcal{B}^2), \mathcal{B}^2)$ に同相になるものが存在する，

(ii) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{B}^1)$ と $(\mathbb{P}^2, \mathcal{B}^2)$ は同相でない．

Zariski N 組は，Zariski 対の自然な一般化である．さて，第一の条件は組合わせ論的な条件「$\mathcal{B}^i$ の *the combinatorics* (もしくは *the combinatorial type*) が同じ」という条件で置き換えられる (combinatorics とは，$\mathcal{B}^i$ の既約成分の次数，既約成分を指定した上での交わり方，特異点の位相

[1] この報告の内容は，白根竹人（徳島大学），坂内真三（茨城高専），山本桃果（首都大学東京）等との共同研究の成果を含んでいます．また，この研究で，筆者は基盤研究 C (17K05205, 代表：徳永浩雄) の補助を得ています．

[2] van Kampen[12] も参照.

型などを合わせたものである．正確な定義は [3] や [21] を参照されたい）． 後者の条件は比較的扱いやすいため，$\mathcal{B}^i$ の combinatorics を考えることが多い．例 1 の場合なら，combinatorics は，既約成分の次数と特異点の位相型になる．また，直線配置なら，いわゆる「直線配置の組合わせ論的データ」となる．

Zariski 対については，[23] 以降, 例 1 を除くとあまり知られていない状況がしばらく続いていたが，90 年代に入って様々なアプローチの下，数多くの例が見つかり現在に至っている（例えば，[3] 参照）．これらの研究は，曲線の構成法とトポロジーの違いの判定という二つのステップからなることが多い.「判定」の部分で用いられる不変量としては，曲線の補空間の基本群や結び目・絡み目では御馴染みの Alexander 不変量が用いられていた．基本群は braid monodromy と呼ばれる不変量により定まる．[2, 11, 9] では，braid monodromy が非常に強力な不変量であることが示されている．とりわけ，[2] では，$\mathcal{B}$ の一般の点 x を選び，x を通り $\mathcal{B}$ と横断的でない直線全てと $\mathcal{B}$ を合わせた曲線に関するトポロジーについては braid monodromy が等価な不変量であることが示されている．しかしながら，曲線の明示的な方程式がなく，combinatorics のみが与えられた場合は，これを計算するのは基本群の計算と同様な困難が生じる．

本稿では，まず，$\mathbb{P}^2$ の 2 次被覆での分解曲線（分解数）及び連結数を導入する．続いて分解数や連結数を用いた従来とは異なる Zariski 対研究のアプローチ [3] を紹介したい．

1　$\mathbb{P}^2$ の 2 次被覆と分解曲線, 分解数と連結数

ここで述べる分解数や連結数は一般の曲面や Galois 被覆においても定式化されるが，話を簡単にするため，ここでは射影平面 $\mathbb{P}^2$ と被約平面曲線に限ることにする．一般の場合については，[17, 18] を参照されたい．

$\mathcal{B}$ は偶数次の被約平面曲線とし，$f'_{\mathcal{B}} : S'_{\mathcal{B}} \to \mathbb{P}^2$ は $\mathcal{B}$ で分岐する 2 次被覆とする．また，$\mu : S_{\mathcal{B}} \to S'_{\mathcal{B}}$ は以下の可換図式をもつ $S'_{\mathcal{B}}$ の標準特異点解消とする：

$$\begin{array}{ccc} S'_{\mathcal{B}} & \xleftarrow{\mu} & S_{\mathcal{B}} \\ {\scriptstyle f'_{\mathcal{B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{P}^2 & \xleftarrow[q]{} & \widehat{\mathbb{P}^2}, \end{array}$$

ただし， $q : \widehat{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^2$ は 2 次被覆の分岐因子が非特異になるように有限回の blowing up の合成したもので，$f_{\mathcal{B}} : S_{\mathcal{B}} \to \widehat{\mathbb{P}^2}$ は，自然に誘導される 2 次被覆とする．

1.1　分解曲線，分解数

Definition 1.1. D は既約な平面曲線とする．D が, $(f'_{\mathcal{B}})^*D$ が可約, すなわち $(f'_{\mathcal{B}})^*D = D^+ + D^-$, $D^{\pm}$ は相異なる既約な曲線，となるとき，D は $f'_{\mathcal{B}}$ に関する 分解曲線 という．

[3] これを 2 次被覆の arithmetic と見るのは，筆者の妄想かもしれない．

[17] では，より一般の Galois 被覆 $\phi : S \to \Sigma$ について既約な曲線 D の '分解' について考察し，D **の分解数**を $s_\phi(D) := \phi^*(D)$ の既約成分の数と定義した．2 次被覆 $f'_{\mathcal{B}} : S'_{\mathcal{B}} \to \mathbb{P}^2$ の場合は $s_{f'_{\mathcal{B}}}(D)$ は 1 または 2 で，D が分解曲線のとき，$s_{f'_{\mathcal{B}}}(D) = 2$ となる．曲線の分解・非分解という問題については，[19] で考察されたのが最初であるが，曲線の分解とそのタイプが Zariski 対の研究で最初に登場したのは，[4] と思われる．[4] では，曲線の分解・非分解から二面体被覆の存在 · 非存在に関する条件を導き，これを用いて曲線のトポロジーを区別している．[6] では，曲線の分解 · 非分解を直接的に曲線のトポロジーの区別に利用している．その後，以下の主張により Zariski 対の研究において，曲線の分解・非分解がより有効であることが示された．

Proposition 1.1. $B_i(i = 1, 2)$ は偶数次の被約平面曲線とし，$f'_{\mathcal{B}_i}; S'_{\mathcal{B}_i} \to \mathbb{P}^2$ は $\mathcal{B}_i$ で分岐する 2 次被覆とする．D_i $(i = 1, 2)$ は B_i に含まれない既約な曲線とする．もし $\mathbb{P}^2$ から $\mathbb{P}^2$ の homeomorphsim h で (i) $h(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$，$(ii)$ $h(D_1) = D_2$ を満たすものは存在すれば，$s_{f'_{\mathcal{B}_1}}(D_1) = s_{f'_{\mathcal{B}_2}}(D_2)$ である．

証明は，[18] を参照されたい．Proposition 1.1 からつぎの系を得る：

Corollary 1.1. Proposition 1.1 の設定のもとで，(i) $\mathcal{B}_1 + D_1$ と $\mathcal{B}_2 + D_2$ の combinatorics は等しい, (ii) 同相写像 $h : (\mathbb{P}^2, \mathcal{B}_1 + D_1) \to (\mathbb{P}^2, \mathcal{B}_2 + D_2)$ が存在すれば $h(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$ をみたす，の 2 条件が満たされているとする．もし，$s_{f'_{\mathcal{B}_1}}(D_1) \neq s_{f'_{\mathcal{B}_2}}(D_2)$ ならば，$(\mathcal{B}_1 + D_1, \mathcal{B}_2 + D_2)$ は Zariski 対である．

[17] では，補空間の基本群が同型になるような Zariski N 組について考察している． 曲線 D が分解する必要条件として，以下の補題は基本的である．

Lemma 1.1. $\mathcal{B}$, $f'_{\mathcal{B}} : S'_{\mathcal{B}} \to \mathbb{P}^2$ は上記の通りとする．既約な曲線 D と $\mathcal{B}$ の交点 x において $\mathcal{B}$ 及び D は共に非特異とする．もし，D が $f'_{\mathcal{B}}$ に関する分解曲線ならば x における $\mathcal{B}$ と D の交点数 $I_x(\mathcal{B}, D)$ は偶数である．

実際，$I_x(\mathcal{B}, D)$ が奇数とすると，$f'_{\mathcal{B}}|_D$ は x で分岐する D の 2 次被覆となる．すなわち，$(f'_{\mathcal{B}})^*(D)$ は既約でなければならない．

Definition 1.2. $\mathcal{B}$ と D について以下の 2 条件が成立するとき，D を $\mathcal{B}$ の contact 曲線という：
$\forall x \in \mathcal{B} \cap D$ に対し，

- $\mathcal{B}$, D 共に x で非特異,
- $I_x(\mathcal{B}, D)$ は偶数.

論文 [4, 19, 22] では，既約 4 次曲線とその contact conic について考察を行い，Zariski 対の例を得ている．次節で，その一部について述べる．

1.2 連結数

続いて連結数を定義する．なお，$\mathcal{B}$ はこれまで同様，偶数次の被約な平面代数曲線とする．

Definition 1.3. [18] D は被約な平面代数曲線で,

- D の既約成分は $\mathcal{B}$ に含まれない,
- $D \setminus \mathcal{B}$ は連結,

を満たしているものとする．このとき，D の連結数 $c_{f'_{\mathcal{B}}}(D)$ を

$$c_{f'_{\mathcal{B}}}(D) = (f'_{\mathcal{B}})^{-1}(D \setminus \mathcal{B}) \text{ の連結成分の数}$$

と定義する．

分解数同様，連結数についてもつぎの命題がなりたつ：

Proposition 1.2. $B_i (i = 1, 2)$ は偶数次の被約平面曲線とし，$f'_{\mathcal{B}_i}; S'_{\mathcal{B}_i} \to \mathbb{P}^2$ は $\mathcal{B}_i$ で分岐する 2 次被覆とする．D_i $(i = 1, 2)$ は Definition 1.3 にある条件を $\mathcal{B}_i$ に対してみたす平面曲線とするもし，$\mathbb{P}^2$ から $\mathbb{P}^2$ の同相写像 h で (i) $h(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$，$(ii)$ $h(D_1) = D_2$ を満たすものが存在すれば，$c_{f'_{\mathcal{B}_1}}(D_1) = c_{f'_{\mathcal{B}_2}}(D_2)$ となる．

証明は [18] を参照されたい．

2　分解数と Zariski 対: 2 次曲線と既約 4 次曲線

本節では，曲線の分解に注目して得られた既約 4 次曲線と contact conic からなる Zariski 対について [4, 19, 22] で得られた結果について触れる．なお，[19] では，既約曲線一般を扱っているが，ここでは，特異点として高々node しか持たない場合のみ述べる．まず，次の主張が成立する：

Theorem 2.1. $\mathcal{Q}$ は特異点として高々node しか持たない既約 4 次曲線, C は $\mathcal{Q}$ の contact conic とする．$f_C : S_C \to \mathbb{P}^2$ は C で分岐する 2 次被覆とする．このとき,

(i) $\mathcal{Q}$ が非特異または，node を一つしか持たないとき，$s_{f_C}(\mathcal{Q}) = 1$ である．

(ii) $\mathcal{Q}$ の特異点が node 二つのとき，$s_{f_C}(\mathcal{Q})$ は C の取り方に依存する．実際，contact conics C_1, C_2 で，$f_{C_1}(\mathcal{Q}) = 2, f_{C_2}(\mathcal{Q}) = 1$ を満たすものが存在する．

(iii) $\mathcal{Q}$ の特異点が node 三つのとき，$s_{f_C}(\mathcal{Q}) = 2$ である．

Theorem 2.1 について，大まかに解説する．

S_C は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ なので，$\mathrm{Pic}(S_C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であり，S_C 上の因子のクラスは，整数の組 (a, b) で表される．f_C の被覆変換は $(a, b) \mapsto (b, a)$ を引き起こす．従って，$f_C^*\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^+ + \mathcal{Q}^-$ と分解するとき，$\mathcal{Q}^+ \sim (2, 2)$ か $(1, 3)$ であると仮定してよい ($\sim$ は線形同値を表す)．すると，$\mathcal{Q}^+$ の非特異モデルの種数は 1 以下となり，これから，Theorem 2.1 (i) が従う．

また，Theorem 2.1 (iii) のとき，$\mathcal{Q}$ は有理曲線であり，f_C は $\mathcal{Q}$ の非特異モデルの不分岐な 2 次被覆を引き起こすので，$f_C^*\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^+ + \mathcal{Q}^-$ と分解することがわかる．$\mathcal{Q}^+$ の $\mathrm{Pic}(S_C)$ のクラスは，$(2, 2)$ と $(1, 3)$ の二つの可能性があるが，C の取り方によって，いずれの場合も起こる．[4]

では，このクラスの違いを利用して Zariski 対の例を構成している．[22] では，$\mathcal{Q}$ の点 z_o をとり，そこで接する contact conic について，数え上げなど，より詳細な研究を行なっている．

残る Theorem 2.1(ii) について述べるには，少々準備が必要である：

$S'_{\mathcal{Q}}$, $S_{\mathcal{Q}}$ は 1 節の始めに導入した $\mathcal{Q}$ に沿って分岐する 2 次被覆およびその標準特異点解消とする．さらに，$\mathcal{Q}$ の非特異点 z_o を選ぶ．z_o を通る直線からなる pencil は $S_{\mathcal{Q}}$ 上種数 1 の曲線の pencil を与える．z_o の原像は，重複度 2 の base point となる．そこで，blow-up を 2 回行って base point を除去したものを $\nu_{z_o} : S_{\mathcal{Q},z_o} \to S_{\mathcal{Q}}$ とおき，pencil から得られる射を $\varphi_{\mathcal{Q},z_o} : S_{\mathcal{Q},z_o} \to \mathbb{P}^1$ とおく．2 回目の blow-up の例外集合は $\varphi_{\mathcal{Q},z_o}$ の切断になるので，これを O とおく．$\varphi_{\mathcal{Q},z_o}$ は相対極小であり，こうして有理楕円曲面 $S_{\mathcal{Q},z_o}$ が得られる．以下の図式は，$S_{\mathcal{Q},z_o}$ を得る手続きをまとめたものである：

$$\begin{tikzcd} S'_{\mathcal{Q}} \arrow[d, "f'_{\mathcal{Q}}"'] & S_{\mathcal{Q}} \arrow[l, "\mu"'] \arrow[d, "f_{\mathcal{Q}}"] & S_{\mathcal{Q},z_o} \arrow[l, "\nu_{z_o}"'] \arrow[d, "f_{\mathcal{Q},z_o}"] \\ \mathbb{P}^2 & \widehat{\mathbb{P}^2} \arrow[l, "q"] & (\widehat{\mathbb{P}^2})_{z_o}, \arrow[l, "q_{z_o}"] \end{tikzcd}$$

ここで，q_{z_o} は 2 回の blow up の合成，縦の射はすべて誘導された 2 次被覆である．$\varphi_{\mathcal{Q},z_o} : S_{\mathcal{Q},z_o} \to \mathbb{P}^1$ の生成ファイバーを $E_{\mathcal{Q},z_o}$ で表す． $\varphi_{\mathcal{Q},z_o}$ の切断全体からなる集合 $\mathrm{MW}(S_{\mathcal{Q},z_o})$ は $E_{\mathcal{Q},z_o}$ の $\mathbb{C}(t)$- 有理点の集合 $E_{\mathcal{Q},z_o}(\mathbb{C}(t))$ と自然に同一視される．そこで，$s \in \mathrm{MW}(S_{\mathcal{Q},z_o})$ に対し，対応する有理点を P_s で表し，逆に $P \in E_{\mathcal{Q},z_o}(\mathbb{C}(t))$ に対し，対応する切断を s_P とおく．さて，$s \in \mathrm{MW}(S_{\mathcal{Q},z_o})$ はその像を考えることで $S_{\mathcal{Q},z_o}$ 上の曲線と同一視できる．従って $q \circ q_{z_o} \circ f_{\mathcal{Q},z_o}(s)$ は平面曲線を与えている．

[19] で示しているように, contact conic C が与えらたとき，z_o として，$\mathcal{Q}$ と C の接点の一つを選ぶと，C は $S_{\mathcal{Q},z_o}$ で二つの曲線 $C^{\pm}$ に分解し，共に，$\mathrm{MW}(S_{\mathcal{Q},z_o})$ の元を定める．これらの切断に対応する $E_{\mathcal{Q},z_o}(\mathbb{C}(t))$ の元 $P_{C^{\pm}}$ とおく．このとき，次の主張が成立する ([19, Theorem 1.2])

Theorem 2.2.

$$s_{f_C}(\mathcal{Q}) = 2 \Leftrightarrow P_{C^+} = 2P_o \text{ を満たす } P_o \in E_{\mathcal{Q},z_o}(\mathbb{C}(t)) \text{ が存在する．}$$

なお，$P_{C^-} = -P_{C^+}$ であることに注意すると，P_{C^-} に対しても同じ主張が得られる．Theorem 2.2 は，f_C に関する曲線の分解の判定が，‘相方’ である $\mathcal{Q}$ に沿って分岐する 2 次被覆上でなされている点が興味深い．

$$\begin{tikzcd} S_C \arrow[dr, "f_C"'] & & S_{\mathcal{Q},z_o} \arrow[dl, "q \circ q_{z_o} \circ f_{\mathcal{Q},z_o}"] \\ & \mathbb{P}^2 & \end{tikzcd}$$

Theorem 2.1(ii) を示すには，z_o で接する contact conics C_1, C_2 で，

- $P_{C_1^+} = 2P_o$ を満たす $P_o \in E_{\mathcal{Q},z_o}(\mathbb{C}(t))$ が存在する，
- $P_{C_2^+} = 2P_o$ を満たす $P_o \in E_{\mathcal{Q},z_o}(\mathbb{C}(t))$ が存在しない，

をを満たすもの構成することで得られる．詳細は [19] を参照されたい．[19, 20] では，Corollary 1.1 と Theorem 2.1(ii) を用いて，二つの node をもつ既約な 4 次曲線と contact conic からなる Zariski 対を構成している．

3 連結数と Zariski 対

この節では，連結数の応用の一つとして，非特異 4 次曲線 $\mathcal{Q}$ とその複数の 2 重接線を既約成分としてもつ平面曲線の Zariski 対について述べる．よく知られているように $\mathcal{Q}$ は 28 本の 2 重接線をもつ．これらの 28 本の 2 重接線については，様々なことが知られている（例えば，[10] 参照），しかしながら，Zariski 対に関する結果は無いように思われる．ここでは，$\mathcal{Q}$ と 2 重接線 3 本からなる Zariski 対，$\mathcal{Q}$ と 2 重接線 4 本からなる Zariski 3 つ組について触れる [4].

Zariski 対の構成については，前節同様に $\mathcal{Q}$ 上の点 z_o を一つ選んで構成した有理楕円曲面 $\varphi_{\mathcal{Q},z_o}: S_{\mathcal{Q},z_o} \to \mathbb{P}^1$ が重要な役割をする．なお，$\mathcal{Q}$ は非特異なので，前節の可換図式における $S'_{\mathcal{Q}}$ は非特異で $S_{\mathcal{Q}}$ に一致する．また，$f'_{\mathcal{Q}} = f_{\mathcal{Q}}$ である．$\mathrm{MW}(S_{\mathcal{Q},z_o})$ 及び $E_{\mathcal{Q},z_o}(\mathbb{C}(t))$ についても前節と同様なものとする．このとき，$S_{\mathcal{Q},z_o}$ の構成する手順および [15, 16] 等から，つぎの事実が従う:

- $\mathcal{Q}$ の 2 重接線 L の $S_{\mathcal{Q},z_o}$ の preimage は 2 つの既約成分 $L^{\pm}$ からなり，各々$\mathrm{MW}(S_{\mathcal{Q},z_o})$ の元を定める．対応する元を $P_{L^{\pm}}$ とおく（$P_{L^-} = -P_{L^+}$ であることに注意する）．
- z_o における $\mathcal{Q}$ の接線を l_{z_o} とおく．l_{z_o} を以下の条件を満たすようにとる：
  - l_{z_o} は $\mathcal{Q}$ と z_o 以外の相異なる 2 点で交わる．
  - l_{z_o} は z_o で $\mathcal{Q}$ で 3 重に接する，

  このとき，[15] で与えられる $E_{\mathcal{Q},z_o}(\mathbb{C}(t))$ の格子構造（Mordell-Weil 格子）は E_7^* であり，その 56 個の minimal vector は 28 本の 2 重接線 L_i $(i = 1, \ldots, 28)$ を用いて $\pm P_i (:= P_{L_i^{\pm}})$ $(i = 1, \ldots, 28)$ で与えられる．以下，Mordell-Weil 格子の pairing を $\langle\, ,\, \rangle$ で表す．

$\mathcal{Q}$ の 2 重接線 L_i, L_j, L_k を選び

$$\triangle_{ijk} = L_i + L_j + L_k$$

とおく．P_i, P_j, P_k の $\langle\, ,\, \rangle$ に関する Gramm 行列を 2 倍した 3 次正方行列を $G(i,j,k)$ とおく．このとき，このとき，$\triangle_{ijk}$ の連結数 $c_{f_{\mathcal{Q}}}(\triangle_{ijk})$ に関して次の補題が成立する：

Lemma 3.1. I_3 は 3 次の単位行列とする．このとき，

(i) $c_{f_{\mathcal{Q}}}(\triangle_{ijk}) = 1 \Leftrightarrow \det(G(i,j,k) - 3I_3) = 2$

(ii) $c_{f_{\mathcal{Q}}}(\triangle_{ijk}) = 2 \Leftrightarrow \det(G(i,j,k) - 3I_3) = -2$

証明については，[7] を参照されたい．

[4] $\mathcal{Q}$ と 2 重接線 3 本からなる Zariski 対については Artal Barotolo と Vallès の両氏による共同研究（現時点で未出版）がある．筆者は，この例について Artal Bartolo 氏から教わった．

3.1　$\mathcal{Q}$ と 3 本の 2 重接線からなる Zariski 対の構成

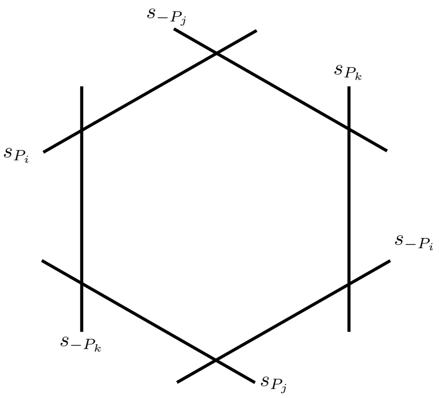
Proposition 1.2 と Lemma 3.1 を用いて $\mathcal{Q}$ と 3 本の 2 重接線からなる Zariski 対を構成することを考える．$E_{\mathcal{Q},z_o}(\mathbb{C}(t))$ の元 P_i, P_j, P_k P_l, P_m, P_n を

$$\det(G(i,j,k) - 3I_3) = 2, \quad \det(G(l,m,n) - 3I_3) = -2$$

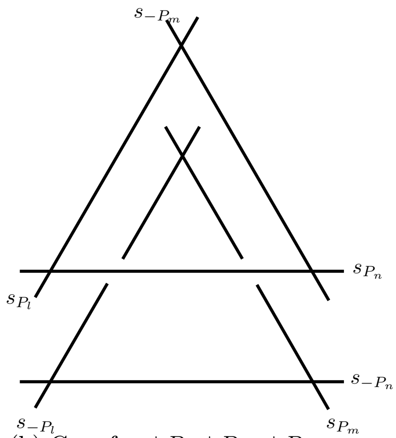
を満たすように取り（このような $P_i, P_j, P_k, P_l, P_m, P_n$ が取れることは例えば [16] 参照），

$$\triangle_{ijk} = L_i + L_j + L_k, \quad \triangle_{lmn} = L_l + L_m + L_n,$$

とおく．すると，Lemma 3.1 より，$c_{f_{\mathcal{Q}}}(\triangle_{ijk}) = 1$, $c_{f_{\mathcal{Q}}}(\triangle_{lmn}) = 2$ を得る．従って，Proposition 1.2 より，$\mathbb{P}^2$ から $\mathbb{P}^2$ への同相写像で，$h(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}, h(\triangle_{ijk} = \triangle_{lmn}$ を満たすものは存在しない．特に，$h(\mathcal{Q} + \triangle_{ijk}) = \mathcal{Q} + \triangle_{lmn}$ を満たす同相写像は，自動的に $h(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ を満たすので L_i, L_j, L_k 及び L_l, L_m, L_n がともに共点でなければ，$(\mathcal{Q} + \triangle_{ijk}, \mathcal{Q} + \triangle_{lmn})$ は Zariski 対となる．なお，この Zariski 対の明示的な例については [7] を参照されたい．



(a) Case for $\pm P_i, \pm P_j, \pm P_k$.



(b) Case for $\pm P_l, \pm P_m, \pm P_n$.

3.2　$\mathcal{Q}$ と 4 本の 2 重接線からなる Zariski 三つ組の構成

2 重接線を一本増やし，4 本にした場合について考察する．選んだ 4 本の直線を $L_{i_1}, L_{i_2}, L_{i_3}, L_{i_4}$ とし，

$$\mathcal{L}_I = \sum_{j=1}^{4} L_{i_j}, \quad I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}, \quad \triangle_{jkl} = L_{i_j} + L_{i_k} + L_{i_l}, \{i_j, i_k, i_l\} \subset I$$

とおく．ここで，$\underline{\mathrm{Sub}}_{\triangle}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_I)$ を以下のように定義する：

$$\underline{\mathrm{Sub}}_{\triangle}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_I) := \left\{ \mathcal{Q} + \triangle_{i_j i_k i_l} \,\middle|\, \forall \{i_j, i_k, i_l\} \subset I \right\}.$$

次に，写像 $c_I : \underline{\mathrm{Sub}}_{\triangle}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_I) \to \{1,2\}$ を

$$c_I : \underline{\mathrm{Sub}}_{\triangle}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_I) \ni \mathcal{Q} + \sum_{k=1}^{3} L_{i_k} \mapsto c_{f_{\mathcal{Q}}}\left(\sum_{k=1}^{3} L_{i_k}\right) \in \{1,2\}$$

と定義する．4 つの元からなる集合 $I_1, I_2 \subseteq \{1, \ldots, 28\}$ を選び $\mathcal{B}_i := \mathcal{Q} + \mathcal{L}_{I_i}$ とく．このとき，対の同相写像 $h : (\mathbb{P}^2, \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{P}^2, \mathcal{B}_2)$ が存在すれば， $h(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ 及び $h(\mathcal{L}_1) = \mathcal{L}_2$ が成立するので，写像 $h_\natural : \underline{\mathrm{Sub}}_{\triangle}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_{I_1}) \to \underline{\mathrm{Sub}}_{\triangle}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_{I_2})$ で，$c_{I_2} = c_{I_1} \circ h_\natural$ を満たすものを誘導する：

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Sub}}_{\triangle}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_{I_1}) \arrow[d, "h_\natural"'] \arrow[dr, "c_{I_1}"] & \\
\underline{\mathrm{Sub}}_{\triangle}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_{I_2})) \arrow[r, "c_{I_2}"'] & \{1,2\}
\end{tikzcd}$$

このとき， [5, Proposition 1.2] と同様な議論を用いて，次の Proposition を得る：

Proposition 3.1. 上記の設定の下，$\mathcal{B}_1$ $\mathcal{B}_2$ の combnatorics が等しく，かつ， $\sharp c_{I_1}^{-1}(1) \neq \sharp c_{I_2}^{-1}(1)$ ならば，$(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ は Zariski 対である．

$\sharp(\underline{\mathrm{Sub}}_{\triangle}(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_I)) = 4$ であるから，5 つの可能性

$$\left(\ \sharp c_I^{-1}(1),\ \sharp c_I^{-1}(2)\ \right) = (0,4)\,,\ (1,3)\,,\ (2,2)\,,\ (3,1)\,,\ (4,0)\,,$$

があり，一見，Zariski 5 つ組が存在するように思われる．しかしながら，次の補題が成立する：

Lemma 3.2. 上記の設定のもと， $\left(\ \sharp c_I^{-1}(1),\ \sharp c_I^{-1}(2)\ \right) = (0,4), (2,2), (4,0)$.

従って, 上記のアプローチで構成可能なのは, 高々 Zariski 3 つ組である. 実際, [7] では, Zariski 3 つ組の明示的な例が与えられている．

Remark 3.1. 2 重接線の数を，5 本以上にした場合については，[8] で考察されている．

4 まとめ

低次の曲線配置 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_o + D$ の埋め込み位相の研究において，

「$\mathcal{B}_o$ に沿って分岐する 2 次被覆 $S'_{\mathcal{B}_o}$ をを構成し，D の $S'_{\mathcal{B}}$ への引き戻しについて，組合わせ論的な構造考察し，$\mathcal{B}$ のトポロジーの研究に応用する」，

というアプローチは素朴ではあるが，これまで述べたように（筆者にとっては）予想した以上に面白い例が構成でき，興味深いもののように見える．Theorem 2.2 が，2 次曲線と 4 次曲線だけの特別な現象なのか，それとも，より一般に拡張されて 2 次被覆の相互法則（?）のようなものがあるのかは，これからの課題である．

参考文献

[1] E. Artal Bartolo: *Sur les couples des Zariski*, J. Algebraic Geometry, **3** (1994) no. **2**, 223–247.

[2] E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber and J.-I. Cogolludo: Braid monodromy and topology of plane curves, Duke Math. J. **118**(2003), 261-278.

[3] E. Artal Bartolo, J.-I. Cogolludo and H. Tokunaga: *A survey on Zariski pairs*, Adv. Stud. Pure Math., **50** (2008), 1-100.

[4] E. Artal Bartolo and H. Tokunaga: *Zariski k-plets of rational curve arrangements and dihedral covers*, Topology and its Applications **142**(2004), 227-233.

[5] S. Bannai, B. Guerville-Ballé, T. Shirane and H. Tokunaga: *On the topology of arrangements of a cubic and its inflectional tangents*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **93** (2017), 50-53.

[6] S. Bannai: *A note on splitting curves of plane quartics and multi-sections of rational elliptic surfaces*, Topology and its Applications **202** (2016), 428-439.

[7] S. Bannai, H. Tokunaga and M. Yamamoto: *A note on the topology of arrangements for a smooth plane quartic and its bitangent lines*, arXiv: 1806.02982.

[8] S. Bannai and M. Yamamoto: *Two-graphs and the embedded topology of smooth quartics and its bitangent lines*, in preparation.

[9] J. Carmona Ruber: *Monodromia de trenzas de curvas algebraicas planas*, thesis, Universidad de Zaragoza, Spain

[10] I. Dogachev: Classical Algebraic Geometry, A Modern View, Cambridge University Press.

[11] Vik. S. Kulikov and M. Teicher: *Braid monodromy factorizations and diffeomorphism types*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 64, no. 2 (2000), 89 -120.

[12] E.R. van Kampen: *On the fundamental group of an algebraic curve*, Amer. J. Math. **55**(1933), 255-260.

[13] K. Oguiso and T. Shioda: *The Mordell-Weil lattice of a Rational Elliptic surface*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **40** (1991), 83-99.

[14] M. Oka: *Symmetric plane curves with nodes and cusps*, J. Math. Soc. Japan **44**(1992), 375-414.

[15] T. Shioda: *On the Mordell-Weil lattices*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **39** (1990), 211-240.

[16] T. Shioda: *Plane Quartics and Mordell-Weil Lattices of Type E_7*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **42** (1993), 61–79.

[17] T. Shirane: *A note on splitting numbers for Galois covers and π_1-equivalent Zariski k-plets*, Proc. AMS **145**(2017), 1009-1017.

[18] T. Shirane: *Connected numbers and the embedded topology of plane curves*, Canadian Math. Bull., 2017 **61**(2018), 650-658.

[19] H. Tokunaga: *Geometry of irreducible plane quartics and their quadratic residue conics*, J. of Singularities(electric), **2** (2010), 170-190.

[20] H. Tokunaga: *Some sections on rational elliptic surfaces and certain special conic-quartic configurations*, Kodai Math. J.**35** (2012), 78-104.

[21] H. Tokunaga: *Sections of elliptic surfaces and Zariski pairs for conic-line arrangements via dihedral covers* , J. Math. Soc. Japan **66** (2014), 613-640.

[22] K. Tumenbayar and H. Tokunaga: *Elliptic surfaces and contact conics for a* 3*-nodal quartic*, Hokkaido Math. J. **47** (2018), 223-244..

[23] O. Zariski: *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51** (1929), 305–328.

首都大学東京大学院理学研究科 数理科学専攻
tokunaga@tmu.ac.jp