hom 関手の群による商について

丹原大介

1　日本語書籍に見る圏論

近年，圏論を標題に掲げた邦書の出版が相次いでいる。新しい方からあげると

前原和壽『圏論入門』2018 年 8 月
清水勇二『圏と加群』2018 年 3 月
中岡宏行『圏論の技法』2015 年 12 月
圏論の歩き方委員会編『圏論の歩き方』2015 年 9 月

他に翻訳も出ている。

レンスター『ベーシック圏論』土岡俊介訳　2017 年 1 月
アウディー『圏論』前原和壽訳　2015 年 9 月

この活況を引き起こしている要因を筆者は知らない。すでに圏が広く使われていた 80 年代，90 年代には見られなかった現象である。ここでは時代を遡って，圏論が一般に広まる前に日本において圏を扱った書物がどのように出版されてきたか辿ってみたい。

まず 70 年代に二つの書があげられる。

大熊正『圏論（カテゴリー）』1979 年
竹内外史『層・圏・トポス』1978 年

大熊正の本は槇書店の数学選書の一冊であったが今日手に入らない。竹内外史の名高い本は現在もプリントを重ねる。これらに先立って圏を主題とする単行本はない。圏論の教科書としては大熊正の本が最初と言えようか。著者は序で日本は圏論に冷淡だと嘆いていた。今日の状況を見たら何と言うだろう。

雑誌に目を移すと，「現代数学」にカテゴリーの記事が見られる。

倉田令二郎，カテゴリーを学ぶ，現代数学 1977 年〜1978 年
森毅，集合のカテゴリー，現代数学 1971 年

また「数学セミナー」臨時増刊号の

『数学 100 の発見』1972 年

において 100 番目の発見として「カテゴリー・ファンクター」の項があり，その執筆者は井関清志である。

60 年代に移り，圏が扱われている数学書を拾ってみよう。

服部昭『現代代数学』1968 年　「圏とホモロジー」の章あり
日本数学会編『岩波数学辞典第 2 版』1968 年　「圏と関手」の項目あり
永田雅宜『抽象代数への入門』1967 年　「圏と関手」の章あり
小松醇郎・中岡稔・菅原正博『位相幾何学 I』1967 年　「圏」の語あり

河田敬義・大口邦雄『位相幾何学』1967 年　「圏」の語あり
松村英之『集合論入門』1966 年　「圏と関手」の章あり
彌永昌吉・小平邦彦『現代数学概説 I』1961 年　「Category と functor」の節あり

『岩波数学辞典』の初版は 1954 年であるが，そこにカテゴリーもホモロジー代数も見られない。学会誌「数学」の

米田信夫，Universality について I , II , 数学 1961 年，1962 年

を見ると，category の訳語として「対象系」が使われている。
50 年代は

H.Cantan and S.Eilenberg, Homological Algebra, 1956 年

が出てホモロジー代数の成立を告げ，日本でも

中山正・服部昭『ホモロジー代数学』1957 年

が続いた。ここでは「カテゴリー」,「函手」の語が使われている。同じ年の

秋月康夫・鈴木通夫『高等代数学 I I 』1957 年

には,「複体，ホモロギー」の一節があるが圏には触れていない。60 年代に「圏」を使い始めた著者らの 50 年代の著作

小松醇郎・戸田宏・中岡稔『位相幾何学』1957 年
河田敬義・竹内外史『位相幾何学』1952 年

を見ても，圏の言及はない。さらに圏論誕生の年 1945 年まで遡っても圏に触れた本は見つからない。
こうしてみると，圏の概念が日本語の書物に登場するのは 1957 年の『ホモロジー代数学』から，日本語の「圏」が使われ始めるのは 1966 年の『集合論入門』からのようである。(講演時『集合論入門』は見ていなかった。)
圏という語の発案者は不明と講演で述べたが，後日 category に圏の訳があてられた経緯を次の記事で知った。

河田敬義，日本数学会編集数学辞典第 2 版，数学セミナー 1968 年 7 月号

数学辞典は同年 6 月に刊行された。4 年にわたる編集を率いた河田敬義が苦労談を打ち明けている。とくにまちまちだった数学の術語の日本語訳に苦心したいう。原文を引用する。

> まず問題になったのは，外国語の述語，たとえば category という言葉が，従来の論理学の用語とは別の意味に用いられています．これを外国語のまま ‘category’ とするか，仮名で ‘カテゴリー’ とするか，適当な訳をつけるかという 3 種類の選択があります．内部でも議論をし，数学外の人々の意見ももとめました．全体的の結論として，ローマ字綴りのままは全く採用しないこと，仮名書きは，すでに日本語として熟しているときにだけ用いて，無暗に新しく作らないこと，結局なるべく適当な訳を作ることにしました．category には ‘圏’ という訳をつけました．

「‘圏’ という訳をつけました」の明示されていない主語は編集委員会であろうか。河田敬義本人であるのかもしれない。数学辞典の執筆陣に名を連ねる服部昭，永田雅宜，小松醇郎，中岡稔，菅原正博，松村英之らは訳語「圏」の採用を知っていて，いち早く著作に取り入れたのだろう。

2 「自然な同型」

周知のとおり，category theory の誕生は Eilenberg と MacLane の論文

General theory of natural equivalences, Trans.Amer.Math.Soc. 58 (1945)

による。ここで彼らは category, functor, natural equivalence の一般的定義を与えたが，先立って群の category における functor と natural equivalence の定義を論文

Natural isomorphisms in group theory, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 28 (1942)

で与えている。その序文はつぎのように始まる。

> Frequently in modern mathematics there occur phenomena of “naturality”: a “natural” isomorphism between two groups or between two complexes, a “natural” homeomorphism of two spaces and the like. We here propose a precise definition of the “naturality” of such correspondences, as a basis for an appropriate general theory.

大学で受けた講義をふりかえって「自然な〜」という言い方は圏を意識することなく使われていたと思うが，Eilenberg と MacLane が naturality の定義を与える以前に，natural isomorphism といった言い方が慣用的にされていたのだろうかと疑問が湧く。以下少しだけ調べたことである。

MacLane 自身が Birkhoff とともに著した抽象代数の教科書

G.Birkhoff/S.MacLane, A Survey of Modern Algebra, 1941

に “natural isomorphism” は現れない。（改版 1953 年には現れる。）

1945 年以前のトポロジーの代表的な教科書

S.Lefschetz, Algebraic Topology, 1942
P.Alexandroff/H.Hopf, Topologie I, 1935
H.Seifert/W.Threlfall, Lehrbuch der Topologie, 1934

を開いてみたが，“natural isomorphism” は見当たらなかった。なお上記 Lefschetz の書に有向集合上の群の逆系の間の同型が現れ，それが自然同型の一例であるとして Eilenberg と MacLane の 1942 年論文が引用している。論文での使用例は十分調べていない。

講演では以上を前置きとして本題に入った。3 節で hom 関手の群による商を導入し，それを用いて 4 節で極限の一般化，5 節で随伴の一般化を考察する。以下において **Set** は集合の圏を表す。$\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ などは小さい圏を表す。

3　hom 関手とその直和，商

圏 $\mathcal{C}$ の対象 x に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,-)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ は

$$y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$$

なる関手である。$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,x)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は

$$y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,x)$$

なる関手である。また $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ は

$$(x,y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$$

なる関手である。

関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ が表現可能 (representable) であるとは，$\mathcal{C}$ のある対象 x に対して同型

$$F \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,-)$$

が存在することをいう。反変関手 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ についても同様に言う。

つぎに “familially representable” の定義をする。関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ が族的表現可能 (familially representable) であるとは，$\mathcal{C}$ のある対象の族 $(x_i)_{i\in I}$ に対して同型

$$F \cong \coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_i,-)$$

が存在することをいう。つまり hom 関手の直和と同型な関手のことである。反変関手についても同様に言う。[CJ], [L1], [L2] で “familially representable” の語が使われている。

次に “nearly representable” を定義する。圏 $\mathcal{C}$ の対象 x の自己同型群 $\mathrm{Aut}(x)$ の部分群 G があるとき，$\mathcal{C}$ の任意の対象 y に対して集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$ に G が作用する。その商集合を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)/G$ と書く。y を変数とみて関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,-)/G\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

を得る。関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ が殆ど表現可能 (nearly representable) であるとは，$\mathcal{C}$ のある対象 x と $\mathrm{Aut}(x)$ のある部分群 G に対して同型

$$F \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,-)/G$$

が存在することをいう。

米田の補題により以下が言える。

- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,-)/G \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x',-)/G' \iff \exists u\colon x \to x'$ isomorphism, $uGu^{-1} = G'$
- 殆ど表現可能な関手の群作用による商関手もまた殆ど表現可能。

関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ が殆ど族的表現可能 (nearly familially representable) であるとは，$\mathcal{C}$ のある対象の族 $(x_i)_{i\in I}$ および部分群 $G_i \subset \mathrm{Aut}(x_i)$ の族に対して同型

$$F \cong \coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_i,-)/G_i$$

が存在することをいう。

4　有限圏における極限

圏における直積の定義を hom 関手を用いて言えばつぎのようになる。圏 $\mathcal{C}$ の対象 x, y, z に対して，関手の同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, x) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, z)$ があるとき，z は x と y の直積であるという。$\mathcal{C}$ において x と y の直積が存在するということは，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, x) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, y)$ が表現可能であるということである。ここで表現可能を族的表現可能や殆ど族的表現可能におきかえれば，直積の存在より緩やかな条件になるだろう。

有限圏とは対象も射も有限個しかない圏をいう。有限圏 $\mathcal{C}$ においては，任意のふたつの対象の直積が存在するならば，$\mathcal{C}$ は半順序集合と圏同値であることが知られている。さらに終対象も存在すれば，$\mathcal{C}$ は束と同値であり，したがって余積と始対象が存在する。有限圏の場合，hom 関手の有限直積が族的表現可能ないしは殆ど族的表現可能という条件は，以下のように余極限の部分的存在と同値であることが言える。

定理１　有限圏 $\mathcal{C}$ について次の２条件は同値である。
(i) $\mathcal{C}$ 上の表現可能反変関手の有限直積は族的表現可能である。
(ii) $\mathcal{C}$ において pushout と coequalizer が存在する。

定理２　有限圏 $\mathcal{C}$ について次の２条件は同値である。
(i) $\mathcal{C}$ 上の表現可能反変関手の有限直積は殆ど族的表現可能である。
(ii) $\mathcal{C}$ において pushout が存在する。

ふたつの定理は [T1] で証明されている。定理１と有限圏のバーンサイド環との関係について [T2] に報告がある。

5　群を法とする随伴

互いに逆向きな関手の対

$$\mathcal{B} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$$

に対して，自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x), y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x, G(y))$$
$$(x \in \mathcal{B}, y \in \mathcal{C})$$

が与えられたとき，F は G の左随伴関手である，または G は F の右随伴関手であるというのであった。

このとき

$$L(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x), y)$$

とおくと，L は関手

$$L \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

であり

$$L(x, -) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x), -)$$
$$L(-, y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, G(y))$$

であるから，$L(x,-)$ も $L(-,y)$ も表現可能である。

逆に，任意の関手 $L\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ について，２条件

- $L(x,-)\colon \mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ が表現可能 $(\forall x\in\mathcal{B})$
- $L(-,y)\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$ が表現可能 $(\forall y\in\mathcal{C})$

が成り立つとする。

$$L(x,-)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x),-)$$
$$L(-,y)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-,G(y))$$

なる $F(x)$, $G(y)$ をとれば,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(x),y)\cong L(x,y)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x,G(y))$$

となるから随伴対

$$\mathcal{B}\underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\mathcal{C}$$

を得る。

こうして，$\mathcal{B}$ と $\mathcal{C}$ の間の随伴というものは，$L\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ であって条件

- $L(x,-)\colon \mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ が表現可能 $(\forall x\in\mathcal{B})$
- $L(-,y)\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$ が表現可能 $(\forall y\in\mathcal{C})$

をみたすものと同等であるといえる。L がこの 2 条件を満たすとき，L は変数別に表現可能である (slicewise representable) ということにする。

一般に関手 $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ を bimodule とか distributor と呼んだりする。両側加群のテンソル積と同様に，$L\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$, $M\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{D}\to\mathbf{Set}$ に対して，合成 $L\otimes_{\mathcal{C}}M\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{D}\to\mathbf{Set}$ が定義される。([B] の記法は $L\circ M$。) また圏 $\mathcal{C}$ の $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ を distributor と見ることができる。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$$
$$(x,y)\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$$

関手 $p\colon \mathcal{B}'\to\mathcal{B}$, $q\colon \mathcal{C}'\to\mathcal{C}$ があるとき，関手圏の間に引き戻し関手

$$(p\times q)^*\colon [\mathcal{B}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C},\mathbf{Set}]\to[\mathcal{B}'^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}',\mathbf{Set}]\colon L\mapsto L\circ(p\times q)$$

が定義される。その左随伴関手が存在しそれを

$$(p\times q)_!\colon [\mathcal{B}'^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}',\mathbf{Set}]\to[\mathcal{B}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C},\mathbf{Set}]$$

と記す。

ここで再び表現可能性を族表現可能性に代えてみよう。

$L\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ について,

- $L(x,-)\colon \mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ が族表現可能 $(\forall x\in\mathcal{B})$
- $L(-,y)\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$ が族表現可能 $(\forall y\in\mathcal{C})$

をみたすとき，L は変数別に族的表現可能 (slicewise familially representable) であるという。

このとき任意の $x\in\mathcal{B}$, $y\in\mathcal{C}$ に対して

$$L(x,-)\cong\coprod_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u_i,-)\quad(u_i\in\mathcal{C})$$
$$L(-,y)\cong\coprod_j \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-,v_j)\quad(v_j\in\mathcal{B})$$

なる同型をとる。x に対する添字 i の集合を $I(x)$ とおくと，関手 $I\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を得る。y に対する添字 j の集合を $J(y)$ とおくと，関手 $J\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ を得る。

I のエレメントの圏 $\mathbb{E}(I)$ が定義される。その対象は対 (x,i) $(x \in \mathcal{B},\, i \in I(x))$ である。 射 $(x,i) \to (x',i')$ は $\mathcal{B}$ の射 $f\colon x \to x'$ であって $I(f)(x') = x$ をみたすものである。射影 $\theta\colon \mathbb{E}(I) \to \mathcal{B}$ は $(x,i) \mapsto x$ なる関手である。J のエレメントの圏 $\mathbb{E}(J)$ と射影 $\pi\colon \mathbb{E}(J) \to \mathcal{C}$ が定義される。

すると，関手 $\tilde{L}\colon \mathbb{E}(I)^{\mathrm{op}} \times \mathbb{E}(J) \to \mathbf{Set}$ および同型

$$L \cong (\theta \times \pi)_! \tilde{L}$$

があることがいえる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}(I) \arrow[r, dash, "\tilde{L}"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathbb{E}(J) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{B} \arrow[r, dash, "L"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

そして $\tilde{L}$ は変数別に表現可能であり，$\mathbb{E}(I)$ と $\mathbb{E}(J)$ の間の随伴を与える。

圏 $\mathcal{B}$ 上の反変関手に対するエレメントの圏は $\mathcal{B}$ 上の離散ファイバー圏というものである。双対的に，圏 $\mathcal{C}$ 上の共変関手に対するエレメントの圏は $\mathcal{C}$ 上の離散双対ファイバー圏というものである。

必要十分条件として述べると以下のようになる。

命題　関手 $L\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ について次の 2 条件は同値である。

(i) L は変数別に族的表現可能である。

(ii) 離散ファイバー圏 $\theta\colon \tilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$, 離散双対ファイバー圏 $\pi\colon \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$, 変数別に表現可能な関手 $\tilde{L}\colon \tilde{\mathcal{B}}^{\mathrm{op}} \times \tilde{\mathcal{C}} \to \mathbf{Set}$ および同型

$$L \cong (\theta \times \pi)_! \tilde{L}$$

が存在する。

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{B}} \arrow[r, dash, "\tilde{L}", "\text{adjoint}"'] \arrow[d, "\theta"'] & \tilde{\mathcal{C}} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{B} \arrow[r, dash, "L"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

つぎに「表現可能」を「殆ど表現可能」に代えて distributor を考察する。

distributor $L\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ について，

- $L(x,-)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ が殆ど表現可能 $(\forall x \in \mathcal{B})$
- $L(-,y)\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が殆ど表現可能 $(\forall y \in \mathcal{C})$

であるとき，L は変数別に殆ど表現可能 (slicewise nearly representable) であるという。

この性質は合成に引き継がれる。すなわち $L\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, $M\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ が変数別に殆ど表現可能であれば，$L \otimes_{\mathcal{C}} M\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ も変数別に殆ど表現可能である。

ある有限性の仮定のもとで，変数別に殆ど表現可能な distributor の分解定理が成り立つ。それを述べるため関手についての G 条件，関手の 3 つ組の G 三角形を定義する。

$\phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする。$x \in \mathcal{C}$ に対し $G_x = \mathrm{Ker}(\mathrm{Aut}(x) \to \mathrm{Aut}(\phi(x))$ とおく。

ϕ についての右 G 条件はつぎの二つからなる。

(i) ϕ はオブジェクトにおいて全射。すなわち $\phi\colon \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ は全射。

(ii) 任意の $x, x' \in \mathcal{C}$ に対し，ϕ の引き起こす写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x', x)/G_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\phi(x'), \phi(x))$$

は全単射。

すべての $G_x = 1$ のときは，ϕ は圏同値となる。ϕ がオブジェクトにおいて恒等写像であるときは，[P, 1.3] で exterior quotient と呼ぶものと同じである。

双対的に，ϕ についての左 G 条件はつぎの二つからなる。

(i) ϕ はオブジェクトにおいて全射。

(ii) 任意の $x, x' \in \mathcal{C}$ に対し，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')/G_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\phi(x), \phi(x'))$$

は全単射。

つぎに左 G 三角形を定義する。圏の可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{E} \arrow[dl, "\sigma"] \\ \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

において，ϕ は左 G 条件を満たすと仮定する。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')/G_x \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\phi(x), \phi(x'))$$

であった。$x \in \mathcal{C}$ と $z \in \mathcal{E}$ に対し，関手 σ は写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\tau(x), z)/G_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\phi(x), \sigma(z))$$

をひきおこす。この写像が全単射である $(\forall x, \forall z)$ と仮定する。このとき，(ϕ, σ, τ) を左 G 三角形という。

すべての $G_x = 1$ のときは，σ は coreflector というものになる（$\sigma\rho \simeq 1$ なる左随伴 ρ が存在)。

双対的に右 G 三角形を定義できる。

有限性条件のもとで，変数別に殆ど表現可能な distributor の構造について次が成り立つ。

定理 3 圏 $\mathcal{C}$ において，分裂全射の無限列

$$\cdots \xrightarrow{g_2} y_2 \xrightarrow{g_1} y_1 \xrightarrow{g_0} y_0$$

があれば，ある番号から先の g_i は同型射になると仮定する。

このとき $L\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ について次の 2 条件は同値である。

(i) L は変数別に殆ど表現可能である。

(ii) 左 G 三角形

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{G} \arrow[dl, "\sigma"] \\ \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

と右 G 三角形

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G} & \mathcal{H} \arrow[l, "\omega"'] \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathcal{C} \arrow[from=1-1, "\rho"']
\end{tikzcd}
$$

および同型

$$L \cong (\sigma \times \rho)_! \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}$$

が存在する。

（注 1）$\mathcal{C}$ が有限であれば定理の仮定はみたされる。

（注 2）一般的な同型

$$(\sigma \times \rho)_! \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}} \cong (1 \times \sigma)^* \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{G}} (\rho \times 1)^* \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$$

が成り立つ。

証明の道筋を述べる。

$L \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ が変数別に殆ど表現可能であるとする。$x \in \mathcal{B}$, $y \in \mathcal{C}$ に対して同型

$$
\begin{aligned}
L(x,-) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{x},-)/H_x \quad (\tilde{x} \in \mathcal{C}, H_x \leq \mathrm{Aut}(\tilde{x})) \\
L(-,y) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-,\hat{y})/K_y \quad (\hat{y} \in \mathcal{B}, K_y \leq \mathrm{Aut}(\hat{y}))
\end{aligned}
$$

を選ぶ。このように対象の対応 $x \mapsto \tilde{x}$, $y \mapsto \hat{y}$ が選ばれると，射の対応

$$(f \colon x \to x') \mapsto (\tilde{f} \colon \tilde{x} \to \tilde{x}')$$

$$(g \colon y \to y') \mapsto (\hat{g} \colon \hat{y} \to \hat{y}')$$

を上の同型と両立するように選ぶことができる。

真の随伴に対する unit, counit と同様に $x \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B}$ の射 $\eta_x \colon x \to \hat{\tilde{x}}$ がとれる。$y \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}$ の射 $\epsilon_y \colon \tilde{\hat{y}} \to y$ がとれる。随伴のときと同様に triangle identity が群を法として成り立つ。

$$\epsilon_{\tilde{x}} \tilde{\eta}_x \equiv 1 \mod H_x$$

$$\hat{\epsilon}_y \eta_{\hat{y}} \equiv 1 \mod K_y$$

補題　圏 $\mathcal{C}$ において，分裂全射の無限列

$$\cdots \xrightarrow{g_2} y_2 \xrightarrow{g_1} y_1 \xrightarrow{g_0} y_0$$

があれば，ある番号から先の g_i は同型射になると仮定する。

このとき任意の $x \in \mathcal{B}$ に対して

$$\epsilon_{\tilde{x}} \colon \tilde{\hat{\tilde{x}}} \to \tilde{x}$$

は同型射である。任意の $y \in \mathcal{C}$ に対して

$$\eta_{\hat{y}} \colon \hat{y} \to \hat{\tilde{\hat{y}}}$$

は同型射である。

そこで

$$\mathcal{B}_0 = \{x \in \mathcal{B} \mid \eta_x \text{ は同型 }\}$$
$$\mathcal{C}_0 = \{y \in \mathcal{C} \mid \epsilon_y \text{ は同型 }\}$$

とおくと補題により

$$x \in \mathcal{B} \implies \tilde{x} \in \mathcal{C}_0$$
$$y \in \mathcal{C} \implies \hat{y} \in \mathcal{B}_0$$

がいえる。$\mathcal{B}_0$ の商として圏 $\bar{\mathcal{B}}_0$ および右 G 条件をみたす関手 $p\colon \mathcal{B}_0 \to \bar{\mathcal{B}}_0$ が定義される。$\mathcal{C}_0$ の商として圏 $\bar{\mathcal{C}}_0$ および左 G 条件をみたす関手 $q\colon \mathcal{C}_0 \to \bar{\mathcal{C}}_0$ が定義される。distributor

$$M\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \bar{\mathcal{B}}_0 \to \mathbf{Set},\ K\colon \bar{\mathcal{B}}_0^{\mathrm{op}} \times \bar{\mathcal{C}}_0 \to \mathbf{Set},\ N\colon \bar{\mathcal{C}}_0^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

が定義され，L は

$$L \cong M \otimes_{\bar{\mathcal{B}}_0} K \otimes_{\bar{\mathcal{C}}_0} N$$

と分解する。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[rrr, dash, "L"] \arrow[dr, dash, "M"'] & & & \mathcal{C} \\
& \bar{\mathcal{B}}_0 \arrow[r, dash, "K"'] & \bar{\mathcal{C}}_0 \arrow[ur, dash, "N"'] &
\end{tikzcd}$$

K は圏同値 $\bar{\mathcal{B}}_0 \simeq \bar{\mathcal{C}}_0$ を与える。さらに，M と N からそれぞれ右 G 三角形と左 G 三角形が生じ，それから定理の (ii) の同型を得る。

参考文献

[B] F.Borceux, Handbook of Categorical Algebra 1, Cambridge University Press, 1994.

[CJ] A.Carboni and P.Johnstone, Connected limits, familial representability and Artin glueing, Math. Struct. Comp. Science 5(1995).

[L1] T.Leinster, Higher operads, Higher categoires, Cambridge University Press, 2004.

[L2] T.Leinster, The Euler characteristic of a category, Documenta Math.13 (2008).

[P] L.Puig, Frobenius Categoires versus Brauer Blocks, Birkhäuser, 2009.

[T1] D.Tambara, Finite categories with pushouts, Theory and Applications of Categories vol.30 (2015), 1017–1031.

[T2] 丹原大介，On quotient of Hom-functors,『有限群とその表現，頂点作用素代数，代数的組合せ論の研究』，数理解析研究所講究録 1872 (2014), 158–164.

(2018 年 12 月 21 日提出)