保型形式のリフティングの最近の進展について

北海道大学 理学研究院　跡部 発
Hiraku Atobe
Department of Mathematics, Hokkaido University

Abstract

Arthur の重複度公式の応用として得られる, Siegel モジュラー形式のリフティングと強重複度一定理を紹介する.

1　Siegel モジュラー形式

ランク n のシンプレクティック群を

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \middle| {}^t g \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

で表す. これは, 次数 n の Siegel 上半空間

$$\mathfrak{H}_n = \{ Z \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z,\ \mathrm{Im}(Z) > 0 \}$$

に次のように作用する. （但し, 実対称行列 Y が正定置の時に $Y > 0$ と書く. ）

$$g\langle Z \rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}),\ Z \in \mathfrak{H}_n.$$

定義 1.1　正則関数 $F\colon \mathfrak{H}_n \to \mathbb{C}$ が次の条件 1, 2 を満たす時, 重さ k の Siegel カスプ形式であるという.

1. $F(\gamma\langle Z \rangle) = \det(CZ+D)^k F(Z)$ for $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$;
2. カスプ条件.

重さ k の Siegel カスプ形式のなすベクトル空間を $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ で表す.

一変数の場合と同様に, $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ は有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間であり, その上には Hecke 作用素が作用する. カスプ形式 $F \in S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ が Hecke 同時固有形式の時, 各素数 p について, 佐武パラメーター

$$\{\beta_{1,p}^{\pm}, \dots, \beta_{n,p}^{\pm}\} \in (\mathbb{C}^\times)^n / \mathfrak{S}_n \ltimes \{\pm 1\}^n$$

が定まり, 標準 L-関数

$$L(s, F, \mathrm{std}) = \prod_p \left((1-p^{-s})^{-1} \prod_{i=1}^n (1-\beta_{i,p} p^{-s})^{-1} (1-\beta_{i,p}^{-1} p^{-s})^{-1} \right)$$

が $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ において定義される．これは, 全 s-平面に有理型に解析接続し, $s \leftrightarrow 1-s$ に関する関数等式を持つことが知られている．

例 1.2　$n = 1$ とする．この時,

$$\mathrm{Sp}_1(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{H}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

カスプ形式 $f \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ のカスプ条件とは, f が次の形の Fourier 展開を持つことである．

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_f(m) e^{2\pi n\sqrt{-1}z}.$$

Hecke L-関数

$$L(s, f) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_f(m)}{m^s}$$

が $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ において定義される．カスプ形式 f が Hecke 同時固有形式の時, $L(s, f)$ は次数 2 の L-関数である．一方で, 標準 L-関数 $L(s, f, \mathrm{std})$ は次数 3 であり, 随伴 L-関数 $L(s, f, \mathrm{Ad})$ と一致する．これは $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ において, 次の式で定義される．

$$\begin{aligned}
L(s, f, \mathrm{Ad}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{0<d|n} (-1)^{\Omega(\frac{n}{d})} d^{-(k-1)} a_f(d)^2 \right) n^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d>0 \\ d^2|n}} \left(\frac{n}{d^2}\right)^{-(k-1)} a_f\left(\left(\frac{n}{d^2}\right)^2\right) \right) n^{-s} \\
&= \prod_p \left(1 - a_f(p^2) p^{-(s+k-1)} + a_f(p^2) p^{-(2s+k-1)} - p^{-3s}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

但し, $\Omega(d)$ は d の重複を込めた素因子の個数である．これは全 s-平面に解析接続し, 関数等式

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-1)L(s, f, \mathrm{Ad}) = \Gamma_{\mathbb{R}}(-s+2)\Gamma_{\mathbb{C}}(-s+k)L(1-s, f, \mathrm{Ad})$$

を満たす．ここで, $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とおいた．さらに,

$$\frac{L(1, f, \mathrm{Ad})}{\langle f, f \rangle} = \frac{2^{2k-1}\pi^{k+1}}{(k-1)!}$$

が成り立つことが知られている．

カスプ形式のなす空間 $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ は有限次元であり, 特に,

- $\dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = 1$ for $k = 12, 20, 26$;

- $\dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z})) = 1$ for $k = 12, 14$

が知られている．宮脇は $k = 12, 14$ に対して，$S_k(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ の（定数倍を除いて一意な）Hecke 同時固有形式 F_k の Hecke 作用を数値計算し, 次のような予想を立てた.

予想 1.3（宮脇 [M92]） (A) $\Delta \in S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $g_{20} \in S_{20}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $F_{12} \in S_{12}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ をそれぞれ Hecke 同時固有形式とする時,

$$L(s, F_{12}, \mathrm{std}) = L(s, \Delta, \mathrm{std}) L(s+10, g_{20}) L(s+9, g_{20})$$

が成り立つであろう.

(B) $\Delta \in S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $g_{26} \in S_{26}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $F_{14} \in S_{14}(\mathrm{Sp}_3(\mathbb{Z}))$ をそれぞれ Hecke 同時固有形式とする時,

$$L(s, F_{14}, \mathrm{std}) = L(s, \Delta, \mathrm{std}) L(s+13, g_{26}) L(s+12, g_{26})$$

が成り立つであろう.

この予想は, F_{12} や F_{14} がそれぞれ, 二つのカスプ形式 (Δ, g_{20}), (Δ, g_{26}) からのリフトであることを示唆する．このような二つのカスプ形式からのリフティングを紹介する．それは Arthur の重複度公式を応用することで得られる.

2 Arthur の重複度公式とその応用

有理数体 $\mathbb{Q}$ のアデール環を $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \times \mathbb{R}$ で表す.

定義 2.1 関数 $\varphi\colon \mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が次の条件を満たす時, 二乗可積分な保型形式であるという.

1. $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ for $\gamma \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q})$;
2. φ は滑らか;
3. φ は K-有限, 但し, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 $K = K_{\mathrm{fin}} \times K_\infty$ は
$$K_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \middle| {}^t\alpha\beta = {}^t\beta\alpha,\ {}^t\alpha\alpha + {}^t\beta\beta = \mathbf{1}_n \right\}$$
と, $K_{\mathrm{fin}} = \prod_p \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}_p)$ により定めた;
4. φ は $Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty))$-有限, 但し, $Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty))$ は $\mathfrak{g}_\infty = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ の普遍包絡環 $Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\infty))$ の中心である;
5. φ は二乗可積分, 即ち,
$$\int_{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{Sp}_n(\mathbb{A})} |\varphi(g)|^2 dg < \infty.$$

二乗可積分な保型形式のなすベクトル空間を $\mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ で表す.

空間 $\mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ は自然に, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \times (\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-加群になる. **Arthur の重複度公式**（[Ar13, Theorem 1.5.2]）は, $\mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ の $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \times (\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-加群としての既約分解を **$A$-パラメーター**という概念で与える結果である.

カスプ形式 $F \in S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ は次のようにして, $\varphi_F \in \mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ を与える.

$$\varphi_F(\gamma g_\infty \kappa_{\mathrm{fin}}) = F(g_\infty\langle\sqrt{-1}\cdot\mathbf{1}_n\rangle)\det(C\sqrt{-1}+D)^{-k}$$

for $\gamma \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q})$, $g_\infty = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, and $\kappa_{\mathrm{fin}} \in K_{\mathrm{fin}}$. このようにして得られる保型形式を重さ k の正則カスプ形式といい, それらのなすベクトル空間を $\mathcal{S}_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ で表す. この空間 $\mathcal{S}_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ は $\mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ の $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$-安定な部分空間である.

Chenevier–Lannes は [CL19, Chapter VIII paragraph 5.1] において, Arthur の重複度公式を $\mathcal{S}_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ に移植した. これによって, $S_k(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ は A-パラメーターによって分解されることになる. この分解は表現論の言葉で書かれているが, それをモジュラー形式の言葉で言い換えることで, 次のリフティングの定理が得られる.

定理 2.2　Hecke 同時固有形式 $f \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ と非負整数 n, r で, $n-r \geq 0$ が偶数となるものを固定する.

(A) $k \equiv (n+r)/2 \bmod 2$ と $k > (n-r)/2$ を仮定する. この時, Hecke 同時固有形式 $g \in S_{k+\frac{n+r}{2}}(\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z}))$ に対して, Hecke 同時固有形式 $F_{f,g} \in S_{k+\frac{n+r}{2}}(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ であって,
$$L(s, F_{f,g}, \mathrm{std}) = L(s, g, \mathrm{std}) \prod_{i=1}^{n-r} L\left(s+k+\frac{n-r}{2}-i, f\right)$$
を満たすものが存在する.

(B) $k \equiv (n-r)/2 \bmod 2$ と $k > (n+r)/2$ を仮定する. この時, Hecke 同時固有形式 $g \in S_{k-\frac{n-r}{2}}(\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z}))$ に対して, Hecke 同時固有形式 $F_{f,g} \in S_{k+\frac{n-r}{2}}(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ であって,
$$L(s, F_{f,g}, \mathrm{std}) = L(s, g, \mathrm{std}) \prod_{i=1}^{n-r} L\left(s+k+\frac{n-r}{2}-i, f\right)$$
を満たすものが存在する.

定理 2.2 (A) において, $(k, n, r) = (10, 3, 1)$ とした時が予想 1.3 (A) であり, 定理 2.2 (B) において, $(k, n, r) = (13, 3, 1)$ とした時が予想 1.3 (B) である. また, $r = 0$ の時には, $L(s, g, \mathrm{std})$ は Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ であると理解する. この場合のリフティングは, f の Duke–Imamogle–Ibukiyama–Ikeda リフトである.

定理 2.2 のリフティングは, 定数倍を除いて一意的である. これは Chenevier–Lannes による重複度一定理 [CL19, Chapter VIII, Corollary 5.4] から従う. これも Arthur の重複度公式の応用である. Mœglin–Renard による最新の結果 [MR] を用いることで, 次のように重複度一定理の拡張が得られる.

定理 2.3（強重複度一定理） $i = 1, 2$ について, $F_i \in S_{k_i}(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ を Hecke 同時固有形式とする. 次を仮定する.

- ほとんど全ての素数 p に対して, F_1 の p における佐武パラメーターと F_2 のそれは一致する;
- n が偶数の場合は $\{k_1, k_2\} \neq \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\}$.

この時, 定数 $c \in \mathbb{C}^\times$ が存在して, $F_2 = cF_1$ となる.

証明の方針 **ステップ 1** 正則カスプ形式 φ_{F_i} で生成される $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \times (\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-加群 $\pi_{F_i} \subset \mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ を考える. これは既約になる.

ステップ 2 仮定と Adams–Johnson [AJ87], Arancibia–Mœglin–Renard [AMR], Mœglin–Renard [MR] の結果より, π_{F_1} と π_{F_2} は同型であることが分かる.

ステップ 3 局所 A-packet の重複度一定理（Mœglin [Moe11a, Moe11b], Xu [X], Adams–Johnson [AJ87], Arancibia–Mœglin–Renard [AMR], Mœglin–Renard [MR] の結果）から, π_{F_1} と π_{F_2} は $\mathcal{A}^2(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{A}))$ の部分空間として一致することが分かる.

ステップ 4 不分岐最小重さのベクトルの一意性より, φ_{F_2} は φ_{F_1} の定数倍であることが分かる. 特に, F_2 は F_1 の定数倍となる.

□

謝辞

代数学シンポジウムにおける講演の機会を下さった世話人の皆様に感謝いたします.

参考文献

[AJ87] J. Adams and J. F. Johnson, *Endoscopic groups and packets of nontempered representations. Compositio Math.* **64** (1987), no. 3, 271–309.

[AMR] N. Arancibia, C. Mœglin and D. Renard, *Paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires*, arXiv:1507.01432v2.

[Ar13] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: orthogonal and symplectic groups*, *American Mathematical Society Colloquium Pub-*

lications, **61**, 2013.

[CL19] G. Chenevier and H. Lannes, *Automorphic forms an even unimodular lattices*, to appear in *the Springer collection Ergebnisse* in 2019.

[M92] I. Miyawaki, *Numerical examples of Siegel cusp forms of degree* 3 *and their zeta-functions*, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* **46** (1992), no. 2, 307–339.

[Moe11a] C. Mœglin, *Multiplicité* 1 *dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques. On certain L-functions*, 333–374, Clay Math. Proc., **13**, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2011.

[Moe11b] C.Mœglin, *Image des opérateurs d'entrelacements normalisés eta pôles des séries d'Eisenstein*, *Adv. Math.* **228** (2011), no. 2, 1068–1134.

[MR] C. Mœglin and D. Renard, *Sur les paquets d'Arthur de* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ *contenant des modules unitaires de plus haut poids, scalaires*, arXiv:1802.04611v2.

[X] B. Xu, *On Mœglin's parametrization of Arthur packets for p-adic quasisplit* $\mathrm{Sp}(N)$ *and* $\mathrm{SO}(N)$. *Canad. J. Math.* **69** (2017), no. 4, 890–960.