保型L函数の特殊値の代数性について -極私的総括-

古澤 昌秋*
大阪市立大学大学院理学研究科

第62回 代数学シンポジウム 2017年9月6日

Contents

はじめに

「極私的総括」という若干おどろおどろしい副題を付けた理由：

- 従来の正則保型形式の枠組みではない，新しい枠組みでの発展（cohomological な保型表現, ...）が最近著しいように思われる．しかし残念ながら，これらについては，講演者の力量不足で余り言及できず，総括としては物足りないものになることをご容赦頂きたい．

- 正則保型形式の枠組みにおいても広く深く結果があるわけだが，これもあまりに広大・深遠な分野であり，それを総括することも私の力に余る．これまでの講演者の本研究課題との関わりに基づいた，あくまで個人的な視点からの総括しか出来ないことを，あらかじめ御寛恕頂きたい．

*これは，当日の発表資料をほぼそのまま原稿におこしたものです．そのためにあいまいな点，説明の不十分な点が多々あると思いますが，何卒御寛恕くださいますよう御願い致します．なお、本研究は JSPS 科研費 JP16K05069 の助成を受けたものです．

1　原型：Riemann のゼータ函数

Riemann のゼータ函数 $\zeta(s)$ は，$\mathrm{Re}(s) > 1$ において絶対収束する級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

によって定義され，次の解析的性質を持つ：

- $\zeta(s)$ は，複素平面全体 $\mathbb{C}$ で定義された $s = 1$ のみを極に持つ有理型函数に解析接続される．
- さらに，$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\,\zeta(s)$ とすると，

  $$\text{函数等式：}\quad \xi(s) = \xi(1-s)$$

  が成立する．

$\zeta(s)$ の特殊値

整数 $k \geq 1$ に対して，**Bernoulli 数** B_k を

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, B_k\, \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

によって定める．明らかに，$B_k \in \mathbb{Q}$ である．最初の幾つかを計算してみると，

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730},\ B_7 = \frac{7}{6},\ \ldots$$

となっている．

定理 1 (Euler, 1742)　整数 $k \geq 1$ に対して，

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\, B_k\, \pi^{2k}, \qquad \text{特に，}\ \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \in \mathbb{Q}.$$

函数等式を用いれば，次が言える．

系 1　負の整数 m に対して，$\zeta(s)$ は $s = m$ において，$\mathbb{Q}$ に値をとる．
　より詳しく言うと，整数 $k \geq 1$ に対して，

$$\zeta(1-2k) = \frac{(-1)^k\, B_k}{2k}, \qquad\qquad \zeta(-2k) = 0\ (\text{自明な零点}).$$

負の奇数での値について，Lichtenbaum [8] は次の予想を提出した．

予想 1 (Lichtenbaum, 1973) 整数 $k \geq 1$ に対して，2 の冪を除いて，$\zeta(1-2k)$ は，$(-1)^k \cdot \dfrac{\# K_{4k-2}(\mathbb{Z})}{\# K_{4k-1}(\mathbb{Z})}$ に等しい．ここで，$K_n(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}$ の *higher* K 群を表す．

この予想は次のように解決された．

定理 2 (Borel, Voevodsky, Rost, ... ，最終的には，Rognes-Weibel [9])

$$\zeta(1-2k) = 2 \cdot (-1)^k \cdot \frac{\# K_{4k-2}(\mathbb{Z})}{\# K_{4k-1}(\mathbb{Z})}.$$

実際に，例えば,

$$\# K_{22}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/691\mathbb{Z}, \qquad \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$$

となっている．

2 Critical Value

まず,

加藤和也 :「数論の現在」（数学セミナー 1992 年 4 月号）

に述べられている,「ゼータ函数の値の理解の 3 段階」を思い起こす．

ゼータ函数の値の理解の３段階

- ゼータ函数の値の理解　第１段階：有理性・代数性

  $L(s)$ の $s = n \in \mathbb{Z}$ での値を適当な **period** または **regulator** で割ったときに適切な数体（$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体）に属することを示す．ただし，$L(s)$ が $s = n$ で零点や極を持つときは，leading term を考える．

- ゼータ函数の値の理解　第２段階：p 進性質

  適切な合同関係式を示し，p 進 L 函数を導入・構成する．

- ゼータ函数の値の理解　第３段階：数論的意味

  period または regulator で割って正規化された $L(s)$ の特殊値及び第 2 段階で得られた p 進 L 函数の特殊値は大変重要であり，Diophantine data と結び付けられるであろう．

Tate, Birch, Swinnerton-Dyer, 志村, Deligne, Beilinson, 岩澤, Bloch, 加藤, 肥田, Fontaine, Perrin-Riou, ... といった方々が特殊値の研究に大きな足跡を残してきた．

とはいうものの，まだ，ほとんどのゼータ函数について，理解は第 3 段階まで進んでいないのではないだろうか．それどころか実際のところは，第 1 段階にも達していない場合がほとんどではないだろうか．

Critical Value

以下においては，regulator が現れてくるような特殊値は除いて，**critical value** を考えることにする．

Motive

M を（簡単のため）$\mathbb{Q}$ 上定義された motive とする．

$$M \text{ の } L \text{ 函数：} \quad L(M,s) := \prod_{p<\infty} L_p(M,s) \qquad \text{（Euler 積）}$$

を考える．ただし，

$$L_p(M,s) = \det\left(1 - p^{-s}\cdot \mathrm{Frob}_p\,|_{M_\ell^{I_p}}\right)^{-1}, \quad \ell \neq p$$

で，これは素数 ℓ のとり方によらないと予想されている．ここで，

- M_ℓ は M の ℓ 進 realization
- I_p は p における惰性群

である．

さらに，無限因子 $L_\infty(M,s)$ が，M の Hodge realization によって定まり，それは本質的に Γ 函数の積である．

いま，$\Lambda(M,s) := L_\infty(M,s)\cdot L(M,s)$ が $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に解析接続され，

$$\text{函数等式：} \quad \Lambda(M,s) = \epsilon(M,s)\cdot\Lambda\left(\check{M}, 1-s\right)$$

を満たすとする．ただし，

- $\check{M}$: M の dual motive
- $\epsilon(M,s)$ は定数と s の指数函数の積

とする．

定義 1 (Critical value) このとき，$k\in\mathbb{Z}$ が M について *critical* であるとは，$L_\infty(M,s)$ と $L_\infty\left(\check{M},1-s\right)$ がどちらも $s=k$ を極に持たないことをいう．

$k\in\mathbb{Z}$ が M について *critical* であるとき，$L(M,k)$ を *critical value* という．

Critical value に関する，次の Deligne の予想 [2] は有名である．

予想 2 (Deligne, 1979) *Motive* M についてある幾何学的 *invariant* $c^{\pm}(M)$ が存在して，$k \in \mathbb{Z}$ が *critical* ならば，

$$\frac{L(M,k)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^{d(k)} \cdot c^{\pm}(M)} \in \mathbb{Q}$$

となる $d(k) \in \mathbb{Z}$ が存在する．ただし，$\pm = (-1)^k$.

Remark

- **Deligne period** $c^{\pm}(M)$ は，M の de Rham realization と Betti realization の比較から定義される．
- Deligne 予想は幾つかの特別な場合を除いて，いまだに wide open であると思われる．
- 適当な不変量で critical value を割った比の有理性が示されたとしても，その不変量が Deligne period と等しいことを示すのは，一般には highly non-trivial な問題である．

3 保型 L 函数の critical value

大まかに言えば:

- Langlands 予想によれば，motivic L 函数 $L(M,s)$ は保型 L 函数によって表すことができる．

よって，予想を信じるならば，保型 L 函数の特殊値を調べることが，すなわち，motivic L 函数の特殊値を調べること，ということになる．実際のところ，

- 対応する（または，そう予想される）保型 L 函数の特殊値を調べるのが，現在のところ特殊値を調べるための唯一の方法であるように思われる．

Motive 理論の非専門家としての素朴な疑問：

- Motive 理論の方で大きな進展があれば，motivic L 函数の特殊値の研究に，保型形式を経由しないか，もしくは保型形式の利用が軽減される，といったことになる可能性はあるのだろうか？

原型

Ramanujan's Δ: $z \in \mathfrak{H} = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(w) > 0\}$ に対して，

$$\Delta\,(z) := q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, q^n, \quad q = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\, z\right)$$

とすると，Δ は重さ 12 の $\mathrm{SL}_2\,(\mathbb{Z})$ に関する cusp form である．

$$L\,(s, \Delta) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-s}$$

とする．

定理 3 (志村 [10])

$$\exists \text{“}\textit{periods}\text{”}\ c^{\pm}\,(\Delta)\ \textit{such that}\ \frac{L\,(n,\Delta)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^n c^{\pm}\,(\Delta)} \in \mathbb{Q},\ 1 \le n \le 11,\ \pm = (-1)^n.$$

志村は，Eichler-Shimura cohomology 理論の応用としてこれを示した．志村の方法は，後に Manin によって modular symbol の理論として一般化された．

次の定理は，その後の数論の発展に極めて大きな影響を与えた．説明の簡単のため full modular の場合に限定して述べる．

定理 4 (志村 [11], Rankin-Selberg method を用いて)

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(f)\ q^n \in S_k\,(\mathrm{SL}_2\,(\mathbb{Z}))$$

が *Hecke* 固有形式で $a_1\,(f) = 1$ であるとする．このとき，$\sigma \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{C})$ (= 体 $\mathbb{C}$ の自己同群) に対して，

$$\left(\frac{L\,(n,f)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^n c^{\pm}\,(f)}\right)^{\sigma} = \frac{L\,(n,f^{\sigma})}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^n c^{\pm}\,(f^{\sigma})},\ 1 \le n \le k-1,\ \pm = (-1)^n.$$

ただし，

$$L\,(s,f) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(f)\ n^{-s}, \quad f^{\sigma}\,(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(f)^{\sigma}\ q^n \in S_k\,(\mathrm{SL}_2\,(\mathbb{Z}))\,.$$

特に，

$$\frac{L\,(n,f)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^n c^{\pm}\,(f)} \in \mathbb{Q}\,(f) := \mathbb{Q}\,(\{a_n\,(f) \mid n \ge 1\})\,.$$

基本原理

講演者の知る限り，正則保型形式の保型 L 函数の特殊値の代数性の証明は，以下の原理（またはその変種）に基づくものが殆どである．

まず，

- $\mathcal{A}_\Lambda(\mathfrak{H})$ (resp. $\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{H})$) で領域 $\mathfrak{H}$ 上の type Λ の保型形式 (resp. cusp form) の空間を表す．

次のような状況を考える：

- 領域 $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ について，$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}'$ とする．
- $\mathcal{A}_{\Lambda'}(\mathfrak{H}')$, $\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{H})$ は $\bar{\mathbb{Q}}$-structure を持つ，すなわち $\bar{\mathbb{Q}}$ 部分空間 $\mathcal{A}_{\Lambda'}\left(\mathfrak{H}', \bar{\mathbb{Q}}\right)$, $\mathcal{S}_\Lambda\left(\mathfrak{H}, \bar{\mathbb{Q}}\right)$ で，
$$\mathcal{A}_{\Lambda'}(\mathfrak{H}') = \mathcal{A}_{\Lambda'}\left(\mathfrak{H}', \bar{\mathbb{Q}}\right) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}, \quad \mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{H}) = \mathcal{S}_\Lambda\left(\mathfrak{H}, \bar{\mathbb{Q}}\right) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$$
となるものが存在する．ただし，$\bar{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ の代数閉包．
- $\Phi \in \mathcal{A}_{\Lambda'}(\mathfrak{H}')$ の $\mathfrak{H}$ への制限 $\Phi|_{\mathfrak{H}}$ の cuspidal component が $\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{H})$ に属し，特に $\Phi \in \mathcal{A}_{\Lambda'}\left(\mathfrak{H}', \bar{\mathbb{Q}}\right)$ ならば，それが $\mathcal{S}_\Lambda\left(\mathfrak{H}, \bar{\mathbb{Q}}\right)$ に属する．
- $\mathcal{S}_\Lambda\left(\mathfrak{H}, \bar{\mathbb{Q}}\right)$ は Hecke 固有形式からなる直交基底を持つ．

さらに，

- L 函数の積分表示の理論により，Eisenstein 級数 $E \in \mathcal{A}_{\Lambda'}(\mathfrak{H}')$ は，Hecke 固有形式 $\phi \in \mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{H})$ に対して，Petersson 内積 $\langle \phi, E|_{\mathfrak{H}} \rangle_{\mathfrak{H}}$ が ϕ の L 函数の特殊値 $L(n, \phi)$ を与える．
- 上記の Eisenstein 級数 E について，$E \in \mathcal{A}_{\Lambda'}\left(\mathfrak{H}', \bar{\mathbb{Q}}\right)$ である．

以上のような状況にあるとせよ．このとき，$\{\phi_i\}$ を $\mathcal{S}_\Lambda\left(\mathfrak{H}, \bar{\mathbb{Q}}\right)$ の Hecke 固有形式からなる直交基底とし，$\phi_1 = \phi$ とするならば，
$$E|_{\mathfrak{H}} \text{ の cuspidal part} = \sum_i a_i \phi_i, \ a_i \in \bar{\mathbb{Q}}$$
と表せるから，
$$L(n, \phi) = \langle \phi, E|_{\mathfrak{H}} \rangle_{\mathfrak{H}} = \bar{a}_1 \cdot \langle \phi, \phi \rangle$$
となり，$L(n, \phi)$ の代数性：
$$\frac{L(n, \phi)}{\langle \phi, \phi \rangle} \in \bar{\mathbb{Q}}$$
が成り立つ．

以上の議論からうかがえるように，保型 L 函数の特殊値の代数性を示すための重要な構成要素として:

- **保型形式の空間の $\bar{\mathbb{Q}}$-structure**，もしくは，**保型形式の算術性の概念**

- **対象となる保型 L 函数の積分表示**

- **積分表示に現れる Eisenstein 級数の算術性**

が表出している．そして，これらがうまく絡み合うと特殊値の代数性を示すことができる．

Hermitian tube domain 上の正則保型形式に関しては，志村多様体の canonical model の理論により，**Fourier 係数**（すなわち q 展開）を用いて $\bar{\mathbb{Q}}$-structure を保型形式の空間に導入することができる．しかし，この Fourier 係数による $\bar{\mathbb{Q}}$-structure と compatible な L 函数の積分表示で，知られているものは限られている．

新しい流れ (Mahnkopf, Ash, Ginzburg, Raghuram, Shahidi, Harder, Grobner, Harris, Lin, ...)

上記のような正則保型形式の枠組みに入らない，Whittaker model 等を使った保型 L 函数の積分表示が色々と知られている．

Langlands functoriality を考えると，基本になるのは GL_n の保型 L 函数なのだから，GL_n の algebraic automorphic representation の保型 L 函数の特殊値に真正面から取り組むことこそ本筋である，という考え方もあり得る．

- 正則保型形式の場合は Fourier 係数を使ったが，かわりに Whittaker model や Shalika model を使って rational structure を導入することができる．

- 保型 L 函数の積分表示の無限素点上の局所積分 $p(m, \Pi_\infty)$ が消えてしまうと，$0 = 0$ となり全てが無に帰してしまうおそれがあったが，Sun [12] によって，広いクラスに対して，$p(m, \Pi_\infty) \neq 0$ が示された．

- $L(m, \Pi) / p(m, \Pi) \in \bar{\mathbb{Q}}$ の形の定理が証明されているが，$p(m, \Pi)$ を Deligne period と関係付けるのは大変難しい問題であると思われる．

この新しい流れの研究は注視すべき方向ではあるが，残念ながら，講演者は極めて浅くしか理解できていない．興味のある方は，例えば，Grobner-Lin [7] や，それの引用論文たちを参照されたい．

4　森本和輝（神戸大学）との結果の紹介

最後に，講演者と森本和輝氏（神戸大学）との共同研究によって得られた結果を簡単に紹介する．

$\mathrm{SO}(V) \times \mathrm{GL}(2)$ の L 函数の特殊値について [3, 4]

定理 5 (古澤-森本 [3]) • *$h \in S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon)$, newform*

- *π: h に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約 cuspidal 表現*
- *V: $\mathbb{R}$ 上定符号な 2 次形式が定義された $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間*
- *τ: $\mathrm{SO}(V, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約保型表現で τ_∞ は自明な 1 次元表現*
- *$n = \dim_{\mathbb{Q}} V \geq 4$ かつ $k > 2n$*

このとき，

$$P(\pi, \tau) = \left(\pi^{2k-n} \langle h, h \rangle\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad t_{n,k} = \frac{k-n+1}{2}$$

とおくと，$\mathbb{Q}$ の素点の有限集合 S で ∞ を含み，*partial* L 函数

$$L_S(s, \pi \otimes \tau) = \prod_{p \notin S} L_p(s, \pi \otimes \tau)$$

が次をみたすものが存在する：

$$L_S(t_{n,k}, \pi \otimes \tau) \cdot P(\pi, \tau)^{-1} \in \bar{\mathbb{Q}}.$$

Remark

- $L(s, \pi \otimes \tau)$ は $\mathrm{SO}(V) \times \mathrm{GL}(2)$ の L 函数である．
- $L(s, \pi \otimes \tau)$ は $s \mapsto 1 - s$ に関して函数等式を持つように s を normalize してある．(automorphic normalization であり motivic normalization ではないので，$t_{n,k} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ になっている．)

この論文の続編 [4] において：

- 基礎体を $\mathbb{Q}$ から総実代数体に，
- $\mathrm{SO}(V, \mathbb{A})$ の保型表現 τ について，τ_∞ を一般の有限次元表現に，
- 右端（すなわち最大）の critical point だけではなく他の critical point に（残念ながら，いくつかの critical point は除外），

それぞれ拡張した．

また，上記論文 [4] にある森本による Appendix では，示された代数性が Deligne の予想と compatible であることが示されている．

$n = \dim_{\mathbb{Q}} V = 4$ のとき

D は $\mathbb{Q}$ 上の 4 元数環で definite, i.e. $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ (Hamilton quaternion) とする．
Accidental isomorphism:

$$\mathrm{SO}(D) \simeq \left\{ (d_1, d_2) \in D^{\times} \times D^{\times} \mid \mathrm{N}(d_1) = \mathrm{N}(d_2) \right\} / \mathrm{diag}\, \mathbb{Q}^{\times}$$

を思い起こす．これに注意することによって，次の Rankin triple L 函数のいわゆる unbalanced case の非中心特殊値に関する代数性が上記の定理から得られる．

系 2 (古澤-森本 [3])

- $f_i \in S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon_i)$, *newform, i=1,2,3.*
- π_i: f_i に付随した $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約 *cuspidal* 表現．
いま，
- $k_1 > 8$, $k_2 = k_3 = 2$, $\varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1$,
- $\exists D$: *definite* な $\mathbb{Q}$ 上の 4 元数環で π_2, π_3 は $D^{\times}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ への *Jacquet-Langalands transfer* を持つ

と仮定すると，次が成り立つ：

$$L(k_1 - 1, f_1 \otimes f_2 \otimes f_3) \cdot \pi^{8-4k_1} \langle f_1, f_1 \rangle^{-2} \in \bar{\mathbb{Q}}.$$

定理の証明の大筋

- $\mathrm{SO}(V, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約保型表現 τ に対して，V の codimension 1 の部分空間 W と $\mathrm{SO}(W, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約保型表現 σ で，$\tau|_{\mathrm{SO}(W, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})}$ に現れるものをとる．
- この σ と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約 cuspidal 表現 π から，$\mathbb{G} \simeq \mathrm{SO}(n+1, 2)$ の Eisenstein series を構成する．$\mathbb{G}$ の maximal parabolic subgroup P で，その Levi component が $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SO}(W)$ になるものを Eisenstein series の構成に使う．
- $\mathbb{G}$ のもう一つの maximal parabolic subgroup Q の unipotent radical (abelian) に関して，その stabilizer が $\mathrm{SO}(V)$ になるような Fourier 係数をとり，さらに τ に属する保型形式の値を重みとする有限和をとる．それは，積分表示の理論により，L 函数の特殊値で表される．
- 本質的には，Eisenstein series の Fourier 係数の代数性と compact 群上の保型形式が有限個の値をとる函数であることから，L 函数の特殊値の代数性が従う．

Böcherer 予想 [5, 6]

$$\mathfrak{H}_2 := \left\{ Z = X + \sqrt{-1}\, Y \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid Z = {}^tZ,\, \mathrm{Im}\,(Y) > 0 \right\}$$

とする．このとき，正則函数 $\Phi : \mathfrak{H}_2 \to \mathbb{C}$ が重さ k の $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$ に関する Siegel cusp form であるとは，

$$\Phi(\gamma\langle Z\rangle) = \det(CZ+D)^k \cdot \Phi(Z)$$

が，$Z \in \mathfrak{H}_2$, $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$, $\gamma\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$, に対して成り立ち，その Fourier 展開が

$$\Phi(Z) = \sum_{T>0} a(T,\Phi)\, \exp\left[2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}\,(TZ)\right],$$

$T = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ となることをいう．

E は虚 2 次体で，$-D_E$ をその判別式とする．このとき，Hecke 固有形式 Φ に対して，$B(\Phi; E)$ を次の様に定義する：

$$B(\Phi; E) = \frac{1}{w(E)} \sum_{\{T \mid \det T = D_E/4\}/\sim} a(T, \Phi).$$

ここで，

$$T_1 \sim T_2 \Longleftrightarrow \exists\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ such that } T_1 = {}^t\gamma T_2 \gamma,$$

$w(E)$ は E に含まれる 1 の冪根の個数を表す．

Böcherer は 1986 年に次の予想を提出した．

予想 3 (Böcherer, 1986) Φ のみに依存する定数 C_Φ が存在して，全ての虚 2 次体 E に対して，

$$L\left(\frac{1}{2}, \pi(\Phi) \times \chi_E\right) = C_\Phi \cdot D_E^{-k+1} \cdot |B(\Phi; E)|^2$$

が成り立つ．ただし，$\pi(\Phi)$ は Φ に付随する $\mathrm{GSp}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現，$L(s, \pi(\Phi))$ は $\pi(\Phi)$ のスピノル L 函数，χ_E は E に対応する 2 次指標である．

これに関係して，論文 [5] では次の定理が証明されている．

定理 6 (古澤-森本 [5])

$$L\left(\frac{1}{2}, \pi(\Phi)\right) L\left(\frac{1}{2}, \pi(\Phi) \times \chi_E\right) \neq 0 \Longleftrightarrow B(\Phi; E) \neq 0.$$

Explicit refinement of Böcherer's conjecture

さらに，preprint [6] においては，Böcherer 予想が次の精密化された形で証明されている．

定理 7 (古澤-森本 [6]) いま，$\varPhi$ は齋藤-黒川リフトではないとする．このとき，

$$\frac{|B(\varPhi;E)|^2}{\langle \varPhi, \varPhi \rangle} = D_E^{k-1} \cdot 2^{2k-5} \cdot \frac{L\left(\frac{1}{2}, \pi(\varPhi)\right) \, L\left(\frac{1}{2}, \pi(\varPhi) \times \chi_E\right)}{L(1, \pi(\varPhi), \mathrm{Ad})}.$$

この定理の系として，次の結果が従う．

系 3 (スピノル L 函数の中心特殊値の代数性) $\varPhi$ を，全ての *Fourier* 係数 $a(T, \varPhi)$ が代数的整数のなす環 $\bar{\mathbb{Z}}$ に含まれるように *normzlize* する．このとき，全ての虚 2 次体 E に対して，

$$w(E)^2 \cdot D_E^{k-1} \cdot 2^{2k-5} \cdot \frac{L\left(\frac{1}{2}, \pi(\varPhi)\right) \, L\left(\frac{1}{2}, \pi(\varPhi) \times \chi_E\right)}{L(1, \pi(\varPhi), \mathrm{Ad})} \cdot \langle \varPhi, \varPhi \rangle \in \bar{\mathbb{Z}}$$

が成り立つ．

References

[1] S. Böcherer. *Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß*, Preprint Math. Bottingensis Hefr 68, 1986.

[2] P. Deligne. *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales.* With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus. Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 313–346, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[3] M. Furusawa and K. Morimoto. *On special values of certain L-functions.* Amer. J. Math. 136 (2014), no. 5, 1385–1407.

[4] M. Furusawa and K. Morimoto. *On special values of certain L-functions, II.* Amer. J. Math. 138 (2016), no. 4, 1117–1166.

[5] M. Furusawa and K. Morimoto. *On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for* $\mathrm{SO}(2n+1) \times \mathrm{SO}(2)$. Math. Ann. 368 (2017), no. 1-2, 561–586.

[6] M. Furusawa and K. Morimoto. *Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Böcherer's conjecture.* arXiv:1611.05567 (preprint).

[7] H. Grobner and J. Lin. *Special values of L-functions and the refined Gan-Gross-Prasad conjecture.* arXiv:1705.07701 (preprint).

[8] S. Lichtenbaum. *Values of zeta-functions, étale cohomology, and algebraic K-theory.* Algebraic K-theory, II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 489–501. Lecture Notes in Math., Vol. 342, Springer, Berlin, 1973.

[9] J. Rognes and C. Weibel. *Two-primary algebraic K-theory of rings of integers in number fields.* Appendix A by Manfred Kolster. J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 1, 1–54.

[10] G. Shimura. *Sur les intgérales attachées aux formes automorphes.* J. Math. Soc. Japan 11 (1959), 291–311.

[11] G. Shimura. *On the periods of modular forms.* Math. Ann. 229 (1977), no. 3, 211–221.

[12] B. Sun. *The nonvanishing hypothesis at infinity for Rankin-Selberg convolutions.* J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), no. 1, 1–25.