半安定還元の場合の A_{inf} コホモロジー

越川 皓永 *

素数 p に対し, p 進体上の多様体のコホモロジーの関係を調べるのが p 進 Hodge 理論であり, 整構造も込めて調べる場合は整 p 進 Hodge 理論と呼ばれる. p が“大きく”, 分岐がない場合などは比較的よく分かっていた. より一般的な状況において, Bhatt-Morrow-Scholze は整 p 進 Hodge 理論の新しい枠組みとして, A_{inf} 加群となるコホモロジー（以下, 単に A_{inf} コホモロジーと呼ぶ）を良還元の場合に導入した [3]. [4] では [3] の多くの結果を半安定還元の場合に拡張したので, これを報告する.

以下では次の設定を考えることにする. ([4] ではもう少し一般的な場合も扱っている.) K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とし, O_K をその整数環, k を剰余体とする. C を K の代数閉包 $\overline{K}$ の p 進完備化とし, $\overline{k}$ をその剰余体とする. $\mathcal{X}$ を O_K 上の半安定スキームとする. すなわち, $\mathcal{X}$ はエタール局所的に次の O_K スキーム上エタールである:

$$\operatorname{Spec} O_K[T_0, \ldots, T_r, \ldots, T_d]/(T_0 \cdots T_r - \pi).$$

ここで, 整数 r は $0 \leq r \leq d$ を満たし, π は O_K の素元である. (π は固定してはいない.) この条件は上記のアフィンスキームを

$$\operatorname{Spec} O_K[T_0, \ldots, T_r, T_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}]/(T_0 \cdots T_r - \pi).$$

で置き換えたものと同値であり, 以下ではこちらの条件を念頭に議論することにする.

形式スキーム $\mathfrak{X}$ を $\mathcal{X}_{O_C}$ の p 進完備化とする. (O_C は Noether でないことに注意. このような理論の基礎付けについては例えば最近出版された [5] がある.) C 上の adic 空間（あるいはリジッド解析空間）X を $\mathfrak{X}$ の一般ファイバーとする.

謝辞 講演の機会を与えてくださった今井直毅さん, 都築正男さん, シンポジウム責任者の藏野和彦さんら関係者の方々, 原稿にコメントしていただいた伊藤哲史さんと松本雄也さんに感謝いたします.

*京都大学数理解析研究所 teruhisa@kurims.kyoto-u.ac.jp

1　様々なコホモロジーと p 進 Hodge 理論

スキーム $\mathcal{X}$ から定まるコホモロジーをまず 3 つ紹介する．この 3 つのコホモロジーとその付加構造の関係を調べるのが p 進 Hodge 理論の主な目的である．

1.1　p 進エタールコホモロジー

$\mathcal{X}$ が O_K 上有限型であるとする．$\mathcal{X}_{\overline{K}}$ のエタールコホモロジー $H^i_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ はエタール景を用いて定義される有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群であり, K の絶対 Galois 群が作用する．(p 進 Hodge 理論において Galois 作用は重要であるが, [3, 4] の設定において一般には Galois 作用はない.)　また, Huber の結果により, $H^i_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ は adic 空間のエタールコホモロジー $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_p)$ に (Galois 作用付きで) 同型である．

各次数のコホモロジーの代わりに $\mathbb{Z}_p$ 加群の導来圏の対象 $R\Gamma_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ および $R\Gamma_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_p)$ も存在し, これらは同型となる．

1.2　対数的 de Rham コホモロジー

対数的 de Rham コホモロジー $H^i_{\text{logdR}}(\mathcal{X}/O_K)$ は $\mathcal{X}$ の対数的 de Rham 複体のコホモロジーとして定義される O_K 加群である．K をテンソルして得られる K ベクトル空間は一般ファイバーの de Rham コホモロジーと同型になり, Hodge フィルトレーションが定まる．(整な Hodge フィルトレーションも考えることができるがここでは扱わない.)　$\mathcal{X}$ が O_K 上固有ならば有限生成 O_K 加群になり, $H^i_{\text{logdR}}(\mathcal{X}/O_K) \otimes O_C$ は $\mathfrak{X}$ のコホモロジーとして書くこともできる．

エタールコホモロジーのときと同様, O_K 加群の導来圏の対象 $R\Gamma_{\text{logdR}}(\mathcal{X}/O_K)$ も存在する．

1.3　対数的クリスタリンコホモロジー

対数的スキームの構造を $\mathcal{X}$ および $\operatorname{Spec} O_K$ に自然に定める．(上記の対数的 de Rham コホモロジーはこの対数的構造について定まるものである.)　その特殊ファイバー $\mathcal{X}_k$ の対数的クリスタリンコホモロジー（兵頭加藤コホモロジーとも呼ばれる）$H^i_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ を $W(k)$ 係数で考えることができる．ただし, ここで $W(k)$ は k の Witt ベクトルの環であり, $\mathbb{N} \to W(k); 1 \mapsto 0$ で定まる対数的構造を入れている．Witt ベクトルの環 $W(k)$ には関手性により自然な Frobenius 持ち上げ φ が定まるが, $H^i_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ には φ について半線形な自己写像 (これも φ で書くことにする）が定まる．$\mathcal{X}$ が O_K 上固有な

らば, $H^i_{\mathrm{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ は有限生成 $W(k)$ 加群であり, $\varphi[1/p]$ は全単射になる．また, 有限次元 $K_0(=W(k)[1/p])$ ベクトル空間 $H^i_{\mathrm{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k))[1/p]$ には冪零 K_0 線形自己写像 N であって, $N\varphi = p\varphi N$ を満たすものが定まる. $H^i_{\mathrm{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k)) \otimes W(\overline{k})$ は $\mathfrak{X}_{\overline{k}}$（に対数的構造を与えたもの）を用いても書ける.

兵頭加藤同型により, p を可逆にすると, 対数的クリスタリンコホモロジーと対数的 de Rham コホモロジーは結びつく．この関係は p 進 Hodge 理論で大事ではあるが, 詳細は省略する.

上と同様 $W(k)$ 加群の導来圏の対象 $R\Gamma_{\mathrm{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ が存在する.

1.4　比較定理

p 進 Hodge 理論の重要な結果 (いわゆる C_{st} 予想) を主張だけ紹介する．$\mathcal{X}$ が固有ならば, 付加構造を保つ同型

$$H^i_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{\mathrm{st}} \cong H^i_{\mathrm{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k)) \otimes_{W(k)} B_{\mathrm{st}}$$

が存在する．特に, Galois 表現 $H^i_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)[1/p]$ は半安定と呼ばれる性質を持つことになる．B_{st} は Fontaine の p 進周期環（付加構造を持つ）の 1 つであるが, 説明しない．ただし, p は B_{st} で可逆になることを強調しておく.

[9] による最初の証明をはじめ, 色々な証明が今では知られており, [4] でも (形式スキームへの一般化も含めた) 別証明を与えた．(なお証明ごとに構成している同型が同じかどうかは非自明であり, 知られているケースも多いものの注意する必要がある.)

整 p 進 Hodge 理論はコホモロジーの整構造も比較しようというものである. しかし, 比較定理の写像は一般には両辺の整構造を保たず, 整レベルで直接比較するのは難しい．(後で言及するように, そもそも捩れの大きさも一般には異なる.)

2　主定理

前節で与えた 3 つのコホモロジーの整レベルでの比較を, 間接的にではありながらも, 可能にするのが A_{inf} コホモロジーである．まず, 環 A_{inf} の基本的性質を復習する.

2.1　p 進周期環 A_{inf}

まず, 次の標数 p の完全環を考える:

$$\mathcal{O}_C^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C/p \;(\cong \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C).$$

括弧内の同型は乗法モノイドとしてのみの同型である．$O_C^\flat$ は自然に ($\overline{k}$ を剰余体とする) 付値環になり, $C^\flat$ をその商体とする．パーフェクトイド環の言葉では, $O_C^\flat$ および $C^\flat$ はそれぞれ O_C, C の tilt と呼ばれる．

Fontaine の環 A_{inf} は $O_C^\flat$ の Witt ベクトルの環 $W(O_C^\flat)$ のことである．次の 3 つの写像がある:

$$A_{\mathrm{inf}} \to W(C^\flat), \quad A_{\mathrm{inf}} \to W(\overline{k}), \quad \theta\colon A_{\mathrm{inf}} \to O_C.$$

最初の 2 つは, Witt ベクトルの環の関手性により定まるものである．最後の写像は Fontaine の定義した写像であり, $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \varprojlim_{x \mapsto x^p} O_C$ の Teichmüller 持ち上げ $[x]$ を x_0 に送るような写像である．Ker θ は単項イデアルであることが知られており, その生成元はしばしば ξ で書かれる．また, A_{inf} のような Witt ベクトルの環は自然な Frobenius 持ち上げ φ を持ち, 最初の 2 つはこれを保つ．(θ にはこのような主張は当然できないが, [3] では θ を φ で捻った写像も考えている.)

A_{inf} は Noether でない環であるため, 環論的には少し扱いにくいところもあるが, (p 進 Hodge 理論の文脈では) おおむね 2 次元局所環と似たような振る舞いをすることが多く, 最終的には問題にならないことも多い．上の 3 つの写像の存在もそれを反映しているようなものである．(最初の 2 つの写像が 2 次元分であり, θ は対角的な方向となっている.)

後のために, A_{inf} の特別な元 μ を紹介する．1 の原始 p 冪根の整合的な列 $1, \zeta_p, \zeta_{p^2}, \ldots$ を固定する．この列に対応する $\varprojlim_{x \mapsto x^p} O_C$ の元を ϵ と書くことにすると, $\mu = [\epsilon] - 1$ で定義される．μ は Ker θ の元である．また, μ は $\varphi^{-1}(\mu) = [\epsilon^{1/p}] - 1$ で割り切れ,

$$\xi = \mu/\varphi^{-1}(\mu) = 1 + [\epsilon^{1/p}] + \cdots + [\epsilon^{(p-1)/p}]$$

が Ker θ の生成元となることが確かめられる．最後に, μ が $W(C^\flat)$ で逆元を持つことを注意しておく．

2.2 A_{inf} コホモロジー

以下の定理は $\mathcal{X}$ が O_K 上滑らかな場合 [3] で示され, [4] で半安定の場合に拡張された．

定理 2.1. $\mathcal{X}$ が O_K 上固有とする．このとき, A_{inf} 加群の完全複体 $R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{X})$ と φ 半線形な自己写像の組であって, 以下を満たすものが関手的に構成できる．ただし, 以下で $\otimes^{\mathbb{L}}$ はテンソル積の導来関手である．

1. 同型 $R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{X}) \otimes^{\mathbb{L}} W(C^\flat) \cong R\Gamma_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p) \otimes^{\mathbb{L}} W(C^\flat)$ が存在する．さらに, 右辺で $R\Gamma_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ は (適切な意味で)φ 不変部分となる．

2. 同型 $R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{X})\otimes^{\mathbb{L}} W(\overline{k}) \cong R\Gamma_{\mathrm{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k))\otimes^{\mathbb{L}} W(\overline{k})$ が存在し, φ 半線形な自己写像を保つ.

3. θ での特殊化について, 同型 $R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{X})\otimes^{\mathbb{L}} O_C \cong R\Gamma_{\mathrm{logdR}}(\mathcal{X}/O_K)\otimes^{\mathbb{L}} O_C$ が存在する.

注意 2.2.

- $R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{X})$ は $\mathfrak{X}$ のみに依るよう構成され, 上の主張はそのように構成されたものの持つ性質を $\mathcal{X}$ で書き換えたものである.

- φ 半線形な自己写像は $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ を始域と終域でそれぞれ可逆にすることで全単射を導くという性質も示せる. 3. では φ が現れていないが, 実際には Hodge フィルトレーションと関係がある.

- $R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{X})$ が完全複体になることは, 本質的に対数的 de Rham コホモロジーの有限性から導かれる.

- エタールコホモロジーが φ 不変部分であるという部分については [2] を参照. (良還元の場合だが半安定の場合も同様である.) 特に, この議論 (および 1. の証明) に必要なのは $R\Gamma_{A_{\mathrm{inf}}}(\mathcal{X})$ が完全複体であるということであり, [4] のように (リジッド解析空間 X の) エタールコホモロジーの有限性を用いる必要があるわけではない. (一般の固有半安定形式スキームの場合, この議論により, X のエタールコホモロジーの有限性を導くこともできる.)

- この定理の証明については, あとで紹介する方針以外にも (少なくとも良還元の場合には) 複数考えられる. 例えば, [3] では他の写像による特殊化について (3. の一般化として) Langer-Zink の相対 de Rham-Witt 複体との比較も示し, そこから 2. を導くということもしている. これらの対数的版というのも考えられるはずだが [4] では 3. と直接関わる部分を除いて扱っていない.

2.3 主定理の帰結や応用

1. 比較的すぐに導けるのが次の不等式である:

$$\dim_k H^i_{\mathrm{logdR}}(\mathcal{X}_k/k) \geq \dim_{\mathbb{F}_p} H^i_{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{F}_p).$$

この不等式はより精密な次の不等式 (の i と $i+1$ の場合) からくる:

$$\dim_k H^i_{\mathrm{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k))_{\mathrm{tors}}/p \geq \dim_{\mathbb{F}_p} H^i_{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)_{\mathrm{tors}}/p.$$

(両辺の自由部分の階数は同じなので, “tors” なしでもこの不等式は成立する.) 実際, 短完全系列

$$0 \to H^i_{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)/p \to H^i_{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{F}_p) \to H^{i+1}_{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)[p] \to 0$$

と $\dim_{\mathbb{F}_p} H^{i+1}_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)[p] = \dim_{\mathbb{F}_p} H^{i+1}_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)_{\text{tors}}/p$ およびこれらの対数的クリスタリンコホモロジー版があることに注意すればよい.

例えば $p = 2$ で Enriques 曲面を考えると, $H^3_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{F}_p)$ が 1 次元となって, K から k へ退化するときに特殊ファイバーの (対数的) de Rham コホモロジーに捩れが必ず現れることが分かる. なお, Enriques 曲面の場合では上の不等式はいずれも等号になってしまうものの, 真の不等号になる例が [3] では与えられている.

2. 1. の不等式の対数的 de Rham コホモロジー版もあるが, 左辺の次元を O_K 加群としての length で置き換え, さらに (K の分岐により) 適切に正規化する必要がある.

3. 1. と 2. から, $H^i_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ あるいは $H^i_{\text{logdR}}(\mathcal{X}/O_K)$ が自由加群のときに, $H^i_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ が自由加群であることが分かる. さらに実は, $H^i_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ が自由加群になることと $H^i_{\text{logdR}}(\mathcal{X}/O_K)$ が自由加群になることが同値であることも証明できる.

4. $H^i_{\text{logdR}}(\mathcal{X}/O_K)$ および $H^{i+1}_{\text{logdR}}(\mathcal{X}/O_K)$ が自由加群ならば, $H^i_{\text{ét}}(\mathcal{X}_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_p)$ に対応する Breuil-Kisin 加群を用いて $H^i_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k))$ を記述することができる. ([4] には書いていないが, [3] にある良還元の場合とほぼ同様である.)

有限生成体上の $K3$ 曲面の Tate 予想の証明は Madapusi Pera によりされたが, 標数 2 の場合にギャップがある. それをこの Breuil-Kisin 加群による記述を用いて修正することができる [6]. (これは $\mathcal{X}$ が O_K 上滑らかな場合のみで十分である.)

5. Colmez-Dospinescu-Niziol の研究によると, Drinfeld 上半空間のコホモロジーに応用があるとのことである.

2.4 絶対クリスタリン比較定理

主定理より強い主張を証明することができる. このために, $\mathcal{X}$ のコホモロジーをもう 1 つ導入する. まず, $A_{\text{inf}}[(\xi^i/i!)_{i=0,1,\ldots}] \subset A_{\text{inf}}[1/p]$ の p 進完備化を A_{crys} とする. θ および φ は A_{crys} にのびる. A_{crys} に適切な対数的構造を入れることで, 対数的クリスタリンコホモロジー $H^i_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}})$ を考えることができる. (絶対対数的クリスタリンコホモロジーとも呼ばれる [1].) φ 半線形な自己写像が付加構造として定まる. また, 対応する A_{crys} 加群の導来圏の対象 $R\Gamma_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}})$ も存在する.

定理 2.3. $\mathcal{X}$ が O_K 上固有とする. A_{inf} コホモロジーは φ 半線形な自己写像を保つ同型

$$R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}) \otimes^{\mathbb{L}} A_{\text{crys}} \cong R\Gamma_{\text{logcrys}}(\mathcal{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}})$$

が存在するように構成できる.

注意 2.4. • $R\Gamma_{\mathrm{logcrys}}(\mathcal{X}_{O_C/p}/A_{\mathrm{crys}})$ を $W(\bar{k}), O_C$ に特殊化することでそれぞれ $R\Gamma_{\mathrm{logcrys}}(\mathcal{X}_k/W(k)) \otimes^{\mathbb{L}} W(\bar{k}), R\Gamma_{\mathrm{logdR}}(\mathcal{X}/O_K) \otimes^{\mathbb{L}} O_C$ が得られるので, 上の定理から定理 2.1 の 2. と 3. を導くことができる.

• 比較定理 (C_{st}) をこの定理から示すことができる. より正確には, B_{dR}^{+} コホモロジーと呼ばれる [3] で導入された X のコホモロジーとの比較をさらに行い, [7] の結果を用いることでできる. さらなる比較をするのはフィルトレーションを調べるためである. モノドロミー N は, 上の定理では K の絶対 Galois 群の右辺への半線形な作用により捉えられているといえる [1].

3 A_{inf} コホモロジーの構成

簡単に A_{inf} コホモロジーの構成と絶対クリスタリン比較定理の証明に触れる. 以下では $\mathcal{X}$ ではなく, $\mathfrak{X}$ と X のみで記述することにする. まず大事となるのが Scholze [8] により導入された副エタール景 $X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}$ である. アイデアだけ説明すると, 有限エタール射の無限列 (とエタール射) で書けるような対象を許して, 通常のエタール景を拡げたものである. 副エタール局所的に, X はパーフェクトイド空間になるのだが, これを次の例で説明する: $\mathfrak{X}$ がエタール射

$$\mathfrak{X} \to \operatorname{Spf} O_C\{T_0, \ldots, T_r, T_{r+1}^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}\}/(T_0 \cdots T_r - \pi)$$

を持つアフィン形式スキームと仮定し, これに対応する環の射を $R^{\square} \to R$ と書くことにする. また, π の p 冪根の整合的な列 $\pi_0 = \pi, \pi^{1/p}, \pi^{1/p^2}, \ldots$ を固定する. このとき, $R_{\infty}^{\square}$ を

$$\bigcup_m O_C\{T_0^{1/p^m}, \ldots, T_r^{1/p^m}, T_{r+1}^{\pm 1/p^m}, \ldots, T_d^{\pm 1/p^m}\}/(T_0^{1/p^m} \cdots T_r^{1/p^m} - \pi^{1/p^m})$$

の p 進完備化として定義すると, $R_{\infty}^{\square}[1/p]$ は $R^{\square}[1/p]$ 上副エタールなパーフェクトイド環である. さらに, $R_{\infty} = R\widehat{\otimes}_{R^{\square}} R_{\infty}^{\square}$ を完備テンソル積とすると, $R_{\infty}[1/p]$ は $R[1/p]$ 上副エタールなパーフェクトイド環となる.

パーフェクトイド環に対して, A_{inf} や A_{crys} の構成を一般化し, $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_{\infty})$ や $\mathbb{A}_{\mathrm{crys}}(R_{\infty})$ を定義することができる. (A_{inf} や A_{crys} はパーフェクトイド環 O_C から決まったものである.) これにより, $X_{\mathrm{pro\acute{e}t}}$ 上の層 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},X}$ や $\mathbb{A}_{\mathrm{crys},X}$ も定義される.

リジッド空間 X が C 上固有のとき, 副エタール景での $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},X}$ のコホモロジーは, X の ($\mathbb{Z}_p$ 係数) エタールコホモロジーに A_{inf} をテンソルしたものと (技術的な意味で) ほとんど同型になることが Scholze により示されていたので, これを基に A_{inf} コホモロジーの構成は $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},X}$ を用いて行われる. 自然な

景の射 $\nu\colon X_{\text{proét}} \to \mathfrak{X}_{\text{ét}}$ があるので, $R\nu_*\mathbb{A}_{\text{inf},X}$ のコホモロジーは ($\mathfrak{X}$ が O_C 上固有ならば) ほとんどエタールコホモロジーを計算している. 構成の最大のポイントは $R\nu_*\mathbb{A}_{\text{inf},X}$ を (Deligne-)Berthelot-Ogus の décalage と呼ばれる関手 $L\eta_{(\mu)}$ を用いて修正することである. ここでは定義を省略するが, 例えば $R\nu_*\mathbb{A}_{\text{inf},X}$ のコホモロジー層の μ 捩れが消えるような操作になっている. また, μ を可逆にすれば, $L\eta_{(\mu)}$ は恒等的な関手と同一視できる.

定義 3.1. $A\Omega_{\mathfrak{X}}$ を $L\eta_{(\mu)}R\nu_*\mathbb{A}_{\text{inf},X}$ で定め, $\mathcal{X}$ および $\mathfrak{X}$ の A_{inf} コホモロジーを

$$R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathcal{X}) = R\Gamma_{A_{\text{inf}}}(\mathfrak{X}) = R\Gamma(\mathfrak{X}_{\text{ét}}, A\Omega_{\mathfrak{X}})$$

で定義する.

$W(C^\flat)$ をテンソルすると μ は可逆になり, $L\eta_{(\mu)}$ は無視できる. また, エタールコホモロジーとほとんど同型になるという主張は μ を可逆にすると同型になるという主張に変えることができ, 定理 2.1 の 1. が得られる. (この議論では Scholze の結果 [7] を使っているが, 定理 2.1 の 3. を先に証明することで避けることもできる.)

絶対クリスタリン比較定理を証明するには, 以下で紹介する局所版を証明すれば十分であることが分かる. 自然なトポスの射 $u\colon (\mathfrak{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}})_{\text{logcrys}} \to \mathfrak{X}_{\text{ét}}$ を考える.

定理 3.2.

$$R\varprojlim_n (A\Omega_{\mathfrak{X}} \otimes^{\mathbb{L}}_{A_{\text{inf}}} A_{\text{crys}}/p^n) \cong Ru_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{O_C/p}/A_{\text{crys}}}.$$

証明はおおまかにいって 2 つのステップに分けられ, 局所的な (座標に依存した) 同型の構成とその貼り合わせからなるが, 実際に議論を書き下すとかなり長く詳細も複雑になる部分が多い. いずれにせよ, 最も重要なのは前の例に出てきたような $R[1/p] \to R_\infty[1/p]$ という副エタール射に対し, 対応する $\mathbb{A}_{\text{inf}}(R_\infty)$ の連続な群コホモロジーあるいはそれに $L\eta_{(\mu)}$ を適用した結果や振る舞いを計算することにある. (ここで 1 つの非自明な現象は, $A\Omega_{\mathfrak{X}}$ の R での値は R_∞ から完全に決まってしまうということである.) 半安定還元の場合は, このような計算自体も良還元の場合より複雑になる他, 貼り合わせの議論も技術的に複雑になる.

参考文献

[1] Alexander Beilinson, *On the crystalline period map*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 1, 1–51, DOI 10.4310/CJM.2013.v1.n1.a1. MR3272051

[2] Bhargav Bhatt, *Specializing varieties and their cohomology from characteristic 0 to characteristic p*, Algebraic geometry: Salt Lake City 2015, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 97, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018, pp. 43–88. MR3821167

[3] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze, *Integral p-adic Hodge theory*, preprint (2018). Available at `http://arxiv.org/abs/1602.03148`.

[4] Kęstutis Česnavičius and Teruhisa Koshikawa, *The A_{inf}-cohomology in the semistable case*, to appear in Compositio Mathematica. Available at `https://arxiv.org/abs/1710.06145`.

[5] Kazuhiro Fujiwara and Fumiharu Kato, *Foundations of rigid geometry. I*, EMS Monographs in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2018. MR3752648

[6] Kazuhiro Ito, Tetsushi Ito, and Teruhisa Koshikawa, *CM liftings of $K3$ surfaces over finite fields and their applications to the Tate conjecture* (2018). Available at `https://arxiv.org/abs/1809.09604`.

[7] Peter Scholze, *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum Math. Pi **1** (2013), e1, 77, DOI 10.1017/fmp.2013.1. MR3090230

[8] ———, *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties—corrigendum [MR3090230]*, Forum Math. Pi **4** (2016), e6, 4, DOI 10.1017/fmp.2016.4. MR3535697

[9] Takeshi Tsuji, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. Math. **137** (1999), no. 2, 233–411, DOI 10.1007/s002220050330. MR1705837