グロタンディーク・タイヒミュラー理論の話題から

中村博昭（大阪大学理学研究科）

Contents

1. Introduction

代数曲線やそのモジュライ空間のエタール基本群を通じて，数体の絶対ガロア群の数論幾何的な働きが大きく映し出される現象が，１９８０年代に Belyi, Grothendieck, Ihara 等により指摘されて以来，数論的基本群を中心に，遠アーベル幾何学，ガロアの逆問題などの問題群の理解も深められてきた．こうした研究の中で重要な役を務める対象として，いくつか個性的なガロア群上の数論的関数たちがモジュライ空間の数論的基本群の群論的構造の中に棲息している．それぞれの関数の持つ数論的な特徴や相互関係を見極めること，そして岩澤理論や虚数乗法論など周辺の数論分野との関連性を確立すること，なども豊穣な研究テーマとして少しずつ理解が進んでいる昨今である．本稿では，これまで筆者が親しんできたいくつかの実例（伊原ベータ関数やその楕円類似，エル進ガロアポリログ関数など）を中心に，そうした側面の一端を紹介したい．

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された代数多様体 $X/\mathbb{Q}$ が与えられると，3 種類の副有限 (profinite) 群

(i) $\pi_{\mathbb{Q}}$: 数論的基本群 $\pi_1(X_{\mathbb{Q}})$,
(ii) π_1 : 幾何的基本群 $\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}) \cong \pi_1(X(\mathbb{C}))$ の profinite 完備化，
(iii) 絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

と，それらをつなぐ基本完全系列 $1 \to \pi_1 \to \pi_{\mathbb{Q}} \to G_{\mathbb{Q}} \to 1$ が現れる．$\mathbb{Q}$-射 $X \to Y$ があれば，関手的に $G_{\mathbb{Q}}$-整合な群準同形写像 $\pi_{\mathbb{Q}}(X) \to \pi_{\mathbb{Q}}(Y)$ が（π_1-共役を除いて）付随して生じる．グロタンディーク・タイヒミュラー理論は，代数曲線（とくに双曲型代数曲線）やそのモジュライ空間たちがこの単純な構図をめぐって巻き起こすドラマということができよう．もちろん $\mathbb{Q}$ は，代数体 $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}$ や他の数論的な体で置き換えてよいし，代数体の場合には，$\overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ は固定して考えることにする．

1980 年頃に，出発点となる $X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の場合に，Belyi [3] がガロアの逆問題への応用を目的とする短い論文の中で，基本完全系列から生じる外ガロア表現の忠実性 $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1)$ の証明と，基本完全系列の標準分裂（のちに $\mathbb{Q}$-有理的な接基点 $\overrightarrow{01}$

第 63 回代数学シンポジウム（於 東京工業大学，2018 年 9 月）報告集所収

に対応すると言われる半直積構造）$\pi_{\mathbb{Q}} = \pi_1 \rtimes G_{\mathbb{Q}}$ を指摘した．Grothendieck [12] は，この発見に着目し，$X = M_{g,n}/\mathbb{Q}$ （種数 g, マーク点 n 個（順序付き）の完備代数曲線のモジュライ空間 ）に拡張することを提唱する，幾何的基本群 π_1 は副有限タイヒミュラーモジュラー群（向き付け可能な曲面の写像類群の profinite 完備化）となる．全射の族 $\{\pi_{\mathbb{Q}}(M_{g,n}) \twoheadrightarrow G_{\mathbb{Q}}\}_{2-2g-n<0}$ は，マーク点の忘却射や曲線の退化に伴う接合射などで相互関係が想定される「ガロア・タイヒミュラー塔」をなす．その組合せ構造を $G_{\mathbb{Q}}$ 整合性のもとで探求するプロジェクト “Lego” of G.T. の哲学は，Belyi の定理に端を発する考察を起点として，一気に考察対象を代数曲線のモジュライ空間をめぐる広大な研究原野に拡張して多くの研究者を魅惑したと思われるが，そのプログラムを記した文書 [12] (1984 Esquisse d'un programme) は研究論文として発表することを意図されていなかったこともあり文献として公刊されるまで１３年の年月を要したという歴史をもつ．

さて，ガロア・タイヒミュラー塔を積み上げるための “fundamental blocks” としてモジュライ次元が 2 以下となる次の 5 つの場合がとくに大切である：

(i) $M_{0,3} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}$
(ii) $M_{0,4} = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$
(iii) $M_{0,5} = \mathbf{P}^2-$ 完全四角形
(iv) $M_{1,1} =$ the “fine J-line” (of elliptic moduli)
(v) $M_{1,2} =$ affine part of the universal elliptic curve $/M_{1,1}$

これらの数論的基本群を詳細に考察するさまざまな研究が花開いたが，記述する努力過程では，取扱い可能なガロア群の上の数論関数が有用な役割を果たす．本稿では，そうした関数のいくつかを紹介したい．

1.1. 円分指標． 最初の重要な関数は **円分指標** $\chi : G_{\mathbb{Q}} \to \hat{\mathbb{Z}}^\times$ と呼ばれるもので，１の冪根 $\zeta_n = e^{2\pi i/n} \in \overline{\mathbb{Q}}$ への $G_{\mathbb{Q}}$ の作用を体現する：より正確には，各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して $\chi(\sigma) \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$ を，$\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{\chi(\sigma) \bmod n}$ $(n \geq 1)$ によって定める．$G_{\mathbb{Q}}$ が円分指標倍で作用する加群 $\hat{\mathbb{Z}}$ を 1 階の Tate 加群といい，$\hat{\mathbb{Z}}(1)$ とかく．円分指標は，数論的基本群においては，代数多様体から因子を取り除いた状況でいたるところで現れる．その理由は典型的な場合 $X = \mathbf{G}_m = \mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}$ をモデルとして説明できる：その数論的基本群 $\pi_{\mathbb{Q}}$ は，ローラン級数体 $\cup_n \overline{\mathbb{Q}}(\!(t^{1/n})\!)$ の自己同型のうち, 係数への $G_{\mathbb{Q}}$ 作用と，穴の周りを一周するループに対応する元 $x : t^{1/n} \mapsto t^{1/n}\zeta_n^{-1}$ $(n \geq 1)$ とで生成される半直積群 $\pi_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}} \ltimes \langle x \rangle$ と同一視され，幾何的基本群 $\pi_1 = \langle x \rangle \cong \hat{\mathbb{Z}}$ への $G_{\mathbb{Q}}$ の作用は円分（指標倍による）作用に他ならないことが確かめられる (Branch cycle argument). すなわち $\pi_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}} \ltimes \hat{\mathbb{Z}}(1)$.

1.2. 道草 (復元の話)． 筆者が最初に代数学シンポジウムで話をさせて頂いたのは，北大で 1989 年に開催された第 35 回代数学シンポジウムであった．代数学シンポジウム報告集は，現時点で電子的に２００４年以降のものは代数分科会のホームページで入手可能だが，それ以前のものは紙媒体で大学毎の数学図書室に所蔵されているものが (ただし所蔵状態は所によりまちまちのようで) ある．幸いにして，筆者の上記の報告集の記事は英訳を [29] として出版する機会を得た（20 年後の 2009 年にケンブリッジの Newton 研究所で行った遠アーベル幾何の入門講義の報告を兼ねている)．このときの主な内容は Grothendieck の遠アーベル幾何の基本予想「数論的基本群の純群論的構造から双曲型代数曲線を復元する」を，種数 0 の場合と，楕円曲線ひく 1 点の場合に解決したことの報告であった．円分指標の有用性を理解するのに好適な題材であるので，ここで簡単に種数 0 の 4 点抜きの射影直線の場合に素描しよう．問題は，$U_\lambda := \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \lambda, \infty\}$ $(\lambda \in \mathbb{Q}, \lambda \neq 0, 1)$ とするとき，$G_{\mathbb{Q}}$ への全射つき数論的基本群 $p_\lambda : \pi_1(U_\lambda) \to G_{\mathbb{Q}}$ から U_λ の $\mathbb{Q}$-同型類 $\Leftrightarrow$ 複比集合 $J(\lambda) := \{\lambda, 1-\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{1}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}\}$ を復元すること，つまり，$\iota : \pi_1(U_\lambda) \cong \pi_1(U_{\lambda'})$ なる群同型が $p_\lambda = p_{\lambda'} \circ \iota$ となるように与えられた場合に，$J(\lambda) = J(\lambda')$ を導けるかという問題である．ポイントは，$\mathbf{P}^1$ ひく 4 点の数論的基本群のなかに 4 つの穴の周りの局所基本群

($\cong G_{\mathbb{Q}} \ltimes \hat{\mathbb{Z}}(1)$)として内在している4つの部分群共役類の和集合を，無数の幾何的な開部分群（有限次被覆曲線の数論的基本群）たちのアーベル化におけるガロア表現の重みフィルター付け（Riemann-Weil 作用と円分作用の差）を利用することで，他の部分群から差別化する．これができると，アーベル被覆における抜いた点の上の剰余体の系列が個々の穴の識別つきで復元でき，Kummer 理論の簡単な議論で，$J(\lambda)$ の各元が基礎体の中で乗法的に生成する巡回部分群の三本セットが復元され，続いて穴の座標そのものを（数として）復元できることが分かる ([25])．

Lego との関係 (cf. [26] §3)：スキーム論的には，$X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 上の有理点 $\lambda \in X(\mathbb{Q})$ を選ぶことは，構造射 $X \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}$ の切断 $\lambda : \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q} \to X$ を取ることに相当するから，数論的基本群の分裂切断 $s_\lambda : G_{\mathbb{Q}} \to \pi_{\mathbb{Q}}(X)$ を与える（これは，Belyi が与えた $s_{\overrightarrow{01}}$ のような X の無限遠に由来するタイプの分裂とは群論的に区別できることがやはり上の議論から従う）．$X = M_{0,4}$ とみなすとき，その上には $M_{0,5}$ からの全射（5 番目のマーク点を忘れる）が「$\mathbf{P}^1$ ひく 4 点の普遍族」を与える様で載っており，この構図は下のように $\pi_{\mathbb{Q}}$ 側に移行する．

$$\begin{tikzcd}
M_{0,5} \arrow[d, two heads] & \mathbf{P}^1 - \{0,1,\lambda,\infty\} \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
X = M_{0,4} & \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q} \arrow[l, "\lambda"']
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\pi_{\mathbb{Q}}(M_{0,5}) \arrow[d] & \pi_{\mathbb{Q}}(U_\lambda) \arrow[l, hook', "\widetilde{s_\lambda}"'] \arrow[d, two heads, "p_\lambda"'] & \pi_{\mathbb{Q}}(U_{\lambda'}) \arrow[ll, hook', bend left, "\widetilde{s_{\lambda'}}"] \arrow[d, two heads, "p_{\lambda'}"'] \\
\pi_{\mathbb{Q}}(M_{0,4}) & G_{\mathbb{Q}} \arrow[l, hook', "s_\lambda"'] & G_{\mathbb{Q}} \arrow[ll, hook', bend left, "s_{\lambda'}"]
\end{tikzcd}$$

よって切断 λ を決めることは，部分群 $s_\lambda(G_{\mathbb{Q}}) \subset \pi_{\mathbb{Q}}(X)$ **だけではなく，必然として** $\pi_{\mathbb{Q}}(M_{0,5})$ のなかにある $s_\lambda(G_{\mathbb{Q}})$ の逆像を切り出してきて**上部構造** $\pi_{\mathbb{Q}}(U_\lambda) \twoheadrightarrow s_\lambda(G_{\mathbb{Q}}) = G_{\mathbb{Q}}$ をも決める．ここで上で議論した復元の問題と関係が付く．$G_{\mathbb{Q}}$ の拡大群として $\pi_{\mathbb{Q}}(U_\lambda) \cong_{G_{\mathbb{Q}}} \pi_{\mathbb{Q}}(U_{\lambda'})$ ならば, (局所基本部分群の識別により最初の 3 点を $0, 1, \infty$ と正規化したうえで 4 点目の座標について) $\lambda = \lambda'$ が成り立つというのが復元問題の帰結である．このことから λ と λ' が異なるならば，それぞれに対する上部構造群が同型であり得ない．よって $s_\lambda(G_{\mathbb{Q}})$ と $s_{\lambda'}(G_{\mathbb{Q}})$ が $\pi_{\mathbb{Q}}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ のなかの分裂部分群としても共役でない．つまり，

$$X(\mathbb{Q}) \ni \lambda \longmapsto s_\lambda \in \mathrm{Section}(\pi_{\mathbb{Q}}(X)/G_{\mathbb{Q}})$$

が単射であることを導く．遠アーベル幾何の基本予想の中で，現時点で未解決とされる **Section 予想** は，この対応が，右辺を Belyi 型以外の切断準同形たちに制限した場合に全単射を与えることを主張している．Section 予想は，一般の双曲型曲線や $\mathbb{Q}$ 以外の数論的体への拡張も研究されている (cf. 星 [14])．Esnault-Hai [8] は，$X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の場合が肯定的に解決するだけでも，一般の場合に条件付きで帰結があること示している．最近の進展としては J. Stix の仕事 [43] が目覚ましい．

2. 伊原ベータ関数とその楕円類似

2.1. $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$．射影直線ひく 3 点の数論的基本群につながる研究は,（Grothendieck とは別の数論的観点から）伊原による研究 (1960 年代に遡る [15]) があり，1984 年の Chicago での講義が論文 [16] として出版されたのを契機に，Anderson, Coleman, Deligne なども加わり国際的な研究活動が活発に展開された．

この節では Anderson-Ihara theory といわれる一連の研究の中で導入された**アデリック・ベータ関数**とよばれる関数を紹介する．

射影直線ひく 3 点の幾何的基本群を

$$\pi = \pi_1(\mathbf{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} - \{0, 1, \infty\}, \overrightarrow{01}) = \langle x, y, z \mid xyz = 1 \rangle \cong \hat{F}_2$$

とあらわす．ここに x, y, z は, 穴 0 から発する単位接ベクトル $\overrightarrow{01}$ を基点とし $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$ の穴 $0, 1, \infty$ を回って戻る標準的なループを表す．π は，x, y を生成元とする副

有限自由群 $\hat{F}_2$ と同型である．ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ の Belyi 作用 $\varphi_{\overrightarrow{01}}: G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\hat{F}_2)$ は，数論的に複雑な構造をもつガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ を，組合せ群論的な自己同型群 $\mathrm{Aut}(\hat{F}_2)$ のなかに忠実に映し出していると考えられるので，その様子を記述できれば数論への応用が期待できる．位相群としての導来列を $\pi \supset \pi' \supset \pi'' \supset \cdots$ と書いたとき，アデリック・ベータ関数は，商表現のうち最初に非自明な情報を期待できるメタ・アーベル還元 $\varphi''_{\overrightarrow{01}}: G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}(\pi/\pi'')$ を，一本の $G_{\mathbb{Q}}$ 上の $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times$ 値関数

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{B}: & G_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times \\ & \cup & & \cup \\ & \sigma & \longrightarrow & \mathbb{B}_\sigma(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}) \end{array}$$

に集約したものである．ここで π の生成元 x, y の π のアーベル化における像を $\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}$ としたとき，

$$\pi^{\mathrm{ab}} := \pi/\pi' = \hat{\mathbb{Z}}\bar{\mathrm{x}} \oplus \hat{\mathbb{Z}}\bar{\mathrm{y}} \cong \hat{\mathbb{Z}}^2$$

の完備群環が $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]$ である．$\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]] = \varprojlim_n \hat{\mathbb{Z}}[\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}]/(\bar{\mathrm{x}}^n - 1, \bar{\mathrm{y}}^n - 1)$ であり，$\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}$ に 1 の冪根を代入したときの $\hat{\mathbb{Z}}[\mu_\infty]$ 値が意味を持つことに注意する．ガロア表現 $\varphi_{\overrightarrow{01}}$ からアデリック・ベータ関数 $\mathbb{B}: G_{\mathbb{Q}} \to \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times$ を構成する仕方として，$\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 上のフェルマー曲線による被覆を利用する方法と，完備群環 $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{F}_2]]$ における Fox 微分とアーベル化の合成

$$\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{F}_2]] \xrightarrow{\partial_y} \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{F}_2]] \xrightarrow{\mathrm{ab}} \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]$$

を用いる方法がある．ここでは後者を紹介する．まず，$G_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}} - \{0, 1, \infty\}$ 上で，0 を $\overrightarrow{01}$ にそって出発し，$\overrightarrow{10}$ にそって 1 に到達するエタール道類集合 $\mathrm{Path}(\overrightarrow{01} \rightsquigarrow \overrightarrow{10})$ にも作用する．$p: 0 \to 1$ を実区間 (0,1) に沿った標準的な道とするとき $f_\sigma(x, y) = p \cdot \sigma(p)^{-1} \in \pi$ が定まる．[本稿では，道の合成は「左を先，右を後」とする．（公式などに微妙に影響する場合がある）] このときアデリック・ベータ関数は

$$\mathbb{B}_\sigma(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}) := \Big(1 + (\partial_y f_\sigma(x, y)) \cdot (y - 1)\Big)^{\mathrm{ab}} \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times$$

と定義され，さまざまな性質が知られている．ここでは，網羅的に述べることは避けるが，$\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]] = \hat{\mathbb{Z}}[[\pi_1^{\mathrm{ab}}]]$ は，$\mathbf{P}^1$ 上の n 次フェルマー曲線被覆 $F_n: X^n + Y^n = Z^n$ の $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ 対称性の射影極限，π'/π'' は，そのヤコビ多様体 $Jac(F_n)$ の Tate 加群の射影極限 $\varprojlim_n \hat{T}(Jac(F_n))$ とみなすことができ，このとき後者への $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ のガロア作用は，$\frac{(\bar{\mathrm{x}}^{\chi(\sigma)}-1)(\bar{\mathrm{y}}^{\chi(\sigma)}-1)}{(\bar{\mathrm{x}}-1)(\bar{\mathrm{y}}-1)}\mathbb{B}_\sigma$ 倍乗法で実現される；古典的なベータ関数との類似がある；1 の冪根における特殊値がヤコビ和の系列を補間する；ℓ 進テイラー係数が Soulé 指標で記述される，等等が続く (詳細は，伊原による原典 (とくに [16], [18], [19]）を参照するのがいちばんであるが，本稿の姉妹記事ともいえる [34] にもいくらか特徴的な性質を挙げた）．

2.2. $G_{\mathbb{Q}}$ **の組合せモデルとしての GT.** 記号は前節の通りとして，再び Belyi による $G_{\mathbb{Q}}$ の $\pi = \pi_1(\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}} - \{0, 1, \infty\}, \overrightarrow{01})$ への忠実作用 $\varphi_{01}: G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\pi)$ を考える．基本完全系列 $1 \to \pi \to \pi_{\mathbb{Q}} \to G_{\mathbb{Q}} \to 1$ から引きおこる外ガロア表現 $\varphi: G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Out}(\pi)$ の $\mathrm{Aut}(\pi)$ への持ちあげとして，$\varphi_{\overrightarrow{01}}$ は，次のように群論的に像を制限することで特徴づけられる．

$$\varphi_{\overrightarrow{01}}: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \left\{ \alpha: \pi \xrightarrow{\sim} \pi \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha(x) = x^{\chi(\sigma)} \\ \alpha(y) = \pi'\text{-conjugate of } y^{\chi(\sigma)} \\ \alpha(z) = \pi\text{-conjugate of } z^{\chi(\sigma)} \end{array} \right\} \subset \mathrm{Aut}(\pi).$$

ここに, 各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して，$\chi_\sigma = \chi(\sigma) \in \mathbb{Z}^\times$ は円分指標の値であるが，$\alpha_\sigma := \varphi_{\overrightarrow{01}}(\sigma)$ による y の像 $\alpha_\sigma(y) = f_\sigma^{-1} y^{\chi(\sigma)} f_\sigma$ の共役因子 $f_\sigma \in \pi_1'$ は σ に対して一意的に定まる．$f_\sigma(x, y)$

を文字 x,y で生成される自由副有限群 $\hat{F}(x,y)$ の（副有限）free word とみなすと，絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ の各元 σ は，二つのパラメータ $\chi(\sigma)\in(\hat{\mathbb{Z}}^\times\subset)\hat{\mathbb{Z}}$, $f_\sigma\in(\hat{F}_2'\subset)\hat{F}_2$ でパラメトライズされる．このことを利用して，いわゆるグロタンディーク・タイヒミュラー群とは，二つのパラメータをもつ直積集合 $\{(\chi,f)\}=\hat{\mathbb{Z}}\times\hat{F}_2$ の画布に描かれたガロア像 $\varphi_{\overrightarrow{01}}(G_{\mathbb{Q}})$ を近似する外枠の組合せモデル（viz. $\sigma\in G_{\mathbb{Q}}$ に対するパラメータ $(\chi(\sigma),f_\sigma)$ の振る舞いを群論的に限定してデザインしたモデル）といえる．Drinfeld, Ihara による最初のモデルは

$$\widehat{GT}:=\left\{\alpha\in\mathrm{Aut}(\pi)\;\middle|\;\begin{array}{c}\alpha(x)=x^\chi\quad(\exists\chi\in\hat{\mathbb{Z}}^\times)\quad,\\ \alpha(y)=f^{-1}y^\chi f\ (\exists f\in\pi'),\\ \alpha(z)\sim z^\chi\quad(\pi\text{-共役}),\\ s.t.\\ (\chi,f)\text{ は条件 “(I),(II),(III)” をみたす．ここに}\\ \text{(I),(II)}\Leftrightarrow S_3\text{-対称性 of }\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}\\ \text{(III)}\Leftrightarrow\text{“ペンタゴン関係式” on }M_{0,5}\end{array}\right\}$$

であるが，様々な拡張・変形・精密化が研究されている (cf.[9],[10],[11],[22] やその文献表)．

2.3. **楕円曲線版．** 筆者が 2 回目に代数学シンポジウムで話をさせて頂いたのは，2002 年に室蘭工科大学にて開催された第 47 回代数学シンポジウムのときであり,「楕円曲線に付随して生じる Magnus 表現と Eisenstein 級数について」というタイトルで発表した．このときの報告集も電子公開に至っておらないので閲覧しにくいかもしれないが，同時期に数理研講究録 1281 (2002), 176–183 に書いた姉妹記事「楕円曲線に附随する外モノドロミー表現とある種の Eisenstein 測度関数について」との合併英訳拡張版を 2 年前にまとめて [31] として筆者のホームページにおいてある．楕円曲線ひく 1 点の基本群は，射影直線ひく 3 点の基本群と同様にトポロジカルには階数 2 の自由群であるが，穴の周りの局所基本群の入り方に大きな違いがあり，アデリック・ベータ関数の類似の構成は紆余曲折をきわめている ([34])．ここでは，現状で最良と思われるヴァージョンが，以下のように得られていることを簡単に報告するにとどめる．基本設定は $\pi_{\mathbb{Q}}(M_{1,2})\twoheadrightarrow\pi_{\mathbb{Q}}(M_{1,1})$ をリフトした楕円曲線の Weierstrass ファイバー空間 $E\setminus\{O\}:=\{y^2=4x^3-g_2x-g_3\}$ と，下部パラメータ空間 $\mathfrak{M}:=\{(g_2,g_3)\mid\Delta:=g_2^3-27g_3^2\neq0\}$ である．双方の空間 $E\setminus\{O\}$, $\mathfrak{M}$ は $\mathbb{Q}$ 上のアフィン代数多様体として考える．自然な射影 $E\setminus\{O\}\to\mathfrak{M}$ において，数論的基本群の標準的な半直積分解と幾何的基本群の標準的な生成系を設定するのに多少骨折りが必要である（[30, §5]）が，ともかくゼロ切断に接する無限小切断 $\tilde{w}:\mathfrak{M}\dashrightarrow E\setminus\{O\}$ を，局所座標 $t:=-2x/y$ について単位ベクトルをとること，および,（原点ぬき）退化 Tate 楕円曲線の無限小埋め込み $\mathrm{Tate}(q)\dashrightarrow E\setminus\{O\}$ を導入することで舞台設定ができる：

$$\begin{tikzcd}
E\setminus\{O\}:=\{y^2=4x^3-g_2x-g_3\} \arrow[d, shift left] & \mathrm{Tate}(q) \arrow[l, dashed, hook'] \arrow[d, shift left] \\
\mathfrak{M}:=\{(g_2,g_3)\mid\Delta:=g_2^3-27g_3^2\neq0\} \arrow[u, shift left, "\tilde{w}"'] & \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}(\!(q)\!). \arrow[l, dashed, hook'] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

(穴あき)Tate 楕円曲線の数論的基本群を，射影直線ひく 3 点の数論的基本群からファンカンペン構成で復元することで，全射準同形 $\pi_{\mathbb{Q}}(E\setminus O)\twoheadrightarrow\pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M})$ の核にあたる Tate 曲線の幾何的基本群 π_1 の標準的生成系 $\mathtt{x}_1,\mathtt{x}_2,\mathtt{z}$ を $\mathrm{Im}(\tilde{w})\cap\mathrm{Tate}(q)$ を基点とするループとして導入し，穴あきトーラスの基本群の関係式 $[\mathtt{x}_1,\mathtt{x}_2]\mathtt{z}=1$ ($[\mathtt{x}_1,\mathtt{x}_2]:=\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2\mathtt{x}_1^{-1}\mathtt{x}_2^{-1}$) をみたし，かつそれらへのガロア群の作用が $(\chi(\sigma),f_\sigma)\in\widehat{GT}$ の言葉で記述される形にとれる ([28] に遡る)．ここでの π_1 は $\mathtt{x}_1,\mathtt{x}_2$ で生成される副有限自由群である．

問題：上の設定で定義される数論的モノドロミー表現 $\varphi_{\tilde{w}}:\pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M})\to\mathrm{Aut}(\pi_1)$ に対して，そのメタ・アーベル還元 $\varphi''_{\tilde{w}}:\pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M})\to\mathrm{Aut}(\pi_1/\pi_1'')$ を一本の関数であらわすこと．

この問題に対し，アーベル化 π_1^{ab} への作用が自明の部分 $\pi_1(\mathfrak{M}_\infty) := \mathrm{Ker}(\pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \to \mathrm{GL}(\pi_1^{\mathrm{ab}}) = \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}))$ に限ればうまく $\mathcal{E} : \pi_1(\mathfrak{M}_\infty) \to \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ が定義できることは依然から知られていた（Bloch, Tsunogai) が，それを $\pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M})$ に，数論性を壊さない形で自然に延ばすことが長年にわたり課題として残った．2009 年のケンブリッジ滞在中にひとまず，関数の系列 $\{\mathbb{E}_m : \pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \times \hat{\mathbb{Z}}^2 \to \hat{\mathbb{Z}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ にまとめることに成功し ([30]), その後，幸運にも改良して一本の関数

$$\mathbb{E} : \pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \times \mathbb{Q}_f^2 \to \hat{\mathbb{Z}} \qquad (\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})$$

にまとまった ([33]). さらに，定義域の $\pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M})$ の部分は，モノドロミー表現 $\varphi_{\tilde{w}} : \pi_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{M}) \to \mathrm{Aut}(\pi_1)$ の像の組合せモデルとして, 2012 年に B.Enriquez により導入された楕円グロタンディーク・タイヒミュラー群 $\widehat{GT}_{ell}$ に伸ばせることが最近判明した（論文 [32] 準備中）. 応用もいくつかの方向で存在しているが，本稿では省略する.

3. エル進ガロア・ポリログ関数

各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して，アデリック・ベータ関数の $(\bar{\mathrm{x}}, 1)$ での偏微分係数に相当する $\frac{\mathbb{B}_\sigma(\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}})-1}{\bar{\mathrm{y}}-1} \in \varprojlim_n \hat{\mathbb{Z}}[\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}]/(\bar{\mathrm{x}}^n - 1, \bar{\mathrm{y}}^n - 1)$ に $\bar{\mathrm{y}} = 1$ を代入して $\varprojlim_n \hat{\mathbb{Z}}[\bar{\mathrm{x}}]/(\bar{\mathrm{x}}^n - 1)$ に射影した像 (の反転) を $\boldsymbol{\kappa}_\sigma(\bar{\mathrm{x}}) \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ とおく．$\widehat{GT}$ のパラメータ f_σ の言葉では

$$\boldsymbol{\kappa}_\sigma(\bar{\mathrm{x}}) := -\left[\partial_y(f_\sigma)\right]^{\mathrm{ab}}(\bar{\mathrm{x}}^{-1}, 1) \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$$

と書くことができる (cf. [19] Prop.1.8.3; [35] p.290)．以下，素数 p を固定し，$\chi = \chi^{p\text{-cyclo}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}_p^\times$ を p-進円分指標 (1 の p べき乗根へのガロア作用だけを取り出したもの) とする．また，上の $\boldsymbol{\kappa}_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ の p-image を $\boldsymbol{\kappa}_\sigma^{(p)} \in \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p]]$ とし，対応する p-進空間 $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathbb{Z}_p$ 値測度 $d\boldsymbol{\kappa}_\sigma^{(p)}$ とするとき，m 次の p 進 Soulé 指標 ([42]) $\chi_m : G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}_p(m)$ に対して次の積分公式

$$\frac{\chi_{2k-1}(\sigma)}{1-p^{2k-1}} = \frac{1}{1-p^{2k-1}} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{2k-1} d\boldsymbol{\kappa}_\sigma^{(p)}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} x^{2k-1} d\boldsymbol{\kappa}_\sigma^{(p)}(x) = \frac{B_{2k}}{2\cdot 2k}(\chi(\sigma)^{2k} - 1)$$

が成り立つ (文献 [18], [48], [36] Prop. 5.13)．この式を，$\chi(\sigma)^{2k} \neq 1$ となる $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ をとって

$$\frac{-2}{\chi(\sigma)^{2k}-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{2k-1} d\boldsymbol{\kappa}_\sigma^{(p)}(x) = (1-p^{2k-1})\left(-\frac{B_{2k}}{2\cdot 2k}\right) = (1-p^{2k-1})\zeta(1-2k)$$

と書き直すことで，偶数の j $(2 \leq j \leq p-1)$ に対する Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数 $L_p(s, \omega^j)$ が復元できること，したがって $\sigma \in \bigcap_p G_{\mathbb{Q}(\mu_p)} \setminus \bigcup_p G_{\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})}$ に対するもとの $\boldsymbol{\kappa}_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ は，すべての素数 p に対する p 進ゼータ関数をあらわす種をもっているとみなせる (Wojtkowiak [48]).

3.1. ガロア・ポリログ．古典的なポリログ関数は

$$Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} \tag{3.1}$$

の収束円 $|z| < 1$ から解析接続して $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ 上の複素多価関数になるが，$\overrightarrow{01}$ と z を結ぶ道 γ に対する一価関数ともみなせる．ポリログ関数はさまざまな関数等式をもつことが知られている．たとえば，関数等式

$$Li_2(z) + Li_2(1-z) + \log z \log(1-z) = \frac{\pi^2}{6} \tag{3.2}$$

は，$\overrightarrow{01}$ を出発して $z, 1-z$ に至る道の組を適切に定義することで，道に対する一価関数の関数等式となる．以下，ベルヌイ多項式 $B_k(T)$ $(k \in \mathbb{N})$ を母関数 $\sum_{k=0}^{\infty} B_k(T)\frac{w^k}{k!} = \frac{we^{Tw}}{e^w-1}$ で定義し，ベルヌイ数を $B_k := B_k(0)$ とおく．Roger 正規化と呼ばれる変換

$$li_n(z) := \frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi i)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_k}{k!}(\log z)^k Li_{n-k}(z) \tag{3.3}$$

により，Li-ポリログ系列 $\{Li_k\}_k$ から li-ポリログ系列 $\{li_k\}_k$ へ移行すると，冪単基本群の Lie 理論と相性がよくなることが知られている（li_k は対数アソシエーターの Lie 展開係数と解釈される)．以上を踏まえて，素数 p におけるエル進ガロアポリログ（のエル$=p$ の場合）を以下のように導入する．$K \subset \bar{K} \subset \mathbb{C}$ を固定し，$X = \mathbf{P}^1_K - \{0, 1, \infty\}$ に対する幾何的基本群，数論的基本群をそれぞれ π_1, π_K とする．まずエタールパス $\gamma : \overrightarrow{01} \rightsquigarrow z$ $(z \in K - \{0, 1\})$ および $\sigma \in G_K$ に対して

$$f_\sigma(\gamma) := \gamma \cdot \sigma(\gamma)^{-1} \in \pi_1 \tag{3.4}$$

とおき，クンマー・ハイゼンベルグ測度 (cf. [35] p.290) を

$$\boldsymbol{\kappa}_{z,\sigma}(\bar{\mathrm{x}}) = -[\partial_y x^{\rho_z(\sigma)} f^z_\sigma(\gamma)]^{\mathrm{ab}}(\bar{\mathrm{x}}^{-1}, 1) \in \hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]] \tag{3.5}$$

で定義する．(ここに，$\rho_z : G_K \to \hat{\mathbb{Z}}$ は $\sqrt[n]{z}$ へのガロア作用をあらわすクンマーコサイクルで γ から決まるものを表す)．自然な射影 $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]] \to \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p]]$ による $\boldsymbol{\kappa}_{z,\sigma}$ の像を $\boldsymbol{\kappa}^{(p)}_{z,\sigma}$ とし，対応する $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathbb{Z}_p$ 値測度 $d\boldsymbol{\kappa}^{(p)}_{z,\sigma}$ をもちいて

$$\tilde{\chi}^z_m(\sigma) = \int_{\mathbb{Z}_p} x^{m-1} d\boldsymbol{\kappa}^{(p)}_{z,\sigma}(x) \in \mathbb{Z}_p \tag{3.6}$$

と定義する．$\tilde{\chi}^z_m : G_K \to \mathbb{Z}_p$ は，一般化された Soulé 指標の “z-版” に相当するものである．これを用いてエル進ガロアポリログ関数（のエル$=p$ の場合）の Li-ポリログ系列 $\{Li_k\}_k$ と li-ポリログ系列 $\{li_k\}_k$ を，

$$Li_m(z, \gamma)(\sigma) := \frac{\tilde{\chi}^z_m(\sigma)}{(m-1)!}, \tag{3.7}$$

$$li_m(z, \gamma)(\sigma) := (-1)^{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{B_k}{k!}(-\rho_z(\sigma))^k Li_{n-k}(z, \gamma) \tag{3.8}$$

により定める．これらは分母がつくので G_K 上の関数としては $G_K \to \mathbb{Q}_p$ の形である．エル進ガロアポリログについても古典的なポリログの類似としていくつか関数等式が得られている [36]-[37] 例えば：古典的な「反転公式」

$$Li_n(z) + (-1)^n Li_n(\frac{1}{z}) = -\frac{(2\pi i)^n}{n!}B_n(\frac{\log z}{2\pi i}) \quad (n \geq 2) \tag{3.9}$$

に対して，そのエル進ガロア版は

$$Li_n(z, \gamma)(\sigma) + (-1)^n Li_n(\frac{1}{z}, \gamma')(\sigma) = \frac{-1}{n!}\{B_n(-\rho_z(\sigma)) - B_n \cdot \chi(\sigma)^n\} \qquad (\sigma \in G_K) \tag{3.10}$$

となる．ここにパス $\gamma : \overrightarrow{01} \rightsquigarrow z$ に対し $\gamma' : \overrightarrow{01} \rightsquigarrow 1/z$ は，自己同型 $\jmath \in \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1_t)$ を $\jmath(t) = t^{-1}$ とするとき，$\jmath(\gamma) : \overrightarrow{\infty 1} \rightsquigarrow z^{-1}$ と $\delta : \overrightarrow{01} \rightsquigarrow \overrightarrow{\infty 1} := (0, 1) \xrightarrow[\vee]{1} (1, \infty)$ との合成として $\gamma' = \delta \cdot \jmath(\gamma)$ が成り立つように定めている．

ポリログ関数等式の研究とポリログ特殊値の研究は容易に想像できるように密接である．たとえば，古典的な等式 $Li_2(-1) = -\pi^2/12$ に対しても，そのエル進ガロア版として

$$Li_2(-1)(\sigma) = -\frac{1}{48}(\chi(\sigma)^2 - 1) \mp \frac{\chi(\sigma)}{2}\rho_2(\sigma) \quad (\sigma \in G_{\mathbb{Q}}) \tag{3.11}$$

を示すことができる ([36], Remark 5.14). ここで，右辺の符号 $\mp$ は，左辺の $Li_2(-1)$ を定義する際の道として，$\overrightarrow{01}$ からどちら向きに方向転換して点 -1 に進むかによってきまる．

古典ポリログ関数等式の世界は，歴史も長く，Lewin の著作 [21] などにみられるように広汎であり，多重ポリログ関数に一般化され Zagier, Gangl, Goncharov, 奥田・上野 [40] 等を含む多くの研究者により質・量ともに凄まじいほどの論文が出版されている．エル進ガロアポリログで類似を示せたものは，いくつか典型的なものに過ぎず，リストの追加については今後の取り組みを待たなければならない余地が大きい．

3.2. **白谷ゼータ関数．** フルヴィッツ・ゼータ関数

$$\zeta(s,b)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(b+i)^s}\qquad(0<b\le 1)$$

は解析接続すると負の整数点での値がベルヌイ多項式の分数点での値として，等式

$$\zeta(1-n,\frac{a}{m})=-\frac{1}{n}B_n(\frac{a}{m})$$

で与えられる．簡単のため p を奇素数とし，正の整数 $0<a<m$, $(a,m)=1$ なるものに対して，白谷 [41] は，高木貞治生誕 100 年記念論文集の中で，

$$\zeta_p^{Sh}(1-k;a,m)=-\frac{m^{k-1}}{k}\left(B_k(\frac{a}{m})-\delta_{p\nmid m}\cdot p^{k-1}B_k(\frac{a_1}{m})\right)$$

が $k>0$, $k\equiv 0 \pmod{p-1}$ になりたつような p 進ゼータ関数 $\zeta_p^{Sh}(s)$ $(s\in\mathbb{Z}_p-\{1\})$ を構成した．ここに $\delta_{p\nmid m}\in\{0,1\}$ は $p\nmid m$ のときに 1, そうでないとき 0 を表し，前者の場合，$0<a_1<m$ は $pa_1\equiv a \pmod{m}$ となるものを取る．この白谷の論文は短く難解であり，とくに '$a,a_1\in(0,m)$' の条件がどこで必要となるかなどの詳細が省略されていて判然としないところがある．また Math Reviews 誌での L.Washington のコメントでは，白谷 [41] が扱った関数に対する明示公式は "can be obtained by the methods of the reviewer [J. Number Theory 8 (1976), no. 2, 245–250; MR0406982]" と書かれているが，$p\nmid m$ の場合が Washington の論文で扱われておらず，どのように導かれるのか筆者には不明であった．最近の Wojtkowiak と筆者の共著論文 [38] では，エル進ガロアポリログ関数を応用して，$\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathbb{Z}_p$ 値測度 $d\hat{\zeta}_{p,a,m}(\sigma)$ $(\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\mu_m)})$ を構成して，つぎのような補間等式

$$\frac{1}{\chi(\sigma)^k-1}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}x^{k-1}d\hat{\zeta}_{p,a,m}(\sigma)(x)=\frac{m^{k-1}}{k}\left(B_k(\frac{a}{m})-\delta_{p\nmid m}\cdot p^{k-1}B_k(\frac{a_1}{m})\right)$$

を $\sigma\in G_{\mathbb{Q}(\mu_m)}$ (ただし $\chi(\sigma)^k=\chi^{p\text{-cyclo}}(\sigma)^k\neq 1$) に対して示すことにより，白谷の結果の別証明と若干の拡張を与えることができた．我々の方法では，条件 '$a,a_1\in(0,m)$' は，0 の周りと ∞ の周りに巻きつく道と前節で紹介した反転公式で用いた道 δ とのトポロジカルな位置関係から必要性が明確になる．また，ここで構成した測度 $\hat{\zeta}_{p,a,m}(\sigma)\in\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p]]$ は，$\iota\boldsymbol{\kappa}_{\bar{z}}(\sigma)-\boldsymbol{\kappa}_z(\sigma)\in\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ の p-進像とあらわせ（ここに，$z=\zeta_m^a$, $\bar{z}=\zeta_m^{-a}$; ι は $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}]]$ の空間側の (-1) 倍に対応する対合），Deligne の論文 [6, Proposition 3.14, Lemme 18.5] に現れる $\boldsymbol{\mu}_m$ 上の $\mathbb{Z}(k)$-torsor "$P_{m,k}+(-1)^k\epsilon P_{m,k}$" の ζ_m^a-成分になる捻じれ類を与えるガロア・コサイクルに相当すると考えられる．

References

[1] G. Anderson, *The hyperadelic gamma function*, Invent. Math., **95** (1989), 63–131.

[2] M. Asada, *The faithfulness of the monodromy representations associated with certain families of algebraic curves*, J. Pure and Applied Alg. **159** (2001), 123–147.

[3] G. V. Belyi, *Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), 267–276; English translation, Math. USSR-Izv. **14** (1980), 247–256.

[4] F. Brown, *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$. Ann. of Math. (2) **175** (2012), 949–976.

[5] R. Coleman, *Anderson-Ihara theory: Gauss sums and circular units*, in "Algebraic number theory – in honor of K.Iwasawa" (J.Coates, R.Greenberg, B.Mazur, I.Satake eds.), Adv. Studies in Pure Math., **17** (1989), 55–72.
[6] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in "Galois groups over $\mathbb{Q}$" (Y.Ihara, K.Ribet, J.-P.Serre eds.), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **16** (1989), 79–297.
[7] V. G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Algebra i Analiz **2** (1990); English translation Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860
[8] H. Esnault, P-H. Hai, *Packets in Grothendieck's section conjecture*, Adv. Math. **218** (2008), no. 2, 395–416.
[9] B. Enriquez, *Elliptic associators*, Selecta Math. New Series, **20** (2014), 491–584.
[10] H. Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), 545–556.
[11] H. Furusho, *The pentagon equation and the confluence relations*, arXiv:1809.00789.
[12] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, in "Geometric Galois actions, 1", London Math. Soc. Lecture Note Ser., **242**, (1997) 5–48.
[13] R. Hain, M. Matsumoto, *Weighted completion of Galois groups and Galois actions on the fundamental group of* $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, Compositio Math. **139** (2003), 119–167.
[14] 星裕一郎, Grothendieck による遠アーベルセクション予想について, 第 56 回代数学シンポジウム (2011 @岡山) 報告集 (15p.)
[15] Y. Ihara, *On congruence monodromy problems. Reproduction of the Lecture Notes: Volume 1 (1968), Volume 2 (1969)* with author's notes (2008). MSJ Memoirs, **18** Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2008.
[16] Y. Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Ann. of Math. (2) **123** (1986), 43–106.
[17] Y. Ihara, *On Galois representations arising from towers of coverings of* $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, Invent. math. **86** (1986), 427–459.
[18] Y. Ihara, *Braids, Galois groups, and some arithmetic functions*, Proc. Intern. Congress of Math. Kyoto 1990, 99–120.
[19] Y. Ihara, *On beta and gamma functions associated with the Grothendieck-Teichmüller group*, in "Aspects of Galois Theory" (H. Voelklein et.al (eds.)), London Math. Soc. Lect. Note Ser. **256** (1999) 144–179; Part II, J. reine angew. Math. **527** (2000) 1–11.
[20] Y. Ihara, *Some arithmetic aspects of Galois actions in the pro-p fundamental group of* $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, in "Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra", Proc. Sympos. Pure Math., **70**, 247–273,
[21] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, North-Holland Publishing Co., New York-Amsterdam, 1981.
[22] A. Minamide, *The Grothendieck-Teichüller group as an open subgroup of the outher automorphism group of the étale fundamental group of a configuration space*, RIMS workshop "Profinite monodromy, Galois representations, and Complex functions" 報告集，数理解析研究所講究録 to appear.
[23] M. Matsumoto, A. Tamagawa, *Mapping-class-group action versus Galois action on profinite fundamental groups*, Amer. J. Math. **122** (2000), 1017–1026.
[24] S. Mochizuki, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138** (1999), 319–423.
[25] H. Nakamura, *Galois rigidity of the etale fundamental groups of punctured projective lines*, J. Reine Angew. Math. **411** (1990), 205–216.
[26] H. Nakamura, *Galois rigidity of algebraic mappings into some hyperbolic varieties*, Internat. J. Math. **4** (1993), 421–438.
[27] H. Nakamura, On exterior Galois representations associated with open elliptic curves, J. Math. Sci., Univ. Tokyo **2** (1995), 197–231.
[28] H. Nakamura, Tangential base points and Eisenstein power series, in "Aspects of Galois Theory" (H. Völkein, D.Harbater, P.Müller, J.G.Thompson, eds.) London Math. Soc. Lect. Note Ser. **256** (1999), 202–217.
[29] H. Nakamura, *On Galois rigidity of fundamental groups of algebraic curve*, in "Nonabelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory" (J.Coates, M.Kim, F.Pop, M.Saidi, P.Schneider eds.) London Math. Soc. Lecture Note Series, 393 (2012), 56–71 (Cambridge UP): This is a translation into English of an old Japanese article published in "Report Collection of the 35th Algebra Symposium held at Hokkaido University in 1989" plus 8 complementary notes newly added in English.
[30] H. Nakamura, *On arithmetic monodromy representations of Eisenstein type in fundamental groups of once punctured elliptic curves*, Publ. RIMS, Kyoto University. **49** (2013), 413–496.

[31] H. Nakamura, *On profinite Eisenstein periods in the monodromy of universal elliptic curves*, Preprint based on two Japanese articles in 2002.
[32] H. Nakamura, *Variations of Eisenstein invariants for elliptic actions on a free profinite group*, Preprint under revision.
[33] H. Nakamura, *Moving frames and Eisenstein invariants*, in "Various Aspects of Multiple Zeta Values 2016" (H.Furusho ed.) RIMS Kokyuroku, Vol.2015, (2017), pp.162–169.
[34] H. Nakamura, *Arithmetic and Combinatorics in Galois fundamental groups*, RIMS workshop "Profinite monodromy, Galois representations, and Complex functions" 報告集，数理解析研究所講究録 to appear.
[35] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak, *On explicit formulae for l-adic polylogarithms*, Proc. Symp. Pure Math. (AMS) **70** (2002) 285–294.
[36] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak, *Tensor and homotopy crieterions for functional equations of ℓ-adic and classical iterated integrals*, in "Non-abelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory" (J.Coates et.al. eds.), London Math. Soc. Lect. Note Ser., **393** (2012), 258–310.
[37] H. Nakamura, Z. Wojtkowiak, *On distribution formula for complex and ℓ-adic polylogarithms*, to appear in "Periods in Quantum Field Theory and Arithmetic" (J. Burgos, K. Ebrahimi-Fard and H. Gangl eds). ArXiv:1711.03501
[38] H.Nakamura, Z.Wojtkowiak "On adelic Hurwitz zeta measures" Preprint November 2017: ArXiv:1711.03505
[39] H. Nakamura, A. Tamagawa, S. Mochizuki "The Grothendieck conjecture on the fundamental groups of algebraic curves" [translation of Sugaku 50 (1998), 113–129] Sugaku Expositions **14** (2001), 31–53.
[40] J. Okuda, K. Ueno, *The sum formula for multiple zeta values and connection problem of the formal Knizhnik-Zamolodchikov equation*, in " Zeta functions, topology and quantum physics", Dev. Math., (2005) **14**, 145–170, Springer.
[41] K. Shiratani, *On a kind of p-adic zeta functions*, in "Algebraic number theory", (Kyoto Internat. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Univ. Kyoto, Kyoto, 1976), 213–217. Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo, 1977.
[42] C. Soulé, *On higher p-adic regulators*, Lecture Notes in Mathematics, **854** (1981), 372–401.
[43] J. Stix, *On the birational section conjecture with local conditions*, Invent. Math. **199** (2015), 239–265.
[44] A. Tamagawa, *The Grothendieck conjecture for affine curves*, Compositio Math. **109** (1997), 135–194.
[45] 玉川安騎男, 代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想, 第 41 回代数学シンポジウム報告集
[46] 玉川安騎男, Galois 群や基本群から元の対象を復元する問題に関する歴史と最近の発展, 数理解析研究所講究録 998.
[47] 玉川安騎男, 代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想 その後, 第 49 回代数学シンポジウム報告集
[48] Z. Wojtkowiak, *On $\hat{\mathbb{Z}}$-zeta function*, in "Iwasawa Theory 2012" (A.Bouganis, O.Venjakob eds.), Contributions in Mathematical and Computational Sciences **7** (2014), pp. 471–483, Springer.
[49] Z. Wojtkowiak, *On ℓ-adic Galois L-functions*, Algebraic geometry and number theory, 161–209, Progr. Math., **321**, Birkhuser/Springer, 2017.

Hiroaki Nakamura: Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan
E-mail address: nakamura@math.sci.osaka-u.ac.jp