中心電荷２４の正則頂点作用素代数の分類について

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東北大学大学院 情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター
Research Center for Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
e-mail: shimakura@tohoku.ac.jp

本稿では中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類に関する最近の進展について報告する。[注1]

1 背景

次は頂点作用素代数 (VOA) の研究当初からの基本的な問題の一つである.

- 中心電荷 24 の正則 VOA [注2]を分類せよ.

(有理的な) VOA V が正則とは, 既約加群が同型を除いて V のみ, である. (非自明な) 正則 VOA の中心電荷は 8 の正の倍数となることが知られており ([Zh96]), 中心電荷が 8, 16 の場合はユニモジュラ偶格子に付随する格子 VOA と同型となる ([DM04b]). したがって, 中心電荷 24 は考えるべき次の中心電荷である. ここで, (非同型な) 階数 32 のユニモジュラ偶格子は沢山あるため, (非同型な) 中心電荷 32 の正則 (格子) VOA も沢山あり, (通常の意味では) 分類するのは難しいことを注意しておく.

「中心電荷 24 の正則 VOA の分類問題」は「階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類問題」の類似と考えることができる. 階数 24 のユニモジュラ偶格子は Niemeier によって分類されており ([Ni73]), 丁度 24 個ある. これらは Niemeier 格子と呼ばれる. 一般に偶格子のノルム 2 のベクトルはルート系をなす. Niemeier 格子の構造はノルム 2 のベクトルがなすルート系から (同型の除いて) 一意的に決まることが知られている. すなわち, Niemeier 格子は ($\emptyset$ を含む) 24 個のルート系で特徴付けられる. そこで, 中心電荷 24 の正則 VOA でも同様な分類を行いたい.

[注1] 概説論文 [LS18b+] が出版予定である。

[注2] 本稿で扱う正則 VOA は有理的 (表現が完全可約), C_2-有限 ($V/\langle u_{(-2)}v \mid u,v\in V\rangle$ が有限次元), CFT 型 (V_0 が一次元), 自己双対 (V の contragredient 加群が V と同型) を仮定している.

偶格子におけるノルム 2 は (非自明な) 最小ノルム[注3]であることから, (CFT 型の) VOA の (非自明な) 最小共形重み[注4] である 1 の空間に着目する．一般に, (CFT 型の) VOA V の共形重み 1 の空間 V_1 には 0-積でリー代数構造が入り ([Bo86]), これがルート系に対応する構造だと考えられる．このリー代数構造を用いた「中心電荷 24 の正則 VOA の分類」の現状について報告する.

2　階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類について

この章では階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類の概略について述べる．詳細は [Eb02] を参照せよ.

Φ を階数 24 のユニモジュラ偶格子のノルム 2 のベクトルの成すルート系とすると、次が成立する.

- Φ の階数は 0 か 24.
- Φ の既約成分のルート系のコクセター数は (取り方によらず) $|\Phi|/24$.

Φ の既約成分のルート系は A, D, E 型であり, 上の性質を満たすルート系は (空集合も含めて) 24 通りであることがわかる．逆に, この 24 通りのルート系 Φ に対して, 丁度ノルム 2 のベクトルが Φ を成す階数 24 のユニモジュラ偶格子が丁度一つ存在する．実際に $\Phi \neq \emptyset$ であれば, Φ が生成するルート格子を (ルート系を大きくしないように) 拡大してユニモジュラ偶格子を構成でき, 同型を除いて一意的となる．ノルム 2 のベクトルを持たない階数 24 のユニモジュラ偶格子 L はノルム 8 のベクトルによる直交基底を持つことが $L/2L$ の代表元を考えることで確認でき, その正規直交基底を用いて L とリーチ格子と同型であることが示せる.

3　正則 VOA の重さ 1 の空間のリー代数構造

この章では中心電荷 24 の正則 VOA の重さ 1 の空間のリー代数構造の可能性について述べる.

V を中心電荷 24 の正則 VOA とする．V_1 には 0-積によってリー代数構造が入り, n-積によって V 上に affine 表現が定義される．そして [DM04b, DM06] (cf. [Sc93]) において次が示されている[注5].

- V_1 は半単純, 24 次元の abelian, 0 のいずれかになる.
- $V_1 \neq 0$ のとき, V_1 が生成する部分 VOA の共形元は　V の共形元と一致する.

[注3]ノルム 0 の零ベクトルを除くという意味.
[注4]真空ベクトルは共形重み 0 であるが, それで張られる部分空間の除く, という意味.
[注5]階数 24 のユニモジュラ偶格子のルート系の性質の類似と考えられる.

- V_1 が半単純のとき, V_1 の各単純イデアルに対して, レベル k は正の整数であり,
$$\frac{h^\vee}{k} = \frac{\dim V_1 - 24}{24}.$$
ただし, $h^\vee$ は双対コクセター数.

これらの条件と単純リー代数の分類を用いると, 221 通りの半単純リー代数の可能性が得られる. これに追加の条件[注6]を考えることで, 次が得られる ([Sc93, EMS18a+]).

- 中心電荷 24 の正則 VOA の重さ 1 の空間上の (レベル付) リー代数構造は 71 個[注7]のいずれかである.

これら 71 個のリー代数のリストは Schellekens のリストと呼ばれる ([Sc93]). 分類問題を解決するには, Schellekens のリストの各リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 次を示せばよい.

(I) $V_1 \cong \mathfrak{g}$ となるような中心電荷 24 の正則 VOA V の存在;

(II) $V_1 \cong \mathfrak{g}$ となる中心電荷 24 の正則 VOA V の一意性.

4 中心電荷 24 の正則 VOA の存在

この章では, 中心電荷 24 の正則 VOA の存在に関する結果を述べる.

最小ノルムが 2 である Niemeier 格子は, ノルム 2 のベクトルが生成するルート格子の拡大として得られる. この手法の VOA 類似は, 重さ 1 の空間のリー代数が生成する affine VOA の拡大としての中心電荷 24 の正則 VOA の構成である. 実際に, [Sc93] に affine VOA の加群としての既約分解の候補が一つ与えられている. しかしながら, この手法で VOA を構成するのは難しい. その理由は (格子 VOA の場合を除くと) 単純カレント拡大となっていないため, 一般論が十分に整備されていないことにある.[注8]

この困難を避ける方法として, 現状では $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法を用いた正則 VOA の構成が行われている.[注9] 大雑把に言うと, 既知の正則 VOA V と (ある種の仮定を満たす) 有限位数の自己同型 g に対して, その固定点として得られる部分 VOA V^g を別方向へ拡大して, (新しい) 正則 VOA $V^{\mathrm{orb}(g)}$ を構成する方法である. V^g の既約加群は全て単純カレントのため, $V^{\mathrm{orb}(g)}$ が V^g の単純カレント拡大となり, 既存の理論で扱うことが出来ることを注意しておく.

次が具体的な $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法[注10]である ([EMS18a+]).

注6 [EMS18a+] では V_2 への作用まで考えることで, 満たすべき追加の条件を得ている.

注7 モンスター単純群の位数の最大素因子が 71 である. もちろん, モンスター単純群はムーンシャイン VOA の自己同型群であり, ムーンシャイン VOA は中心電荷 24 の正則 VOA である. 何か 71 の繋がりがあるのだろうか?

注8 講演では非単純カレント拡大の理論が殆どないと言ったが, 実際には圏論を応用した理論 ([HKL15]) がある.

注9 格子における neighborhood の類似と思われる.

注10 中心電荷は 24 でなくてもよい.

(1) V を正則 VOA, g を V の有限位数 n の自己同型とする.

(2) $V^g = \{v \in V \mid g(v) = v\}$ は V の (共形元が同じ) 部分 VOA となる.

(3) 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して, 既約 g^i-twisted V-加群 $V(g^i)$ が一意的に存在する ([DLM00]).

(4) 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して, $V(g^i)$ の共形重み[注 11]が $(1/n)\mathbb{Z}_{>0}$ に入ると**仮定する**.[注 12]

(5) 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して, ある既約 V^g-部分加群[注 13] $\overline{V(g^i)} \subset V(g^i)$ で $V^{\mathrm{orb}(g)} := V^g \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \overline{V(g^i)}$ が正則 VOA となるものが存在する. さらに, $V^{\mathrm{orb}(g)}$ は V^g の $\mathbb{Z}_n$-graded な単純カレント拡大となる.

既知の正則 VOA から $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法を用いて新しい正則 VOA を構成することが個別に行われ ([Bo86, FLM88, DGM96, La11, LS12, Mi13, SS16, EMS18a+, LS16a, LS16b, LL]), 次が証明された.

- Schellekens のリストにあるリー代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 中心電荷 24 の正則 VOA V で $V_1 \cong \mathfrak{g}$ となるものが存在する.

構成から, どの二つの中心電荷 24 の正則 VOA も, (複数回の) $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法で結びつく事がわかる. しかしながら, 深い理解のためには, 次の問題を考えることが重要である.

- 中心電荷 24 の正則 VOA を統一的な方法で構成せよ.

最近, G. Höhn が提案したアプローチ ([Hö]) について簡単に紹介する. V を正則 VOA とし, $V_1 \neq 0$ とする. V_1 は reductive リー代数となるので ([DM04a]), カルタン部分代数 $\mathfrak{h} \subset V_1$ が取れる. そこで, $\mathfrak{h}$ の commutant $W = \mathrm{Comm}_V(\mathfrak{h})$ ([FZ92]) ともう一回の commutant $U = \mathrm{Comm}_V(W)$ を考えると, $\mathfrak{h} \subset U$ となる. さらに $U \otimes W \subset V$ であり, $U \otimes W$ と V は共形元を共有する. ここで, U が $\mathfrak{h}$ で生成されるハイゼンベルグ VOA の拡大となり, V が正則であることから, U は格子 VOA となる. さらに, U の既約加群は全て単純カレントであることから, ミラー拡大の理論 ([KM15, HKL15, Lin17]) を用いて, W の既約加群が全て単純カレントであることがわかる. したがって, V は $U \otimes W$ の単純カレント拡大となっている.[注 14]

ここで V の中心電荷を 24 とする. このとき, [Hö] では W がリーチ格子 Λ のある自己同型 f から得られる VOA $V_{\Lambda_f}^{\hat{f}}$ と同型であることが示唆されている. ここで $\Lambda_f =$

[注 11] $L(0)$ の作用で $V(g^i)$ に重みが入るが, その最小値

[注 12] この仮定を満たす g に対して $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法が適用できる.

[注 13] V^g-加群としては $V(g^i)$ は (通常) 加群となる

[注 14] ここまでは正則 VOA の仮定の下で得られる. しかしながら, 一般には W が何かわからないため, $U \otimes W$ を用いて V を調べるのが難しい. 中心電荷 24 の場合にこの方法を用いて研究できる理由は, W が別の方法で構成されたものと (結果的に) 同型となるからである.

$\Lambda \cap (\{v \in \Lambda \mid f(v) = v\})^{\perp}$ であり, $\hat{f}$ は f の V_{Λ_f} への持ち上げである. さらに f の共役類の可能性が 11 個挙げられている.

そこで, 実際にこれら 11 個の共役類に対して, $V_{\Lambda_f}^{\hat{f}}$ の性質を調べ, 対となる格子 VOA U を見つけることで, ($V_1 \neq 0$ である) 70 個の中心電荷 24 の正則 VOA が構成できることを確認した ([LS17, La])[注 15].

5 中心電荷 24 の正則 VOA の一意性

$V_1 = 0$ の場合は次の FLM 予想[注 16]がある ([FLM88]).

- 中心電荷 24 の正則 VOA V が $V_1 = 0$ を満たすならば, V はムーンシャイン VOA $V^{\natural}$ と同型.

次の仮定を加えた "弱" バージョンが証明されている.

- V_2 が $V_2^{\natural}$ と代数として同型 ([DGL07]).
- V が $L(1/2, 0)^{\otimes 48}$ を共通の共形元を持つ部分 VOA として持つ ([LY07]).
- V が $L(1/2, 0)^{\otimes 2}$ を部分 VOA として持つ ([ALY18]).

しかしながら, オリジナルの仮定である $V_1 = 0$ からは V_2 の構造について殆どわからない. 例えば $L(1/2, 0)$ が一つ含まれる事も示されていない.

ムーンシャイン VOA はリーチ格子 VOA から $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法を用いて構成された ([FLM88]). 同様なリーチ格子 VOA からの $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法を用いたムーンシャイン VOA の研究結果がある ([DM04a, Mi13, CLS18, ALY18, Ca18]). また, リーチ格子 VOA への $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法を用いないムーンシャイン VOA の構成も知られている ([Mi04, Cr]).

さて, $V_1 \neq 0$ の場合は一意性が証明されている ([DM94, LS15, LL, LS1, KLL18, EMS18b+, LS18a+, LS2]). すなわち, 次が成立する.

- 重さ 1 の空間が 0 でない中心電荷 24 の正則 VOA の構造はリー代数 V_1 の構造から一意的に決まる.

一意性の証明の殆どは以下で述べる [LS1] の議論を基にして証明されている: $\mathfrak{g}$ をリー代数, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の部分代数, W を中心電荷 c の正則 VOA, n を正の整数とする. 次を仮定する.

仮定 1: $V_1 \cong \mathfrak{g}$ を満たす任意の中心電荷 c の正則 VOA V に対して, $V^{\mathrm{orb}(\sigma)} \cong W$ と $V_1^{\sigma} \cong \mathfrak{p}$ を満たす位数 n の V の自己同型 σ が存在する.

[注 15] 11 通りの VOA W を用いて同様の手法で構成されており, より統一的な構成と言えるであろう.

[注 16] ルート系が $\emptyset$ の Niemeier 格子, すなわちリーチ格子, は同型を除いて一意的である ([Co69]). この予想はリーチ格子の一意性の VOA 類似と考えられる.

仮定 2: 次の条件を満たす位数 n の自己同型 $\psi \in \mathrm{Aut}W$ の共役類はただ一つである: $W_1^\psi \cong \mathfrak{p}$ かつ $(W^{\mathrm{orb}(\psi)})_1 \cong \mathfrak{g}$.

- 仮定 1 と 2 を満たすとする. このとき, $V_1 \cong \mathfrak{g}$ であるような任意の中心電荷 c の正則 VOA V は $W^{\mathrm{orb}(\psi)}$ と同型である. 特に, V の VOA 構造は $V_1 \cong \mathfrak{g}$ から一意的に決まる.

Proof. 仮定 1 から, $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法を V と σ に適用して $V_1^\sigma \cong \mathfrak{p}$ かつ $V^{\mathrm{orb}(\sigma)} \cong W$ が得られる. W は V^g の $\mathbb{Z}_n$-graded 単純カレント拡大なので, 次数付けに用いる $\mathbb{Z}_n$ の双対 $\mathbb{Z}_n^* \cong \mathbb{Z}_n$ が自己同型として作用する. この生成元 g は W の位数 n の自己同型である. さらに, W と g に $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法を用いると, 最初の $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法の逆を辿ることになるので, $W_1^g \cong \mathfrak{p}$ かつ $W^{\mathrm{orb}(g)} \cong V$ となる. 特に, $(W^{\mathrm{orb}(g)})_1 \cong \mathfrak{g}$ である. よって, 仮定 2 から, g は ψ と共役になり, $V \cong W^{\mathrm{orb}(g)} \cong W^{\mathrm{orb}(\psi)}$ を得る. □

この証明方法を W がリーチ格子 VOA V_Λ の場合に適用して, 次の結果を得た ([LS18a+]).

- 共形重み 1 の空間のリー代数構造が $A_{3,4}^3A_{1,2}$, $A_{4,5}^2$, $D_{4,12}A_{2,6}$, $A_{6,7}$, $A_{7,4}A_{1,1}^3$, $D_{5,8}A_{1,2}$ または $D_{6,5}A_{1,1}^2$ である正則 VOA は同型を除いて一意的である.[注 17]

この証明から, これら正則 VOA はリーチ格子 VOA から $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法で得られることがわかる. ただし, $A_{6,7}$ の場合は既に V_Λ から $\mathbb{Z}_7$-軌道体構成法で構成されている ([LS16b]). したがって, 次の問題が得られる.

- リーチ格子 VOA と適切な自己同型に軌道体構成法を適用して, 全ての中心電荷 24 の正則 VOA を構成せよ.[注 18]

- さらに, この構成法を用いて一意性を証明せよ.[注 19]

6 終わりに

ここ数年の進展によって, 中心電荷 24 の正則 VOA の分類問題がほぼ解決され, 残された問題はムーンシャイン VOA の特徴付けである FLM 予想だけとなった. より深い理解のために, さらなる研究が進んでいる.

謝辞 講演の機会を与えてくださった世話人の先生方に感謝します. また, 講演後に質問とコメントをくださった田邊顕一朗氏, 佐垣大輔氏, 山田裕理氏に感謝します.

[注 17] $X_{n,k}$ は X_n 型の単純リー代数でレベルが k を意味する.

[注 18] 構成は概ね完成したようである. そこで用いるリーチ格子 VOA の自己同型は内部自己同型とリーチ格子の自己同型の持ち上げの積の形でかけるが, そのリーチ格子の自己同型は 4 章の最後で述べた 11 通りの共役類に属するものである.

[注 19] 構成で用いる自己同型の位数がかなり大きい場合 (40 前後まで) があり, その場合は仮定 2 を確認することが困難である. したがって, 別の議論を考える必要がある. 参考までに [LS18a+] で仮定 2 を確認したリーチ格子 VOA の自己同型の位数は高々 10 である.

参考文献

[ALY18] T. Abe, C.H. Lam and H. Yamada, Abe, Toshiyuki; Lam, Ching Hung; Yamada, Hiromichi; On $\mathbb{Z}_p$-orbifold constructions of the Moonshine vertex operator algebra, *Math. Z.* **290** (2018), 683-—697.

[Bo86] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.

[Ca18] S. Carnahan, 51 constructions of the Moonshine module, *Commun. Number Theory Phys.* **12** (2018), 305–334.

[CLS18] H.Y. Chen, C.H. Lam and H. Shimakura, $\mathbb{Z}_3$-orbifold construction of the Moonshine vertex operator algebra and some maximal 3-local subgroups of the Monster, *Math. Z.* **288** (2018), 75–100.

[Co69] J.H. Conway, A characterisation of Leech's lattice, *Invent. Math.* **7** (1969) 137–142.

[Cr] T. Creutzig, Lecture note for Mini-course in Kyoto 2018.

[DGM96] L. Dolan, P. Goddard and P. Montague, Conformal field theories, representations and lattice constructions, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 61–120.

[DGL07] C. Dong, R.L. Griess and C.H. Lam, Uniqueness results for the moonshine vertex operator algebra, *Amer. J. Math.* **129** (2007), 583–609.

[DM94] C. Dong and G. Mason, The construction of the moonshine module as a Z_p-orbifold, *in* Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups (South Hadley, MA, 1992), *Contemp. Math.*, **175**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 37–52.

[DLM00] C. Dong, H. Li, and G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 1–56.

[DM04a] C. Dong and G. Mason, Rational vertex operator algebras and the effective central charge, *Int. Math. Res. Not.* (2004), 2989–3008.

[DM04b] C. Dong and G. Mason, Holomorphic vertex operator algebras of small central charge, *Pacific J. Math.* **213** (2004), 253–266.

[DM06] C. Dong and G. Mason, Integrability of C_2-cofinite vertex operator algebras. *Int. Math. Res. Not.* (2006), Art. ID 80468, 15 pp.

[Eb02] W. Ebeling, Lattices and codes, A course partially based on lectures by F. Hirzebruch. Second revised edition. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2002.

[EMS18a+] J. van Ekeren, S. Möller and N. Scheithauer, Construction and classification of holomorphic vertex operator algebras, *J. Reine Angew. Math.* (Published Online).

[EMS18b+] J. van Ekeren, S. Möller and N. Scheithauer, Dimension Formulae in Genus Zero and Uniqueness of Vertex Operator Algebras, *Internat. Math. Res. Notices* (Published Online).

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.

[FZ92] I. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.

[Hö] G. Höhn, On the Genus of the Moonshine Module; arXiv:1708.05990.

[HKL15] Y. Huang, A. Kirillov, and J. Lepowsky, Braided tensor categories and extensions of vertex operator algebras, *Comm. Math. Phys.* **337** (2015), 1143–1159.

[KLL18] K. Kawasetsu, C.H. Lam and X. Lin, $\mathbb{Z}_2$-orbifold construction associated with (-1)-isometry and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24. *Proc. Amer. Math. Soc.* **146** (2018), 1937-—1950.

[KM15] M. Krauel and M. Miyamoto, A modular invariance property of multivariable trace functions for regular vertex operator algebras, *J. Algebra* **444** (2015), 124–142.

[La11] C.H Lam, On the constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 153–198

[La] C.H. Lam, Orbifold vertex operator algebras associated with coinvariant lattices of Leech lattice; arXiv:1805.10778.

[LL] C.H. Lam and X. Lin, A holomorphic vertex operator algebra of central charge 24 with weight one Lie algebra $F_{4,6}A_{2,2}$, arXiv:1612.08123.

[LS12] C.H. Lam and H. Shimakura, Quadratic spaces and holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Proc. Lond. Math. Soc.* **104** (2012), 540–576.

[LS15] C.H. Lam and H. Shimakura, Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Amer. J. Math.* **137** (2015), 111–137.

[LS16a] C.H. Lam and H. Shimakura, Orbifold construction of holomorphic vertex operator algebras associated to inner automorphisms, *Comm. Math. Phys.* **342** (2016), 803–841.

[LS16b] C.H. Lam and H. Shimakura, A holomorphic vertex operator algebra of central charge 24 whose weight one Lie algebra has type $A_{6,7}$, *Lett. Math. Phys.* **106** (2016), 1575–1585.

[LS17] C.H. Lam and H. Shimakura, Construction of Holomorphic Vertex Operator Algebras of Central Charge 24 Using the Leech Lattice and Level p Lattices, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* **12** (2017) 39–70.

[LS18a+] C.H. Lam and H. Shimakura, On orbifold constructions associated with the Leech lattice vertex operator algebra, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* (Published Online).

[LS18b+] C.H. Lam and H. Shimakura, 71 holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* (to appear).

[LS1] C.H. Lam and H. Shimakura, Reverse orbifold construction and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras; arXiv:1606.08979.

[LS2] C.H. Lam and H. Shimakura, Inertia groups and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras; arXiv:1804.02521.

[LY07] C.H. Lam and H. Yamauchi, A characterization of the moonshine vertex operator algebra by means of Virasoro frames, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2007**, Art. ID rnm003, 10 pp.

[Lin17] X. Lin, Mirror extensions of rational vertex operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017) 3821–3840.

[Mi04] M. Miyamoto, A new construction of the Moonshine vertex operator algebra over the real number field, *Ann. of Math.* **159** (2004), 535–596.

[Mi13] M. Miyamoto, A $\mathbb{Z}_3$-orbifold theory of lattice vertex operator algebra and $\mathbb{Z}_3$-orbifold constructions, *in* Symmetries, integrable systems and representations, 319–344, *Springer Proc. Math. Stat.* **40**, Springer, Heidelberg, 2013.

[Ni73] H.V. Niemeier, Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante 1, *J. Number Theory* **5** (1973), 142–178.

[SS16] D. Sagaki and H. Shimakura, Application of a $\mathbb{Z}_3$-orbifold construction to the lattice vertex operator algebras associated to Niemeier lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), 1621–1646.

[Sc93] A.N. Schellekens, Meromorphic $c = 24$ conformal field theories, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993), 159–185.

[Zh96] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.