$K3$、 Enriques、Coble 曲面—無限自己同型群を中心として

向井 茂 (MUKAI, Shigeru)

次について講演した．原稿に沿って、少し加筆しながら説明する．

予想 Enriques、Coble、または楕円 $K3$ 曲面 S の自己同型群の実質コホモロジー次元に対して

$$\mathrm{vcd}(\mathrm{Aut}\, S) = \max_f \mathrm{MW\text{-}rk}(f) \tag{1}$$

が成立するだろう．ただし、$f : S \to \mathbb{P}^1$ は S の種数 1 fibration を全て走る．また、大域切断のない場合の Mordell-Weil 階数は Jacobian fibration のそれと理解する．代数多様体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える．

§1 実質コホモロジー次元

まず、これについて説明する．群 Γ のコホモロジー次元はその群環のコホモロジー次元

$$\mathrm{cd}(\Gamma) := \mathrm{cd}(\mathbb{Z}[\Gamma])$$

で定義される．すなわち、Γ 自明な加群 $\mathbb{Z}$ の極小自由分解の長さである．次の二つが基本的である．

例 1 階数 n の自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ のコホモロジー次元は n 変数多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ のそれで、n に等しい．

例 2 自由群 F_n のコホモロジー次元は非可換多項式環 $R = \mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ のそれであるが、完全列

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow R \leftarrow R^{\oplus n} \leftarrow 0$$

により $\mathrm{cd}(F_n) = 1$ である．

後者は、生成元の個数によらないことに注意しよう．無限群にも次元があることを示唆しているが、このままでは、非自明な有限群やそれを含む群はコホモロジー次元が無限大となって、次元の実感に合わないので、次に移行する．

定義・命題 指数有限で捩れのない部分群 Γ_{tf} のコホモロジー次元を Γ の実質コホモロジー次元 (virtual cohomology dimension) と呼び、

$$\mathrm{vcd}(\Gamma) := \mathrm{cd}(\Gamma_{tf})$$

で表す.

これの well-defined 性については文献 [11] や [4] を見よ．例 1, 2 の場合は、もともと捩れがないので、コホモロジー次元 $n, 1$ と一致する．次の諸性質が成立する.

- 部分群 Γ' のコホモロジー次元は全体のそれ以下、

$$\mathrm{vcd}(\Gamma') \le \mathrm{vcd}(\Gamma) \tag{2}$$

  である.

- 部分群 Γ' が指数有限なら上で等号が成立する.
- $\mathrm{vcd}(\Gamma) = 0$ は Γ が有限群であることと同値である.
- $\mathrm{vcd}(\Gamma) = 1$ は Γ が実質的に自由 (virtually free)、すなわち、指数有限の自由部分群をもつことであることと同値である.

非自明な例が Borel-Serre[3] を用いて計算できる.

例 3 $L \simeq \mathbb{Z}^{1+n}$ は符号数 $(1, n)$ の格子

$$L \times L \to \mathbb{Z}$$

（整数値対称双線形形式）とする．L の直交群 $O^+_{\mathbb{Z}}(L)$ は n 次元 Lobachevsky 空間 H^n に作用する．ただし、$+$ は直交変換のうちで $(x^2) > 0$ の二つの連結成分（その一つが H^n）を入れ替えないもの全体を表す．このような、数論的部分群については、作用域の（実）次元から $\mathbb{Q}$ 階数を引いたものが実質コホモロジー次元に等しい．我々の場合は、

$$\mathrm{vcd}(O^+_{\mathbb{Z}}(L)) = \begin{cases} n-1 & \exists\ \mathrm{cusp} \\ n & \nexists\ \mathrm{cusp} \end{cases} \tag{3}$$

が成立する.

この例において、H^2 は上半平面で、$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \langle -2 \rangle$ の場合から、$\mathrm{vcd}(SL(2, \mathbb{Z})) = 2 - 1 = 1$ が導かれる．また、H^3 は上半空間で、例えば、$\mathrm{vcd}(SL(2, \mathcal{O}_K)) = 3 - 1 = 2$ を導くことができる．ただし、K は虚 2 次体で、$\mathcal{O}_K$ はその整環である．これらの群と commensurable な群は同じ実質的コホモロジー次元をもつ.

§2 Abel曲面の自己同型群の場合

A を Abel 曲面とする．代数多様体としての自己同型群は半直積

$$\mathrm{Aut}\, A = (\mathrm{Aut}_0\, A) \ltimes A$$

になる．ただし、前半は群多様体として自己同型群で、後半は A 自身が平行移動として作用する部分である．単位元の連結成分が後半なので、それによる剰余類群である $\mathrm{Aut}_0\, A$ のコホモロジー次元について考察する．

命題 1 予想1の Abel 曲面版は正しい．すなわち、A が二つの楕円曲線の直積 $E_1 \times E_2$ と同種なら、

$$\mathrm{vcd}(\mathrm{Aut}_0\, A) = \max_f \mathrm{MW\text{-}rk}(f) \tag{4}$$

が成立する．ただし、$f : A \to E$ は A の種数1 fibration を全て走る．また、Mordell-Weil 階数は、連結成分で割った群（有限生成アーベル群）の階数を表す．

実際、A の Picard 数 ρ に関するよく知られた場合分け

1. E_1, E_2 が同種でないとき、$\rho = 2$.
2. E_1, E_2 が同種で、どちらも複素乗法をもたないとき、$\rho = 3$.
3. E_1, E_2 が同種で、どちらも複素乗法をもつとき、$\rho = 4$.

に従って、(3) を用いて自己同型群を計算すれば、$\mathrm{vcd} = \rho - 2$ をえる。一方、Mordell-Weil 階数も $\rho - 2$ である．

§3 Enriques 曲面

Enriques 曲面の歴史を振り返っておこう．

種数 $g \geq 0$ は代数曲線の最も重要な（離散的）不変量である．$g = 0$ は射影直線 $\mathbb{P}^1$（複素数体上で考えているので Riemann 球）を特徴付け、$g = 1$ は楕円曲線 $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$、$\mathrm{Im}\,\tau > 0$、を特徴付ける．両者は曲線の中のエリートで、他の種数 $g \geq 2$ のもの全てを合わせたものよりも重要度が優っているように思える．よって、高次元代数多様体において $g = 0, 1$ に対応するクラスを見つけることは大いに意味のあることだろう．これを実際に2次元で実行したのがイタリア学派と称される人達である．種数 g の一般化に相応しい双有理不変量（これらも非負整数）が二つ見つかる．

- 至る所で正則な標準形式の空間のなすベクトル空間の次元 p_g．これは幾何的種数 (geometric genus) と呼ばれる．

- 多様体の Hilbert 多項式を $H(t)$ とするとき、$p_a := 1 - H(0)$ で定まる算術的種数 (arithmetic genus)[1].

曲線の場合、$p_g = p_a$ で両者は g に外ならないが、2 変数以上では一般に両者は一致しない．曲面に限定すると常に $p_g \geq p_a$ が成立し、身近な例では等号が成立する．そこで、差 $q := p_g - p_a \geq 0$ が定義され、不正則数 (irregularity) と名付けられた．そして、$\mathbb{P}^1$ の特徴付けを一般化する候補として、次が提出された．

問題 1 二つの種数が消える、すなわち、$p_g = p_a = 0$（$p_g = q = 0$ と同値）ならば、曲面は有理的か、すなわち、関数体は二つの元で生成されるか？

（逆が成立するのは比較的容易である．）この問題に対する挑戦から二つの結果が得られた．一つは、$p_g = 0$ の部分を少し強めて得られる特徴付けである．標準形式全体のベクトル空間の替わりに、2 重標準形式を使って p_g と同様に定義される不変量 P_2 が鍵になる．これは倍種数 (bigenus) と呼ばれ、1 変数の場合には $\max\{g, 3g-3\}$ と一致する．

定理 2 [Castelnuovo] 不正則数と倍種数が消える（$q = P_2 = 0$）代数曲面は有理的である．(逆も正しい．)

では、もとの問題はどうなのだろうか？$p_g = q = 0$ が $P_2 = 0$ を導き、問題は肯定的に解かれるのだろうか？それとも $p_g = q = 0$ だが $P_2 \neq 0$ なる代数曲面が存在するのだろうか？これには二人の数学者 Castelnuovo と Enriques によって解答が与えられた．Castelnuovo は $P_2 = 2$ のものを、Enriques は $P_2 = 1$ の曲面で $p_g = q = 0$ のものをそれぞれ構成した．後者はその後 Enriques 曲面と呼ばれ、小平次元 $\kappa = 0$ のクラスに属する 4 種の曲面族の一つにおさまっている．4 種は次のとおりで、楕円曲線の自然な 2 次元版であると考えられる．

p_g	0	0	1	1
q	0	1	0	2
曲面	Enriques	倍楕円	K3	Abel, $\mathbb{C}^2/\Gamma, \Gamma \simeq \mathbb{Z}^4$

Enriques 自身の与えた例を紹介しておこう．

例 4 [Enriques の 6 次曲面] 3 次元射影空間 $\mathbb{CP}^3$ 内の 6 次曲面 $f_6(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ で、4 面体 $x_0x_1x_2x_3 = 0$ の 6 辺（$x_1 = x_2 = 0$ 等）に沿って特異で、それ以外で穏やかな特異点しかもたないとする．このとき、3 変数多項式関係 $f_6(1, x_1, x_2, x_3) = 0$ の定める 2 変数代数関数体は $q = p_g = 0$ をみたすが非有理的である．

[1]現在この言葉は殆ど使われない．これ以降は専ら q（2 変数の場合は $p_g - p_a$）を使って叙述を進める．

6辺に沿って特異という条件は、$f_6(x_0,x_1,x_2,x_3)$ の4つの偏微分 $\partial f_6/\partial x_i$、$i=0,\dots,3$、が6辺で消えるということに外ならない．より具体的に、4定数 $a_0,\dots,a_3$ と4変数斉次2次斉次式 $Q(x)$ を用いて

$$f_6(x_0,x_1,x_2,x_3)=x_0^2x_1^2x_2^2x_3^2\left(\frac{a_0}{x_0^2}+\frac{a_1}{x_1^2}+\frac{\mathfrak{a}_2}{x_2^2}+\frac{a_3}{x_3^2}\right)+x_0x_1x_2x_3Q(x_0,x_1,x_2,x_3)$$

と表せる.（これより、10次元族であることがわかる.）「穏やかな特異点」は、正規化をとったときに有理2重点しかもたないことを意味する.

現代的には、$K3$ 曲面 X を固定点のない対合 ε（位数2の自己同型）で割ってえられる商曲面 $S=X/\varepsilon$ が Enriques 曲面であると説明されることが多い.（ただし、標数2は例外的で別の定義が必要となる.）上の例4の $(K3)/\varepsilon$ としての表示については、例えば [8] を見よ.

今回は説明できなかったが、固定点軌跡 $\mathrm{Fix}(\varepsilon)$ が非特異有理曲線の疎な和集合 $\amalg_m(-2)\mathbb{P}^1$ であるとき、$S=X/\varepsilon$ は Coble 曲面（または、対数的 Enriques 曲面）であるという ([5])．$m\geq 1$ のとき、S は m 個の $(-4)\mathbb{P}^1$ を境界とする有理曲面である.

§4　予想の成立する場合

Enriques 曲面は常に種数1 fibration $f:S\to\mathbb{P}^1$ をもつ．これの Jacobian fibration $\mathrm{Jac}\,f:S_f\to\mathbb{P}^1$ は有理楕円曲面で、その Mordell-Weil 階数を MW-rk(f) で表す．有理楕円曲面 S_f は射影平面 $\mathbb{P}^2$ を9回爆発してえられるが、爆発中心の9点は二つの3次曲線の交点に重複度を込めて一致する．Jacobian fibration の定義より、$\mathrm{Jac}\,f$ の Mordell-Weil 群 MW(f) は平行移動でもって S に作用する．よって、埋め込み

$$\mathrm{MW}(f)\hookrightarrow \mathrm{AutS}$$

がえられる．特に、(2) より、予想1の自明な方向の不等式

$$\mathrm{vcd}(\mathrm{Aut}\,S)\leq \max_f \text{MW-rk}(f) \tag{5}$$

をえる．この反対方向の不等号 $\geq$ が成立する理由は現時点では見つかってない．ここでは、それが成立する例をいくつか挙げよう.

例 5 (M.-Ohashi[9]) 座標点で4個の通常2重点をもつ対称4次曲面

$$\overline{X}_k\colon\, s_2^2=ks_4,\quad k\neq 36,4,0 \tag{6}$$

の極小特異点解消 X_k（$K3$ 曲面である）を標準 Cremona 変換

$$\varepsilon\colon\,(x_1:\cdots:x_4)\mapsto\left(\frac{1}{x_1}:\cdots:\frac{1}{x_4}\right) \tag{7}$$

の誘導する対合 ε で割ってえられる Enriques 曲面 $S_k = X_k/\varepsilon$ に対して予想 1 は正しい．ただし、s_i は斉次座標 $x_1, \ldots, x_4$ の i 次基本対称式である．より精密に自己同型群は半直積 $(C_2^{*4}) \rtimes \mathfrak{S}_4$ と同型で、完全列

$$1 \to F_3 \to \mathrm{Aut}\, S_k \to \mathfrak{S}_4 \times C_2 \to 1$$

より、階数 3 の自由群を指数 48 の部分群に含む．（よって、実質的に自由で $\mathrm{vcd} = 1$ である．）

注意 1 この Enriques 曲面は [7] で考察された E_7 型と呼ばれる 3 次元族の部分族をなしている．

簡単のために、予想 1 の右辺を（種数 1 fibrtion をもつ）曲面 S の MW 階数と呼ぶことにする．

例 6 Nikulin[10]–金銅 [6] による分類より、MW 階数が 0 の Enriques 曲面に対して、予想 1 は正しい．

例 7 [9, Remark 5] 一般の Enriques 曲面 S は $(-2)\mathbb{P}^1$ を含まない．このとき、自己同型群は直交群 $O^+_{\mathbb{Z}}(H^2(S,\mathbb{Z})_f)$ の指数有限の部分群であるので、[3] より、実質コホモロジー次元は 8 に等しい．（これは、Barth-Peters[1] によるより精密な結果の系である．）ただし、$H^2(S,\mathbb{Z})_f$ は第 2 コホモロジー群を捻れで割ってえられる符号数 $(1,9)$ の格子である．一方、$(-2)\mathbb{P}^1$ を含まないことより、全ての楕円 fibration の MW 階数が 8 である．よって、やはり予想 1 は正しい．

§5　Picard 数 20 の $K3$ 曲面

最後に楕円 $K3$ 曲面の場合を考えよう．と言っても一般の場合ではなく、標題のように塩田特異な場合である．楕円 fibration $X \to \mathbb{P}^1$ をもつことはよく知られている．より精密に、塩田・猪瀬 [12, §5] では、MW 階数が正の楕円 fibration $X \to \mathbb{P}^1$ が構成されている．そして、これの系として自己同型群 $\mathrm{Aut}\, X$ はいつも無限群であることを示している．

さて、塩田特異な $K3$ 曲面 X の同型類は超越格子 T_X の同型類で定まる．その判別式を $\mathrm{disc}\, T_X$ を d で表す．類数が 1 の場合は、判別式 d でもって一意的に決まる塩田特異 $K3$ 曲面を X_d で表す．T_X は偶で正定値なので、$d \equiv 0, 3 \bmod 4$ であることに注意しよう．

Vinberg[14] は「最も代数的な $K3$ 曲面」として X_3, X_4 を考察し、それらの自己同型群を決定した．その系として $\mathrm{AutX_d}, d = 3, 4,$ は実質的に自由であることがわかる．(5) によって、予想 1 が成立する．

Vinberg 曲面の「次に代数的な $K3$ 曲面」が問題となるが、これに関して次が成立する．

定理 3 [M.-Ohashi] $d = 3, 4$ 以外の塩田特異 $K3$ 曲面の MW 階数はいつも 2 以上である. また、2 に等しいのは、判別式 $d = 7, 8$ と同値である.

次は予想 1 の特別な場合である.

問題 2 $\mathrm{Aut}\, X_d$ $(d = 7, 8)$ の実質的コホモロジー次元は 2 か？

塩田特異 $K3$ 曲面 X_7 の自己同型群の生成系は Ujikawa[13] によって求められている. また、X_8 の楕円 fibration の ADE 型は Bertin-Lecacheux[2] によって分類されている.

参考文献

[1] Barth, W. and Peters, C.: Automorphisms of Enriques surfaces, Invent. Math. **73** (1983), 383–411.

[2] M.J. Bertin and O. Lecacheux, *Elliptic fibrations on the modular surface associated to* $\Gamma_1(8)$, in “Arithmetic geometry of $K3$ surfaces and Calabi-Yau threefolds”, Fields Inst. Comm. **67**(2013), 153–265.

[3] Borel, A. and Serre, J.P.: Corners and arithmetic groups, Comment. Math. Helv. 48 (1973), 436491.

[4] Brown, K. S.: Cohomology of groups, Springer-Verlag, 1982.

[5] Dolgachev, I. and Zhang, D.Q.: Coble rational surfaces, Amer. J. Math. **123**(2001), 79–114.

[6] Kondo, S.: Enriques surfaces with finite automorphism groups, Japan. J. Math. **12** (1986), 191–282.

[7] 向井 茂：Enriques surfaces and root systems — Enriques surfaces of type E_7 —, 2010 年度城崎代数幾何学シンポジウム報告集, 108–115.

[8] Mukai, S. and Ohashi, H.: Enriques surfaces of Hutchinson-Göpel type and Mathieu automorphisms, in *Arithmetic and Geometry of* $K3$ *surfaces and Calabi-Yau threefolds*, Fields Institute Communications **67**, 2013, pp. 429–454.

[9] Mukai, S. and Ohashi, H.: The automorphism groups of Enriques surfaces covered by symmetric quartic surfaces, in “Recent Advances in Algebraic Geometry”, A volume in honor of Rob Lazarsfeld’s 60th birthday, eds. Hacon, Mustata and Popa, Cambridge Univ. Press, 2015, 307–320.

[10] Nikulin, V.V.: On the description of the groups of automorphisms of Enriques surfaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR **277**(1984), 1324–1327.

[11] Serre, J.P. : Cohomologie des groupes discrets, in "Prospects in Mathematics", Ann. of Math. Studies, **70**(1971), 77–169.

[12] Shioda, T. and Inose, H.: On singular surfaces, in "Complex analysis and algebraic geometry", Iwanami-Shoten, 1977.

[13] Ujilkawa, M.: The automorphism group of the singular $K3$ surface of discriminant 7, Comment. Math. Univ. St. Pauli, **62** (2013), 11–29. MR3113614

[14] Vinberg, E.B.: The two most algebraic K3 surfaces, Math. Ann. **265** (1983), 1–21.