単項式イデアル のべきと記号的べきについて

寺井直樹 (佐賀大学教育学部)

1. 序と準備

本報告では, べきのない単項式で生成されるイデアル (squarefree monomial ideal) のべきと記号的べきの Cohen-Macaulay 性について概観する。

以下では, $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ を 体 K 上 n 変数の多項式環とする. $V = [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく.

V のべき集合 $\mathbf{2}^V$ の空でない部分集合 Δ が, $F \in \Delta$, $F' \subseteq F$ ならば $F' \in \Delta$ をみたすとき, V 上の**単体的複体 (simplicial complex)** であると言う. 特に断らない限り, 任意の $i \in V$ に対して $\{i\} \in \Delta$ であるものと仮定する. 単体的複体 Δ に対して, Δ の元 F を Δ の面 (face) と言い, $\dim F = \sharp(F) - 1$ を F の次元 (dimension) と言う. ここで, $\sharp(F)$ は F の濃度を表す. $\dim \Delta = \max\{\dim F : F \in \Delta\}$ を Δ の次元 (dimension) と言う. Δ のすべての極大面（facet) の濃度が等しいとき, Δ を**純（pure）**であるという.

Δ を V 上の単体的複体, F を Δ の面, W を V の部分集合とする. このとき,

$$\Delta_W = \{F' \in \Delta : F' \subseteq W\}$$

を Δ の W への**制限 (restriction)** と言う. V の, 空でない任意の部分集合 W に対して Δ_W が純であるとき Δ は**マトロイド** であるという.

$V = [n]$ 上の単体的複体 Δ と体 K に対して,

$$\begin{aligned} I_\Delta &= (x_{i_1} \cdots x_{i_p} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n, \{i_1, \ldots, i_p\} \notin \Delta), \\ K[\Delta] &= K[x_1, \ldots, x_n]/I_\Delta \end{aligned}$$

をそれぞれ Δ の **Stanley-Reisner イデアル**, **Stanley-Reisner 環**と呼ぶ. 勝手な体 K に対して, $\dim K[\Delta] = \dim \Delta + 1$ が成り立つことが知られている.

$P_F = (x_i : i \notin F)$ とおくとき, I_Δ の無駄のない準素分解は

$$I_\Delta = \bigcap_{F:\text{facet in } \Delta} P_F$$

で与えられる.

I_Δ の**記号的べき (symbolic power)** をこれを用いて定義する.

各整数 $\ell \geq 1$ に対して,

$$I_\Delta^{(\ell)} = \bigcap_{F:\text{facet in } \Delta} P_F^\ell$$

を I_Δ の ℓ-th symbolic power と言う.

通常べきの Cohen–Macaulay 性と記号べきの Cohen–Macaulay 性の関係については次のことが成立する.

Proposition 1.1. 単体的複体 Δ と $\ell \geq 1$ に対して、 次は同値である：

(1) S/I_Δ^ℓ は *Cohen–Macaulay* である.

(2) $S/I_\Delta^{(\ell)}$ は *Cohen–Macaulay* であり, $I_\Delta^\ell = I_\Delta^{(\ell)}$ である.

2. 3 乗以上の場合

記号的べきの Cohen-Macaulay 性に関しては次の定理が成立する.

Theorem 2.1 (Minh-N.V.Trung[5], Varbaro[10], Terai-N.V.Trung[8])**.** 単体的複体 Δ に対して, 次は同値である：

(1) 任意の $\ell \geq 1$ に対して, $S/I_\Delta^{(\ell)}$ は *Cohen–Macaulay* である.

(2) ある $\ell \geq 3$ に対して, $S/I_\Delta^{(\ell)}$ は *Cohen–Macaulay* である.

(3) Δ はマトロイド である.

通常べきに関しては Cowsik-Nori の定理 [2] の精密化として, 次の定理が成立する.

Theorem 2.2 (Terai-N.V.Trung[8])**.** 単体的複体 Δ に対して, 次は同値である：

(1) 任意の $\ell \geq 1$ に対して, S/I_Δ^ℓ は *Cohen–Macaulay* である.

(2) ある $\ell \geq 3$ に対して, S/I_Δ^ℓ は *Cohen–Macaulay* である.

(3) S/I_Δ は完全交叉 (*complete intersection*) である.

次の例が示すように, (2) において, $\ell \geq 3$ を $\ell \geq 2$ にすることはできない.

Example 2.3 (五角形 (pentagon))**.** Δ を下図の五角形とするとき,

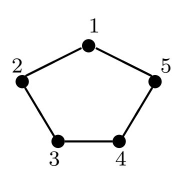
$$I_\Delta = (x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_5)$$

である. このとき,

(1) S/I_Δ は完全交叉ではない .

(2) S/I_Δ^2 は Cohen-Macaulay 環である.

(3) $\ell \geq 3$ に対して, S/I_Δ^ℓ は Cohen-Macaulay でない.

$\Delta =$ 

3. 2 乗の場合

次に 2 乗 の Cohen-Macaulay 性について考えてみる. まず単体的複体が 1 次元のときを考える。

Δ を 1 次元の単体的複体とする. このとき, Δ を自然にグラフ Λ とみなすことができる.

$S/I_\Delta^{(2)}$ の Cohen-Macaulay 性はグラフ理論的に判定することができる．その前に, $\operatorname{diam}\Lambda$ の定義を思い出しておこう．頂点集合 $V=[n]$ を持つグラフ Λ が連結であると仮定しよう．任意の $i,j\in V$ に対して,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(i,j) &= \min\{k : \exists i_0,i_1,\ldots,i_k\in V\text{s.t. } i=i_0,\, i_k=j,\\ &\qquad \{i_p,i_{p+1}\}\in E(\Lambda)(p=0,1,\ldots,k-1)\}\end{aligned}$$

とおく．このとき,

$$\operatorname{diam}(\Lambda)=\max_{i,j\in V}\operatorname{dist}(i,j)$$

を Λ の**直径 (diameter)** と言う．

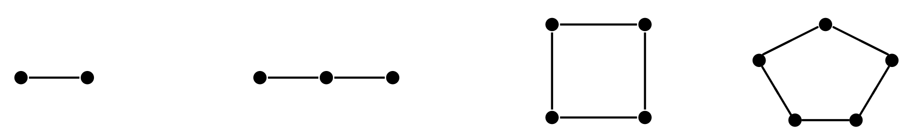
Theorem 3.1 (Minh-N.V.Trung [4])**.** *Λ を 1 次元単体的複体 Δ を自然にみなしたグラフとする．このとき, 次は同値である :*

(1) *$S/I_\Delta^{(2)}$ は Cohen-Macaulay である.*
(2) *Λ が連結で, $\operatorname{diam}\Lambda\le 2$ が成り立つ.*

Example 3.2. Λ を 1 次元単体的複体 Δ を自然にみなしたグラフとする．Λ が n 角形のとき,$\operatorname{diam}\Lambda\le 2$ となるのは, $n=3,4,5$ の場合であり, このときに限り, $S/I_\Delta^{(2)}$ が Cohen-Macaulay になる.

Proposition 3.3 (Minh-N.V.Trung [4])**.** *Δ を 頂点集合 V 上の 1 次元の単体的複体とする．$S=K[x_1,\ldots,x_n]$ $(V=[n])$ とおくとき, 次は同値である :*

(1) *S/I_Δ^2 は Cohen-Macaulay である.*
(2) *Δ は次のいずれかに同型な単体的複体である :*



また, このとき, S/I_Δ は Gorenstein である.

2 次元単体的複体の場合の分類も N.V.Trung -Tuan[9] によって与えられている.
上の命題の 1 次元単体的複体は Gorennstein 性を与えているが、一般に次の定理が成立する.

Theorem 3.4 (Rinaldo–Terai–Yoshida[6])**.** *もし, 任意の体 K に対して S/I_Δ^2 が Cohen-Macaulay ならば, S/I_Δ は Gorenstein である.*

Remark 3.5. また, 体 K に対する仮定は必要でないと思われるが, 今のところはずすことができない.

Stanley-Reisner イデアルが次数 2 の単項式で生成されているときは次の定理が成立する.

Theorem 3.6 (Hoang- T.N.Trung [3])**.** *単体的複体 Δ に対して, I_Δ は次数 2 の単項式で生成されているとする．このとき次は同値である :*

(1) *S/I_Δ^2 は Cohen-Macaulay である.*
(2) *S/I_Δ は Gorenstein であり, $I_\Delta^2=I_\Delta^{(2)}$ である.*

References

[1] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[2] R. C. Cowsik and M. V. Nori, *On the fibres of blowing up*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **40** (1976), no. 1-4, 217–222.

[3] D. T. Hoang, and T. N. Trung, *A characterization of triangle-free Gorenstein graphs and Cohen-Macaulayness of second powers of edge ideals.*, J. Algebraic Combin. **43** (2016), 325-338.

[4] N. C. Minh and N. V. Trung, *Cohen–Macaulayness of powers of two-dimensional squarefree monomial ideals*, J. Algebra **322** (2009), 4219 –4227.

[5] N. C. Minh and N. V. Trung, *Cohen–Macaulayness of monomial ideals and symbolic powers of Stanley-Reisner ideals*, Adv. Math. **228** (2011), 1285 –1306.

[6] G. Rinaldo, N. Terai, and K. Yoshida, *Cohen–Macaulayness for second powers of Stanley-Reisner ideals*, J. Commut. Algebra **3** (2011), 405–430.

[7] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra, Second Edition*, Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart, 1996.

[8] N. Terai and N. V. Trung, *Cohen-Macaulayness of large powers of Stanley-Reisner ideals.*, Adv. Math. **229** (2012), 711 –730.

[9] N. V. Trung and T. M. Tuan, *Equality of ordinary and symbolic powers of Stanley-Reisner ideals*, J. Algebra **328** (2011), 77-93.

[10] M. Varbaro, *Symbolic powers and matroids*, Proc Amer. Math. Soc. **139** (2011), 2757–2366.

(Naoki Terai) Department of Mathematics, Faculty of Education, Saga University, Saga 840–8502, Japan

E-mail address: terai@cc.saga-u.ac.jp