距離正則グラフの Terwilliger 代数の拡張について*

田中 太初
東北大学大学院情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター

1 序

本稿で論じる **Q-多項式距離正則グラフ**は、有限古典群の等質空間となる例を数多く含む非常に豊かな研究対象である。特に、これらのグラフの持つ代数的性質が 1 変数 (q-) 超幾何直交多項式の階層である **Askey スキーム** [22, 23] を特徴付けることが 1982 年に Leonard [27] により示されている。この結果を受けて 1984 年の坂内–伊藤の本 [3] では、「Q-多項式距離正則グラフを全て決定する」という大きな目標が提示された。この目標は現在でもまだ達成されてはいないが、これまでに様々な飛躍的進展があった。これらの成果を概説した文献としては、[3] に加えて [1, 4, 10] を挙げる。

代数的グラフ理論ではグラフの隣接代数を考察する。これはグラフの隣接行列で生成される ($\mathbb{C}$ 上) 全行列環の可換部分代数であり、グラフの大域的な性質を反映する。これに対して Terwilliger [41, 42, 43] は、グラフの各頂点について現在 **Terwilliger 代数**と呼ばれる非可換半単純行列代数を導入した。Q-多項式距離正則グラフの場合には、Terwilliger 代数は隣接行列、及び固定した頂点に応じて定まる「双対隣接行列」により生成され、グラフの局所的構造を良く反映する。また、ここでは詳しくは述べないが、隣接行列と双対隣接行列は Terwilliger 代数の各既約加群上に所謂**三重対角対** [19] として作用する。三重対角対については、アフィン量子代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現論と絡んだ非常に深い理論が構築されており ([18, 20] 等を参照)、今後これらの成果を Q-多項式距離正則グラフの構造の研究に順次応用していくことになる。

非同形な Q-多項式距離正則グラフの組で (構造定数まで込めて) 隣接代数が同形となるものは、多くの無限系列が存在する。Terwilliger 代数は隣接代数より遥かに多くの情報を含むものの、Terwilliger 代数のレベルでも区別できない Q-多項式距離正則グラフの組もまた、二部グラフの場合に無限系列が知られている。Terwilliger 代数を一般化した代数として、鈴木 [33] は頂点ではなく、各「頂点部分集合」に対する「Terwilliger 代数」を導入した。本稿では、頂点部分集合として適切なものを選ぶことにより、Q-多項式距離正則グラフの (頂点に対する) Terwilliger 代数の理論が、三重対角対との関連も含めてほぼそのまま一般化できることを紹介する。

---

*本稿の内容は田中利恵氏及び渡邊悠太氏との準備中の論文 [39] に基づく。

2　Q-多項式距離正則グラフとその Terwilliger 代数

本稿を通して、$\Gamma = (X, R)$ は連結有限単純グラフとする。ここで X は頂点集合、R は辺集合であり、各辺は X の 2 点部分集合である。隣接した 2 頂点間の距離を 1 として、X 上に自然に距離 ∂ が定まる。グラフの**直径** D を

$$D := \max\{\partial(x, y) : x, y \in X\}$$

とし、各頂点 $x \in X$ に対して

$$\Gamma_i(x) := \{y \in X : \partial(x, y) = i\} \quad (0 \leqslant i \leqslant D)$$

とおく。次の性質を満たす整数 a_i, b_i, c_i $(0 \leqslant i \leqslant D)$ が存在するとき、Γ を**距離正則グラフ**と呼ぶ：

$\partial(x, y) = i$ を満たす全ての $x, y \in X$ について

$$|\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma_1(y)| = c_i, \quad |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_1(y)| = a_i, \quad |\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma_1(y)| = b_i$$

が成り立つ。

これは組合せ的な定義であるが、X がグラフの自己同型群 $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ の 2 点等質空間となっているとき、すなわち

$$\partial(x, y) = \partial(x', y') \iff \exists g \in \mathrm{Aut}\,\Gamma \ \text{ s.t. } \ x' = gx, \ y' = gy$$

が成り立つときには明らかに満たされる (この場合特に**距離可移グラフ**と呼ぶ)。距離正則グラフは常に正則グラフであり、その次数 k は

$$k = b_0 = |\Gamma_1(x)|$$

で与えられる。また、次を距離正則グラフ Γ の**交叉列**と呼ぶ：

$$\iota(\Gamma) := \{b_0, b_1, \ldots, b_{D-1}; c_1, c_2, \ldots, c_D\}$$

ここで、等式 $a_i + b_i + c_i = k$ によって交叉列から a_i 達が復元できることに注意する。

例 1. $X = \{0, 1\}^D$ とし、2 頂点 $x = (x_1, \ldots, x_D), y = (y_1, \ldots, y_D) \in X$ は 1 ヶ所だけ異なっているときに辺で結ばれるとしてグラフ Γ を定めると、Γ は距離正則グラフとなる。このグラフを $\Gamma = \mathcal{Q}_D$ と表し、D 次元**超立方体**と呼ぶ。$\mathcal{Q}_D$ は実際距離可移グラフであり、B 型 Weyl 群 $\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_D$ が作用する。また、交叉列は次で与えられる：

$$\iota(\mathcal{Q}_D) = \{D, \ldots, 2, 1; 1, 2, \ldots, D\}$$

なお、$\mathcal{Q}_{D-1}$ は誘導部分グラフとして自然に $\mathcal{Q}_D$ に埋め込まれることに注意する：

$$\mathcal{Q}_1 \hookrightarrow \mathcal{Q}_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{Q}_{D-1} \hookrightarrow \mathcal{Q}_D \hookrightarrow \cdots$$

仮定 2. 以後、Γ は常に距離正則グラフとする。

行と列が頂点集合 X で添え字付けされた $\mathbb{C}$ 上の行列全体の集合 ($\mathbb{C}$-代数) を $\mathbb{C}^{X\times X}$ と書く。Γ の第 i **距離行列** $A_i \in \mathbb{C}^{X\times X}$ を次で定める：

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ \partial(x,y) = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (x, y \in X)$$

特に、$A_0 = I$ (単位行列) である。また、A_1 は Γ の通常の隣接行列であり、

$$A := A_1$$

と略記する。距離正則グラフの定義の代数的な意味は以下の通りである：

$$A \cdot A_i = b_{i-1}A_{i-1} + a_iA_i + c_{i+1}A_{i+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant D) \tag{1}$$

ただし $A_{-1} = A_{D+1} := 0$ である。Γ の隣接代数を

$$\boldsymbol{A} := \mathbb{C}[A] \subset \mathbb{C}^{X\times X}$$

と書くことにすると、上の 3 項漸化式により $\boldsymbol{A}$ は部分空間として

$$\boldsymbol{A} = \langle A_0, A_1, \ldots, A_D \rangle$$

と表される。特に、隣接行列 A は丁度 $D+1$ 個の異なる固有値

$$\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_D \in \mathbb{R}$$

を持つことが分かる。また、基底 $A_0, A_1, \ldots, A_D$ に関する $\boldsymbol{A}$ の構造定数は交叉列 $\iota(\Gamma)$ によって完全に決定されることに注意する。Γ の次数 k は常に A の固有値であり、以後常に

$$\theta_0 = k$$

とおく。固有値 θ_ℓ に関する A の固有空間への直交射影を $E_\ell \in \mathbb{C}^{X\times X}$ と表す。なお、$J \in \mathbb{C}^{X\times X}$ を全ての成分が 1 の行列とすると、$E_0 = |X|^{-1}J$ となる。これら $D+1$ 個の直交射影 $E_0, E_1, \ldots, E_D$ は隣接代数 $\boldsymbol{A}$ の (中心) 原始冪等元である：

$$\boldsymbol{A} = \langle E_0, E_1, \ldots, E_D \rangle$$

補足 3. Γ が距離可移グラフのときは、$\boldsymbol{A}$ は $\operatorname{Aut}\Gamma$ の X 上の置換表現の中心化代数と一致する。また、この場合置換表現は無重複であり、隣接行列 A の各固有空間は $\operatorname{Aut}\Gamma$ の既約表現を提供する。

次の性質を満たす実数 $a^*_\ell, b^*_\ell, c^*_\ell$ $(0 \leqslant \ell \leqslant D)$ が存在するとき、Γ は順序 $\{E_\ell\}_{\ell=0}^D$ (もしくは $\{\theta_\ell\}_{\ell=0}^D$) に関して **$Q$-多項式**であるという：

$b^*_{\ell-1}c^*_\ell \neq 0$ $(1 \leqslant \ell \leqslant D)$ かつ

$$|X|\, E_1 \circ E_\ell = b^*_{\ell-1}E_{\ell-1} + a^*_\ell E_\ell + c^*_{\ell+1}E_{\ell+1} \quad (0 \leqslant \ell \leqslant D) \tag{2}$$

が成り立つ。ただし $E_{-1} = E_{D+1} := 0$ であり、$\circ$ は成分ごとの積を表す。

これは 1973 年に Delsarte [11] により導入された極めて重要な概念であり、これによって Delsarte は符号と組合せデザインを双対的な対象として統一的に議論することに成功したのである。この「Delsarte 理論」の最近の進展に関しては [1, 12, 29] 等を参照されたい。なお、$E_1 \circ E_\ell$ は $E_1 \otimes E_\ell$ の主小行列であり、従って半正定値であることから、$a_\ell^*, b_\ell^*, c_\ell^*$ 達は全て非負であることが分かる (**Krein 条件**)。

例 4. 超立方体 $\Gamma = \mathcal{Q}_D$ は降順 $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_D$ に関して Q-多項式である。

補足 5. 実際 $\mathcal{Q}_D$ は、$\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_D$ としたときに順序 $\theta_0, \theta_{D-1}, \theta_2, \theta_{D-3}, \ldots$ に関しても Q-多項式となる。一般に、サイクルを除く (すなわち $k \geqslant 3$ となる) 距離正則グラフは、Q-多項式となる固有値の順序を高々二つしか持たないことが知られている [13, 32]。

仮定 6. 以後、Γ は常に順序 $\{E_\ell\}_{\ell=0}^D$ に関して Q-多項式であるとする。

3 項漸化式 (1), (2) から二組の 1 変数直交多項式系 $\{f_i\}_{i=0}^D$, $\{f_\ell^*\}_{\ell=0}^D$ が得られるが、冒頭で述べたように次の結果が知られている：

定理 7 (Leonard [27], Bannai–Ito [3])**.** *The f_i and the f_ℓ^* belong to the Askey scheme.*

Leonard [27] はパラメータ q が ± 1 と異なる場合を主に考察して Askey scheme の最上位 (${}_4\phi_3$) に位置する Askey–Wilson 多項式 (もしくは q-Racah 多項式) を捉えたが、$q = \pm 1$ の場合も含めた極限等の詳細な考察は [3] で成された。$q = -1$ のときの直交多項式 $\{f_i\}_{i=0}^D$, $\{f_\ell^*\}_{\ell=0}^D$ は現在**坂内–伊藤多項式**と呼ばれ、Vinet や Zhedanov 等により近年活発に研究されている ([16] 等を参照)。

次に、Terwilliger 代数 [41, 42, 43] の定義を述べる。以下、頂点 $x \in X$ を一つ固定し、第 i **双対冪等元** $E_i^* = E_i^*(x) \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を次で定める：

$$(E_i^*)_{y,z} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ y = z \in \Gamma_i(x) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (y, z \in X)$$

頂点 x に関する **Terwilliger 代数** $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(x)$ は、隣接行列 A と双対冪等元 $E_0^*, E_1^*, \ldots, E_D^*$ で生成される $\mathbb{C}^{X \times X}$ の部分代数である：

$$\boldsymbol{T} := \mathbb{C}[A, E_0^*, E_1^*, \ldots, E_D^*] \subset \mathbb{C}^{X \times X}$$

補足 8. Γ が距離可移グラフのときは、$\boldsymbol{T}$ は $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ に於ける x の固定部分群の X 上の置換表現の中心化代数の部分代数である。$\mathcal{Q}_D$ を含むいくつかの主要な無限系列について、これら二つの代数が実際一致することが示されている ([17, 34] 等)。

$\boldsymbol{T}$ の定義は距離正則グラフとは限らない一般のグラフに対しても意味をなすが、仮定 2, 6 の下で、さらに**双対隣接行列** $A^* = A^*(x) \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を導入する：

$$(A^*)_{y,z} = \begin{cases} |X|(E_1)_{x,y} & \text{if } \ y = z \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (y, z \in X)$$

このとき、次が成り立つ：

補題 9. *The Terwilliger algebra $\boldsymbol{T}$ is generated by A and A^*, i.e.,*

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{C}[A, A^*].$$

Proof. 隣接代数 $\boldsymbol{A}$ が $E_0, E_1, \dots, E_D^*$ を線形基底に持つことに注意すると、3 項漸化式 (2) より距離行列 $A_0, A_1, \dots, A_D$ 達は $|X|E_1$ の $\circ$ に関する多項式で書けることが分かる。これらの行列の等式の第 x 列を取り出して対角行列を作ると、$E_0^*, E_1^*, \dots, E_D^*$ を A^* の (通常の積に関する) 多項式として表す等式になる。 □

系 10. *The matrices A and A^* act on each irreducible $\boldsymbol{T}$-module as a tridiagonal pair.*

ここで、有限次元ベクトル空間 $V = \mathbb{C}^n$ 上の対角化可能な線形変換 A, A^* は、以下を満たす A の固有空間の順序 $\{V_\ell\}_{\ell=0}^d$ と A^* の固有空間の順序 $\{V_i^*\}_{i=0}^{d^*}$ が存在するときに**三重対角対**と呼ばれる [19]：

V は $\mathbb{C}[\mathsf{A}, \mathsf{A}^*]$-加群として既約であり、各 $0 \leqslant i \leqslant d^*$ と $0 \leqslant \ell \leqslant d$ に対して

$$\mathsf{A}V_i^* \subset V_{i-1}^* + V_i^* + V_{i+1}^*, \qquad \mathsf{A}^*V_\ell \subset V_{\ell-1} + V_\ell + V_{\ell+1} \tag{3}$$

が成り立つ。ただし $V_{-1} = V_{d+1} = V_{-1}^* = V_{d^*+1}^* := 0$ である。

系 10 では、条件 (3) はもちろん 3 項漸化式 (1), (2) から直ちに従うのである。いずれにせよ、系 10 は Q-多項式距離正則グラフとその Terwilliger 代数の定義から直接的に導かれるほぼ自明な結果であることを強調したい。

三重対角対の分類はパラメータ q が 1 の冪根でない場合には既に完成している [18, 20]。また、Terwilliger 代数の表現論を用いた Q-多項式距離正則グラフの構造の研究もこれまでに多く成されている。例えば、Q-多項式距離正則二部グラフについては、Caughman [7] が $D \geqslant 12$ の場合に交叉列を (ほぼ) 決定した。この結果は最近 Miklavič [30] により $D \geqslant 9$ まで拡張されている。また、所謂**擬分割グラフ**の分類が Gavrilyuk–Koolen [14] により完成された。彼らはある種の既約 $\boldsymbol{T}$-加群に付随する **Terwilliger 多項式**と呼ばれる次数 4 の多項式の性質を巧妙に用いたのであるが、この手法は最近他のクラスの Q-多項式距離正則グラフに対しても大きな成果を上げている [15]。

3 Q-多項式距離正則二部グラフの辺に関する Terwilliger 代数

前節では Q-多項式距離正則グラフとその Terwilliger 代数に関する基本的な事項を述べた。特に、Q-多項式距離正則二部グラフに関する前述の Caughman [7] の強力な結果は、これらのグラフの Terwilliger 代数の既約加群に関する彼自身の研究 [6] に基づいているが、一方で [6] を吟味すると、実際 Q-多項式距離正則二部グラフについては、既約 $\boldsymbol{T}$-加群の標準加群 $\mathbb{C}^X$ に於ける重複度や、現れる三重対角対の型まで込めて、$\boldsymbol{T}$ の構造が完全に交叉列によって決まってしまうことが分かる。このような特殊な状況になっているからこそ交叉列の決定が可能となったとも言えるが、このクラスのグラフの分類の完成を目指す上で、道具が $\boldsymbol{T}$ だけでは足りないことをこの事実は意味している。

超立方体 $\mathcal{Q}_D$ は二部グラフであるが、他の無限系列として、D 型の直交群 $\mathrm{PGO}^+_{2D}(\mathbb{F}_q)$ の等質空間となる**二部双対極グラフ**と呼ばれる距離可移グラフがある。二部双対極グラフと同じ交叉列を持つ例として **Hemmeter グラフ**の系列があるが、これらは距離可移グラフではない。Hemmeter グラフ以外に同じ交叉列を持つ Q-多項式距離正則二部グラフを特定することが目下の目標である。

仮定 11. 以後、本節では Γ はさらに二部グラフであるとする。

上記の目標に取り組む上で、頂点に関する通常の Terwilliger 代数 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(x)$ では二部双対極グラフと (例えば) Hemmeter グラフを区別できないので、新たな代数を導入する。辺 $e \in R$ を固定し、

$$\Gamma_i(e) := \{y \in X : \partial(e, y) = i\} \quad (0 \leqslant i \leqslant D-1)$$

とおく。ちなみに、Γ が二部グラフであることから 3 辺の長さが $1, D, D$ となる三角形は存在しないので、$\Gamma_D = \emptyset$ である。頂点の場合と同様に、第 i **双対冪等元** $E^*_i = E^*_i(e) \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を次で定める：

$$(E^*_i)_{y,z} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ y = z \in \Gamma_i(e) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (y, z \in X)$$

辺 e に関する **Terwilliger 代数** $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(e)$ は、隣接行列 A と双対冪等元 $E^*_0, E^*_1, \ldots, E^*_{D-1}$ で生成される $\mathbb{C}^{X \times X}$ の部分代数である：

$$\boldsymbol{T} := \mathbb{C}[A, E^*_0, E^*_1, \ldots, E^*_{D-1}] \subset \mathbb{C}^{X \times X}$$

さらに、**双対隣接行列** $A^* = A^*(e) \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を

$$A^* = \frac{1}{2} \sum_{x \in e} A^*(x)$$

と定めると、次が示される：

定理 12. *The Terwilliger algebra $\boldsymbol{T}$ is generated by A and A^*, i.e.,*

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{C}[A, A^*],$$

unless $\Gamma = \mathcal{Q}_D$ and the Q-polynomial ordering is the one described in Remark 5.

系 13. *The matrices A and A^* act on each irreducible $\boldsymbol{T}$-module as a tridiagonal pair unless Γ is the above exception.*

主張に例外が存在し、かつ特定されていることからも推察されるように、これらは定理 9 や系 10 とは異なり全くもって非自明な結果であり、Leonard の定理 (定理 7) を線形代数学の立場から再構成した概念である **Leonard 対** [44, 45, 46] の理論を用いて証明される [36, 37]。なお、上記の例外は Askey スキームに於けるパラメータ $q = -1$ の場合に該当する。このような Q-多項式距離正則グラフは Terwilliger [40] により 3 種類の無限系列に限ることが示されており、その中で二部グラフである系列は例外に挙げた 1 種類のみである

(講演では例外を 2 種類としたが、誤りである)。ちなみに、Leonard 対は実際、三重対角対で固有空間 V_ℓ, V_i^* 達の次元が全て 1 となる場合である。

二部双対極グラフの自己同型群は辺集合 R 上に可移に作用するが、Hemmeter グラフの場合は二つの軌道に分かれる。従って Hemmeter グラフの場合、$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(e)$ の構造は e をどちらの軌道から取るかに依存する。実は、これと類似の状況は前節に議論した頂点の場合にも見出される。すなわち、**Grassmann グラフ**の系列 (の特別な場合) と、Van Dam と Koolen [9] により 2005 年に発見された**捻れ Grassmann グラフ**の系列は同じ交叉列を持つが、前者の自己同型群は頂点集合 X 上に可移に作用する一方、後者の場合は二つの軌道に分かれる。Bang–Fujisaki–Koolen [2] は、頂点に関する捻れ Grassmann グラフの Terwilliger 代数 $\boldsymbol{T}(x)$ の構造が x の含まれる軌道によって著しく異なることを示している。

ここで、$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(e)$ に関する結果を一つ紹介したい。

仮定 14. 以後、本節では Γ は定理 25 の例外ではないとする。すなわち、$\Gamma = \mathcal{Q}_D$ の場合については、Q-多項式となる固有値の順序としては常に $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_D$ を考える。

W を既約 $\boldsymbol{T}$-加群とする。

補題 15. *There exist non-negative integers $\varepsilon, \varepsilon^*$, and d such that*

$$\{i : E_i^* W \neq 0\} = \{\varepsilon, \varepsilon+1, \ldots, \varepsilon+d\}, \quad \{\ell : E_\ell W \neq 0\} = \{\varepsilon^*, \varepsilon^*+1, \ldots, \varepsilon^*+d\}.$$

これら三つのパラメータに関して、例えば次のような定理が証明される：

定理 16. *We have $2\varepsilon + d \geqslant D - 1$. Moreover, if equality holds then we have*

$$\dim E_i^* W = 1 \quad (\varepsilon \leqslant i \leqslant \varepsilon + d), \qquad \dim E_\ell W = 1 \quad (\varepsilon^* \leqslant \ell \leqslant \varepsilon^* + d),$$

and the structure of W is determined by $\iota(\Gamma)$, ε, and ε^*.

この定理は [6, 41, 42] の結果の一部に対応するものであるが、前節で述べた Terwilliger 多項式の理論もまた $\boldsymbol{T}(e)$ の場合に移植される。これらの道具を駆使して Q-多項式距離正則二部グラフの構造の解析を押し進めることを目論んでいるのであるが、本節の残りでは、二部グラフの場合の $\boldsymbol{T}(e)$ の理論と一般の場合の $\boldsymbol{T}(x)$ の理論との類似を示す好例をもう一つ紹介したい。

Q-多項式距離正則二部グラフの場合は $\boldsymbol{T}(x)$ の構造が交叉列によって完全に決まってしまうことを述べたが、他の種々の観点からもこのクラスは Q-多項式距離正則グラフ全体の中で特殊だと言える。一方、Q-多項式距離正則二部グラフの中でも、**2-等質グラフ**と呼ばれる同様に特殊なクラスがある。すなわち、下記の類似が成り立つ：

Q-多項式距離正則グラフ ⊃ Q-多項式距離正則二部グラフ	$\longleftrightarrow$	Q-多項式距離正則二部グラフ ⊃ 2-等質距離正則二部グラフ

この類似は例えば [21, 28] 等に見出される。なおここで、次の性質を満たす整数 $p_{i,j;r,s}$ $(0 \leqslant i, j, r, s \leqslant D)$ が存在するとき、Γ は 2-等質であるという：

$\partial(x,y)=2$ を満たす全ての $x,y\in X$ について

$$|\Gamma(z)\cap\Gamma_r(x)\cap\Gamma_s(y)|=p_{i,j;r,s}$$

が任意の $z\in\Gamma_i(x)\cap\Gamma_j(y)$ に対して成り立つ。

この定義は一見複雑であるが、次が成立する：

定理 17 (Curtin [8])**.** *A bipartite distance-regular graph is 2-homogeneous if and only if it is Q-polynomial and antipodal.*

Γ が**対蹠的**であるとは、(仮定 6 の下では) $\Gamma_D(x)=1$、すなわち各頂点に対して最も遠い頂点が一意的に定まることである。2-等質グラフは結び目の不変量を与える**スピンモデル**の研究から生じた概念であり、$D=5$ の場合を除き既に分類されている：

定理 18 (Nomura [31])**.** *If Γ is 2-homogeneous then Γ is one of the following: (i) the D-cube $\mathcal{Q}_D$; (ii) the complete bipartite graph $K_{k,k}$ minus a perfect matching $(D=3)$; (iii) a Hadamard graph $(D=4)$; (iv) $D=5$ and*

$$(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)=(1,\mu,k-\mu,k-1,k),\quad b_i=c_{5-i}\quad(0\leqslant i\leqslant 4),$$

where $k=t(t^2+3t+1)$*,* $\mu=t(t+1)$*, and* $2\leqslant t\in\mathbb{Z}$*.*

前述の Caughman [6] の結果の類似として、次の結果が成り立つ：

定理 19. *If Γ is 2-homogeneous, then $\iota(\Gamma)$ determines the structure of $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(e)$.*

4 Q-多項式距離正則グラフの子孫に関する Terwilliger 代数

前節では Q-多項式距離正則二部グラフの辺に関する Terwilliger 代数を考察したが、実際準備中の論文 [39] ではより一般的な状況で理論を展開しており、前節の内容はその特殊 (ただし重要な) ケースである。本稿では最後にこの一般論について簡単に紹介する。以下では Γ は特に二部グラフとは仮定しない。

$Y\subset X$ を空でない頂点部分集合とし、$\chi\in\mathbb{C}^X$ をその**特性ベクトル**とする：

$$\chi_z=\begin{cases}1 & \text{if}\ \ z\in Y\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad(z\in X)$$

Y の**幅** w 及び**双対幅** w^* を次で定める [5]：

$$w=\max\{i:\chi^{\mathsf{T}}A_i\chi\neq 0\},\quad w^*=\max\{\ell:\chi^{\mathsf{T}}E_\ell\chi\neq 0\}$$

幅 w は Y の 2 頂点間の距離の最大値である。一方、双対幅 w^* の意味は分かり難いかもしれないが、このように隣接行列 $A_0,A_1,\ldots,A_D$ と原始冪等元 $E_0,E_1,\ldots,E_D$ を双対的な対象と捉えることが、Delsarte 理論 [11] の成功の鍵であった。パラメータ w と w^* に関する Brouwer–Godsil–Koolen–Martin [5] の理論は Delsarte 理論とある意味で対を成すものである。また、前節と同様にして Y に関する Terwilliger 代数 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(Y)$ が定義できるが、Brouwer 達の理論で w にまつわる部分については、鈴木 [33] によって $\boldsymbol{T}(Y)$ の既約加群の観点からさらに一般化されている。以下は Brouwer 達の主結果の一つである：

定理 20 (Brouwer et al. [5]). *We have $w + w^* \geqslant D$.*

この定理で等号が成立する場合に Y が様々な良い性質を持つことも示されている。次はその一例である：

定理 21 (Brouwer et al. [5], T. [37]). *If $w + w^* = D$, then the subgraph induced on Y is a Q-polynomial distance-regular graph with diameter w, with at most three exceptions of Γ for given D and w.*

Brouwer 達は $w + w^* = D$ かつ誘導部分グラフが連結であれば上の結論が得られることを示したが、[37] で筆者は誘導部分グラフが連結でなくなるような Γ の例が各 D と w について高々三つであることを証明したのである。これらの例外はやはり Askey スキームに於けるパラメータ $q = -1$ の場合に該当する。この定理を念頭に置き、$w + w^* = D$ を満たす Y を Γ の**子孫**と呼ぶことにする。

例 22. 一点集合 $\{x\}$ は常に Γ の子孫である ($w = 0$)。

例 23. Γ が二部グラフならば、任意の辺 $e \in R$ は Γ の子孫である ($w = 1$)。

例 24. $\Gamma = \mathcal{Q}_D$ のとき、各 $0 \leqslant i \leqslant D$ に対して $\mathcal{Q}_i \subset \mathcal{Q}_D$ は子孫である ($w = i$)。

子孫の概念は非常に本質的であり、極値集合論で有名な **Erdős–Ko–Rado の定理**の一般化等でも重要な役割を果たす [35, 38]。子孫の構造等に関する詳細については [37] を参照されたい。Γ の子孫 Y に対して、双対隣接行列 $A^* = A^*(Y) \in \mathbb{C}^{X \times X}$ を

$$A^* = \frac{1}{|Y|} \sum_{x \in Y} A^*(x)$$

と定めると、前節と同様に以下の定理が示される：

定理 25. *Suppose that Y is a descendent of Γ. Then the Terwilliger algebra $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(Y)$ is generated by A and A^*, i.e.,*

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{C}[A, A^*],$$

unless Γ is one of at most three exceptions in Theorem 21.

系 26. *Suppose that Y is a descendent of Γ. Then the matrices A and A^* act on each irreducible $\boldsymbol{T}$-module as a tridiagonal pair, unless Γ is one of at most three exceptions in Theorem 21.*

これらの結果を基礎として、頂点に関する従来の Terwilliger 代数 $\boldsymbol{T}(x)$ の理論を子孫 Y に関する Terwilliger 代数 $\boldsymbol{T}(Y)$ に拡張することが可能になるのである。なお、この拡張理論の興味深い応用例として、$w = 1$ の子孫 Y(所謂 **Delsarte クリーク**) とその 1 頂点 $x \in Y$ を取り、二種類の Terwilliger 代数 $\boldsymbol{T}(x) = \mathbb{C}[A, A^*(x)]$ と $\boldsymbol{T}(Y) = \mathbb{C}[A, A^*(Y)]$ で生成されるさらに大きな非可換半単純行列代数 $\mathbb{C}[A, A^*(x), A^*(Y)]$ の既約加群を考察することで、$(C_1^\vee, C_1)$ 型**ダブルアフィンヘッケ環**や**非対称 Askey–Wilson 多項式**、及びこれらのある種の退化との関連を見出すことができる [24, 25, 26]。

参考文献

[1] 坂内 英一, 坂内 悦子, 伊藤 達郎, 代数的組合せ論入門, 共立出版, 2016 年.

[2] S. Bang, T. Fujisaki, and J. H. Koolen, The spectra of the local graphs of the twisted Grassmann graphs, European J. Combin. 30 (2009) 638–654.

[3] E. Bannai and T. Ito, Algebraic combinatorics I: Association schemes, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.

[4] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, Distance-regular graphs, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[5] A. E. Brouwer, C. D. Godsil, J. H. Koolen, and W. J. Martin, Width and dual width of subsets in polynomial association schemes, J. Combin. Theory Ser. A 102 (2003) 255–271.

[6] J. S. Caughman IV, The Terwilliger algebras of bipartite P- and Q-polynomial schemes, Discrete Math. 196 (1999) 65–95.

[7] J. S. Caughman IV, Bipartite Q-polynomial distance-regular graphs, Graphs Combin. 20 (2004) 47–57.

[8] B. Curtin, 2-Homogeneous bipartite distance-regular graphs, Discrete Math. 187 (1998) 39–70.

[9] E. R. van Dam and J. H. Koolen, A new family of distance-regular graphs with unbounded diameter, Invent. Math. 162 (2005) 189–193.

[10] E. R. van Dam, J. H. Koolen, and H. Tanaka, Distance-regular graphs, Electron. J. Combin. (2016) #DS22; arXiv:1410.6294.

[11] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Res. Rep. Suppl. No. 10 (1973).

[12] P. Delsarte and V. I. Levenshtein, Association schemes and coding theory, IEEE Trans. Inform. Theory 44 (1998) 2477–2504.

[13] G. A. Dickie, Q-polynomial structures for association schemes and distance-regular graphs, thesis, University of Wisconsin, 1995.

[14] A. L. Gavrilyuk and J. H. Koolen, The Terwilliger polynomial of a Q-polynomial distance-regular graph and its application to pseudo-partition graphs, Linear Algebra Appl. 466 (2015) 117–140.

[15] A. L. Gavrilyuk and J. H. Koolen, On a characterization of the Grassmann graphs, preprint (2018); arXiv:1806.02652.

[16] V. X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov, The non-symmetric Wilson polynomials are the Bannai–Ito polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016) 5217–5226; arXiv:1507.02995.

[17] D. Gijswijt, A. Schrijver, and H. Tanaka, New upper bounds for nonbinary codes based on the Terwilliger algebra and semidefinite programming, J. Combin. Theory Ser. A 113 (2006) 1719–1731.

[18] T. Ito, K. Nomura, and P. Terwilliger, A classification of sharp tridiagonal pairs, Linear Algebra Appl. 435 (2011) 1857–1884; arXiv:1001.1812.

[19] T. Ito, K. Tanabe, and P. Terwilliger, Some algebra related to P- and Q-polynomial association schemes, in: A. Barg and S. Litsyn (Eds.), Codes and association schemes, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, pp. 167–192; arXiv:math/0406556.

[20] T. Ito and P. Terwilliger, The augmented tridiagonal algebra, Kyushu J. Math. 64 (2010) 81–144; arXiv:0904.2889.

[21] A. Jurišić, J. Koolen, and P. Terwilliger, Tight distance-regular graphs, J. Algebraic Combin. 12 (2000) 163–197.

[22] R. Koekoek, P. A. Lesky, and R. F. Swarttouw, Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[23] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, The Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analog, report 98-17, Delft University of Technology, 1998; `http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey.html`.

[24] J.-H. Lee, Q-polynomial distance-regular graphs and a double affine Hecke algebra of rank one, Linear Algebra Appl. 439 (2013) 3184–3240; arXiv:1307.5297.

[25] J.-H. Lee, Nonsymmetric Askey–Wilson polynomials and Q-polynomial distance-regular graphs, J. Combin. Theory Ser. A 147 (2017) 75–118; arXiv:1509.04433.

[26] J.-H. Lee and H. Tanaka, Dual polar graphs, a nil-DAHA of rank one, and non-symmetric dual q-Krawtchouk polynomials, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 14 (2018) 009; arXiv:1709.07825.

[27] D. A. Leonard, Orthogonal polynomials, duality and association schemes, SIAM J. Math. Anal. 13 (1982) 656–663.

[28] M. S. MacLean, An inequality involving two eigenvalues of a bipartite distance-regular graph, Discrete Math. 225 (2000) 193–216.

[29] W. J. Martin and H. Tanaka, Commutative association schemes, European J. Combin. 30 (2009) 1497–1525; arXiv:0811.2475.

[30] Š. Miklavič, On bipartite Q-polynomial distance-regular graphs with diameter 9, 10, or 11, Electron. J. Combin. 25 (2018) #P1.52.

[31] K. Nomura, Spin models on bipartite distance-regular graphs, J. Combin. Theory Ser. B 64 (1995) 300–313.

[32] H. Suzuki, Association schemes with multiple Q-polynomial structures, J. Algebraic Combin. 7 (1998) 181–196.

[33] H. Suzuki, The Terwilliger algebra associated with a set of vertices in a distance-regular graph, J. Algebraic Combin. 22 (2005) 5–38.

[34] Y.-Y. Tan, Y.-Z. Fan, T. Ito, and X. Liang, The Terwilliger algebra of the Johnson scheme $J(N, D)$ revisited from the viewpoint of group representations, European J. Combin., to appear.

[35] H. Tanaka, Classification of subsets with minimal width and dual width in Grassmann, bilinear forms and dual polar graphs, J. Combin. Theory Ser. A 113 (2006) 903–910.

[36] H. Tanaka, A bilinear form relating two Leonard systems, Linear Algebra Appl. 431 (2009) 1726–1739; arXiv:0807.0385.

[37] H. Tanaka, Vertex subsets with minimal width and dual width in Q-polynomial distance-regular graphs, Electron. J. Combin. 18 (2011) #P167; arXiv:1011.2000.

[38] H. Tanaka, The Erdős–Ko–Rado theorem for twisted Grassmann graphs, Combinatorica 32 (2012), 735–740; arXiv:1012.5692.

[39] H. Tanaka, R. Tanaka, and Y. Watanabe, The Terwilliger algebra of a Q-polynomial distance-regular graph with respect to a set of vertices, in preparation.

[40] P. Terwilliger, P and Q polynomial schemes with $q = -1$, J. Combin. Theory Ser. B 42 (1987) 64–67.

[41] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme I, J. Algebraic Combin. 1 (1992) 363–388.

[42] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme II, J. Algebraic Combin. 2 (1993) 73–103.

[43] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme III, J. Algebraic Combin. 2 (1993) 177–210.

[44] P. Terwilliger, Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other, Linear Algebra Appl. 330 (2001) 149–203; arXiv:math/0406555.

[45] P. Terwilliger, Leonard pairs and the q-Racah polynomials, Linear Algebra Appl. 387 (2004) 235–276; arXiv:math/0306301.

[46] P. Terwilliger, Two linear transformations each tridiagonal with respect to an eigenbasis of the other; comments on the parameter array, Des. Codes Cryptogr. 34 (2005) 307–332; arXiv:math/0306291.