1 のベキ根における量子群の表現論

谷崎俊之

1　はじめに

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元単純 Lie 代数とし，対応する量子群（$\mathfrak{g}$ の包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の q 類似）を $U_q(\mathfrak{g})$ で表す．また 1 のベキ根 $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して，$U_q(\mathfrak{g})$ の $q=\zeta$ における特殊化として得られる $\mathbb{C}$ 代数を $U_\zeta(\mathfrak{g})$ で表す（De Concini-Kac 型量子群）．この報告では，$U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論について概説を行う．既約表現を分類することが真っ先に考えるべき問題であるが，実はそれすらまだ解決されていない．したがって知られていることはあまり多くはないのが現状である．

ひとつの指導原理は，$U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論と，正標数における有限次元単純リー代数の表現論の間の並行関係である．より正確に述べると，k を標数 $p>0$ の代数閉体とし，$\mathfrak{g}$ と同じルート系をもつ k 上の有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}_k$ の包絡代数 $U(\mathfrak{g}_k)$ を考えるとき，$\mathbb{C}$ 代数 $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論と，k 代数 $U(\mathfrak{g}_k)$ の表現論の間に著しい類似が成立していることが，以前から知られている．特に，Lusztig [12] は $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の既約表現の分類と $U(\mathfrak{g}_k)$ の既約表現の分類が，まったく同じ仕組みのもとで，いわゆる Springer ファイバーの同変 K 群を用いて記述できることを予想した．実は $U(\mathfrak{g}_k)$ に関しては，この Lusztig の予想は Bezrukavnikov-Mirković-Rumynin [1], Bezrukavnikov-Mirković [2] により既に解決されている．また，これに限らず，$U(\mathfrak{g}_k)$ の表現論の方が $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論よりも先んじている側面が多いのも事実である．したがって，これから述べる $U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論においては，先行する $U(\mathfrak{g}_k)$ の表現論を横目で睨みながら，成り立つべき事を予測しその証明を考えていくことになる．

以下，$U(\mathfrak{g}_k)$ の表現論にも触れつつ，$U_\zeta(\mathfrak{g})$ の表現論の現況について筆者の力の及ぶ範囲で解説を行う．

2　量子群

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元単純 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とする．Δ をルート系とし，Q をルート格子，P をウェイト格子とする．また W をワイル群とする．単純ルートの集合 $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ をひとつ固定し，対応して決まる正ルートの集合を Δ^+ で表す:

$$\Pi \subset \Delta^+ \subset \Delta \subset Q \subset P \subset \mathfrak{h}^*, \qquad W \subset GL(\mathfrak{h}^*).$$

さらに，$\mathfrak{h}^*$ 上の W 不変対称双線形形式

$$(\ ,\ ) : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}$$

であって，短ルート α に対して $(\alpha, \alpha)/2 = 1$ を満たすものをとる．

文字 q を不定元とする $\mathbb{Q}$ 上の有理関数体 $\mathbb{Q}(q)$ を $\mathbb{F}$ で表す．

定義 2.1． $\mathfrak{g}$ に対応する $\mathbb{F}$ 上の量子群 $U_{\mathbb{F}}\ (= U_q(\mathfrak{g}))$ とは，単位元をもつ $\mathbb{F}$ 上の結合代数であって，生成系

$$k_\lambda \ \ (\lambda \in P), \quad e_i, f_i \ \ (i \in I)$$

と基本関係式

$$\begin{aligned}
&k_\lambda k_\mu = k_{\lambda+\mu} \quad (\lambda, \mu \in P), \qquad k_0 = 1,\\
&k_\lambda e_i k_{-\lambda} = q^{2(\lambda,\alpha_i)} e_i \qquad (\lambda \in P,\ i \in I),\\
&k_\lambda f_i k_{-\lambda} = q^{-2(\lambda,\alpha_i)} f_i \qquad (\lambda \in P,\ i \in I),\\
&e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \qquad (i, j \in I),\\
&\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} e_i^r e_j e_i^{1-a_{ij}-r} = 0 \qquad (i, j \in I,\ i \neq j),\\
&\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} f_i^r f_j f_i^{1-a_{ij}-r} = 0 \qquad (i, j \in I,\ i \neq j).
\end{aligned}$$

により定義されるものである．ここで，$i \in I$ に対して，$q_i = q^{(\alpha_i,\alpha_i)/2}$, $k_i = k_{\alpha_i}$．また $i, j \in I$ に対して，$a_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_i, \alpha_i)$ とする．さらに，非負整数 n の t 類似を

$$[n]_t = \frac{t^n - t^{-n}}{t - t^{-1}} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

で定め，$m \geqq n \geqq 0$ にに対して，*2* 項係数 $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ の t 類似を

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t = \frac{[n]_t!}{[m]_t![n-m]_t!}, \qquad [n]_t! = [n]_t \cdots [2]_t[1]_t$$

により定める． □

そこで，量子群 $U_{\mathbb{F}}$ において不定元 q を

$$\zeta = (1 \text{ の原始 } \ell \text{ 乗根}) \in \mathbb{C}$$

に特殊化して得られる $\mathbb{C}$ 上の量子群を以下のように定める．ただし ℓ は次の条件を満たすものとする．

(A) $\ell > 1$ は正の奇数,
(B) $(\ell, |P/Q|) = 1$,
(C) $\mathfrak{g}$ が G_2 型のときは，$(\ell, 3) = 1$.

パラメータ q に ζ を代入するために，$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q)$ の部分環 $\mathbb{A} = \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ を考える．また $\mathbb{A}$ 上の量子群 $U_{\mathbb{A}}$ を

$$U_{\mathbb{A}} = \langle k_\lambda, e_i, f_i \mid \lambda \in P, i \in I \rangle_{\mathbb{A}-\mathrm{alg}} \subset U_{\mathbb{F}} \qquad \text{(De Concini-Kac form)}$$

により定め，環準同形 $\mathbb{A} \to \mathbb{C}$ $(q \mapsto \zeta)$ に関して

$$U\,(= U_\zeta(\mathfrak{g})) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{A}} U_{\mathbb{A}}$$

とおく．この $\mathbb{C}$ 代数 U の表現論が，我々の今後の考察対象である．

3 中心

一般に，環 R に対してその中心 $Z(R)$ を

$$Z(R) = \{z \in R \mid rz = zr \ (r \in R)\}$$

で定める．

U は無限次元代数であるが，有限次元代数に対する Schur の補題の類似が，次のように成り立つことが知られている:

定理 3.1. 既約 U 加群 M に対して

$$\exists\, \xi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(Z(U),\mathbb{C}) \;\; s.t. \;\; zm = \xi(z)m \quad (z \in Z(U),\ m \in M).$$

□

一般に，中心指標 $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(Z(U),\mathbb{C})$ に対して

$$U_\xi = U/\mathrm{Ker}(\xi)U$$

とおく．定理 3.1 により

$$\{\text{ 既約 } U \text{ 加群 }\} = \bigsqcup_{\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(Z(U),\mathbb{C})} \{\text{ 既約 } U_\xi \text{ 加群 }\}.$$

したがって，各中心指標 ξ に対して既約 U_ξ 加群が分類できれば，既約 U 加群が分類できたことになる．が，その前にまず，中心がどれぐらい大きくて中心指標がどれぐらいあるかを知っておく必要がある．

U は $U_{\mathbb{A}}$ の特殊化だったので，$U_{\mathbb{A}}$ の中心元は U の中心元を定める．すなわち，

$$Z(U_{\mathbb{A}}) = Z(U_{\mathbb{F}}) \cap U_{\mathbb{A}} \subset U_{\mathbb{A}}$$

に関して，

$$Z_{\mathrm{Har}}(U) := \mathrm{Im}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{A}} Z(U_{\mathbb{A}}) \to U)$$

は $Z(U)$ の部分代数となる．これを U の Harish-Chandra 中心と呼ぶ．$U_{\mathbb{F}}$ の中心がどうなっているかはよく知られており（[13] など），それから次が従う．

定理 3.2. $\mathbb{C}$ 代数の同型

$$Z_{\mathrm{Har}}(U) \cong (U^0_{\mathrm{even}})^{W\circ} \qquad \text{(Harich-Chandra 同型)}$$

が自然に定まる．ここで

$$U^0 = \sum_{\lambda \in P} \mathbb{C}k_\lambda \subset U, \qquad U^0_{\mathrm{even}} = \sum_{\lambda \in P} \mathbb{C}k_{2\lambda} \subset U.$$

また $(U^0_{\mathrm{even}})^{W\circ}$ は，W の U^0_{even} への作用

(1) $$w \circ k_{2\lambda} = \zeta^{2(\rho, w\lambda - \lambda)} k_{2w\lambda}, \qquad \rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$$

に関する不変元の全体．□

ζ が 1 のベキ根でなければ Harish-Chandra 中心が中心全体になってしまうのだが，我々が考えている 1 のベキ根の場合には，U の中心は，以下みるようにもっと大きくなる．

W の最長元 w_0 の最短表示を決めるごとに，Lusztig のルート・ベクトルと呼ばれる U の元の集合

$$e_\alpha,\ f_\alpha \qquad (\alpha \in \Delta^+)$$

が定まる．ここでは，その定義の詳細は省略するが，α が単純ルート α_i のときは $e_{\alpha_i} = e_i$, $f_{\alpha_i} = f_i$ である．また

$$\left\{ \left(\prod_{\alpha \in \Delta^+} e_\alpha^{m_\alpha} \right) k_\lambda \left(\prod_{\alpha \in \Delta^+} f_\alpha^{n_\alpha} \right) \middle|\, m_\alpha,\ n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}\ (\alpha \in \Delta^+),\ \lambda \in P \right\}$$

は U の $\mathbb{C}$ 上の基底を与える（積の順序は一つ決めて考える）．

このとき

$$k_{\ell\lambda}\ \ (\lambda \in P), \qquad e_\alpha^\ell\ \ f_\alpha^\ell \qquad (\alpha \in \Delta^+)$$

は $Z(U)$ に含まれることがわかる．実際，$k_{\ell\lambda}$, e_i^ℓ, f_i^ℓ が中心元である事は $U_{\mathbb{F}}$ の定義関係式と，ζ が 1 の原始 ℓ 乗根である事から明らか．一般の e_α, f_α についても，これらが e_i, f_i を U の自己同型で移したものになっていることから明らか．そこで，$Z(U)$ の部分代数

$$Z_{\mathrm{Fr}}(U) := \langle k_{\ell\lambda}, e_\alpha^\ell, f_\alpha^\ell \mid \lambda \in P, \alpha \in \Delta^+ \rangle$$

を U の Frobenius 中心と呼ぶ（w_0 の最短表示の選び方にはよらない）．

De Concini-Procesi [7] は，$Z(U)$ が $Z_{\mathrm{Har}}(U)$ と $Z_{\mathrm{Fr}}(U)$ により生成されることを証明した（なお，正標数における単純リー代数の包絡代数 $U(\mathfrak{g}_k)$ に関する対応する結果は，Veldkamp [17], Kac-Weisfeiler [10], Brown-Gordon [3] による）．より詳しくは，次の定理が成立する．

定理 3.3 (De Concini-Procesi [7])**.** $Z(U)$ は $Z_{\mathrm{Har}}(U)$ と $Z_{\mathrm{Fr}}(U)$ により生成される．さらに，U の積から定まる自然な写像 $Z_{\mathrm{Har}}(U) \times Z_{\mathrm{Fr}}(U) \to Z(U)$ は $\mathbb{C}$ 代数の同型

$$Z(U) \cong Z_{\mathrm{Har}}(U) \otimes_{Z_{\mathrm{Har}}(U) \cap Z_{\mathrm{Fr}}(U)} Z_{\mathrm{Fr}}(U). \tag{2}$$

を導く． □

以下，同型 (2) の幾何的な記述を与える．

まず Harish-Chandra 中心 $Z_{\mathrm{Har}}(U)$ について考える．G を $\mathbb{C}$ 上の連結かつ単連結な単純代数群で $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ を満たすものとし，T をその極大トーラスとする．このとき

T の代数群としての指標群 $\mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ は P と同一視される（$\lambda \in P$ に対する T の指標を χ_λ で表すことにする）．したがって，T のアフィン代数多様体としての座標環 $\mathbb{C}[T] = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{C}\chi_\lambda$ とアーベル群 P の群環 $\mathbb{C}[P] = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{C}e(\lambda)$ は，$\mathbb{C}$ 代数として自然に同型である：

$$\mathbb{C}[T] \cong \mathbb{C}[P] \qquad (\chi_\lambda \leftrightarrow e(\lambda)).$$

$Z_{\mathrm{Har}}(U)$ は $(U^0_{\mathrm{even}})^{W\circ}$ と同型だったので，

$$U^0_{\mathrm{even}} \cong \mathbb{C}[P] \qquad (k_{2\lambda} \leftrightarrow e(\lambda)).$$

により，$\mathbb{C}$ 代数の同型

$$Z_{\mathrm{Har}}(U) \cong \mathbb{C}[P]^{W\circ} \cong \mathbb{C}[T/W\circ] \tag{3}$$

が得られた．

注意 3.4. U^0_{even} への W の作用 (1) を $\mathbb{C}[P], \mathbb{C}[T]$ に移して，$\mathbb{C}[P]$ への W の作用

$$w \circ e(\lambda) = \zeta^{2(\rho, w\lambda - \lambda)} e(w\lambda) \qquad (w \in W,\ \lambda \in P)$$

と，$\mathbb{C}[T]$ への W の作用

$$w \circ \chi_\lambda = \zeta^{2(\rho, w\lambda - \lambda)} \chi_{w\lambda} \qquad (w \in W,\ \lambda \in P)$$

が定まる．$\mathbb{C}[T]$ はアフィン代数多様体 T の座標環なので，対応して有限群 W のアフィン代数多様体 T への作用 $W \times T \ni (w, t) \mapsto w \circ t \in T$ が定まる（$\hat{t} \in T$ を $\chi_\lambda(\hat{t}) = \zeta^{2(\rho, \lambda)}$ $(\forall \lambda \in P)$ により定めるとき，$t \in T$ に対して $w \circ t = w(t\hat{t})\hat{t}^{-1}$）．

一般に，有限群 $\mathcal{G}$ が $\mathbb{C}$ 上のアフィン代数多様体 X に作用しているとき，商集合

$$X/\mathcal{G} = \{X \text{ 上の } \mathcal{G} \text{ 軌道 }\}$$

にアフィン代数多様体の構造が入って，その座標環 $\mathbb{C}[X/\mathcal{G}]$ は $\mathbb{C}[X]$ における $\mathcal{G}$ 不変元の全体 $\mathbb{C}[X]^{\mathcal{G}}$ と一致する． □

次に Frobenius 中心 $Z_{\mathrm{Fr}}(U)$ について考える．B^+, B^- を G の Borel 部分群であって $B^+ \cap B^- = T$ を満たすものとし，$N^\pm$ を $B^\pm$ の極大ベキ単部分群とする．$G \times G$ の閉部分群 K を

$$K = \{(n_+ t, n_- t^{-1}) \mid n_\pm \in N^\pm, t \in T\} \subset B^+ \times B^-$$

により定める．De Concini-Procesi [7] は $\mathbb{C}$ 代数の同型

$$Z_{\mathrm{Fr}}(U) \cong \mathbb{C}[K] \tag{4}$$

を構成した．[7] では，Poisson 代数としての生成系の間の対応を手で与え，これが Poisson 代数としての同型を導くことを示している．その後，Gavarini [8] により，Drinfeld 形式を用いた直接的でしかもよりわかりやすい構成が与えられた．ここでその詳細は省略する．

Harish-Chandra 中心と Frobenius 中心の共通部分 $Z_{\mathrm{Har}}(U)\cap Z_{\mathrm{Fr}}(U)$ についてみよう．(3) により $Z_{\mathrm{Har}}(U)$ を $\mathbb{C}[P]^{W\circ}$ と同一視するとき，$Z_{\mathrm{Har}}(U)$ の部分代数 $Z_{\mathrm{Har}}(U)\cap Z_{\mathrm{Fr}}(U)$ は，$\mathbb{C}[P]^{W\circ}$ の部分代数 $\mathbb{C}[\ell P]^{W}$ と一致する（$\mathbb{C}[P]$ への W の作用を $\mathbb{C}[\ell P]$ に制限すると，ひねりが消えて，W の $\mathbb{C}[P]$ への通常の作用になる）．$\mathbb{C}[\ell P]$ と $\mathbb{C}[P]$ の同一視（$e(\ell\lambda)\leftrightarrow e(\lambda)$）を用いる事により，同型

$$Z_{\mathrm{Har}}(U)\cap Z_{\mathrm{Fr}}(U)\cong\mathbb{C}[P]^{W}\cong\mathbb{C}[T/W] \tag{5}$$

と可換図式

$$\begin{tikzcd} Z_{\mathrm{Har}}(U)\cap Z_{\mathrm{Fr}}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & Z_{\mathrm{Har}}(U) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{C}[T/W] \arrow[r, "p^*"] & \mathbb{C}[T/W\circ] \end{tikzcd} \tag{6}$$

が得られた．ここで p^* は，$T\ni t\mapsto t^{\ell}\in T$ の導く写像 $p:T/W\circ\to T/W$ から定まる準同形写像.

最後に，埋め込み $Z_{\mathrm{Har}}(U)\cap Z_{\mathrm{Fr}}(U)\subset Z_{\mathrm{Fr}}(U)$ が同一視 (4), (5) のもとでどう書けるかをみよう．G の G への共役作用

$$G\times G\to G \qquad ((g,x)\mapsto \mathrm{Ad}(g)(x)=gxg^{-1})$$

に関する G 上の不変関数の全体のなす $\mathbb{C}$ 代数

$$\mathbb{C}[G]^{\mathrm{Ad}(G)}=\{f\in\mathbb{C}[G]\mid f(\mathrm{Ad}(g)(x))=f(x)\ \ (g,x\in G)\}$$

を考える．G 上の関数を T に制限する写像 $\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[T]$ は，$\mathbb{C}$ 代数の同型写像 $\mathbb{C}[G]^{\mathrm{Ad}(G)}\cong\mathbb{C}[T/W]$ を導くことが知られている．したがって $\mathbb{C}$ 代数の埋め込み $\mathbb{C}[T/W]\hookrightarrow\mathbb{C}[G]$ に対応して，代数多様体の射

$$\pi:G\to T/W$$

が定まる．なおこの写像 π は次のようにも書ける．$g\in G$ に対して，その Jordan 分解を $g=g_{\mathrm{ss}}g_{\mathrm{uni}}$ と書く．このとき，g_{ss} と共役な T の元 t が W 共役を除いて一意的に定まり，

$\pi(g) = [t]$ となる（t を含む W 軌道に対応する T/W の点を $[t]$ で表す）．そこで，π と代数多様体の射

$$\delta : K \to G \qquad (\delta(x_1, x_2) = x_1 x_2^{-1})$$

の合成

$$\pi \circ \delta : K \to T/W$$

を考えるとき，可換図式

$$\begin{tikzcd} Z_{\mathrm{Har}}(U) \cap Z_{\mathrm{Fr}}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & Z_{\mathrm{Fr}}(U) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{C}[T/W] \arrow[r, "(\pi\circ\delta)^*"] & \mathbb{C}[K] \end{tikzcd} \tag{7}$$

が成立する．

以上の議論により

$$Z(U) \cong \mathbb{C}[T/W\circ] \otimes_{\mathbb{C}[T/W]} \mathbb{C}[K] \cong \mathbb{C}[(T/W\circ) \times_{T/W} K]. \tag{8}$$

ここで $\mathbb{C}[(T/W\circ) \times_{T/W} K]$ はアフィン代数多様体

$$(T/W\circ) \times_{T/W} K = \{([t], k) \in (T/W\circ) \times K \mid t^{\ell} \sim_G \delta(k)_{\mathrm{ss}}\} \tag{9}$$

の座標環である．ただし，$\sim_G$ は G 上の同値関係：

$$x \sim_G y \iff \exists g \in G \ \text{ s.t. } \ x = gyg^{-1}.$$

4 中心指標

(8), (9) により，中心指標（$\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(Z(U), \mathbb{C})$ の元）と代数多様体 $(T/W\circ) \times_{T/W} K$ の点とは 1 対 1 に対応する．そこで，$([t], k) \in (T/W\circ) \times_{T/W} K$ に対応する中心指標を $\xi_{t,k} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(Z(U), \mathbb{C})$ と書くことにする．

以下の目標は，各 $([t], k) \in (T/W\circ) \times_{T/W} K$ に対して，$U_{\xi_{t,k}} = U/\mathrm{Ker}(\xi_{t,k})U$ の表現を調べることである．

注意 4.1. Frobenius 中心は有限の余次元を持つ．特に，$U_{\xi_{t,k}}$ は有限次元．したがって，任意の既約 U 加群は有限次元である． □

次の定理により，考えるべき $([t], k) \in (T/W\circ) \times_{T/W} K$ の範囲を大幅に狭める事ができる．

定理 4.2 (De Concini-Kac [4]). $k, k' \in K$ に対して，$\delta(k) \sim_G \delta(k')$ が成り立っているとする．$t \in T$ が $([t], k) \in (T/W\circ) \times_{T/W} K$ を（したがって $([t], k') \in (T/W\circ) \times_{T/W} K$ も）を満たすならば

$$U_{\xi_{t,k}} \cong U_{\xi_{t,k'}} \tag{10}$$

が成り立つ． □

注意 4.3. 正標数のリー代数 $\mathfrak{g}_k$ の場合の対応する事実の証明はずっと簡単である．実際この場合には，群 G_k が $U(\mathfrak{g}_k)$ に自然に作用している．したがって，$U(\mathfrak{g}_k)$ の Frobenius 中心 $Z_{\mathrm{Fr}}(U(\mathfrak{g}_k))$ を $k[\mathfrak{g}_k^*]$ と同一視することにより，G_k の $\mathfrak{g}_k^*$ への作用が定まるが，これは coadjoint 作用と一致する．これから直ちに，正標数のリー代数に対する定理 4.2 の類似が導かれる．

しかし，量子群の場合には G_k の $U(\mathfrak{g}_k)$ への自然な作用にあたるものを構成すること自体が難しい．[4] においては，無限次元の群の U への "quantum coadjoint action" が構成され，これを用いて上述の定理が示されている． □

注意 4.4. 実は，De Concini-Kac [4] では，G の共役類 O であって k と k' が $\delta^{-1}(O)$ の同じ連結成分に含まれるようなものがあるときに，(10) が成り立つ事が示されている．これと De Concini-Procesi [7, Theorem 16.2] により，$\delta(k)$ が G の中心元でないときには，定理が成り立っていることが従う．$\delta(k)$ が中心元のときには，$U_{\mathbb{F}}$ の自己同型 F であって，

$$F(k_\lambda) = \varepsilon_\lambda k_\lambda, \qquad F(e_i) = e_i, \qquad F(f_i) = \varepsilon_{\alpha_i} f_i$$

で定まるものを使えば，定理が容易に示される．ここで $\varepsilon_\lambda \in \{\pm 1\}$ $(\lambda \in P)$ は

$$\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu = \varepsilon_{\lambda+\mu}, \qquad \varepsilon_0 = 1$$

を満たすもの． □

$([t], k) \in (T/W\circ) \times_{T/W} K$ を一つ決める．そこで $U_{\xi_{t,k}}$ の表現を調べる事を考える．$\delta(k)$ を含む G の共役類を O とする．定理 4.2 により，別の $k' \in K$ であって，$\delta(k') \in O$ となるものをとるとき，$U_{\xi_{t,k}}$ の表現論と $U_{\xi_{t,k'}}$ の表現論は同じである．したがって，k を k' で置き換えて考えればよい．そこで，k' をうまく取ることを考える．写像 $\delta : K \to G \quad ((x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^{-1})$ の像は G の開集合 N^+TN^- と一致する．単純代数群の共役類の一般論から $O \cap (N^+T) \neq \emptyset$ である事が知られている．したがって $\delta(k') \in N^+T$ としてよい．このとき $k' = (xh, h^{-1}) \quad (x \in N^+, h \in T)$ と書ける．この

場合，$\delta(k') = xh^2$ なので，$\delta(k)_{\mathrm{ss}} \sim_G h^2 \in T$．したがって，$[t] \in T/W\circ$ の代表元 $t \in T$ は $t^\ell = h^2$ を満たしているとしてよい．

以上の議論により，次の (a), (b) を満たす $([t], k) \in (T/W\circ) \times_{T/W} K$ に対して，$U_{\xi_{t,k}}$ を考えればよいことがわかった．

(a) $k = (xh, h^{-1}) \quad (x \in N^+, h \in T)$,

(b) $t^\ell = h^2$.

注意 4.5. 正標数のリー代数 $\mathfrak{g}_k$ の場合，上の議論における $k \in K$ に対応する

$$x \in \mathfrak{g}_k^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(Z_{\mathrm{Fr}}(U(\mathfrak{g}_k)), k)$$

は，べき零元の場合に帰着できる．$x \in \mathfrak{g}_k^*$ の Jordan 分解 $x = x_{\mathrm{ss}} + x_{\mathrm{nil}}$ において $\mathfrak{l}_k = Z_{\mathfrak{g}_k}(x_{\mathrm{ss}})$ とおくとき，Frobenius 中心指標 $x \in \mathfrak{g}_k^*$ をもつ $U(\mathfrak{g}_k)$ 加群を考えることと，Frobenius 中心指標 $x_{\mathrm{nil}} \in \mathfrak{l}_k^*$ をもつ $U(\mathfrak{l}_k)$ 加群を考えることは同等であることがわかる．しかしベキ根での量子群の場合，この議論が適用できない場合がある．$g \in G$ に対して，埋め込み $Z_G(g_{\mathrm{ss}}) \subset G$ は量子群レベルでは定義できない場合がある．量子群の場合には，$\delta(k)$ がベキ単の場合だけでなく，もう少し多くの場合を考える必要が出てくる ([5] 参照)． □

5 baby Verma 加群

以下，(a), (b) をみたす x, h, t に対して中心指標

$$\xi = \xi_{t,(xh,h^{-1})} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(Z(U), \mathbb{C}) \tag{11}$$

をとり，U_ξ 加群を考える．ξ の Frobenius 中心への制限 $\xi|_{Z_{\mathrm{Fr}}(U)}$ は次をみたす:

$$\xi(k_{\ell\lambda}) = \chi_\lambda(h), \quad \xi(e_\alpha^\ell) = 0, \quad (\xi(f_\alpha^\ell) \text{ は } x \text{ による}).$$

M を有限次元 U_ξ 加群とする．Frobenius 中心の作用から，$m \in M$ に対して

$$k_\lambda^\ell m = \chi_\lambda(h)m \quad (\lambda \in P), \qquad e_\alpha^\ell m = 0, \qquad f_\alpha^\ell m = \xi(f_\alpha^\ell)m \quad (\alpha \in \Delta^+)$$

が成り立つ．特に，ルート・ベクトルの間の交換関係に関する Levendorskii-Soibelman の結果を用いると，

$$M' := \{m \in M \mid e_\alpha m = 0 \ \ (\alpha \in \Delta^+)\} \neq 0$$

が従う．U の定義式により，$k_\lambda M' \subset M' \quad (\lambda \in P)$ である．M' の線形作用素として $k_\lambda^\ell - \chi_\lambda(h) = 0$ であるが，$z^\ell - \chi_\lambda(h) \in \mathbb{C}[z]$ は分離多項式なので，k_λ は M' 上の作用素として対角化可能．$\{k_\lambda\}_{\lambda \in P}$ は互いに可換なので，M' 上の作用素として同時対角化可能．したがってある $s \in T$ に対して

$$M'(s) := \{m \in M' \mid k_\lambda m = \chi_\lambda(s)m \ \ (\lambda \in P)\} \neq \{0\}.$$

$M'(s)$ への Frobenius 中心の作用をみる事により，

$$\chi_{\ell\lambda}(s) = \chi_\lambda(h) \qquad (\lambda \in P).$$

すなわち $h = s^\ell$．また $M'(s)$ への Harish-Chandra 中心の作用をみる事により，

$$\varphi(t) = \varphi(s^2) \qquad (\varphi \in \mathbb{C}[T/W\circ] \subset \mathbb{C}[T]).$$

すなわち，$s^2 \in W \circ t$.

以上により，ある $s \in T$ であって

$$h = s^\ell, \qquad s^2 \in W \circ t \tag{12}$$

を満たすものと，ある $m \in M \setminus \{0\}$ に対して，

$$k_\lambda m = \chi_\lambda(s)m \quad (\lambda \in P), \qquad e_\alpha m = 0, \quad f_\alpha^\ell m = \xi(f_\alpha^\ell)m \quad (\alpha \in \Delta^+).$$

定義 5.1 (baby Verma 加群)**.** (12) を満たす $s \in T$ に対して U 加群 $Z_\xi[s]$ を次で定める：

$$Z_\xi[s] = U/(\sum_{\lambda \in P} U(k_\lambda - \chi_\lambda(s)) + \sum_{\alpha \in \Delta^+} U e_\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta^+} U(f_\alpha^\ell - \xi(f_\alpha^\ell))) \quad \square$$

このとき $Z_\xi[s]$ は U_ξ 加群である．また，上の議論により，任意の既約 U_ξ 加群は，ある $Z_\xi[s]$ の商加群と同型である．さらに PBW 型定理により

$$\dim Z_\xi[s] = \ell^{|\Delta^+|}. \tag{13}$$

$Z_\xi[s]$ は圏 $\mathcal{O}$ における Verma 加群の類似物である．ただし，Verma 加群と比べると，さほどたちのよくない側面もある．Verma 加群はただ一つの既約商加群をもつのであったが，baby Verma 加群は複数個の既約商加群をもつこともあり得るのである．これは ξ による．

$t = h = 1$ の場合，(12) を満たす $s \in T$ は，$s = w \circ 1 \ \ (w \in W)$ と書ける．$\ell \gg 1$ ならば，$w \circ 1 \ \ (w \in W)$ は互いに相異なる元である．したがって，この場合には，$|W|$ 個

の baby Verma 加群が定まる（ただしこれらのうちに互いに同型なものがある可能性がある）．

任意の既約 U_ξ 加群は $Z_\xi[w \circ 1]$ の商加群と同型である．

$J \subset I$ に対応する G の放物型部分群を P_J とし，その簡約部分を L_J で表す．L_J の Weyl 群を $W_J \subset W$ で表す．

予想 5.2. $\ell \gg 1$ とする．また $t = h = 1$ で x は L_J の正則べき単元とする．

(i) $Z_\xi[w \circ 1]$ はただ一つの既約商加群 $L_\xi[w \circ 1]$ をもつ．
(ii) 任意の既約 U_ξ 加群は，ある $L_\xi[w \circ 1]$ と同型．
(iii) $L_\xi[w \circ 1] \cong L_\xi[w' \circ 1] \ \Leftrightarrow \ w' \in wW_J$.

予想 5.2 が正しいとすると，予想 5.2 の仮定のもとで

$$\#\{ \text{既約 } U_{\chi_x} \text{ 加群} \} = \#(W/W_J).$$

6　次数付け

以下 $t = h = 1$ とする．必要なら，$x \in N^+$ を $\mathrm{Ad}(G)(x) \cap N^+$ の別の元で取り替えて，$T' := Z_T(x)^0$ が $Z_G(x)$ の極大トーラスであるとしてよい．

U は $P = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ で次数づけられた次数環であった．

$$U = \bigoplus_{\gamma \in P} U(\gamma), \qquad k_\lambda \in U(0), \quad e_i \in U(\alpha_i), \quad f_i \in U(-\alpha_i).$$

U の商 U_ξ には P による次数付けは入らないが，P の商 $P_x := \mathrm{Hom}(T', \mathbb{C}^\times)$ による次数付け

$$U_\xi = \bigoplus_{\gamma \in P_x} U_\xi(\gamma)$$

が自然に定まる．以下，有限次元 U_ξ 加群のなす圏，および有限次元次数付き U_ξ 加群のなす圏を，それぞれ $\mathrm{Mod}(U_\xi)$, $\mathrm{Mod}_{\mathrm{gr}}(U_\xi)$ で表す．また，アーベル圏 $\mathcal{A}$ の Grothendieck 群を $K(\mathcal{A})$ で表す．次数付けを忘れることにより，完全関手 $\mathrm{For} : \mathrm{Mod}_{\mathrm{gr}}(U_\xi) \to \mathrm{Mod}(U_\xi)$ が定まる．

さて，$K(\mathrm{Mod}(U_\xi))$ は $\mathbb{I} = \{ \text{既約 } U_\xi \text{ 加群} \}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群である．また $K(\mathrm{Mod}_{\mathrm{gr}}(U_\xi))$ は $\tilde{\mathbb{I}} = \{ \text{既約次数付き } U_\xi \text{ 加群} \}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群である．次数付き U_ξ 加群における次数のずらしにより，$K(\mathrm{Mod}_{\mathrm{gr}}(U_\xi))$ は自然に P_x 加群となる．実

は，Jantzen [9, Section 1.4/5] の論法により，既約 U_ξ 加群は（次数のずらしを除いて一意的に）既約次数付き U_ξ 加群に持ち上がることがわかる．したがって

$$\mathrm{For}: K(\mathrm{Mod}_{\mathrm{gr}}(U_\xi)) \to K(\mathrm{Mod}(U_\xi))$$

は全射で，自然な対応 $\tilde{\mathbb{I}}/P_x \cong \mathbb{I}$ を導く．

7 Lusztig の予想

$\mathcal{B} = G/B^+$ の部分代数多様体 $\mathcal{B}_x$ を

$$\mathcal{B}_x = \{gB^+ \in G/B^+ \mid x \in gB^+g^{-1}\} \qquad (\text{Springer ファイバー})$$

により定める．これには前節で定義したトーラス T' が自然に作用している．連接 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}$ 加群のなす圏，および T' 同変連接 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}$ 加群のなす圏をそれぞれ $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})$，$\mathrm{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})$ で表す．Grothendieck 群 $K(\mathrm{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$ は自然に P_x 加群となる．T' の作用を忘れることにより自然な写像

$$\mathrm{For}: K(\mathrm{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})) \to K(\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$$

が定まる．

Lusztig [12] は $K(\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$ の基底 $\mathbb{B}$ および $K(\mathrm{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$ の基底 $\tilde{\mathbb{B}}$ であって $\tilde{\mathbb{B}}/P_x \cong \mathbb{B}$ となるものを定め，次の予想を与えた．

予想 7.1 ([12])**.** ℓ は十分大きいとする．

(i) $K(\mathrm{Mod}(U_\xi)) \cong K(\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$, $\quad K(\mathrm{Mod}_{\mathrm{gr}}(U_\xi)) \cong K(\mathrm{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))$.

(ii) (i) において $\quad \mathbb{I} \leftrightarrow \mathbb{B}, \quad \tilde{\mathbb{I}} \leftrightarrow \tilde{\mathbb{B}}$.

(iii) $\tilde{\mathbb{I}} \leftrightarrow \tilde{\mathbb{B}}$ において $b \in \tilde{\mathbb{B}}$ に対応する次数付き既約 U_ξ 加群を L_b とし，その projetive cover を P_b とするとき，重複度 $[P_b : L_{b'}]$ の幾何的記述がある． □

注意 7.2. 予想 7.1 (i) が正しければ,

$$\#\{\text{ 既約 } U_\xi \text{ 加群 }\} = \mathrm{rank}(K(\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x}))) = \dim H^*(\mathcal{B}_x).$$

となって，既約表現の数がわかる（$\dim H^*(\mathcal{B}_x)$ は，いわゆる Green 多項式を用いて計算することができる）． □

注意 7.3. x が L_J の正則ベキ単元であるとする．この場合には，$K(\mathrm{Mod}_{T'}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})) \supset \tilde{\mathbb{B}}$ の組合せ論的記述が知られており，予想 7.1 (iii) における重複度 $[P_b : L_{b'}]$ を与える筈の

幾何的数は組合せ論的に計算可能である．また，このことと，baby Verma 加群を仲立ちとする相互律（圏 $\mathcal{O}$ における BGG 相互律の類似）を用いると，予想 7.1 を書き換えて，$[Z_\xi[w \circ 1] : L_\xi[w' \circ 1]]$ の組合せ論的記述を与える予想が得られる（$x = 1$ の場合には，最高ウェイト加群に対する Lusztig 予想（Kazhdan-Lusztig と Kashiwara-Tanisaki により証明済み）と同値になる）． □

8 Lusztig 予想の証明に向けて

Lusztig は，正標数での単純リー代数についても，予想 7.1 と全く同様の予想を定式化した．実はこちらのほうは解決済みであり，その証明には，正標数における旗多様体 $\mathcal{B}_k$ 上の D 加群が用いられる．

まず，Bezrukavnikov-Mirković-Rumynin [1] は，$\mathfrak{g}_k$ のべき零元 e について

$$D^b(\mathrm{Mod}(U(\mathfrak{g}_k)_{\chi_e})) \cong D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{(\mathcal{B}_k)_e})) \tag{14}$$

を示した．これから，Lusztig の予想のうちの (i) に対応する事実

$$K(\mathrm{Mod}(U(\mathfrak{g}_k)_{\chi_e})) \cong K(\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{(\mathcal{B}_k)_e}))$$

が従う．

(14) は 2 つのアーベル圏 $\mathrm{Mod}(U(\mathfrak{g}_k)_{\chi_e})$, $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{(\mathcal{B}_k)_e})$ の同値を与えるわけではない．しかし $D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{(\mathcal{B}_k)_e}))$ のほうで，いわゆるエキゾチック t 構造から定まるアーベル圏を考えると，アーベル圏の同値が得られることが，Bezrukavnikov-Mirković [2] により示された．このことをもとに，Lusztig の予想 (ii), (iii) の正標数での類似の証明が，[2] においてなされた．

そこで，[1], [2] のマネをして，ベキ根での量子群に対する Lusztig の予想を証明したい．その場合，ベキ根での量子旗多様体 $\mathcal{B}_{q=\zeta}$ 上の D 加群を用いることになる．筆者は，非可換スキームであるところの量子旗多様体を用いて，[1] の結果の類似を与えた（[14], [15]）．ただし，一部未解決の部分が残っている（$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ のときは解決）．[2] のマネのほうは，ほぼ同様にできる筈だと思っている．これらに関して簡単に述べておこう．U の部分代数 U_{even} を

$$U_{\mathrm{even}} = \langle e_i,\, S(f_i),\, k_{2\lambda} \mid i \in I,\ \lambda \in P \rangle \subset U$$

により定める．

$$V = U_{\mathrm{even}} / \sum_{i \in I} U_{\mathrm{even}} f_i$$

とおく．

予想 8.1 ([15])**.** $\ell \gg 1$ ならば　$R\mathrm{Ind}_{B_q^-}^{G_q} V \cong U_{\mathrm{even}} \otimes_{Z_{\mathrm{Har}}(U)} \mathbb{C}[P]$. □

定理 8.2. 予想 8.1 が正しいとする．ℓ はさらに次の条件を満たすとする．

- $\ell \gg 1$.
- $\mathfrak{g}$ が例外型なら，$(\ell, 3) = 1$.

このとき

$$D^b(\mathrm{Mod}(U_\xi)) \cong D^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{B}_x})).$$

□

9　その他の問題

定理 9.1 (Kac-Weisfeiler 予想，Premet の定理)**.** $e \in \mathfrak{g}_k^*$ をべき零元とする．L を既約 $U(\mathfrak{g}_k)_{\chi_e}$ 加群とすると，$p^{\mathrm{codim}(\mathcal{B}_k)_e} | \dim L$.

ベキ根での量子群についても同様の予想が定式化される．

予想 9.2 (De Concini-Kac-Procesi 予想)**.** L を既約 U_ξ 加群とすると，$\ell^{\mathrm{codim}\mathcal{B}_x} | \dim L$.

予想 9.2 に関しては，Sevostyanov の preprint があるが，私にはよく分からない点がいくつかある．

本稿では，ℓ が奇数の場合のみ扱ってきたが，ℓ が偶数のとき，U の表現論はどうなるのかも，余り考えられていない問題である．なお，ℓ が偶数のときの中心 $Z(U)$ の構造は [16] で調べられている．場合によっては，$\mathfrak{g}$ の Langlands dual ${}^L\mathfrak{g}$ から決まる代数群 ${}^LK$ が出てきたりして，もう少し複雑になる．

参考文献

[1] Bezrukavnikov, R., Mirković, I., Rumynin, D., Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic. With an appendix by Bezrukavnikov and Simon Riche. Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 3, 945–991.

[2] Bezrukavnikov, R., Mirković, I., Representations of semisimple Lie algebras in prime characteristic and the noncommutative Springer resolution. With an appendix by Eric Sommers. Ann. of Math. (2) 178 (2013), no. 3, 835–919.

[3] Brown, K., Gordon, I., The ramification of centres: Lie algebras in positive characteristic and quantised enveloping algebras. Math. Z. 238 (2001), no. 4, 733–779.

[4] De Concini, C., Kac, V., Representations of quantum groups at roots of 1. Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989), 471–506, Progr. Math., 92, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[5] De Concini, C., Kac, V., Representations of quantum groups at roots of 1: reduction to the exceptional case. Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991), 141–149, Adv. Ser. Math. Phys., 16, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[6] De Concini, C., Kac, V., Procesi, C., Quantum coadjoint action. J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 1, 151–189.

[7] De Concini, C., Procesi, C., Quantum groups. D-modules, representation theory, and quantum groups (Venice, 1992), 31–140, Lecture Notes in Math., 1565, Springer, Berlin, 1993.

[8] Gavarini, F., Quantization of Poisson groups. Pacific J. Math. 186 (1998), no. 2, 217–266.

[9] Jantzen, J. C., Modular representations of reductive Lie algebras. Commutative algebra, homological algebra and representation theory (Catania/Genoa/Rome, 1998). J. Pure Appl. Algebra 152 (2000), no. 1–3, 133–185.

[10] Kac, V., Weisfeiler, B., Coadjoint action of a semi-simple algebraic group and the center of the enveloping algebra in characteristic p. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 79, Indag. Math. 38 (1976), no. 2, 136–151.

[11] Lusztig, G., Bases in equivariant K-theory. Represent. Theory 2 (1998), 298–369.

[12] Lusztig, G., Bases in equivariant K-theory. II. Represent. Theory 3 (1999), 281–353.

[13] Tanisaki, T., Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R-matrices for quantum algebras. Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991), 941–961, Adv. Ser. Math. Phys., 16, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[14] Tanisaki, T., Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity, Adv. Math. (2012), 2235–2294.

[15] Tanisaki, T., Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity II, Nagoya. Math. J.(2014), 1–52.

[16] Tanisaki, T., The center of a quantized enveloping algebra at an even root of unity, Osaka J. Math. (2016), 47–81.

[17] Veldkamp, F. D., The center of the universal enveloping algebra of a Lie algebra in characteristic p. Ann. Sci. Ècole Norm. Sup. (4) 5 (1972), 217
240.