Euler 系の理論の最近の発展について

佐野昂迪
大阪市立大学

目次

1 はじめに

Euler 系の理論は「高階（higher rank)」の場合に一般化されるべきだ，という考え方は，90 年代後半に Perrin-Riou [Per98] によって提唱されていたが，その後あまり進展はなかった．最近になって筆者は，David Burns と坂本龍太郎との共同研究 [BSS] で，高階 Euler 系の理論をかなり満足のいく形で作り上げることができたので報告する．

1.1 古典的な Euler 系

まず，古典的な「Euler 系の議論（Euler system argument）」の概略について説明する（[Rub00] 参照）．K を代数体とし，p を素数とする．T を有限階数自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群で，K の絶対ガロア群 $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の連続作用が入っているものとする（いわゆる「p 進表現」）．

Euler 系とは，ガロア・コホモロジーの元の集まり

$$c = (c_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}} \in \prod_{\mathfrak{n}} H^1(K(\mathfrak{n}), T)$$

であって，適切な「ノルム関係式」を満たすものである（ここで $\mathfrak{n}$ は K の square-free なイデアルを走り，$K(\mathfrak{n})$ は mod $\mathfrak{n}$ の射類体である[*1]）．

Euler 系の議論の流れは以下の通りである．

Step 1. Euler 系 c の「Kolyvagin 導分（derivative）」を作る：p べき M を固定し，各 $\mathfrak{n}$ に対して，「Kolyvagin 作用素[*2]」$D_{\mathfrak{n}}$ を $c_{\mathfrak{n}}$ に施して mod M をする．

$$(D_{\mathfrak{n}} \cdot c_{\mathfrak{n}} \bmod M) \in H^1(K(\mathfrak{n}), A)^{G_{\mathfrak{n}}} = H^1(K, A)$$

（ここで $A := T/MT$, $G_{\mathfrak{n}} := \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{n})/K)$）[*3]．このようにして $c_{\mathfrak{n}}$ の Kolyvagin 導分

$$\kappa(c)_{\mathfrak{n}} := (D_{\mathfrak{n}} \cdot c_{\mathfrak{n}} \bmod M) \in H^1(K, A)$$

ができた[*4]．

Step 2. Kolyvagin 導分の集まり $\kappa(c) := (\kappa(c)_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}}$ が「finite-singular 関係」

$$\forall \mathfrak{n} : \text{square-free},\ \forall \mathfrak{q} \mid \mathfrak{n} : \text{prime},\ v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}})$$

を満たすことを示す．定義はしないが，$v_{\mathfrak{q}}$ と $\varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}$ は $H^1(K, A)$ から $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ への準同型である（$\varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}$ は「finite-singular 比較写像」と呼ばれる）．finite-singular 関係を満たす元の集まりは「Kolyvagin 系」と呼ばれる[*5]．つまり，$\kappa(c)$ は Kolyvagin 系である．

[*1] 正確には少し違うが，$K = \mathbb{Q}$ のときの円分体にあたるものとイメージしてもらえばよい．
[*2] 定義はしないが，$D_{\mathfrak{n}}$ は $\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]$ の元である．
[*3] 制限写像 $H^1(K, A) \to H^1(K(\mathfrak{n}), A)^{G_{\mathfrak{n}}}$ が同型になるような状況を考えている．
[*4] “$K(\mathfrak{n})$ 上”にある $c_{\mathfrak{n}}$ から “K 上”の元 $\kappa(c)_{\mathfrak{n}}$ を作った，ということがポイントである．この操作は「Kolyvagin 降下（descent）」と呼ばれることもある．
[*5] 本当は少し違う．

Step 3. finite-singular 関係と Tchebotarev 密度定理を巧みに用いることで，$\kappa(c)$ により T の Selmer 群の上からの評価（あるいは構造決定）を与える．

以上の議論により，Euler 系 c と Selmer 群を結びつけるのである．

ここで重要なのは，L 関数の値と関係する Euler 系がしばしば存在することである．そのような Euler 系に対して以上の議論を行えば，

L 関数の値と Selmer 群の間の関係

という，数論において非常に興味深い結果が得られることになる．Euler 系が重要と言われる所以はここにある．

しかしながら，L 関数の値と関係する元は，いつでも "H^1" の中に存在することは期待できない．一般には，外積 "$\bigwedge^r H^1$" の中に存在する[*6]と期待されている（r は適切な（T に依存する）非負整数で，しばしば「階数（rank）」と呼ばれる）．（このことの根拠は Rubin-Stark 予想 [Rub96] や（同変）玉河数予想 [BuFl01] にある．）したがって，上の Step 1〜3 は「$r=1$ の場合の理論」と解釈し，それを $r>1$ の場合に一般化することが期待されるのである[*7]．

このことを整理するために，「階数 r の Euler 系」を "$\bigwedge^r H^1$" の元の集まりとして定義し，古典的な Euler 系を「階数 1 の Euler 系」と解釈するのが自然である．このように一般化された Euler 系を「高階 Euler 系」と呼ぶ．

1.2 高階 Euler 系

L 関数の値と関係する元が「住んでいる所」についてより詳しく説明する．p 進表現 T に対して，$r = r_T := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\left(\bigoplus_{v|\infty} H^0(K_v, T^*(1))\right)$ とおく（ここで $T^*(1) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T, \mathbb{Z}_p(1))$）．このとき，玉河数予想からの簡単な帰結として，$T$ の L 関数の値[*8]に対応する元（いわゆる「ゼータ元」）が

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]} H^1(K(\mathfrak{n}), T) \tag{1}$$

[*6] より正確には，後で説明するように，"$\bigcap^r H^1$" の中に存在する．

[*7] ちなみに，$r=0$ の場合も起こりえる．「階数 0 の Euler 系」は考えることができるが，「階数 0 の Kolyvagin 系」なるものは（少なくとも現在では）考えることはできない．この場合はまた別個に扱うべきかと思われる．

[*8] より正確には，$T^*(1)$ の L 関数の $s=0$ における先頭項（leading term）．

の中に存在すると予想される[*9]（[Kat93, Remark 4.14] 参照）．ゼータ元が単純に

$$\bigwedge\nolimits^{r}_{\mathbb{Z}_p[G_\mathfrak{n}]} H^1(K(\mathfrak{n}), T) \tag{2}$$

の中に住んでいると予想するのは（少なくとも $T = \mathbb{Z}_p(1)$ の場合には）間違いである（[Rub96, §4] 参照）．Rubin はこの微妙な「整性（integrality）」を $T = \mathbb{Z}_p(1)$ の場合にきちんと考察し，彼は

$$\left\{ a \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits^{r}_{\mathbb{Z}_p[G_\mathfrak{n}]} H^1(K(\mathfrak{n}), T) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \Phi \in \bigwedge^{r}_{\mathbb{Z}_p[G_\mathfrak{n}]} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\mathfrak{n}]}(H^1(K(\mathfrak{n}), T), \mathbb{Z}_p[G_\mathfrak{n}]), \\ \Phi(a) \in \mathbb{Z}_p[G_\mathfrak{n}] \end{array} \right\} \tag{3}$$

の中にゼータ元が住んでいると予想した[*10]（[Rub96, Conjecture B′] 参照）．これは (1) の lattice になっていて，(2) より大きい[*11]（[Rub96, Proposition 1.2] 参照）．$T = \mathbb{Z}_p(1)$ の場合の L 関数は古典的な Artin L 関数で，ゼータ元は「Stark 元」と呼ばれる[*12]．Rubin の予想 [Rub96, Conjecture B′] は Stark 予想の精密化であり，「Rubin-Stark 予想」と呼ばれる．

一般の T に対しても，ゼータ元が (3) の中に住んでいると予想することは正しいと思われる．実際，玉河数予想を仮定して，ゼータ元が (3) に入っていることは自然に証明することができる（[BuSa, Remark 2.9 と Theorem 2.17] 参照）．(3) は一見奇妙だが，実は色々なよい性質を持っていて，自然な対象なのである．

以上より，高階 Euler 系は (3) の元の集まり（で適切なノルム関係式を満たすもの）として定義すべきだろう．(3) を

$$\bigcap\nolimits^{r}_{\mathbb{Z}_p[G_\mathfrak{n}]} H^1(K(\mathfrak{n}), T)$$

と表すことにする．高階 Euler 系

$$c = (c_\mathfrak{n})_\mathfrak{n} \in \prod_{\mathfrak{n}} \bigcap\nolimits^{r}_{\mathbb{Z}_p[G_\mathfrak{n}]} H^1(K(\mathfrak{n}), T)$$

が与えられたとき，これに対して §1.1 の Step 1〜3 を行いたい．それを実際に自然な形でやったというのが今回の研究結果である．

---

*9 より正確には，$H^1(K(\mathfrak{n}), T)$ ではなく $H^1(\mathcal{O}_{K(\mathfrak{n}),S}, T)$ である（S は悪い素点（bad places）を含む有限集合をとり，S の Euler 因子を除いた L 関数を考える）．

*10 “$\Phi(a)$”の定義は，$a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_r$, $\Phi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r$ の形のときは

$$\Phi(a) := \det(\varphi_i(a_j))$$

であり，一般の場合にはこの定義を線形に延長する（§2 参照）．

*11 $r = 0, 1$ のときは (2) と同じ．

*12 「Rubin-Stark 元」とも．

1.3 Mazur-Rubin の高階 Kolyvagin 系の理論

先行結果として，§1.1 の Step 3 の「高階版」は最近 Mazur と Rubin [MaRu16a] によってなされていた（が，問題点があった）．彼らは「高階 Kolyvagin 系」の定義を与え，それによって Selmer 群の構造決定を行う一般論を作り上げた．しかし，彼らの理論は「stub Kolyvagin 系」という特殊な高階 Kolyvagin 系にしか適用できないもので，高階 Euler 系からどう高階 Kolyvagin 系を作るか（Step 1 と 2 の「高階版」），また作れたとしてもそれが stub Kolyvagin 系であることをどうやって確かめるのか，という点が全く考察されていなかったので，理論としてはかなり不十分と言えるものであった．

彼らの「失敗」の要因は，高階 Kolyvagin 系を "$\bigwedge^r H^1$" の元の集まりとして定義したことにある．一方で我々は "$\bigcap^r H^1$" の元の集まりとして高階 Kolyvagin 系を定義した．すると, 高階 Euler 系から高階 Kolyvagin 系が自然に作れ, Mazur-Rubin の stub Kolyvagin 系に相当するものは高階 Kolyvagin 系そのものに他ならないことも示せるなど，非常にうまく事が運んだのである．その意味で，我々の "$\bigcap^r H^1$" による高階 Kolyvagin 系の定義は「正しい」と言ってよいと思う．

本稿では，"$\bigwedge^r H^1$" ではなく "$\bigcap^r H^1$" を考えることでどのような点でうまくいったのか，その代数的な鍵を中心に解説したい．

2 外積代数

本節では，§1.2 で述べた重要な lattice (3) の代数的な一般化を与え，その性質についての一般論を展開する．

R を可換環とし，X を R 加群とする．

準同型 $\varphi : X \to R$ が与えられているとする．このとき，φ が誘導する準同型

$$\bigwedge\nolimits_R^r X \to \bigwedge\nolimits_R^{r-1} X$$
$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \mapsto \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} \varphi(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_r$$

も記号 φ で表すことにする（ここで r は正の整数）．

次に，s 個の準同型 $\varphi_1, \ldots, \varphi_s : X \to R$ が与えられているとする（ただし $s \le r$）．このとき，準同型

$$\varphi_s \circ \cdots \circ \varphi_1 : \bigwedge\nolimits_R^r X \to \bigwedge\nolimits_R^{r-s} X$$

を記号 $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_s$ で表すことにする．この構成は準同型

$$\begin{aligned}\bigwedge\nolimits_R^s \mathrm{Hom}_R(X,R) \to \mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r X, \bigwedge\nolimits_R^{r-s} X\right)\\ \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_s \mapsto \varphi_s \circ \cdots \circ \varphi_1\end{aligned}$$

を定めていることに他ならない（この準同型による Φ の像も Φ で表す，ということである）．

次が成り立つことに注意する：

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \det(\varphi_i(x_j)).$$

このことは帰納法と余因子展開を用いてすぐに確かめられる．

2.1 余外積の定義

以下，関手 $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ を $(-)^*$ と略記することにする．

定義 2.1 ([BKS, Definition 3.1])**.** r を非負整数とする．R 加群 X の r 次余外積（r-th coexterior power）[*13]を

$$\bigcap\nolimits_R^r X := \left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*)\right)^*$$

と定義する．

注意 2.2. (i) R がネーター環で，X が有限生成射影 R 加群のとき，自然な射

$$\begin{aligned}\delta_r : \bigwedge\nolimits_R^r X \to \bigcap\nolimits_R^r X\\ x \mapsto (\Phi \mapsto \Phi(x))\end{aligned}$$

は同型である[*14]．

(ii) 余外積は §1.2 で述べた lattice (3) の自然な一般化である．実際，$R = \mathbb{Z}_p[G]$（G は有限アーベル群）[*15]で X が有限生成のとき，δ_r が誘導する射

$$\delta_r : \left\{x \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_R^r X \;\middle|\; \forall \Phi \in \bigwedge\nolimits_R^r (X^*),\ \Phi(x) \in R\right\} \to \bigcap\nolimits_R^r X \tag{4}$$

---

*13 この名前は仮のものである．Burns は「外二重双対（exterior bidual)」と呼ぶことを提案している．本稿で「余外積」という名前をつけた理由については後で述べる（注意 2.6 参照)．

*14 証明：局所化することで自由加群の場合に帰着でき，自由加群の場合は容易に示せる．

*15 $R = \mathbb{Z}[G]$ などでもよい．

は同型である[16]（[BuSa, Proposition A.7] 参照）．(4) の左辺を初めて考えたのは Rubin [Rub96, §1.2] で，彼は

$$\left\{x \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_R^r X \;\middle|\; \forall \Phi \in \bigwedge\nolimits_R^r (X^*),\ \Phi(x) \in R\right\} \simeq \left(\iota\left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*)\right)\right)^*$$

であることを指摘している（ここで ι は

$$\begin{aligned} \iota : \bigwedge\nolimits_R^r (X^*) &\to \left(\bigwedge\nolimits_R^r X\right)^* \\ \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r &\mapsto (x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \mapsto \det(\varphi_i(x_j))) \end{aligned}$$

である）．よって我々の余外積 $\bigcap_R^r X$ に近いものを考えていたが，ι による像をとっているところが微妙な違いであり[17]，また，彼は一般の可換環上で考えることをしなかった．一般の可換環上で考えることの利点は，例えば，$R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ のような環上でも $\bigcap_R^r X$ を考えることができることである．このような環上では $\mathbb{Q}_p$ をテンソルすると消えてしまうので，(4) の左辺によって定義すると意味をなさない．Kolyvagin 系を考える際は $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ のような環上の加群を扱うので，「$\mathbb{Q}_p$ をテンソルしなくても通用する定義」に拡張したことが，我々の高階 Kolyvagin 系の定義の代数的な鍵である．

---

[16] 証明：$Q := \mathbb{Q}_p[G]$ とおくことにすると，

$$\begin{aligned} &\left\{x \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_R^r X \;\middle|\; \forall \Phi \in \bigwedge\nolimits_R^r (X^*),\ \Phi(x) \in R\right\} \\ &= \ker\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_R^r X \to \mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*), Q/R\right)\right) \\ &\simeq \ker\left(\mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*), Q\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*), Q/R\right)\right) \\ &= \bigcap\nolimits_R^r X, \end{aligned}$$

ここで同型

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_R^r X &= \bigwedge\nolimits_Q^r (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X) \\ &\overset{\delta_r}{\simeq} \mathrm{Hom}_Q\left(\bigwedge\nolimits_Q^r \mathrm{Hom}_Q(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X, Q), Q\right) \\ &= \mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*), Q\right) \end{aligned}$$

を使った（Q は半単純環であり，$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X$ は有限生成射影 Q 加群になることに注意）．

[17] 実際には ι の像をとらなくてもよい，というのが我々の観察である（$\ker \iota$ は torsion であり，よって $(\mathrm{im}\,\iota)^* \simeq \left(\left(\bigwedge_R^r (X^*)\right) / \ker \iota\right)^* \simeq \left(\bigwedge_R^r (X^*)\right)^*$）．

2.2 余外積の性質

以下の命題 2.3 と 2.5 で，余外積の重要な性質を見る．

命題 2.3 ([BuSa, Proposition A.2(i)])**.** $\iota : X \to Y$ を R 加群の単射とし，

$$\mathrm{Ext}^1_R(\operatorname{coker}\iota, R) = 0$$

と仮定する．このとき，任意の非負整数 r に対して，ι が誘導する準同型

$$\bigcap\nolimits^r_R X \to \bigcap\nolimits^r_R Y$$

は単射である．

証明. 仮定 $\mathrm{Ext}^1_R(\operatorname{coker}\iota, R) = 0$ より，ι の双対

$$\iota^* : Y^* \to X^*$$

は全射である．よって，ι^* から誘導される準同型

$$\bigwedge\nolimits^r_R (Y^*) \to \bigwedge\nolimits^r_R (X^*)$$

も全射である．よってこれの双対

$$\bigcap\nolimits^r_R X \to \bigcap\nolimits^r_R Y$$

は単射である． □

注意 2.4. 命題 2.3 の仮定 $\mathrm{Ext}^1_R(\operatorname{coker}\iota, R) = 0$ は，例えば次のいずれかの場合に満たされる：G を有限アーベル群とするとき，

(i) $R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[G]$,
(ii) $R = \mathbb{Z}_p[G]$ で，$\operatorname{coker}\iota$ が torsion-free（$\mathbb{Z}_p$ 加群として自由）．

これらは応用上自然に考える設定である（G として代数体のアーベル拡大のガロア群をとる）．もっと一般に

(i)′ R は 0 次元 Gorenstein 環,
(ii)′ R は Gorenstein $\mathbb{Z}_p$-order で，$\operatorname{coker}\iota$ が torsion-free（$\mathbb{Z}_p$ 加群として自由）．

でも満たされる（[BuSa, §A.3] 参照）．応用上想定しているものは Hecke 環である．

このような設定は，双対関手 $(-)^* := \mathrm{Hom}_R(-, R)$ が「2 回やったら元に戻る」という（いかにも双対らしい）性質が成り立つような設定である．つまり，「R が 0 次元 Gorenstein 環」または「R が Gorenstein $\mathbb{Z}_p$-order で X が torsion-free」のとき，

$$X \to X^{**};\ x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$$

は同型になる[*18]．余外積は双対関手 $(-)^*$ を用いて定義されるので，このような設定は余外積を考える上で自然なのである．

命題 2.5 ([BuSa, Proposition A.4])**.** R を 0 次元 Gorenstein 環とし，G を有限アーベル群とする．このとき，任意の $R[G]$ 加群 X と非負整数 r に対し，自然な同型

$$\left(\bigcap\nolimits_{R[G]}^{r} X\right)^{G} \simeq \bigcap\nolimits_{R}^{r} (X^{G})$$

がある．

証明. まず，関手 $\mathrm{Hom}_{R[G]}(-, R[G])$ は関手 $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ と同一視できることに注意する[*19]．よって，これらの関手の略記 $(-)^*$ は誤解の恐れがない．また，任意の $R[G]$ 加群 Y に対して

$$(Y^*)^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, Y^*) \simeq \mathrm{Hom}_{R[G]}(Y \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}, R[G]) = (Y_G)^*$$

が成り立つことに注意をしておく．

R が 0 次元 Gorenstein 環のとき，$R[G]$ もそうである．注意 2.4 で述べたように，0 次元 Gorenstein 環上の加群は反射的である．よって，

$$(X^G)^* \simeq ((X^{**})^G)^* \simeq ((X^*)_G)^{**} \simeq (X^*)_G$$

---

*18 つまり，X が反射的（reflexive）ということ．これは $\bigcap_R^1 X \simeq X$ ということでもある．

*19 $\mathrm{Hom}_R(X, R) \to \mathrm{Hom}_{R[G]}(X, R[G]);\ \varphi \mapsto \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma(-))\sigma^{-1}$ は全単射.

が成り立つ．これを用いると，

$$\begin{aligned}\left(\bigcap\nolimits_{R[G]}^{r} X\right)^{G} &= \left(\left(\bigwedge\nolimits_{R[G]}^{r}(X^*)\right)^{*}\right)^{G} \\ &\simeq \left(\left(\bigwedge\nolimits_{R[G]}^{r}(X^*)\right)_{G}\right)^{*} \\ &\simeq \left(\bigwedge\nolimits_{R}^{r}(X^*)_G\right)^{*} \\ &\simeq \left(\bigwedge\nolimits_{R}^{r}(X^G)^*\right)^{*} \\ &= \bigcap\nolimits_{R}^{r}(X^G).\end{aligned}$$

□

注意 2.6. 命題 2.3 と 2.5 が言っていることはそれぞれ

(i) 余外積は単射を保つ，
(ii) 余外積は G 不変部分（invariant）をとる操作と可換

ということである．これらの証明の本質はそれぞれ

(i)′ 外積は全射を保つ，
(ii)′ 外積は G 不変商（coinvariant）をとる操作と可換

という事実である．余外積は，外積と双対な概念になるように定義されているのである（このことから「余外積」という名前は自然であると思う）．

我々は余外積を

$$\bigcap\nolimits_{R}^{r} X := \left(\bigwedge\nolimits_{R}^{r}(X^*)\right)^{*}$$

と定義したが，本当は，$\bigcap_R^r X$ の「別の定義」があって，「双対性」によって同型

$$\bigcap\nolimits_{R}^{r} X \simeq \left(\bigwedge\nolimits_{R}^{r}(X^*)\right)^{*}$$

が得られる，という理論の展開の仕方の方が自然である[*20]．$R = \mathbb{Z}_p[G]$ のときには，この「別の定義」として Rubin の lattice

$$\left\{x \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_{R}^{r} X \;\middle|\; \forall\Phi \in \bigwedge\nolimits_{R}^{r}(X^*),\ \Phi(x) \in R\right\}$$

[*20] 我々の余外積の定義は，例えるなら，G 不変部分 X^G を $((X^*)_G)^*$ で定義するようなものである．

がとれるが（注意 2.2(ii) 参照），やや ad hoc な印象を受ける．一般に「別の定義」が存在するのか今のところわかっていないが，もっと考えれば色々理論的な整備ができそうである．

個人的に，外積は「ホモロジー的なもの」，余外積は「コホモロジー的なもの」という印象を受ける[*21]．§1.2 で述べたように，ゼータ元は（外積ではなく）余外積の中に住んでいると予想するのが正しいと思われるが，これはやはり「数論においてホモロジーよりもコホモロジーの方が大事」という哲学の現れと見ることができるのではないかと思う．

本節の最後に，本節の冒頭で構成した自然な準同型

$$\begin{aligned}\bigwedge\nolimits_R^s(X^*) &\to \mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r X, \bigwedge\nolimits_R^{r-s} X\right)\\ \varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_s &\mapsto \varphi_s\circ\cdots\circ\varphi_1\end{aligned}$$

の「余外積版」の定義を与えておく．次のように自然に定めることができる：

$$\begin{aligned}\bigwedge\nolimits_R^s(X^*) &\to \mathrm{Hom}_R\left(\bigcap\nolimits_R^r X, \bigcap\nolimits_R^{r-s} X\right)\\ \Phi &\mapsto (f\mapsto(\Psi\mapsto f(\Phi\wedge\Psi)))\end{aligned}$$

（ここで $f: \bigwedge_R^r(X^*)\to R$, $\Psi\in\bigwedge_R^{r-s}(X^*)$, $\Phi\wedge\Psi\in\bigwedge_R^r(X^*)$ である）．この準同型による $\Phi\in\bigwedge_R^s(X^*)$ の像も，記号 Φ で表す．すると，次の図式が可換であることが定義より確かめられる：

$$\begin{tikzcd} \bigwedge_R^r X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\delta_r"'] & \bigwedge_R^{r-s} X \arrow[d, "\delta_{r-s}"] \\ \bigcap_R^r X \arrow[r, "\Phi"'] & \bigcap_R^{r-s} X. \end{tikzcd}$$

注意 2.7. 本稿では詳しく述べないが，余外積の次の性質も大事である（[BuSa, Proposition A.3] 参照）．

---

*21 外積と余外積の関係は，（命題 2.3 と 2.5 を考慮すると）G 不変商と G 不変部分の関係に似ていると思う（$\otimes$ と Hom の関係とも言える）．この類似の下で，注意 2.2(i) の準同型

$$\delta_r: \bigwedge\nolimits_R^r X\to\bigcap\nolimits_R^r X;\ x_1\wedge\cdots\wedge x_r\mapsto(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_r\mapsto\det(\varphi_i(x_j)))$$

は，ノルム写像

$$X_G\to X^G;\ \overline{x}\mapsto\sum_{\sigma\in G}\sigma x$$

に相当すると思う．

「R を 0 次元 Gorenstein 環とし，R 加群の完全系列

$$0 \to X \to Y \xrightarrow{\varphi} R$$

があるとする．このとき，任意の非負整数 r に対して

$$\mathrm{im}\left(\varphi : \bigcap\nolimits_R^{r+1} Y \to \bigcap\nolimits_R^{r} Y\right) \subset \bigcap\nolimits_R^{r} X$$

が成り立つ（ここで $\bigcap_R^r X$ は $\bigcap_R^r Y$ の部分とみなしている（命題 2.3 参照））．特に，$\varphi : Y \to R$ は準同型

$$\varphi : \bigcap\nolimits_R^{r+1} Y \to \bigcap\nolimits_R^{r} X$$

を誘導する．」

これに相当するものを Mazur-Rubin は [MaRu16a, Proposition A.1] で考えていたが，彼らは（余外積ではない通常の）外積で考えたため証明が苦しく*22，「R が単項イデアル環」というかなり強い仮定をおいていた．

このような性質は「Stark 系」の定義をする際に必要になる．Stark 系は §1.1 の Step 3 で重要な役割を果たすものである．

上の性質は Burns と筆者 [BuSa] とは独立に坂本 [Sak] によっても発見されていたことに注意しておく．

3　高階 Euler 系の理論

本節では §1.1 で述べた Euler 系の議論 Step 1〜3 の「高階版」について解説し，最後に応用について少し述べる．まず記号の復習をする．K を代数体とし，p を素数，T を $\mathbb{Z}_p$ 係数の G_K の p 進表現とする．$\mathfrak{n}$ で K の square-free なイデアルを表し，$K(\mathfrak{n})$ で mod $\mathfrak{n}$ の射類体，$G_{\mathfrak{n}}$ で $K(\mathfrak{n})/K$ のガロア群を表すのであった．また，p べき M を固定し，$A := T/MT$ とおく．簡単のため，$H^1(K(\mathfrak{n}), A)^{G_{\mathfrak{n}}} = H^1(K, A)$ が成り立っているとする．「階数」r は，Step 1 と 2 の高階版においては任意の正の整数でもよい（もちろん，応用上は r として r_T をとる（§1.2 参照））．

本稿ではアイデアを中心に説明することとし，厳密には多少の間違いを含む説明をするということに注意をしておく（講演における説明の仕方に近いものと思っていただきた

*22 外積は単射を保たないという事実に困難がある．余外積は単射を保つので（命題 2.3 参照），その点簡単である．

い）．また，ここでは簡単のため，設定を最も簡単なものにしているが，T の係数環はもっと一般に Gorenstein $\mathbb{Z}_p$-order でもよい[*23]．その場合，A の係数環は 0 次元 Gorenstein 環になる．係数環が群環や Hecke 環でも以下の議論は通用するということである．

3.1 Step 1 の高階版

Step 1 の内容は，「Kolyvagin 作用素 $D_{\mathfrak{n}}$ を Euler 系（の $\mathfrak{n}$ 成分）$c_{\mathfrak{n}}$ に施してから mod M をすることで，Kolyvagin 導分 $\kappa(c)_{\mathfrak{n}}$ を $H^1(K,A)$ の中に作る」ということであった（[Rub00, Definition 4.4.10] 参照）．

これの高階版は命題 2.5 を用いると簡単にできる．高階 Euler 系

$$c=(c_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}}\in\prod_{\mathfrak{n}}\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),T)$$

が与えられているとし[*24]，

$$(D_{\mathfrak{n}}\cdot c_{\mathfrak{n}} \bmod M)\in\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),A)$$

を考える[*25]．すると，$G_{\mathfrak{n}}$ 不変部分に入ること

$$(D_{\mathfrak{n}}\cdot c_{\mathfrak{n}} \bmod M)\in\left(\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),A)\right)^{G_{\mathfrak{n}}}$$

はすぐにわかる（[Rub00, Lemma 4.4.2(i)] 参照）．命題 2.5 より

$$\left(\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),A)\right)^{G_{\mathfrak{n}}}\simeq\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}(H^1(K(\mathfrak{n}),A)^{G_{\mathfrak{n}}})=\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}H^1(K,A)$$

が成り立つので，$\bigcap^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}H^1(K,A)$ の中の元

$$\kappa(c)_{\mathfrak{n}}:=(D_{\mathfrak{n}}\cdot c_{\mathfrak{n}} \bmod M)\in\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}H^1(K,A)$$

ができたことになる．これが「高階 Kolyvagin 導分」と呼ぶべきものである．通常の外積は「G 不変部分をとる操作と可換」という性質を持たないためこのような議論はできない．余外積を考えることが鍵となっているのである．

[*23] さらに $\mathbb{Z}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環にとりかえてもよい．

[*24] 正確な定義は [BuSa, Definition 2.3] 参照．

[*25] 「mod M」とは，「自然な射 $T\to A$ が誘導する射 $\bigcap^r_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),T)\to\bigcap^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),A)$ による像をとる」という意味である．$T\to A$ が余外積に射を誘導することは自明ではなく，$H^1(K(\mathfrak{n}),T)$ が torsion-free という仮定が必要である（この仮定は注意 2.4 で述べたように自然である）．

3.2 Step 2 の高階版

Step 2 の内容は,「Kolyvagin 導分の集まり $\kappa(c) := (\kappa(c)_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}}$ が「finite-singular 関係」

$$\forall \mathfrak{n} : \text{square-free},\ \forall \mathfrak{q} \mid \mathfrak{n} : \text{prime},\ v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}})$$

を満たすことを示す」ということであった([Rub00, Theorem 4.5.4] 参照).ここで,定義はしないが,$v_{\mathfrak{q}}$ と $\varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}$ は $H^1(K, A)$ から $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ への準同型である([BuSa, §§3.1 と 4.1] 参照).これの高階版を示すことは,実は,階数 1 の場合に帰着される.その「トリック」について以下で説明する.

まず,「finite-singular 関係」の高階版とは何かということを明らかにしておく.Step 1 の高階版で見たように,$\kappa(c)_{\mathfrak{n}}$ は

$$\bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r} H^1(K, A)$$

の元である.§2 の終わりに構成した準同型

$$\begin{aligned}\bigwedge\nolimits_R^s (X^*) &\to \mathrm{Hom}_R\left(\bigcap\nolimits_R^r X, \bigcap\nolimits_R^{r-s} X\right)\\ \Phi &\mapsto (f \mapsto (\Psi \mapsto f(\Phi \wedge \Psi))).\end{aligned}$$

を思い出すと,($R = \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$, $X = H^1(K, A)$, $s = 1$ として)$v_{\mathfrak{q}}, \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}} \in H^1(K, A)^*$ はそれぞれ準同型

$$\bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r} H^1(K, A) \to \bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1} H^1(K, A) \tag{5}$$

を誘導する(この準同型もそれぞれ $v_{\mathfrak{q}}, \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}$ と表す).このことから,「finite-singular 関係」の高階版は

$$\forall \mathfrak{n} : \text{square-free},\ \forall \mathfrak{q} \mid \mathfrak{n} : \text{prime},\ v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}}) \text{ in } \bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1} H^1(K, A) \tag{6}$$

と述べられる(これを満たす元の集まりが「高階 Kolyvagin 系」である([BuSa, Definition 4.1] 参照)).

(6) は次のようにして示すことができる.まず,$\bigcap_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1} H^1(K, A)$ の元とは,定義から,写像 $\bigwedge_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1}(H^1(K, A)^*) \to \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ であることに注意する.よって,等式

$$v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}}) \text{ in } \bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1} H^1(K, A)$$

が成り立つことは，任意の $\Phi \in \bigwedge_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1}(H^1(K,A)^*)$ に対して

$$v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}})(\Phi) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}})(\Phi) \text{ in } \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$$

が成り立つことと同値である．これの左辺は，$v_{\mathfrak{q}}$ が誘導する準同型 (5) の定義から，

$$v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}})(\Phi) = \kappa(c)_{\mathfrak{n}}(v_{\mathfrak{q}} \wedge \Phi) = (-1)^{r-1}\kappa(c)_{\mathfrak{n}}(\Phi \wedge v_{\mathfrak{q}}) = (-1)^{r-1}v_{\mathfrak{q}}(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}))$$

であり，同様に右辺は

$$\varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}})(\Phi) = (-1)^{r-1}\varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}}))$$

である．以上より，

$$v_{\mathfrak{q}}(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}})) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}})) \tag{7}$$

を示せば十分であることがわかった．

ここで，実は，$(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}))_{\mathfrak{n}}$ は階数 1 の Kolyvagin 系なのである[*26]（！）．よって，(7) は（古典的な）階数 1 の場合の Step 2 によって示される，というわけである．これが，高階の場合が階数 1 の場合に帰着されるトリックである．

3.3 Step 3 の高階版

Step 3 の内容は，「Kolyvagin 系 $\kappa(c)$ を用いて T の Selmer 群の構造決定をする」ということであった．本稿ではこれの高階版の概略だけを述べる．

古典的な Kolyvagin と Rubin の方法では，Kolyvagin 導分の finite-singular 関係と Tchebotarev 密度定理を駆使して巧みに Selmer 群の上からの評価を与える，というかなり技術的な方法がとられていた（[Rub00, Chapter 5] 参照）．Mazur-Rubin はこの方法を洗練させて，Kolyvagin 系の理論を作ったが（[MaRu04] 参照），そこには「Stark 系」の考え方の萌芽が見られた[*27]．Stark 系とは，次の性質を持つものである：

[*26] 証明の概略：$\Phi \in \bigwedge_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1}(H^1(K,A)^*)$ の $\varprojlim_{\mathfrak{n}} \bigwedge_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}^{r-1}(H^1(K(\mathfrak{n}),T)^*)$ における持ち上げ $\widetilde{\Phi} = (\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}}$ をとると，$\widetilde{\Phi}$ を用いて階数 1 の Euler 系 $\widetilde{\Phi}(c) := (\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{n}}(c_{\mathfrak{n}}))_{\mathfrak{n}}$ が作れる（このような「階数 r の Euler 系から階数 1 の Euler 系を作る方法」はよく知られている（[Rub96, Corollary 6.3], [Per98, §1.2.3 の Lemme], [Rub00, Proposition 8.5.2] 参照））．この Euler 系 $\widetilde{\Phi}(c)$ の Kolyvagin 導分 $\kappa(\widetilde{\Phi}(c))$ は $(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}))_{\mathfrak{n}}$ に一致することがわかる．よって特に，$(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}))_{\mathfrak{n}}$ は階数 1 の Kolyvagin 系になるとわかる．

[*27] Stark 系の考え方は Howard の方法 [MaRu04, Appendix B] に端を発する．このアイデアは Mazur と Rubin が「Darmon 予想」を大幅に解決する際にも用いられた（[MaRu11, §8] 参照）．筆者はこ

(i) Stark 系から（自然に）Kolyvagin 系が作れる（[MaRu16a, Proposition 12.3], [BuSa, Proposition 4.3] 参照），

(ii) Stark 系を用いて（自然に）Selmer 群の構造決定（Fitting イデアルの決定）ができる（[MaRu16a, §8], [BuSa, Theorem 3.19], [Sak, Theorem 4.10] 参照）．

この Stark 系を導入することで，Step 3 は次のように整理できる：

Step 3-1. Stark 系を用いて（自然に）Selmer 群の Fitting イデアルを決定する，

Step 3-2. Stark 系と Kolyvagin 系の間に自然に一対一対応があることを示す，

Step 3-3. Step 3-1 と 3-2 を合わせて，Kolyvagin 系を用いて Selmer 群の Fitting イデアルを決定する．

このうち最も難しいのは Step 3-2 である（ここで Tchebotarev 密度定理も用いる）．この Step の内容は，階数 r の Stark 系のなす加群 $\mathrm{SS}_r(A)$ から階数 r の Kolyvagin 系のなす加群 $\mathrm{KS}_r(A)$ への自然な準同型（上の性質 (i)）

$$\mathrm{SS}_r(A) \to \mathrm{KS}_r(A) \tag{8}$$

が同型であることを示すことである．Step 1 と 2 の高階版では r は任意の正の整数でよかったが，ここでは r として $r_T := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\left(\bigoplus_{v|\infty} H^0(K_v, T^*(1))\right)$ をとる必要がある（§1.2 参照）．

Mazur-Rubin の高階 Kolyvagin 系の理論では，通常の外積を用いて高階 Kolyvagin 系が定義され（[MaRu16a, Definition 10.3] 参照），その定義では (8) が同型であることを示せなかった*28．一方で我々は余外積を用いた定義を採用した（[BuSa, Definition 4.1] 参照）．すると，(8) が同型であることが示せたのである．

3.4 応用

高階 Euler 系の興味深い具体例は現時点で一つも構成されていない．しかし，Rubin-Stark 予想を仮定すれば，L 関数の値と関係する高階 Euler 系が構成できることが知られ

の方法を整理するために「unit 系」というものを [San14, Definition 5.3] において導入したが，これが Stark 系の原型と言える．より整理された形で Stark 系を導入したのは Mazur-Rubin [MaRu16a, Definition 6.5] である．（「Stark 系」という名前も彼らによってつけられた．名前の由来は，Stark 系の具体例が Stark 元を用いて構成できるから，ということのようである（[MaRu16b, Proposition 9.10] 参照）．）

*28 彼らは単射性を示し（[MaRu16a, Theorem 12.4] 参照），全射性については $r = 1$ の場合にのみ示した（[MaRu16a, Remark 11.5] 参照）．全射性は $r > 1$ の場合には一般に期待できないことにも注意をしている（[MaRu16a, Remark 11.9] 参照）．

ている（この高階 Euler 系は Rubin-Stark 元からなるものである）.

我々の理論の応用として，次の式が示せる：

$$|A_L^\chi| \leq \left(\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(L/K)]} (\mathcal{O}_L^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p)^\chi : \langle \varepsilon_{L/K}^\chi \rangle \right), \tag{9}$$

ここで

- p: 奇素数,
- L/K: 代数体の有限次アーベル拡大で，K のすべての無限素点が L で完全分解するもの,
- r: K の無限素点の個数,
- $\chi : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathbb{Z}_p^\times$: 自明でない指標,
- $(-)^\chi$: χ 部分をとる関手,
- $\varepsilon_{L/K}^\chi \in \bigcap^r_{\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(L/K)]}(\mathcal{O}_L^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p)^\chi$: L/K に対する Rubin-Stark 元の (p,χ) 部分 (Rubin-Stark 予想を仮定),
- A_L: L のイデアル類群の p 部分.

Büyükboduk [Büy09, Theorem A] は (9) を，L が Leopoldt 予想を満たす総実代数体の場合に証明していた．彼の方法は，Rubin-Stark 元から階数 1 の Euler 系を作り，階数 1 の Kolyvagin 系の理論を利用する技術的なものであった．我々は高階 Euler-Kolyvagin 系の理論を構築して，その直接的な系としてより一般の場合に（Leopoldt 予想も仮定せず）証明したというわけである．

(9) の「岩澤理論版」も証明されることが期待される．高階 Euler 系の理論の岩澤理論版についても今後研究を進めていく予定である．

謝辞

第 62 回代数学シンポジウムでの講演の機会を下さったプログラム責任者の中村健太郎さん，成田宏秋さん，またシンポジウム責任者の市川尚志さんに感謝いたします．

参考文献

[BuFl01] D. Burns, M. Flach, Tamagawa numbers for motives with (non-commutative) coefficients, Doc. Math. **6** (2001) 501-570.

[BKS] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On Stark elements of arbitrary weight and their p-adic families, preprint. arXiv:1607.06607

[BSS] D. Burns, R. Sakamoto, T. Sano, On the theory of higher rank Euler, Kolyvagin and Stark systems, II, in preparation.

[BuSa] D. Burns, T. Sano, On the theory of higher rank Euler, Kolyvagin and Stark systems, preprint. arXiv:1612.06187

[Büy09] K. Büyükboduk, Kolyvagin systems of Stark units, J. reine angew. Math. **631** (2009) 85-107.

[Kat93] K. Kato, Iwasawa theory and p-adic Hodge theory, Kodai Math. J. **16** no. 1 (1993) 1-31.

[MaRu04] B. Mazur, K. Rubin, Kolyvagin systems, Mem. Amer. Math. Soc. **799** (2004).

[MaRu11] B. Mazur, K. Rubin, Refined class number formulas and Kolyvagin systems, Compos. Math. **147** (2011) 56-74.

[MaRu16a] B. Mazur, K. Rubin, Controlling Selmer groups in the higher core rank case, J. Th. Nombres Bordeaux **28** (2016) 145-183.

[MaRu16b] B. Mazur, K. Rubin, Refined class number formulas for $\mathbb{G}_m$, J. Th. Nombres Bordeaux **28** (2016) 185-211.

[Per98] B. Perrin-Riou, Systèmes d'Euler p-adiques et théorie d'Iwasawa, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998) 1231-1307.

[Rub96] K. Rubin, A Stark Conjecture 'over $\mathbb{Z}$' for abelian L-functions with multiple zeros, Ann. Inst. Fourier **46** (1996) 33-62.

[Rub00] K. Rubin, Euler systems, Annals of Math. Studies **147**, Princeton Univ. Press, 2000.

[Sak] R. Sakamoto, Stark systems over Gorenstein local rings, preprint. arXiv:1612.06531

[San14] T. Sano, A generalization of Darmon's conjecture for Euler systems for general p-adic representations, J. Number Theory **144** (2014) 281-324.