セルバーグゼータ関数と素測地線定理の現在

権　寧魯　（九州大学 数理学研究院）

はじめに
このノートは，2018 年 9 月に東京工業大学に於て開催された 第 63 回代数学シンポジウムにおける筆者の講演の発表資料に加筆，修正を行ったものです．これらのテーマに関心を持たれる方にとって何かのお役に立てば幸いです．講演の機会を与えてくださった上智大学の都築正男さんをはじめシンポジウムの関係者皆様に深く感謝致します．

目次

1　序　2

2　リーマンゼータ関数と素数定理　2

3　コンパクトリーマン面に対するセルバーグゼータ関数　3

4　階数 1 の局所対称空間に対するセルバーグゼータ関数　6

5　ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ型ゼータ関数　8

6　$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対する素測地線定理　13

7　$\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ に対する素測地線定理　14

第 63 回 代数学シンポジウム 2018 年 9 月 4 日
This work was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP17K05178.

1　序

1950 年代中頃に A. Selberg がリーマン面の閉測地線の集合（または，その基本群の双曲共役類の集合）から定義した“セルバーグゼータ関数”は，複素平面全体に有理型に解析接続されて，関数等式やリーマン予想の類似を満たす．また，このゼータ関数の非零領域を調べることにより，素数定理の類似である“素測地線定理”も証明される．1970 年代後半に，R. Gangoli, G. Warner 等により，セルバーグゼータ関数は，階数 1 の（コンパクト，そのあと非コンパクト体積有限な）局所対称空間の場合に拡張された．しかしながら，現在に至るまで階数 2 以上の場合にはあまり研究されてこなかった．この小論では，上記の階数 1 の場合を概観し，階数 2 のいくつかの場合：(i) ヒルベルトモジュラー曲面，(ii) $\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})/\mathrm{SO}(3)$，等について，最近得られた“セルバーグ型ゼータ”や“素測地線定理”についての結果を紹介する．特に，(ii) から総実 3 次整環全体に渡る類数和の漸近公式が得られる．(ii) は，A. Deitmar 氏，P. Spilioti 氏との共同研究である．

2　リーマンゼータ関数と素数定理

リーマンゼータ関数は，$\mathrm{Re}(s) > 1$ において絶対収束する下記の級数，またはオイラー積で定義される．

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\,:\,\text{素数}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \quad \text{for } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

以下の事実が知られている．

(1) $\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続されて，$s = 1$ における一位の極を除いて正則となる．
(2) 関数等式：$\hat{\zeta}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ を満たす．
(3) $\forall s \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$ かつ $\mathrm{Re}(s) = 1$ ならば，$\zeta(s) \neq 0$ が成り立つ．

特に，(3) の事実から下記の素数定理が導かれる．

定理 2.1 (素数定理)．以下の漸近公式が成り立つ．

(*a*) $\pi(x) := \#\{p : \text{素数} \mid p < x\} \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad (x \to \infty)$
(*b*) $\vartheta(x) := \sum_{p:\text{素数},\,p<x} \log p \sim x \quad (x \to \infty)$
(*c*) $\psi(x) := \sum_{n<x} \Lambda(n) \sim x \quad (x \to \infty)$，$\Lambda(p^k) = \log p$，（素数べき以外では 0 ）

• セルバーグゼータ関数，素測地線定理とは？

X を双曲多様体とする．非常に荒っぽく言えば，リーマンゼータ関数のオイラー積による定義で，集合 $\{p \mid 素数\}$ を集合 $\{c \mid X \text{ の素測地線}\}$ で置き換えて定義されたものがセルバーグゼータ関数である．その際に，“素数の長さ：$\log p$” を “素測地線の長さ：$l(c)$” で置き換える．（つまり，p^{-s} が $e^{-l(c)s}$ に置き換わる．）リーマンゼータ関数の非零領域を調べることによって素数定理が得られたように，セルバーグゼータ関数の非零領域を調べることによって得られるのが “素測地線定理” である．

問題：X がより一般のリーマン多様体で，素数の類似物である “素測地線” がない（もしくは少ない）とき，どうしたらよいか？

3 コンパクトリーマン面に対するセルバーグゼータ関数

3.1 記号

$G := \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$，$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ とする．G は上半平面 $\mathbb{H}$ に一次分数変換 $g.z := \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$ で作用する．ここで，$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ とおいた．

$\Gamma \subset G$ を離散部分群する．単位元と異なる $\gamma \in \Gamma$ は以下のように分類される．

- γ が双曲的 $\Leftrightarrow |\mathrm{tr}(\gamma)| > 2 \Leftrightarrow \mathrm{Fix}(\gamma) = \{\alpha, \alpha^{-1}\} \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- γ が楕円的 $\Leftrightarrow |\mathrm{tr}(\gamma)| < 2 \Leftrightarrow \mathrm{Fix}(\gamma) = \{\alpha, \bar{\alpha}\} \subset \mathbb{C}$ with $\alpha \in \mathbb{H}$
- γ が放物的 $\Leftrightarrow |\mathrm{tr}(\gamma)| = 2 \Leftrightarrow \mathrm{Fix}(\gamma) = \{\alpha\} \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Gamma\backslash\mathbb{H}$ がコンパクトなら，Γ は放物元を持たないことが知られている．この節では，さらに以下を仮定する：

仮定 3.1. $\Gamma \subset G$ を余コンパクトでトーションのない離散部分群とする．

このとき，$X := \Gamma\backslash\mathbb{H}$ は，種数 $g \geq 2$ のコンパクトリーマン面となる．

$\gamma \in \Gamma$ が双曲的なら，γ の Γ における中心化群が無限巡回群となる．また，γ は G において対角行列と共役で，$\gamma \sim \pm\left(\begin{smallmatrix} N(\gamma)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(\gamma)^{-1/2} \end{smallmatrix}\right)$，ここで，$N(\gamma) > 1$ である．

3.2 Γ（または X）に対するセルバーグゼータ関数

$N(\gamma) > 1$ を双曲元 $\gamma \in \Gamma$ のノルムと呼ぶ．また，$N(\gamma) = e^{l(c_\gamma)}$ である．ここで，$l(c_\gamma)$ は双曲元 γ から決まる閉測地線 c_γ の長さである．$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の原始的双曲元の Γ-共

役類の集合とする．

定義 3.2 (Γ に対するセルバーグゼータ関数)**.** セルバーグゼータ関数は，$\mathrm{Re}(s) > 1$ において絶対収束する下記のオイラー積で定義される．

$$Z_\Gamma(s) := \prod_{[p]\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \prod_{k=0}^{\infty} \Big(1 - N(p)^{-(k+s)}\Big).$$

定義 3.3 (Γ に対するルエルゼータ関数)**.** ルエルゼータ関数は，$\mathrm{Re}(s) > 1$ において絶対収束する下記のオイラー積で定義される．

$$R_\Gamma(s) := \prod_{[p]\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \Big(1 - N(p)^{-s}\Big)^{-1}.$$

補題 3.4.

$$R_\Gamma(s) = \frac{Z_\Gamma(s+1)}{Z_\Gamma(s)}.$$

上記の補題より，$R_\Gamma(s)$ の解析的性質は $Z_\Gamma(s)$ の解析的性質より導かれる．

セルバーグは下記の定理を証明した．

定理 3.5 (Selberg [15], 1956)**.**

1. $\mathrm{Re}(s) > 1$ で定義されていた $Z_\Gamma(s)$ は，$\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続される．（実際は整型となる．）
2. $Z_\Gamma(s)$ は $s = -k$ $(k \in \mathbb{N})$ に位数 $(2g-2)(2k+1)$ の零点，
$s = 0$ に位数 $(2g-1)$ の零点，$s = 1$ に一位の零点を持つ． ：自明零点
3. $Z_\Gamma(s)$ は $s = \frac{1}{2} \pm ir_n$ に零点を持つ． ：非自明零点 （“リーマン予想の類似”）

ここで，$\{\lambda_n = 1/4 + r_n^2\}$ は $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ に作用するラプラシアン $\Delta := -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ の固有値の集合で，下記のように番号づけられている．

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots \to \infty$$

また，$\{\phi_n\} \subset L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ は固有関数系で，$\Delta\,\phi_n = \lambda_n\,\phi_n$ なるものとする．

3.3 セルバーグ跡公式

f を G 上の“試験関数”，F を f の“フーリエ変換”とする．セルバーグ跡公式とは下記のような等式で，左辺はラプラシアンの固有値に渡る和で**スペクトル辺**と呼ばれ，右辺は Γ の共役類に渡る和で**幾何学的辺**と呼ばれる．右辺に現れる $I_\gamma(f)$ は軌道積分と呼ば

れている．

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}(\Delta)} F(\lambda) = \sum_{\gamma\in\mathrm{Conj}(\Gamma)} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\, I_f(\gamma), \quad I_f(\gamma) := \int_{G_\gamma\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\, d\dot{x}.$$

Γ が余コンパクトでトーションがないときは，Γ の共役類の集合 $\mathrm{Conj}(\Gamma) = \{e\}\cup\Gamma_{hyp}$ となり，セルバーグ跡公式はより具体的に書ける．

定理 3.6 (セルバーグ跡公式（Γ：余コンパクト，トーションなし）)**.** 下記の等式が成立する．両辺は絶対収束する．

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) = &\ \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r h(r)\tanh(\pi r)\, dr \\ &+ \sum_{\gamma\in\Gamma_{hyp}} \frac{\log N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}} g(\log N(\gamma)).\end{aligned}$$

ここで，

- $h(r) = h(-r)$：複素数値試験関数，$|\,\mathrm{Im}(r)| < \frac{1}{2} + \delta$ で解析的 ($\exists\delta > 0$) かつ 増大度条件 $|h(r)| \leq A[1+|r|]^{-2-\delta}$ を満たす（$\exists A > 0$)．
- $g(u) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)e^{-iru}\, dr$：フーリエ変換

注意 モジュラー群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ は余コンパクトでなく楕円元も含むので，それに対する跡公式は上記より複雑になる．実際，楕円元・放物元やアイゼンスタイン級数の寄与が現れる．

3.4 $Z_\Gamma(s)$ に関するセルバーグの定理の証明

実数 $\beta > 2$ を固定し，$h(r) = \frac{1}{r^2+(s-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{r^2+\beta^2}$ とおくと，これは試験関数の条件を満たす．またそのフーリエ変換は $g(u) = \frac{1}{2s-1}e^{-(s-\frac{1}{2})|u|} - \frac{1}{2\beta}e^{-\beta\,|u|}$ となる．この試験関数 $h(r)$ に対してセルバーグ跡公式を書き下すと，下記の命題を得る．（双曲共役類の寄与が $Z_\Gamma(s)$ の対数微分で書けることがポイントである．）

命題 3.7 (上記 $h(r)$ に対する跡公式)**.**

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{r_n^2+(s-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{r_n^2+\beta^2}\Big] = &\ \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{s+k} - \frac{1}{\beta+\frac{1}{2}+k}\Big] \\ &+ \frac{1}{2s-1}\frac{Z_\Gamma'(s)}{Z_\Gamma(s)} - \frac{1}{2\beta}\frac{Z_\Gamma'(\frac{1}{2}+\beta)}{Z_\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)}.\end{aligned}$$

この命題より，$Z_\Gamma(s)$ の対数微分の $\mathbb{C}$ 全体への解析接続が導かれ，その極がすべて一位で留数がすべて整数であることから，$Z_\Gamma(s)$ 自身の $\mathbb{C}$ 全体への有理型解析接続が証明される．また命題の等式の左辺は $s \to 1-s$ で不変なので差を取って下記の関数等式を得る：

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)} + \frac{Z'_\Gamma(1-s)}{Z_\Gamma(1-s)} = -(2s-1)\frac{4\pi(g-1)}{2\pi}\pi\cot(\pi s).$$

3.5 セルバーグゼータ関数の関数等式

定理 3.8 (Selberg, 1956)**.**

$$Z_\Gamma(1-s) = Z_\Gamma(s)\exp\Big(-4(g-1)\pi\int_0^{s-\frac{1}{2}} r\,\tan(\pi r)\,dr\Big).$$

上記のセルバーグによって示された関数等式は，二重ガンマ関数 $\Gamma_2(s)$ と二重サイン関数 $S_2(s) = \Gamma_2(2-s)\Gamma_2(s)^{-1}$ を用いて対称な関数数等式に書き換えられる．上記関数等式の右辺に現れる exp(積分) の部分が二重サイン関数を用いて表示できるところがポイントである：

$$\begin{aligned} &Z_\Gamma(1-s) = Z_\Gamma(s)\big(S_2(s)^{-1}S_2(s+1)^{-1}\big)^{2g-2} \\ \Rightarrow\ &Z_\Gamma(1-s)\big(\Gamma_2(1-s)\Gamma_2(2-s)\big)^{2g-2} = Z_\Gamma(s)\big(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\big)^{2g-2} \end{aligned}$$

ここで，$\Gamma_2(z) := \exp(\zeta'_2(0,z))$ で定義されて，$\zeta_2(s,z) := \sum_{n,m\geq 0}(n+m+z)^{-s}$ は二重フルビッツゼータ関数である．(一般の多重ガンマ関数，多重サイン関数については [13] を参照．)

定理 3.9. 以下の関数等式が成り立つ．

- $\hat{Z}_\Gamma(1-s) = \hat{Z}_\Gamma(s)$.
- $R_\Gamma(s)R_\Gamma(-s) = (2\sin(\pi s))^{2(2-2g)}$.

ここで，$\hat{Z}_\Gamma(s) := Z_\Gamma(s)\big(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\big)^{2g-2}$ は完備セルバーグゼータ関数である．

4 階数 1 の局所対称空間に対するセルバーグゼータ関数

4.1 記号

G を階数 1 の連結，非コンパクト半単純リー群で中心が有限なもの，K を G の極大コンパクト部分群とする．$G = NAK$ を岩澤分解とすると，仮定より $\dim_{\mathbb{R}} A = 1$ となる．

$M := Z_K(A)$ を中心化群とし，$P := MAN$ を放物型部分群とする．Γ を G の離散部分群とし，局所対称空間 $X := \Gamma\backslash G/K$ とする．

• $\gamma \in \Gamma$ が双曲的 $\Leftrightarrow$ γ が G において，元 $m_\gamma a_\gamma \in MA^+$ と共役

とし，$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の原始的双曲元の Γ-共役類の集合とする．

このとき，階数 1 の局所対称空間 $X = \Gamma\backslash G/K$ と有限次既約表現 $\sigma \in \widehat{M}$ に対するセルバーグゼータ関数 $Z_\sigma(s)$ は，以下で定義される．

定義 4.1 (Γ (または X) に対する $\sigma \in \widehat{M}$ 付きセルバーグゼータ関数)**.**

$$Z_\sigma(s) := \prod_{[p]\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \prod_{k=0}^{\infty} \det\Big(\mathrm{Id} - \overline{\sigma(m_p)} \otimes S^k\big(\mathrm{Ad}(m_p a_p)|_{\bar{\mathfrak{n}}}\big) e^{-sl(c_p)}\Big) \quad (\mathrm{Re}(s) \gg 0).$$

ここで，$l(c_p)$ は双曲元 p から定まる閉測地線の長さ．$S^k(A)$ は A の k 次対称積，$\bar{\mathfrak{n}} = \theta(\mathrm{Lie}(N))$，$\theta$ はカルタン対合である．

4.2 セルバーグゼータ関数に対する問題

上で定義されたセルバーグゼータ関数 $Z_\sigma(s)$ に対して，以下の“良い解析的性質”が成立するかどうかが問題となる．

1. $\rho_0 > 0$ が存在して，$Z_\sigma(s)$ が右半平面 $\mathrm{Re}(s) > 2\rho_0$ で絶対収束し，そこで正則関数を定義する．
2. $Z_\sigma(s)$ が $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数に解析接続される．
3. “リーマン予想の類似”を満たす：非自明零点の集合 $\{s = \rho_0 \pm ir_n\}$ とすると，有限個を除いて $\mathrm{Re}(s) = \rho_0$ 上に非自明零点が並ぶ．（ここで，$\{\rho_0^2 + r_n^2\}$ はラプラシアンの固有値の集合である．）
4. $s \leftrightarrow 2\rho_0 - s$ に関する関数等式をみたす．

上記の良い性質を持つことが知られている場合：

(1) Γ：余コンパクト，σ：自明表現　（Gangolli [6], 1977）

(2) Γ：余有限，σ：自明表現　（Gangolli and Warner [7], 1980）

(3) Γ：余コンパクト，σ：一般　（Wakayama [17], 1985）

(4) $G = \mathrm{SO}(1,n)$, Γ：余有限，σ：基本表現　（G and Park [8], 2010）
（特に，ルエルゼータ関数 $R_\Gamma(s)$ の解析的性質が導かれる．）

G の階数が 1 で Γ が余有限なときでも，表現 σ 付きの場合は $Z_\sigma(s)$ の解析的性質は部

分的にしかわかっていない．さらなる問題としては以下の場合が考えられる．

- G が階数 1，Γ が非余有限 （Patterson, Guillopé, Borthwick による geometrically finite, convex co-compact な場合の研究など）
- G の階数が 2 以上（Deitmar による Γ が余コンパクトな場合の研究 [3] など）

次節以降では，階数 2 で余有限な場合であるヒルベルトモジュラー曲面のセルバーグ型ゼータ関数に関する結果（[9, 10, 11]）や，階数 2 で"二次元の平坦部分多様体"を数える $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ に対する"素測地線定理"（[5]）について紹介する．

5 ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ型ゼータ関数

5.1 ヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ型ゼータ関数

$K/\mathbb{Q}$ を類数 1 の実二次体とし，$\mathcal{O}_K$ を K の整数環，$\varepsilon > 1$ を K の基本単数とする．（例： $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ は類数 1 で，$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$，$\varepsilon = 2 + \sqrt{3}$ となる．）

K の元 a の $\mathbb{Q}$ 上の共役を a' とおき，$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_K)$ に対して，$\gamma' := \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ とおく．

$$\Gamma_K := \{(\gamma, \gamma') \mid \gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_K)\}$$

を K のヒルベルトモジュラー群と呼ぶ．このとき，

- $\Gamma_K \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})^2$ は既約な離散部分群となる．（余コンパクトでないが，余有限）
- Γ_K は $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ に成分ごとの一次分数変換で作用する．
- Γ_K はただ一つのカスプ (∞, ∞) を持つ．（Γ_K-同値でない放物的固定点）
- $X_K := \Gamma_K \backslash \mathbb{H}^2$ を K のヒルベルトモジュラー曲面と呼ぶ．

問題： Γ_K の共役類の集合は下記のような部分集合の和に分割されるが，どの共役類の部分集合から"セルバーグゼータ関数"が構成できるだろうか？

$$\mathrm{Conj}(\Gamma_K) = \{e\} \cup \Gamma_{\mathrm{H}} \cup \Gamma_{\mathrm{E}} \cup \Gamma_{\mathrm{HE}} \cup \Gamma_{\mathrm{EH}} \cup \Gamma_{\mathrm{P}}$$

ここで，$\Gamma_{\mathrm{H}}, \Gamma_{\mathrm{E}}, \Gamma_{\mathrm{P}}$ は双曲-双曲，楕円-楕円，放物-放物的な共役類の集合であり，$\Gamma_{\mathrm{HE}}, \Gamma_{\mathrm{EH}}$ は双曲-楕円，楕円-双曲的な共役類の集合である．

ひとつの解答として，共役類の部分集合として Γ_{HE} を取ると，セルバーグゼータ関数が構成できることを紹介する．ポイントは，$(\gamma, \gamma') \in \Gamma_K$ を双曲-楕円元とすると（つま

り，$|\,\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$ かつ $|\,\mathrm{tr}(\gamma')| < 2$)，双曲-楕円的 (γ,γ') の Γ_K における中心化群は無限巡回群となることである．

偶数 $m \geq 2$ を固定する．

定義 5.1 (Γ_K に対する重さ $(0,m)$ のセルバーグゼータ関数，[10])**.**

$$Z_K(s;m) := \prod_{(p,p')} \prod_{k=0}^{\infty} \Big(1 - e^{i(m-2)\omega}\, N(p)^{-(k+s)}\Big)^{-1} \quad \text{for } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

ここで，(p,p') は Γ_K の原始的 双曲-楕円元の Γ_K-共役類全体の集合を動き，(p,p') は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})^2$ において以下と共役とする．

$$(p,p') \sim \Big(\begin{pmatrix} N(p)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(p)^{-1/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\Big).$$

また，$N(p) > 1$, $\omega \in (0,\pi)$ かつ $\omega \notin \pi\mathbb{Q}$ となるようにとる．

注意：Selberg（[16], 未出版）と Deitmar（[3], 2006）も同様なゼータ関数を余コンパクトな Γ に対して考察している．

5.2 $Z_K(s;m)$ の解析的性質

定理 5.2 ([10])**.** $m \in 2\mathbb{N}$ とする． $\mathrm{Re}(s) > 1$ において定義されていた $Z_K(s;m)$ は複素平面全体に有理型に解析接続される．

我々のセルバーグゼータ関数 $Z_K(s;m)$ もまた“非自明”零点や極を持ち，それらは下記の二つのラプラシアンの固有値たちと関係がある．

$(z_1,z_2) \in \mathbb{H}^2$ に対する，重さ 0 と m のラプラシアンを

$$\Delta_0^{(1)} := -y_1^2\big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\big), \quad \Delta_m^{(2)} := -y_2^2\big(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\big) + im\, y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

とする．$\Delta_0^{(1)}$ と $\Delta_m^{(2)}$ は，重さ $(0,m)$ のヒルベルト-マース形式の空間：

$$L^2(m) := L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma_K \backslash \mathbb{H}^2; (0,m)) \ni f(z_1,z_2)$$

に作用する．この空間の元 $f(z_1,z_2)$ は，ラプラシアン $\Delta_0^{(1)}$ の $\Delta_m^{(2)}$ の共通の固有関数で，保型性：$f(\gamma z_1, \gamma' z_2) = \big(\frac{c'z_2+d'}{|c'z_2+d'|}\big)^m f(z_1,z_2) \quad \forall(\gamma,\gamma') \in \Gamma_K$ を満たす．

さて，偶数 m に対して，下記で定義される $L^2(m)$ の部分空間 $V_m^{(2)}$ を考える．

$$V_m^{(2)} := \left\{ f \in L^2(m) \,\middle|\, \Delta_m^{(2)} f = \frac{m}{2}\big(1 - \frac{m}{2}\big)\, f \right\}.$$

定理 5.3 ([10], $Z_K(s;2)$ の零点と極：重さ $(0,2)$)**.** $Z_K(s;2)$ の零点と極は以下で与えられる．

- $Z_K(s;2)$ は $s=1$ に二位の零点を持つ．
- $Z_K(s;2)$ は $\Delta_0^{(1)}$ の $V_2^{(2)}$ における固有値 $\frac{1}{4}+\rho_j(2)^2$ の重複度の 2 倍を位数とする零点を $s=\frac{1}{2}\pm i\rho_j(2)$ に持つ．：“非自明零点”
- $Z_K(s;2)$ は $s=\pm\frac{k\pi i}{\log\varepsilon}$ $(k\in\mathbb{N})$ に二位の零点を持つ．
- $Z_K(s;2)$ は $s=0$ に位数 $E(X_K)$ の零点を持つ．
- $Z_K(s;2)$ は $s=-k$ に $(k\in\mathbb{N})$ 位数 $(2k+1)E(X_K)+2\sum_{j=1}^{N}[k/\nu_j]-2kN$ である零点（位数が負のときは極）を持つ．

注意：オイラー標数 $E(X_K)$ は偶数なので，すべての零点と極の位数は偶数となる．また，二つの零点・極の位置が一致するときは，それらの位数を合計する．

定理 5.4 ([10], $Z_K(s;m)$ の零点と極：重さ $(0,m)$, $m\geq 4$)**.** $m\geq 4$ を偶数とする．$Z_K(s;m)$ の零点と極は以下で与えられる．

- $Z_K(s;m)$ は $\Delta_0^{(1)}$ の $V_m^{(2)}$ における固有値 $\frac{1}{4}+\rho_j(m)^2$ の重複度を位数とする零点を $s=\frac{1}{2}\pm i\rho_j(m)$ に持ち：“非自明零点”，一位の零点を $s=1-\frac{m}{2}+\frac{\pi ik}{\log\varepsilon}$ $(k\in\mathbb{Z})$ に持つ．
- $Z_K(s;m)$ は $\Delta_0^{(1)}$ の $V_{m-2}^{(2)}$ における固有値 $\frac{1}{4}+\rho_j(m-2)^2$ の重複度を位数とする極を $s=\frac{1}{2}\pm i\rho_j(m-2)$ に持ち：“非自明極”，一位の極を $s=2-\frac{m}{2}+\frac{\pi ik}{\log\varepsilon}$ $(k\in\mathbb{Z})$ に持つ．
- $Z_K(s;m)$ は $s=-k$ $(k\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ に位数 $(2k+1)E(X_K)+2\sum_{j=1}^{N}[k/\nu_j]-\sum_{j=1}^{N}\beta_{k,j}(m)$ の零点（位数が負のときは極）を持つ．
- $m=4$ のときは，$Z_K(s,m)$ は一位の零点を $s=0$ と $s=1$ に持つ．

ここで，$E(X_K)$ はヒルベルトモジュラー曲面 X_K のオイラー標数であり，自然数 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_N$ は Γ_K の原始的楕円固定点の位数とする．また，$\beta_{j,k}(m)$ は明示的に与えられる整数であり，二つの零点・極の位置が一致するときは，それらの位数を合計する．

注意：定理 5.2 から 5.4 と $Z_K(s;m)$ の関数等式は Γ_K に対するセルバーグ跡公式とその“差分公式”を用いて証明される．（詳細は [10] を参照．）

5.3 $Z_m(s)$ と $\sqrt{Z_2(s)}$

$K/\mathbb{Q}$ を類数 1 の実二次体，$m \in 2\mathbb{N}$ とし，セルバーグ型ゼータ関数 $Z_K(s;m)$ を導入した．以降簡単のため，これを $Z_m(s)$ と書く．つまり，

$$Z_m(s) = \prod_{(p,p')\in \mathrm{P}\Gamma_{\mathrm{HE}}} \prod_{k=0}^{\infty} \Big(1 - e^{i(m-2)\omega} \, N(p)^{-(k+s)}\Big)^{-1} \quad \text{for } \mathrm{Re}(s) > 1$$

である．

補題 5.5 (Hirzebruch-Zagier [12])**.** オイラー標数 $E(X_K)$ は正の偶数である．

上記補題より，$\frac{d}{ds}\log Z_2(s)$ の留数がすべて偶数であることがわかるので，
$Z_2(s)$ の“平方根”が定義できる．

$$\begin{aligned}\sqrt{Z_2(s)} &:= \prod_{(p,p')\in \mathrm{P}\Gamma_{\mathrm{HE}}} \prod_{n=0}^{\infty} \Big(1 - N(p)^{-(n+s)}\Big)^{-1/2} \\ &= \exp\Big(\frac{1}{2} \sum_{(p,p')} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{N(p)^{-ks}}{1-N(p)^{-k}}\Big) \quad \text{for } \mathrm{Re}(s) > 1.\end{aligned}$$

$\sqrt{Z_2(s)}$ も複素平面全体に有理型に解析接続できることがわかる．

5.4 完備セルバーグゼータ関数（$s \mapsto 1-s$ で不変）

$Z_m(s)$ の関数等式に現れる局所因子を調べることにより，$s \mapsto 1-s$ で不変な完備セルバーグゼータ関数が定義される

定義 5.6 ([10], 完備セルバーグゼータ関数)**.**

$$\begin{aligned}\widehat{Z}_2^{\frac{1}{2}}(s) :=& \sqrt{Z_2(s)} \cdot \Big(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\Big)^{\zeta_K(-1)} \prod_{j=1}^{N} \prod_{l=0}^{\nu_j-1} \Gamma\big(\tfrac{s+l}{\nu_j}\big)^{\frac{\nu_j-1-2l}{2\nu_j}} \\ &\cdot \varepsilon^{-s}(1-\varepsilon^{-2s})^{-1}, \\ \widehat{Z}_m(s) :=& Z_m(s) \cdot \Big(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\Big)^{2\zeta_K(-1)} \prod_{j=1}^{N} \prod_{l=0}^{\nu_j-1} \Gamma\big(\tfrac{s+l}{\nu_j}\big)^{\frac{\nu_j-1-\alpha_l(m,j)-\overline{\alpha_l}(m,j)}{\nu_j}} \\ &\cdot \zeta_\varepsilon\Big(s+\frac{m}{2}-1\Big)\zeta_\varepsilon\Big(s+\frac{m}{2}-2\Big)^{-1} \quad (m \geq 4).\end{aligned}$$

ここで，$\Gamma_2(s)$ は二重ガンマ関数，自然数 $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N$ は X_K の楕円的固定点の位数，$\alpha_l(m,j), \overline{\alpha_l}(m,j) \in \{0, 1, \ldots, \nu_j - 1\}$ は明示的に与えられる整数である．また，$\zeta_K(s)$ は K のデデキントゼータ関数，$\zeta_\varepsilon(s) := (1-\varepsilon^{-2s})^{-1}$ であり，ε は K の基本単数である．

5.5　完備セルバーグゼータ関数の行列式表示

m を正の偶数とする．第一ラプラシアンの制限 $\square_m := \Delta_0^{(1)}\big|_{V_m^{(2)}}$ とおき，その固有値の集合を下記のように番号づけておく．

$$0 < \lambda_0(m) \leq \lambda_1(m) \leq \cdots \leq \lambda_n(m) \leq \cdots$$

これを用いて，正規化行列式を以下で定義する．

$$\mathrm{Det}\Big(\square_m + s(s-1)\Big) := \exp\Big(-\frac{\partial}{\partial w}\Big|_{w=0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\big(\lambda_n(m) + s(s-1)\big)^w}\Big).$$

このとき，以下が成り立つ．

定理 5.7 ([11])**.**

- $\widehat{Z}_2^{\frac{1}{2}}(s) = e^{(s-\frac{1}{2})^2 \zeta_K(-1) + C_2} \dfrac{\mathrm{Det}\big(\square_2 + s(s-1)\big)}{s(s-1)}.$
- $\widehat{Z}_4(s) = e^{2(s-\frac{1}{2})^2 \zeta_K(-1) + C_4} \dfrac{s(s-1) \cdot \mathrm{Det}\big(\square_4 + s(s-1)\big)}{\mathrm{Det}\big(\square_2 + s(s-1)\big)}.$
- $m \geq 6$ のとき，$\widehat{Z}_m(s) = e^{2(s-\frac{1}{2})^2 \zeta_K(-1) + C_m} \dfrac{\mathrm{Det}\big(\square_m + s(s-1)\big)}{\mathrm{Det}\big(\square_{m-2} + s(s-1)\big)}.$

ここで，定数 C_m $(m \in 2\mathbb{N})$ は以下のように明示的に与えられる．

$$C_2 = -\frac{1}{2}\log\varepsilon + \sum_{j=1}^{N} \frac{\nu_j^2 - 1}{12\nu_j} \log \nu_j,$$

$$C_m = \sum_{j=1}^{N} \frac{\nu_j^2 - 1 - 12\alpha_0(m,j)\big\{\nu_j - \alpha_0(m,j)\big\}}{6\nu_j} \log \nu_j \quad (m \geq 4).$$

注意： Γ_K に対するセルバーグ跡公式の“二重差分公式”を用いると，ワイルの法則：

$$N_m^+(T) := \#\{j \,|\, \lambda_j(m) \leq T\} \sim \tfrac{(m-1)}{2} \cdot \zeta_K(-1) \cdot T \quad (T \to \infty).$$

が示せる．これより，$m \geq 4$ のとき，$Z_m(s)$ は極より零点を“多く”持つと言える．

6　$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対する素測地線定理

6.1　代数体の整環

F を $[F:\mathbb{Q}]=n$ なる代数体とする．このとき，

- $\mathcal{O}\subset F$: 整環，i.e. 階数 n の自由 $\mathbb{Z}$ -加群で　F の 1 を含む部分環となるもの
- $I(\mathcal{O})$: F の有限生成 $\mathcal{O}$ -部分加群の集合
- $[I(\mathcal{O})]$: $I(\mathcal{O})$ の元の同型類の集合
- $h(\mathcal{O})<\infty$: $\mathcal{O}$ の類数，i.e. $[I(\mathcal{O})]$ の濃度
- $R(\mathcal{O})$: $\mathcal{O}$ の単数基準

とおく．$\mathcal{O}$ の無限集合に対して，下記のタイプの無限和の漸近挙動を考察したい．

$$\sum_{\mathcal{O}} h(\mathcal{O})R(\mathcal{O})$$

6.2　実二次整環

- $\mathscr{D}:=\left\{d\in\mathbb{N}\,|\,d\equiv 0,1 \pmod 4,\ \text{not a square}\right\}$
- $d\in\mathscr{D}$ に対して，$\mathcal{O}_d:=\left\{\frac{x+y\sqrt{d}}{2}\,\middle|\,x,y\in\mathbb{Z},\,x\equiv yd \pmod 2\right\}\subset\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ とおくと $\mathcal{O}_d$ は実二次整環となり，これらで実二次整環は尽くされる．
  例　$\mathcal{O}_8=\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ は極大な整環，$\mathcal{O}_{32}=\mathbb{Z}+2\sqrt{2}\mathbb{Z}$ は極大でない整環
- $\varepsilon_d>1$ を $\mathcal{O}_d$ の基本単数とすると，単数基準 $R(\mathcal{O}_d)=\log\varepsilon_d$ となる．
- $h(\mathcal{O}_d)$: $\mathcal{O}_d$ の類数

実二次整環に渡る類数和に関して，ガウスによって予想されて，ジーゲルによって証明された下記の漸近公式が有名である．

定理 6.1 (Gauss/Siegel)**.**

$$\sum_{d\le x} h(\mathcal{O}_d)\log\varepsilon_d=\frac{\pi^2}{18\zeta(3)}x^{3/2}+O(x\log x)\quad (x\to\infty).$$

$\Gamma=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ に対するセルバーグゼータ関数の“数論的表示”を用いて，Sarnak は上記とは異なるタイプの漸近公式を与えた．

定理 6.2 (Sarnak [14], 1982)**.**

$$\sum_{\varepsilon_d \le x} h(\mathcal{O}_d)\log\varepsilon_d = \frac{x^2}{2} + O(x^{3/2}(\log x)^3) \quad (x\to\infty),$$

$$\sum_{\varepsilon_d \le x} h(\mathcal{O}_d) = \mathrm{Li}(x^2) + O(x^{3/2}(\log x)^2) \quad (x\to\infty).$$

ここで，$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ である．

注意：$\sum_{d\le x}$ ではなくて，$\sum_{\varepsilon_d\le x}$ であることに注意せよ．

（証明の概略）　実二次整環のゼータ関数を以下で定義する．

$$\zeta_{\mathscr{D}}(s) := \prod_{d\in\mathscr{D}} (1-\varepsilon_d^{-2s})^{-h(\mathcal{O}_d)}.$$

このとき，$\zeta_{\mathscr{D}}(s)$ は $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ に対するセルバーグゼータ関数を用いて，$\zeta_{\mathscr{D}}(s) = Z_\Gamma(s+1)/Z_\Gamma(s)$ のように書ける．これから，$\zeta_{\mathscr{D}}(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続されて，$s=1$ に一位の極を持ち $\mathrm{Re}(s)\ge 1$ で非零になることがわかる．　$\square$

7　$\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ に対する素測地線定理

7.1　類数を含む形の $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ に対する素測地線定理

$O_{\mathbb{R}}(3)$ を総実三次整環 $\mathcal{O}$ すべての集合とする．(i.e. $\mathcal{O}\subset\exists F$：総実三次体)

- $\mathcal{O}\in O_{\mathbb{R}}(3)$ に対して，$h(\mathcal{O})$ を類数，$R(\mathcal{O})$ を単数基準とする．
- $\lambda\in\mathcal{O}^\times$ に対して，ρ_1,ρ_2,ρ_3 を F の $\mathbb{R}$ への埋め込みで $|\rho_1(\lambda)|\ge|\rho_2(\lambda)|\ge|\rho_3(\lambda)|$ なるように番号づける．

このとき，$\alpha_1(\lambda) = \frac{|\rho_1(\lambda)\rho_3(\lambda)|}{|\rho_2(\lambda)|^2}$，　$\alpha_2(\lambda) = \left(\frac{|\rho_2(\lambda)|}{|\rho_3(\lambda)|}\right)^2$ とおく．

定理 7.1 ($\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ に対する素測地線定理, [5])**.** $T_1, T_2 > 0$ に対して

$$\psi(T_1,T_2) := \sum_{\substack{\mathcal{O}\in O_{\mathbb{R}}(3),\ \lambda\in\mathcal{O}^\times/\{\pm1\} \\ 1<\alpha_1(\lambda)\le T_1 \\ 1<\alpha_2(\lambda)\le T_2}} h(\mathcal{O})\,R(\mathcal{O})$$

とおく．

$T_1, T_2 \to \infty$ のとき，以下の漸近公式が成り立つ．

$$\psi(T_1, T_2) \ \sim \ \frac{16}{\sqrt{3}} T_1 T_2.$$

7.2 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$ における素測地線

以下では，$G := \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ とし，$K := \mathrm{SO}(3)$ を G の極大コンパクト部分群とする．$\Gamma := \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ は G の（余コンパクトでない）余有限な離散部分群となる．Γ の共役類の集合は下記のように分割される：

$$\mathrm{Conj}(\Gamma) = \{e\} \cup \Gamma_{\mathrm{ell}} \cup \Gamma_{\mathrm{unip}} \cup \Gamma_{\mathrm{sp}} \cup \Gamma_1.$$

ここで，$\Gamma_{\mathrm{ell}}, \Gamma_{\mathrm{unip}}$ は，それぞれ Γ の楕円元，ユニポテント元の共役類からなる集合．$\Gamma_{\mathrm{sp}}, \Gamma_1$ は，下記のカルタン部分群 H_{sp}, H_1 の元に共役な元の共役類の集合である．

- $H_{sp} = A_{sp}T_{sp}$: 分裂カルタン部分群,
  ここで，$A_{sp} = \{\mathrm{diag}(u,v,w) \,|\, u,v,w > 0,\, uvw = 1\}$,
  $T_{sp} = \{\mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \,|\, \det = 1\}$ である．
- $H_1 = A_1 T_1$: 基本カルタン部分群,
  ここで，$A_1 = \{\mathrm{diag}(y,y,y^{-2}) \,|\, y > 0\}$，$T_1 = \{\mathrm{diag}(k,1) \,|\, k \in \mathrm{SO}(2)\}$ である．

単純ルート $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}_{sp}^*$ を下記で定義されるものとする．

$$\alpha(\mathrm{diag}(x,y,z)) = x - y, \quad \beta(\mathrm{diag}(x,y,z)) = y - z.$$

このとき,

- $A_{sp}^+ := \{\mathrm{diag}(u,v,w) \,|\, u,v,w > 0,\, uvw = 1,\, u > v > w\}$
  : the open positive Weyl chamber
- $A_{sp}^{++} := \{a \in A_{sp}^+ \,|\, a^\alpha > a^\beta\} = \{\mathrm{diag}(u,v,w) \in A_{sp}^+ \,|\, v < 1\}$

とおく．

測地線を考察するために，$\mathrm{Conj}(\Gamma)$ の下記の部分集合を導入する．

- $\mathcal{E}_1(\Gamma) := \{[\gamma] \in \mathrm{Conj}(\Gamma) \,|\, \gamma \sim_G a_\gamma t_\gamma \,\mathrm{with}\, a_\gamma t_\gamma \in A_1^+ T_1\} \quad (\dim A_1^+ = 1)$
- $\mathcal{E}_{sp}(\Gamma) := \{[\gamma] \in \mathrm{Conj}(\Gamma) \,|\, \gamma \sim_G a_\gamma t_\gamma \,\mathrm{with}\, a_\gamma t_\gamma \in A_{sp}^{++} T_{sp}\} \quad (\dim A_{sp}^{++} = 2)$

$X := G/K$ を対称空間とすると，測地線に関して以下の事実が知られている．

1. $[\gamma] \in \mathcal{E}_1(\Gamma)$ に対して，元 γ から決まる $\Gamma\backslash X$ における測地線 c_γ は一意である．
2. $[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma)$ に対して，元 γ から決まる $\Gamma\backslash X$ における測地線 c_γ は一意でないが，測地線 c_γ は $\Gamma\backslash X$ のある一意に決まる平坦な二次元部分多様体 X_γ にある．

特に，$[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma)$ に対して，$X_\gamma \simeq \Gamma_\gamma\backslash G_\gamma/K_\gamma$ であることが知られている．このとき，$\lambda_\gamma := \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma/K_\gamma) = \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)$ とおく．

7.3 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ とその離散部分群 Γ に対する既知の素測地線定理

閉測地線と共役類が必ずしも対応する訳ではなく，閉測地線または平坦二次元部分多様体と対応する共役類が存在する．そこで，閉測地線の代わりに，共役類の元の個数を“数える”ことにする．下記の共役類の集合を考え，共役類の元の個数を数える“漸近公式”も“素測地線定理”と呼ぶことにする．

- $\mathcal{E}_1(\Gamma) = \{[\gamma] \in \mathrm{Conj}(\Gamma) \,|\, \gamma \sim_G a_\gamma t_\gamma \text{ with } a_\gamma t_\gamma \in A_1^+ T_1\} \quad (\dim A_1^+ = 1)$
- $\mathcal{E}_{sp}(\Gamma) = \{[\gamma] \in \mathrm{Conj}(\Gamma) \,|\, \gamma \sim_G a_\gamma t_\gamma \text{ with } a_\gamma t_\gamma \in A_{sp}^{++} T_{sp}\} \quad (\dim A_{sp}^{++} = 2)$

以下の 3 つの場合に，素測地線定理が知られている．

(1)（閉測地線）: Γ が余コンパクト，$\mathcal{E}_1(\Gamma)$．(Deitmar [1], 2002)
$T > 0$ に対して，以下が成り立つ．

$$\Lambda(T) := \sum_{\substack{[\gamma]\in\mathcal{E}_1(\Gamma) \\ a_\gamma^\beta \le T}} l(c_\gamma) \sim T \quad (T \to \infty).$$

ここで，$l(c_\gamma)$ は閉測地線 c_γ の長さである．

(2)（閉測地線）: $\Gamma = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$，$\mathcal{E}_1(\Gamma)$．(Deitmar-Hoffmann [4], 2005)
O を複素三次体に含まれる三次整環の同型類の集合とする．
$x > 0$ に対して，以下が成り立つ．

$$\sum_{\mathcal{O}\in O, R(\mathcal{O})\le x} h(\mathcal{O}) \sim \frac{e^{3x}}{3x} \quad (x \to \infty).$$

(3)（二次元平坦部分多様体）: Γ が余コンパクト，$\mathcal{E}_{sp}(\Gamma)$．(Deitmar [2], 2004)

7.4 分裂カルタン共役類に対応する二次元平坦部分多様体を数える

上記で扱われていない場合 : $\Gamma = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$，$\mathcal{E}_{sp}(\Gamma)$ を考えよう．（非余コンパクトな離散部分群に対して，二次元平坦部分多様体を数える．）

- $A_{sp}^{++} = \{\mathrm{diag}(u,v,w) \,|\, u,v,w > 0,\, uvw = 1,\, u > v > w,\, v < 1\} \subset H_{sp}$
- $\mathcal{E}_{sp}(\Gamma) := \{[\gamma] \in \mathrm{Conj}(\Gamma) \,|\, \gamma \sim_G a_\gamma t_\gamma \quad \text{with } a_\gamma t_\gamma \in A_{sp}^{++} T_{sp}\}$
- $\lambda_\gamma := \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma)$

定理 7.2 (素測地線定理, [5])**.** $T_1, T_2 > 0$ に対して，$\Lambda(T_1, T_2)$ を以下で定義する．

$$\Lambda(T_1, T_2) := \sum_{\substack{[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma) \\ a_\gamma^{\alpha-\beta} \le T_1 \\ a_\gamma^{2\beta} \le T_2}} \lambda_\gamma.$$

$T_1, T_2 \to \infty$ のとき，以下が成り立つ．

$$\Lambda(T_1, T_2) \sim T_1 T_2.$$

注意：この定理 7.2 から定理 7.1 が従う．

7.5 跡公式の擬尖点形式を用いた単純化

大雑把に言えば，(G, Γ) に対する跡公式は下記の等式 $(\star)$ である．f を G 上の試験関数，$L^2(\Gamma\backslash G)$ の離散部分が $L^2(\Gamma\backslash G)_{\mathrm{dis}} = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi) H_\pi$ と G のユニタリ表現 π たちの有限重複度 $m_\Gamma(\pi)$ の離散直和でかけているとする．

$$\sum_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi)\, \mathrm{tr}\, \pi(f) = \sum_{\gamma \in \mathrm{Conj}(\Gamma) \backslash \Gamma_{\mathrm{unip}}} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma)\, \mathcal{O}_\gamma(f) + (\text{unipotent contributions}). \quad (\star)$$

ここで，軌道積分は以下で定義される．

$$\mathcal{O}_\gamma(f) := \int_{G_\gamma \backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\, d\dot{x}.$$

また，$(\pi, H_\pi) \in \widehat{G}$ に対して，$\pi(f) \in \mathrm{End}(H_\pi)$ は，$\pi(f)v = \int_G f(g)\pi(g)v\, dg$, $(v \in H_\pi)$ で定義される．

上記の跡公式 $(\star)$ に適用する試験関数 f の“候補”として，下記を満たすものを考える．

定義 7.3 (トレースクラス関数，擬尖点形式)**.**

1. $f \in L^1(G)$ が K-有限で，すべての $\pi \in \widehat{G}$ に対して $\pi(f)$ がトレースクラス作用素となるとき，f を**トレースクラス関数**という．
2. トレースクラス関数 f が，極小放物型部分群 P_{sp} から誘導されるすべての $\pi \in \widehat{G}$ に対して $\mathrm{tr}\, \pi(f) = 0$ となるとき，f を**擬尖点形式**という．

跡公式を“単純化する”ための一つの方法として，跡公式 $(\star)$ に適用する G 上の試験関数 f として下記の条件をみたすものを擬尖点形式を用いて構成する．

- $f|_{A_{sp}} = g$ with $g \in \mathcal{C}_N(A_{sp})^W$（分解 $G = KP_{sp} = KM_{sp}A_{sp}N_{sp}$ を用いる．）
- 跡公式の右辺において，$\mathcal{E}_1(\Gamma)$ からの寄与が消える．（擬尖点形式を用いる．）

ここで，$\mathcal{C}_N(A_{sp})^W$ は A_{sp} 上の N 回連続微分可能な関数で，ワイル群 $W = W(G, A_{sp})$ 不変なものの空間である．さらに，跡公式の右辺において，ユニポテント元の寄与を消すために，捻り指標 η を導入する．

• $\eta := (\Lambda + \mathrm{st} + 2) \otimes (\Lambda - \mathrm{st}) \in \mathrm{Rep}(G)$ with $\Lambda = \bigwedge^2 \mathrm{st}$.

u, v, w が $x \in G$ の複素固有値なら，$uvw = 1$ で $\mathrm{tr}\, \eta(x) = (u^2-1)(v^2-1)(w^2-1)$ となることが確かめられる．

上記の試験関数 f と捻り指標 η について，以下の命題が示せる．

命題 7.4. $\mathcal{C}_N(A_{sp})^W$ の元 g が A_{sp}^{+-} 上消えていると仮定する．Γ を $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Q})$ の合同部分群とし，K_Γ を Γ の $\mathrm{SL}_3(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ における閉包とする．ここで，$\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ は有限 $\mathbb{Q}$-アデールの環とする．f_{fin} を K_Γ の特性関数とし，アデール上の関数として $f_{\mathbb{A}} = f_{\mathrm{fin}} \otimes f\, \mathrm{tr}\, \eta$ とおく．（f, η は命題の前で“定義”したもの）このとき，$f_{\mathbb{A}}$ に対するアーサー跡公式の右辺は

$$J_{\mathrm{geom}}(f_{\mathbb{A}}) = \sum_{[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma)} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \frac{g(a_\gamma)\, \mathrm{tr}\, \eta(\gamma)}{a_\gamma^\rho \det(1 - (a_\gamma t_\gamma)^{-1}|\mathfrak{n}_{sp})}$$

となる．

7.6 二変数のディリクレ級数と定理 7.2 の証明の概略

先ず，下記を定義する．

- $\mathrm{ind}(\gamma) := \frac{\lambda_\gamma}{\det(1-(a_\gamma t_\gamma)^{-1}|\mathfrak{n}_{sp})} > 0.$
- $a \in A_{sp}^{++}$ に対して，$l(a) := 2(\alpha - \beta)(\log a) \cdot \beta(\log a)$.
- $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ と $a \in A_{sp}^{++}$ に対して，$a^{-s} := a^{-s_1(\alpha-\beta)-2s_2\beta}$.

$j \in \mathbb{N}$ に対して，以下のディリクレ級数を考える．

$$L^j(s) = \sum_{[\gamma] \in \mathcal{E}_{sp}(\Gamma)} \mathrm{ind}(\gamma)\ \mathrm{tr}\, \eta(\gamma)\, l(a_\gamma)^{j+1} a_\gamma^{-s} a_\gamma^{-\frac{4}{3}(\alpha-\beta)-2\beta}.$$

跡公式のスペクトル辺（左辺）を調べることにより，

$$L^j(s)=\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\right)^{j+1}\left(\frac{1}{(s_1-1)(s_2-1)}-\frac{1}{(s_1-\frac{1}{3})(s_2-1)}\right)+R(s)$$

となることが示せる．ここで，$R(s)$ は，ある $\varepsilon>0$ に対する領域 $\{\mathrm{Re}(s_1),\mathrm{Re}(s_2)>1-\varepsilon\}$ において正則な関数である．ところで，

$$\operatorname{tr}\eta(a)=\left(a^{\frac{4}{3}(\alpha-\beta)+2\beta}-1\right)\left(a^{-\frac{2}{3}(\alpha-\beta)}-1\right)\left(a^{-\frac{2}{3}(\alpha-\beta)-2\beta}-1\right)$$

より，独立に $a_\gamma^{\alpha-\beta},a_\gamma^{2\beta}\to\infty$ のとき，

$$\operatorname{tr}\eta(\gamma)a_\gamma^{-\frac{4}{3}(\alpha-\beta)-2\beta}\to 1$$

が成り立つ．“高次元版 ウィーナー-池原の定理”（例えば [2, Theorem 3.2]）より

$$\tilde{\Lambda}(T_1,T_2)=\sum_{\substack{[\gamma]\in\mathcal{E}_{sp}(\Gamma)\\ a_\gamma^{\alpha-\beta}\le T_1\\ a_\gamma^{2\beta}\le T_2}}\mathrm{ind}(\gamma)\ \operatorname{tr}\eta(\gamma)a_\gamma^{-\frac{4}{3}(\alpha-\beta)-2\beta}\sim T_1T_2\qquad(T_1,T_2\to\infty)$$

が成り立つ．また，$a_\gamma^{\alpha-\beta},a_\gamma^{2\beta}\to\infty$ のとき，$\frac{\mathrm{ind}(\gamma)\ \operatorname{tr}\eta(\gamma)a_\gamma^{-\frac{4}{3}(\alpha-\beta)-2\beta}}{\lambda_\gamma}\to 1$ となる．

よって，[2, Lemma 3.5] より定理 7.2（素測地線定理）は従う． □

参考文献

[1] A. Deitmar, Class numbers of orders in cubic fields. J. Number Theory **95** (2002), no. 2, 150–166.

[2] A. Deitmar, A prime geodesic theorem for higher rank spaces. Geom. Funct. Anal., **14** (2004), 1238–1266.

[3] A. Deitmar, Generalised Selberg zeta functions and a conjectural Lefschetz formula. Multiple Dirichlet series, automorphic forms, and analytic number theory, 177–190, Proc. Sympos. Pure Math., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[4] A. Deitmar and W. Hoffmann, Asymptotics of class numbers. Invent. Math. **160** (2005), no. 3, 647–675.

[5] A. Deitmar, Y. Gon and P. Spilioti, A prime Geodesic Theorem for $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. arXiv:1711.05361.

[6] R. Gangolli, Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. Illinois J. Math. **21** (1977), no. 1, 1–41.

[7] R. Gangolli and G. Warner, Zeta functions of Selberg's type for some noncompact quotients of symmetric spaces of rank one. Nagoya Math. J. **78** (1980), 1–44.

[8] Y. Gon and J. Park, The zeta functions of Ruelle and Selberg for hyperbolic manifolds with cusps. Math. Ann. **346** (2010), no. 3, 719–767.

[9] Y. Gon, Selberg type zeta function for the Hilbert modular group of a real quadratic field. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **88**(9) (2012), 145–148.

[10] Y. Gon, Differences of the Selberg trace formula and Selberg type zeta functions for Hilbert modular surfaces. J. Number Theory **147** (2015), 396–453.

[11] Y. Gon, Determinants of Laplacians on Hilbert modular surfaces. Publ. Mat. **62** (2018), 615–639.

[12] F. Hirzebruch and D. Zagier, Classification of Hilbert modular surfaces, Complex analysis and algebraic geometry, 43–77. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.

[13] N. Kurokawa and S. Koyama, Multiple sine functions. Forum Math. **15** (2003), no. 6, 839–876.

[14] P. Sarnak, Class numbers of indefinite binary quadratic forms. J. Number Theory **15** (1982), no. 2, 229–247.

[15] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 47–87.

[16] A. Selberg, Hybrid trace formulae and related zeta- and L-functions, available at http://publications.ias.edu/selberg

[17] M. Wakayama, Zeta functions of Selberg's type associated with homogeneous vector bundles. Hiroshima Math. J. **15** (1985), no. 2, 235–295.

Yasuro Gon
Faculty of Mathematics, Kyushu University
744 Motooka, Fukuoka 819-0395, Japan
E-mail: ygon[at]math.kyushu-u.ac.jp