

エタール層とアイソクリスタル

志甫 淳*

1 序

位相幾何学，代数幾何学や数論幾何学においては，複素多様体あるいは様々な体上の代数多様体 X に対する様々なコホモロジー理論が研究の重要な道具であり，研究対象となるが，更に， X 上のある種の層がコホモロジー理論の係数層として考えられ，係数層自体も興味深い研究対象となる．そして，多様体が連結なとき，この係数層を分類する群（あるいは副有限群，副代数群）として様々な基本群の概念が定義される．本稿では，以下の状況で多様体，その上の係数層および基本群を考える．

- (A) X を連結射影的複素多様体とするとき， X 上の局所系 (X 上の局所定数層) が Betti コホモロジーの係数層として考えられる． $x \in X$ とするとき， x を基点とする X の位相的基本群 $\pi_1(X, x)$ が，次の圏同値を満たすような群として定義される．

$$\{X \text{ 上の局所系} \} \xrightarrow{\cong} \{\pi_1(X, x)\text{-集合} \}; \quad E \mapsto E_x.$$

但し E_x は E の x におけるファイバーであり， $\pi_1(X, x)$ -集合とは $\pi_1(X, x)$ の作用を持つ集合のことである．

- (B) X を体 k 上の連結射影的で滑らかな代数多様体とするとき， X のエタールサイト X_{et} 上の局所定数構成可能層がエタールコホモロジーの係数層として考えられる． x を X の幾何的点とするとき， x を基点とする X のエタール基本群 $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$ が，次の圏同値を満たすような副有限群として定義される．

$$\{X_{\text{et}} \text{ 上の局所定数構成可能層} \} \xrightarrow{\cong} \{\pi_1^{\text{et}}(X, x)\text{-有限集合} \}; \quad E \mapsto E_x.$$

但し， E_x は E の x におけるファイバーであり， $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$ -有限集合とは $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$ の連続作用を持つ有限集合のことである．

*東京大学大学院数理科学研究科．科学研究費補助金（基盤 (C)17K05162 および基盤 (A)15H02048）の援助を受けております．

- (C) X を標数 0 の体 k 上の連結射影的で滑らかな代数多様体とすると、 X 上の \mathcal{O}_X 接続 \mathcal{D}_X 加群が de Rham コホモロジーの係数層として考えられる。なお、 \mathcal{D}_X は X 上の微分作用素環であり、局所的に X の座標系 $t := (t_1, \dots, t_d)$ をとるとき、 $\mathcal{D}_X = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^d} \mathcal{O}_X \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i$ と表せる。 X が k 有理点 x を持つとき、 x を基点とする X の de Rham 基本群 $\pi_1^{\text{dR}}(X, x)$ が、次の圏同値を満たすような k 上の副代数群として定義される。

$$\{X \text{ 上の } \mathcal{O}_X \text{ 接続 } \mathcal{D}_X \text{ 加群}\} \xrightarrow{\cong} \text{Rep}_k(\pi_1^{\text{dR}}(X, x)); \quad E \mapsto E_x.$$

但し、 E_x は E の x におけるファイバーであり、右辺は $\pi_1^{\text{dR}}(X, x)$ の k 上の (副代数群としての) 有限次元表現のなす圏である。

- (D) X を標数 $p > 0$ の体 k 上の連結射影的で滑らかな代数多様体であるときも、 X 上の \mathcal{O}_X 接続 \mathcal{D}_X 加群が de Rham コホモロジーの係数層として考えられる。なお、 \mathcal{D}_X は X 上の微分作用素環であり、局所的に X の座標系 $t := (t_1, \dots, t_d)$ をとるとき、やはり $\mathcal{D}_X = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^d} \mathcal{O}_X \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i$ と表せるものである。 X が k 有理点 x を持つとき、 x を基点とする X のストラティファイド基本群 $\pi_1^{\text{strat}}(X, x)$ ¹ が、次の圏同値を満たすような k 上の副代数群として定義される。

$$\{X \text{ 上の } \mathcal{O}_X \text{ 接続 } \mathcal{D}_X \text{ 加群}\} \xrightarrow{\cong} \text{Rep}_k(\pi_1^{\text{strat}}(X, x)); \quad E \mapsto E_x.$$

但し、記号の意味は (C) と同様である。

- (E) X を標数 $p > 0$ の完全体 k 上の連結射影的で滑らかな代数多様体とし、 $W = W(k)$ を k の Witt 環、 $K = \text{Frac}(W)$ を W の商体とすると、 X/W 上のアイソクリスタルの圏 (定義は後ほど述べる) がクリスタリンコホモロジーの係数層として考えられる。 X が k 有理点 x を持つとき、 x を基点とする X のクリスタル基本群² $\pi_1^{\text{crys}}(X, x)$ が、次の圏同値を満たすような K 上の副代数群として定義される。

$$\{X/W \text{ 上のアイソクリスタル}\} \xrightarrow{\cong} \text{Rep}_K(\pi_1^{\text{crys}}(X, x)); \quad E \mapsto E_x.$$

但し、記号の意味は (C) と同様である。

(A)~(E) における基本群は、異なる状況において異なる方法で定義されたものであるが、適当な状況下では 2 つ以上の基本群が定義され、それらに関係がある。例えば、基本群の Abel 化の双対である 1 次コホモロジー群を考えたときは、(A), (B), (C), (E) の比較定理は (高次のコホモロジーの場合も含めて) 良く知られている

¹この記法は Esnault-Mehta [EM10], Esnault-Srinivas [ESr16] 等による。

²これは [Sh00] におけるクリスタル基本群とは異なる：[Sh00] におけるクリスタル基本群は本稿のもの最大副幕単商である。

ものであるし、また、基本群の最大副冪単商を考えたときは、(A), (B), (C), (E) の比較定理は、例えば Hain [Ha87], Deligne [D89], 筆者 [Sh00], [Sh02], Olsson[Ol11] 等により研究されたものである。以上に例示した比較定理はコホモロジーや基本群の最大副冪単商がモチーフ的なものであることの現れとみなせる。本稿の主目標は、 X の形状が簡単な場合に、エタール層とアイソクリスタルを分類する基本群、つまり (B) と (E) における基本群のより細やかな関係を考えることであるが、そこにはモチーフ的な問題ではない難しさも含まれているように思われる。

本稿では、2 節において、 X が \mathbb{C} 上の連結射影的で滑らかな代数多様体の場合に、(B), (C) の基本群のある関係について述べた Malcev-Grothendieck の定理を紹介する。次に、3 節において、Malcev-Grothendieck の定理の正標数版である Gieseker 予想と、Esnault-Mehta による予想の解決について述べる。これは (B), (D) の基本群の関係についての結果である。4 節では、アイソクリスタルの定義を述べたあと、Gieseker 予想の p 進版である de Jong 予想について述べる。これは (B), (E) の基本群の関係についての予想である。5 節では、de Jong 予想に関する阿部-Esnault, Kedlaya や Esnault-筆者の結果について述べる。

最後に、代数的シンポジウムにおいて、本稿の内容に関する講演の機会を与えてくださった関係者の皆様、特にシンポジウム責任者の市川尚志先生、会場責任者の渡部隆夫先生と数論のプログラム責任者の中村健太郎先生、成田宏秋先生に感謝を申し上げる。

2 Malcev-Grothendieck の定理

X を \mathbb{C} 上の連結射影的で滑らかな代数多様体とし、 x を X の \mathbb{C} 有理点とすると、 X は連結射影的な複素多様体ともみなせる。従って、1 節の (A), (B), (C) で述べた方法で位相的基本群 $\pi_1(X, x)$, エタール基本群 $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$, de Rham 基本群 $\pi_1^{\text{dR}}(X, x)$ が定義されるが、自然な同型および圏同値

$$(2.1) \quad \pi_1^{\text{et}}(X, x) \cong \pi_1(X, x)^\wedge, \quad \text{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1^{\text{dR}}(X, x)) \cong \text{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1(X, x))$$

がある。ここで、 $\pi_1(X, x)^\wedge$ は $\pi_1(X, x)$ の副有限完備化で、 $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1(X, x))$ は $\pi_1(X, x)$ の \mathbb{C} 上の (抽象群としての) 有限次元表現のなす圏である。(前者は [SGA1] で示されており、また後者は Riemann-Hilbert 対応の帰結である。) これらは、 $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$, $\pi_1^{\text{dR}}(X, x)$ が $\pi_1(X, x)$ に「最も近い」副有限群、副代数群であることを示している。位相的基本群 $\pi_1(X, x)$ は、その定義に X の複素多様体としての位相を用いるので代数的に定義されたものではないが、エタール基本群 $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$ あるいは de Rham 基本群 $\pi_1^{\text{dR}}(X, x)$ の定義は代数的であり、従って、位相的基本群のある種の「近似」は代数的に定義されるということになる。

上の状況で、エタール基本群 $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$ と de Rham 基本群 $\pi_1^{\text{dR}}(X, x)$ の関係はどうなっているだろうか？ X_{et} 上の局所定数構成可能層を与えることは、 X の有限エ

タール被覆 $g: Y \rightarrow X$ を与えることに他ならないが、このとき自明な \mathcal{D}_Y 加群 \mathcal{O}_Y の g による順像 $g_*\mathcal{O}_Y$ は \mathcal{O}_X 接続 \mathcal{D}_X 加群となる。 g が自明な被覆 ($\coprod X \rightarrow X$ の形の被覆) でない場合、 $g_*\mathcal{O}_Y$ は定数 (ある r に対する $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ と同型なもの) にはならないので、 $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$ が非自明なとき $\pi_1^{\text{dR}}(X, x)$ も非自明になる、つまり $\pi_1^{\text{dR}}(X, x)$ が自明ならば $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$ も自明になる。次の定理は、この事実の逆を主張するものである：

定理 2.1 (Malcev-Grothendieck [Ma40], [Gr70]). X を \mathbb{C} 上の連結射影的で滑らかな代数多様体、 x を X の \mathbb{C} 有理点とし、 $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$ が自明であるとすると、 $\pi_1^{\text{dR}}(X, x)$ も自明である。つまり任意の \mathcal{O}_X 接続 \mathcal{D}_X 加群は定数 (ある r に対する $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ と同型) である。

定理 2.1 の証明の概略は次の通りである：もし定数でない \mathcal{O}_X 接続 \mathcal{D}_X 加群があったとすると、それは自明でない $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1^{\text{dR}}(X, x))$ の対象を定めるので、圏同値 (2.1) により、自明でない表現 $\rho: \pi_1(X, x) \rightarrow GL_r(\mathbb{C})$ を定める。 $\pi_1(X, x)$ は有限生成なので、ある \mathbb{Z} 上有限生成な \mathbb{C} の部分代数 R に対して、 ρ は $\rho: \pi_1(X, x) \rightarrow GL_r(R) \hookrightarrow GL_r(\mathbb{C})$ と分解する。更に、 R のある剰余環 $R \rightarrow \bar{R}$ で、 $|\bar{R}|$ が有限かつ合成

$$\bar{\rho}: \pi_1(X, x) \xrightarrow{\rho} GL_r(R) \rightarrow GL_r(\bar{R})$$

が自明でないようなものがとれる。この $\bar{\rho}$ は自明でない有限エタール被覆 $Y \rightarrow X$ (従って X_{et} 上の自明でない局所定数構成可能層) を定めるので、 $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$ が自明であるという仮定に反する。

なお、定理 2.1 の主張には $\pi_1^{\text{et}}(X, x)$ と $\pi_1^{\text{dR}}(X, x)$ しか現れないので、これは代数的な主張である。一方、上に述べた証明は、 $\pi_1(X, x)$ が現れているので、代数的ではない。定理 2.1 に純代数的な証明を与えることは興味深い課題である。

3 Gieseker 予想 (Esnault-Mehta の定理)

本節では、定理 2.1 の正標数版を考える。 k を標数 $p > 0$ の完全体、 \bar{k} をその代数閉包とする。 X を k 上の幾何的連結射影的で滑らかな代数多様体、 x を X の k 有理点とし、 $X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}}$ を X, x の \bar{k} への基底変換とする。このとき、1 節の (B) の方法により、 $x_{\bar{k}}$ を基点とする $X_{\bar{k}}$ のエタール基本群 $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が定義される。一方、1 節の (C) の方法により、 x を基点とする X のストラティファイド基本群 $\pi_1^{\text{strat}}(X, x)$ が定義される。

自明でない $X_{\bar{k}}$ の有限エタール被覆 $g: Y \rightarrow X_{\bar{k}}$ が与えられたとき、ある k の有限次拡大 k' が存在して g はある有限エタール被覆 $g': Y' \rightarrow X_{k'}$ の基底変換として得られ、このとき、合成 $h: Y' \rightarrow X_{k'} \rightarrow X$ による自明な $\mathcal{D}_{Y'}$ 加群 $\mathcal{O}_{Y'}$ の順像 $h_*\mathcal{O}_{Y'}$ は定数 (ある r に対する $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ と同型) でない \mathcal{O}_X 接続 \mathcal{D}_X 加群となるので、 $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が非自明なとき $\pi_1^{\text{strat}}(X, x)$ も非自明になる、つまり、 $\pi_1^{\text{strat}}(X, x)$ が自明ならば $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ も自明になる。

Gieseker は 1975 年の論文 [Gi75] で、この事実の逆、つまり次のような Malcev-Grothendieck の定理の正標数版が成り立つと予想した。

予想 3.1 (Gieseker 予想). k を標数 $p > 0$ の完全体, \bar{k} をその代数閉包とする. X を k 上の幾何的連結射影的で滑らかな代数多様体, x を X の k 有理点とし, $X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}}$ を X, x の \bar{k} への基底変換とする. このとき, $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が自明であるとする, $\pi_1^{\text{strat}}(X, x)$ も自明である. つまり任意の \mathcal{O}_X 接続 \mathcal{D}_X 加群は定数 (ある r に対する $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ と同型) である.

注 3.2. なお, Gieseker 予想は $k = \bar{k}$ の場合に示せば充分である: 実際, $k = \bar{k}$ のときの Gieseker 予想を仮定して, 一般の場合に \mathcal{O}_X 接続 \mathcal{D}_X 加群 E をとると, 自然な写像 $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, E) \otimes_k \mathcal{O}_X \rightarrow E$ は, $\otimes_k \bar{k}$ を施すと同型になるので, これ自身同型であり, 従って E は定数になる.

正標数の代数多様体 X 上で考えている場合, 位相的基本群 $\pi_1(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ は存在しないので, 2 節で述べた Malcev-Grothendieck の定理の証明をそのまま真似することはできない. Gieseker 予想が正しいことは Esnault-Mehta [EM10] により 2010 年に証明された:

定理 3.3 (Esnault-Mehta). Gieseker 予想は正しい.

以下, Esnault-Mehta の定理の証明の概略を説明する. 注 3.2 より k は代数閉体と仮定してよいので, 以下そう仮定する. $F: X \rightarrow X$ を Frobenius 写像とし, 次の圏を考える.

$$\text{Strat}(X) := \{(E_n, \sigma_n)_{n=0}^{\infty} \mid E_n: \text{接続 } \mathcal{O}_X \text{ 加群}, \sigma_n: F^* E_{n+1} \xrightarrow{\cong} E_n\}.$$

この圏 $\text{Strat}(X)$ の対象をストラティファイド束と呼ぶ. このとき, 圏同値

$$\{\mathcal{O}_X \text{ 接続 } \mathcal{D}_X \text{ 加群}\} \cong \text{Strat}(X)$$

がある [Gi75, Thm. 1.3]. 従って, $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が自明であるという仮定の下で, 任意の $\text{Strat}(X)$ の対象 $(E_n, \sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ が定数 (ある r に対する $(\mathcal{O}_X, \text{id})^{\oplus r}$ と同型) であることを示せばよい. なお, $(E_n, \sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ を途中で切ったもの $(E_n, \sigma_n)_{n=n_0}^{\infty}$ が定数であることを示せば充分であることを注意しておく.

以下, X 上の豊富な直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ を固定し, X 上の 0 でない接続無捻 \mathcal{O}_X 加群 E に対して E の勾配を $\mu(E) := \deg(E)/\text{rk}(E) := (c_1(E)c_1(\mathcal{O}_X(1))^{\dim X - 1})/\text{rk}(E) \in \frac{\mathbb{Z}}{\text{rk}(E)}$ と定め, E の最大勾配を

$$\mu_{\max}(E) := \max\{\mu(E') \mid 0 \subsetneq E' \subseteq E: \text{部分接続 } \mathcal{O}_X \text{ 加群}\}$$

と定める。(これは有限であることが知られている。) また $p_E(t)$ を E の被約 Hilbert 多項式 ($p_E(m) = \text{rk}(E)^{-1} \chi(X, E(m))$ ($m \gg 0$) となる \mathbb{Q} 係数多項式) とする。また, E の任意の部分連接 \mathcal{O}_X 加群 $E' \neq E, 0$ に対して

$$\mu(E') < \mu(E) \quad (\text{resp. } p_{E'}(m) < p_E(m) \ (m \gg 0))$$

が満たされているとき, E は μ 安定 (resp. χ 安定) であるという。 E の任意の部分連接 \mathcal{O}_X 加群 $E' \neq 0$ に対して

$$\mu(E') \leq \mu(E) \quad (\text{resp. } p_{E'}(m) \leq p_E(m) \ (m \gg 0))$$

が満たされているとき, E は μ 半安定 (resp. χ 半安定) であるという。これらの間には

$$\mu \text{ 安定} \implies \chi \text{ 安定} \implies \chi \text{ 半安定} \implies \mu \text{ 半安定}$$

という関係がある。

さて, $(E_n, \sigma_n)_{n=0}^\infty \in \text{Strat}(X)$ を任意にとる。このとき, 実は各 E_n は (階数が一定の) 局所自由 \mathcal{O}_X 加群となることが知られている。階数を r とおく。

まず, E_n の Chern 類 $c_i(E_n)$ (を代数的サイクルの数値的同値類として考えたもの) について, $(F^*)^m E_{n+m} \cong E_n$ であることより $p^m c_i(E_{n+m}) = c_i(E_n)$ という関係がある。従って, $i > 0$ のとき, $c_i(E_n)$ は p で何回でも割れることとなり, よって $c_i(E) = 0$ となる。特に, $\mu(E_n) = 0, p_{E_n}(t) = p_{\mathcal{O}_X}(t)$ となる。

更に, ある n_0 に対し, E_n ($n \geq n_0$) は全て μ 半安定になる: 実際, $E' \subseteq E_n$, $\mu(E') > \mu(E_n) = 0$ だとすると $(F^*)^n E' \subseteq E_0$ より $p^n \mu(E') = \mu((F^*)^n E') \leq \mu_{\max}(E_0)$ となるので, $0 < \mu(E') \leq \mu_{\max}(E_0)/p^n$ となり, $\mu_{\max}(E_0)/p^n < 1/r$ となるような n に対してこれは矛盾を与える。

更にやや複雑な議論により, n_0 を大きくとりかえると, $(E_n)_{n=n_0}^\infty$ は, $\text{Strat}(X)$ の対象たち $\{(E'_{i,n})_{n=n_0}^\infty\}_i$ で各 $E'_{i,n}$ が μ 安定であるようなものの拡大として書けることが言える。従って, 各 E_n が μ 安定である場合に定理が言えれば, 一般の $\text{Strat}(X)$ の対象は $(\mathcal{O}_X, \text{id})_{n=0}^\infty$ の拡大の繰り返しとして書けることが言える。 $(\mathcal{O}_X, \text{id})_{n=0}^\infty$ の $(\mathcal{O}_X, \text{id})_{n=0}^\infty$ による拡大類は $\varprojlim_{F^*} H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の元となる。 k が代数閉体であることから,

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)_{\text{ss}} \oplus H^1(X, \mathcal{O}_X)_{\text{nilp}}$$

(但し $H^1(X, \mathcal{O}_X)_{\text{ss}} = H^1(X, \mathcal{O}_X)^{F^*=1} \otimes_{\mathbb{F}_p} k$ で, $H^1(X, \mathcal{O}_X)_{\text{nilp}}$ には F^* が冪零に作用) という分解を持つことが知られている。すると, 仮定 $\pi_1^{\text{et}}(X, x) = \{1\}$ より

$$H^1(X, \mathcal{O}_X)^{F^*=1} = H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{F}_p) = \text{Hom}(\pi_1^{\text{et}}(X, x), \mathbb{F}_p) = 0$$

となるので, $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ には F^* が冪零に作用することになる。従って $\varprojlim_{F^*} H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ となり, よって $(\mathcal{O}_X, \text{id})_{n=0}^\infty$ の拡大の繰り返しとして書ける対象は $(\mathcal{O}_X, \text{id})_{n=0}^\infty$

の直和となる．以上より，定理を示す際に，各 E_n が μ 安定であると仮定してよいことになるので，そう仮定する．

階数 r が 1 のときは，証明は次のようになる： p と異なる素数 ℓ に対する 1 次 ℓ 進エタールコホモロジーの消滅 $H_{\text{et}}^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) = \text{Hom}(\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}}), \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ により，Picard スキームの単位成分の被約化 $\text{Pic}_X^{0, \text{red}}$ が 0 となるので，Picard スキームの数値的 0 部分 Pic_X^r は有限となる．各 E_n は Pic_X^r の点 $[E_n]$ を定めるので，無限個の $n \in \mathbb{N}$ に対して， $[E_n] = [E_{n-m_n}]$ となる $0 < m_n \leq n$ が存在する．このとき同型 $\Phi : (F^*)^{m_n} E_n \xrightarrow{\cong} E_{n-m_n} \xrightarrow{\cong} E_n$ が存在する．すると $\mathcal{F} := \text{Ker}(E_{n, \text{et}} \xrightarrow{1-\Phi} E_{n, \text{et}})$ は X_{et} 上の階数 1 の局所定数構成可能 \mathbb{F}_p 加群を定めるので，定理の仮定より定数層 \mathbb{F}_p となる．すると $E_n \cong \mathcal{O}_X$ となる．これより全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $E_n \cong \mathcal{O}_X$ となることが言え，さらに多少の議論により， $(E_n)_{n=0}^\infty$ が $\text{Strat}(X)$ の対象として $(\mathcal{O}_X, \text{id})_{n=0}^\infty$ と同型になることが言える．

$r \geq 2$ のときは，証明は次のようになる． \mathcal{M} を階数が r で被約 Hilbert 多項式が $p_{\mathcal{O}_X}(t)$ と一致する χ 安定 \mathcal{O}_X 加群のモジュライとする．（これは Adrian Langer [Lan04a], [Lan04b] により構成された．）このとき， $[E] \mapsto [F^*E]$ により有理写像 $F_* : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{M}$ が定まる．各 E_n が μ 安定であると仮定したので， μ 安定ならば χ 安定であることから， E_n たちは \mathcal{M} の点 $[E_n]$ を定める． \mathcal{A}_n を $\{[E_m] \mid m \geq n\} \subseteq \mathcal{M}$ の Zariski 閉包とし， $\mathcal{N} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ とする．このとき， F_* は支配的有理写像 $F_* : \mathcal{N} \dashrightarrow \mathcal{N}$ を誘導する．

k が有限体の代数閉包のときは，Hrushovski の結果 [Hr]³ により，ある \mathcal{N} の閉点 u と $m > 0$ で $(F_*)^m(u) = u$ となるものの存在が言える． u に対応する μ 安定 \mathcal{O}_X 加群を E とすると同型 $\Phi : (F^*)^m E \xrightarrow{\cong} E$ が存在する．すると $r = 1$ のときと同様の議論により E は定数層 $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ となるが，これは E の μ 安定性に矛盾し，定理の証明が終わる．

k が一般の体のときは，有限体上滑らかな多様体 S 上で $X, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ の適当なモデルをとって， S の適当な閉点上の幾何学的点 s でのファイバー $X_s, \mathcal{M}_s, \mathcal{N}_s$ をとり，特殊化写像の全射 $\pi_1^{\text{et}}(X, x) \twoheadrightarrow \pi_1^{\text{et}}(X_s, x_s)$ の存在より $\pi_1(X_s, x_s) = \{1\}$ であることに注意すると，前段落のような $u = [E] \in \mathcal{N}_s$ がとれ，やはり矛盾がおり，定理の証明が終わる．

極めて大雑把にまとめると，Chern 類の消滅と μ 安定な場合への帰着により Noether なモジュライ \mathcal{M} 上での議論ができ，Hrushovski の結果により矛盾を導出する，という感じである．

³Hrushovski の証明はモデル理論を用いるものであるが，純代数幾何的な証明が Varshavsky [V18] により与えられている．

4 de Jong 予想

この節では(アイソ)クリスタルの定義を説明し, Gieseker 予想の p 進版である de Jong 予想の主張を述べる.

k を標数 $p > 0$ の完全体, $W = W(k)$ を k の Witt 環, $W_n := W/p^n W$ とする. まずクリスタリンサイトを定義する. (詳しくは [BO78, §5–§7] 参照.)

定義 4.1. k 上の代数多様体 X に対して, $(X/W)_{\text{crys}}$ (resp. $(X/W_n)_{\text{crys}}$) を X/W 上 (resp. X/W_n 上) のクリスタリンサイトとする: その対象は組 $(i: U \hookrightarrow T, \delta)$ である. 但し, i は X の開部分スキーム U からある n に対する W_n スキーム T (resp. W_n スキーム T) への W_n 上の閉埋め込みで, δ は $\text{Ker}(\mathcal{O}_T \rightarrow i_* \mathcal{O}_U)$ 上の PD 構造で $pW_n \subseteq W_n$ 上の自然な PD 構造と整合的なものである. (PD 構造については [BO78, §3] 参照.) 対象間の射の概念は自然に定まるものとする. また, 対象 $(i: U \hookrightarrow T, \delta)$ の被覆はスキーム T の Zariski 位相から自然に定まるものとする. また, $(i: U \hookrightarrow T, \delta) \mapsto \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ により定まる $(X/W)_{\text{crys}}$ (resp. $(X/W_n)_{\text{crys}}$) 上の層を $\mathcal{O}_{X/W}$ (resp. \mathcal{O}_{X/W_n}) と書き, これを構造層と呼ぶ. なお, $W_1 = k$ なので, $(X/W_1)_{\text{crys}}, \mathcal{O}_{X/W_1}$ のことをそれぞれ $(X/k)_{\text{crys}}, \mathcal{O}_{X/k}$ と書く.

詳細は省略したが, 大事な点は, クリスタリンサイトの定義は X/W あるいは X/W_n のみにしかよらず, 従って X/W あるいは X/W_n に関して関手的であるということである.

$(X/W)_{\text{crys}}$ 上の $\mathcal{O}_{X/W}$ 加群の層 E を与えることは, 各対象 $(i: U \hookrightarrow T, \delta)$ に対して \mathcal{O}_T 加群 E_T を与え, 射 $\varphi: (U' \hookrightarrow T', \delta') \rightarrow (U \hookrightarrow T, \delta)$ に対して層の射 $\varphi^* E_T \rightarrow E_{T'}$ を関手的に, かつ φ が開埋め込みのときは同型となるように定めることと同値である. $(X/W_n)_{\text{crys}}$ 上の \mathcal{O}_{X/W_n} 加群の層についても同様である. クリスタルの概念を次のように定める.

定義 4.2. $(X/W)_{\text{crys}}$ 上の $\mathcal{O}_{X/W}$ 加群の層 (resp. $(X/W_n)_{\text{crys}}$ 上の \mathcal{O}_{X/W_n} 加群の層) E がクリスタルであるとは, 上記の射 $\varphi^* E_T \rightarrow E_{T'}$ が常に同型となることである. クリスタル E が有限表示であるとは, 任意の $(U \hookrightarrow T, \delta)$ に対して E_T が有限表示 \mathcal{O}_T 加群となることである. $(X/W)_{\text{crys}}$ 上の (resp. $(X/W_n)_{\text{crys}}$ 上の) 有限表示クリスタルのなす圏を $\text{Crys}(X/W)$ (resp. $\text{Crys}(X/W_n)$) と書く. また, $W_1 = k$ なので, $\text{Crys}(X/W_1)$ のことを $\text{Crys}(X/k)$ と書く.

X を k 上滑らかな代数多様体とし, $\text{Spf } W$ 上滑らかな p 進形式スキーム \mathcal{X} に持ち上げ可能であると仮定すると, $\mathcal{X}_n := \mathcal{X} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ とおくとき, $X \hookrightarrow \mathcal{X}_n$ は自然に $(X/W)_{\text{crys}}$ の対象となる. 従って, $E \in \text{Crys}(X/W)$ が与えられると接続 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}$ 加群 $E_{\mathcal{X}_n}$ が定まり, 従って接続 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 加群 $E_{\mathcal{X}}$ が $E_{\mathcal{X}} := \varprojlim_n E_{\mathcal{X}_n}$ により定まる.

更に, \mathcal{X} が局所座標 $t = (t_1, \dots, t_d)$ を持つとする. \mathcal{X}_n の $\mathcal{X}_n \times_{W_n} \mathcal{X}_n$ 内の 1 次無限小近傍を \mathcal{X}_n^1 とおき, $\pi_i: \mathcal{X}_n^1 \rightarrow \mathcal{X}_n$ ($i = 1, 2$) を射影とすると, クリスタルの定

義により, 同型

$$\epsilon : \pi_2^* E_{\mathcal{X}_n} \xrightarrow{\cong} E_{\mathcal{X}_n^1} \xleftarrow{\cong} \pi_1^* E_{\mathcal{X}_n}$$

が定まる. θ_n を合成

$$E_{\mathcal{X}_n} \hookrightarrow \pi_2^* E_{\mathcal{X}_n} \xrightarrow{\epsilon} \pi_1^* E_{\mathcal{X}_n} \cong E_{\mathcal{X}_n} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^d E_{\mathcal{X}_n} dt_i \right)$$

とすると, $E_{\mathcal{X}}$ への $\frac{\partial}{\partial x_i}$ の作用が合成

$$E_{\mathcal{X}} \xleftarrow{\varinjlim \theta_n} E_{\mathcal{X}} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^d E_{\mathcal{X}} dt_i \right) \rightarrow E_{\mathcal{X}} dt_i = E_{\mathcal{X}}$$

により定まる. \mathcal{X} 上のレベル 0 の微分作用素環 $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ を

$$(4.1) \quad \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^d} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \text{ の } p \text{ 進完備化}$$

と定めると, 上の $\frac{\partial}{\partial t_i}$ の作用により $E_{\mathcal{X}}$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 接続準冪零 $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ 加群の構造を持つ. そして, 関手

$$\text{Crys}(X/W) \longrightarrow \{ \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \text{ 接続準冪零 } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} \text{ 加群} \}; \quad E \mapsto E_{\mathcal{X}}$$

は圏同値となる. (準冪零性の定義および上記の同値の証明については [BO78, §4] 参照.)

k 上滑らかな多様体 X は, 局所的には, 上記のような $\text{Spf } W$ 上の p 進形式スキーム \mathcal{X} への持ち上げを持つ. 従って, 圏 $\text{Crys}(X/W)$ は局所的にはある種の \mathcal{D} 加群の圏と同値である. しかしながら, X 上大域的に持ち上げ \mathcal{X} があることは一般には期待できないので, 大域的に \mathcal{D} 加群で表されるわけではない. また, (4.1) における $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ の定義には, $\frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i$ ではなく $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i$ が使われている⁴ ことにも注意する必要がある.

同様の議論は $\text{Crys}(X/W_n)$ に対しても成り立つ. 特に, $n=1$ のときは (このときは X の $\text{Spec } W_1 = \text{Spec } k$ への持ち上げは X 自身である), $\mathcal{D}_X^{(0)}$ を X 上のレベル 0 の微分作用素環 (局所的には $\mathcal{D}_X^{(0)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^d} \mathcal{O}_X \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i$ となる) とすると, 圏同値

$$(4.2) \quad \text{Crys}(X/k) \longrightarrow \{ \mathcal{O}_X \text{ 接続準冪零 } \mathcal{D}_X^{(0)} \text{ 加群} \}; \quad E \mapsto E_{\mathcal{X}}$$

がある. $\mathcal{D}_X^{(0)}$ の定義には $\frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i$ ではなく $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i$ が使われているので, これは 1 節 (D) における \mathcal{D}_X とは異なり, 従って, 4.2 の右辺の圏は 1 節 (D) の \mathcal{O}_X 接続 \mathcal{D}_X 加群の圏とは異なることに注意する必要がある. 実際, ここで考えている圏の方が大きい.

アイソクリスタルの圏を次のように定義する.

⁴これが「レベル 0」という修飾語が意味することである.

定義 4.3. $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ を $\text{Crys}(X/W)$ の \mathbb{Q} 線型化とする, すなわち, $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ は $\text{Crys}(X/W)$ の対象を対象とし, 射の集合を

$$\text{Hom}_{\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}}(E, E') := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\text{Crys}(X/W)}(E, E')$$

と定めてできる圏とする. そして, $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ の対象を X/W 上のアイソクリスタルという.

以下, $\text{Crys}(X/W)$ の対象 E を $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ の対象とみなすときは, それを $\mathbb{Q} \otimes E$ と書くことにする.

以上の準備の下で, Gieseker 予想の p 進版である de Jong 予想の主張を述べる. k を標数 $p > 0$ の完全体, \bar{k} をその代数閉包とする. X を k 上の幾何的連結射影的で滑らかな代数多様体, x を X の k 有理点とし, $X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}}$ を X, x の \bar{k} への基底変換とする. このとき, 1 節の (B) の方法により, $x_{\bar{k}}$ を基点とする $X_{\bar{k}}$ のエタール基本群 $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が定義される. 一方, 1 節の (E) の方法により, x を基点とする X のクリスタル基本群 $\pi_1^{\text{crys}}(X, x)$ が定義される.

自明でない $X_{\bar{k}}$ の有限エタール被覆 $g: Y \rightarrow X_{\bar{k}}$ が与えられたとき, ある k の有限次拡大 k' が存在して g はある有限エタール被覆 $g': Y' \rightarrow X_{k'}$ の基底変換として得られ, このとき, 合成 $h: Y' \rightarrow X_{k'} \rightarrow X$ による自明なアイソクリスタル $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{O}_{Y'/W}$ の順像 $\mathbb{Q} \otimes h_* \mathcal{O}_{Y'/W}$ は定数 (ある r に対する $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{O}_{X/W}^{\oplus r}$ と同型) でないアイソクリスタルとなるので, $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が非自明なとき $\pi_1^{\text{crys}}(X, x)$ も非自明になる, つまり, $\pi_1^{\text{crys}}(X, x)$ が自明ならば $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ も自明になる.

de Jong 予想はこの事実の逆が成り立つことを主張するものである.

予想 4.4 (de Jong 予想). k を標数 $p > 0$ の完全体, \bar{k} をその代数閉包とする. X を k 上の幾何的連結射影的で滑らかな代数多様体, x を X の k 有理点とし, $X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}}$ を X, x の \bar{k} への基底変換とする. このとき, $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が自明であるとすると, $\pi_1^{\text{crys}}(X, x)$ も自明である. つまり任意の X/W 上のアイソクリスタルは定数 (ある r に対する $(\mathbb{Q} \otimes \mathcal{O}_{X/W})^{\oplus r}$ と同型) である.

注 4.5. (1) de Jong 予想を de Jong 自身が述べた論文は (おそらく) 存在しない. [ESha] によると, 2010 年秋に定式化されたようである.

(2) de Jong 予想も $k = \bar{k}$ の場合に示せば充分である: 実際, $k = \bar{k}$ のときの de Jong 予想を仮定して, 一般の場合に X/W 上のアイソクリスタル \mathcal{E} をとり, \mathcal{E} の $X_{\bar{k}}/W(\bar{k})$ への引き戻しを $\mathcal{E}_{\bar{k}}$ と書くと, クリスタリンコホモロジーの基底変換定理により同型

$$H_{\text{crys}}^0(X/W, \mathcal{E}) \otimes_K (\mathbb{Q} \otimes W(\bar{k})) = H_{\text{crys}}^0(X_{\bar{k}}/W(\bar{k}), \mathcal{E}_{\bar{k}})$$

がある. 従って, 自然な写像

$$H_{\text{crys}}^0(X/W, \mathcal{E}) \otimes_K (\mathbb{Q} \otimes \mathcal{O}_{X/W}) \longrightarrow \mathcal{E}$$

は $X_{\bar{k}}/W(\bar{k})$ へ引き戻すと同型となるので、これ自身同型となり、従って \mathcal{E} は定数になる。

(3) de Jong 予想の仮定の下で、任意の X/W 上のアイソクリスタルが定数の拡大の繰り返しで書けることが言えれば、de Jong 予想が示される: 実際、 $\ell \neq p$ なる素数 ℓ に対する 1 次 ℓ 進エタールコホモロジーの消滅 $H_{\text{et}}^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) = \text{Hom}(\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}}), \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ により、Picard スキームの単位成分の被約化 $\text{Pic}_X^{0, \text{red}}$ が 0 となるので、 $\text{Pic}_X^{0, \text{red}}$ に対応する Dieudonné 加群である 1 次クリスタリコホモロジー $H_{\text{crys}}^1(X/W, \mathcal{O}_{X/W})$ も 0 となる。これより定数であるアイソクリスタルの拡大も定数であることが言える。

5 de Jong 予想に関する諸結果

この節では、de Jong 予想に関する阿部-Esnault, Kedlaya や Esnault-筆者の結果について述べる。この節でも k は標数 $p > 0$ の完全体、 W は k の Witt 環、 K は W の商体であるとし、 X は k 上幾何的連結射影的で滑らかな代数多様体とする。

まず、 X/W 上のアイソクリスタルの圏 $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ の部分圏を 2 つ定義する。まず、 $\sigma : W \rightarrow W$ を k 上の Frobenius 写像の持ち上げとし、 $F : X \rightarrow X$ を X 上の (絶対)Frobenius 写像とする。このとき、 (F, σ) による引き戻しの関手

$$F^* : \text{Crys}(X/W) \rightarrow \text{Crys}(X/W), \quad F^* : \text{Crys}(X/W_n) \rightarrow \text{Crys}(X/W_n)$$

が定義され、前者は

$$F^* : \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$$

をひきおこす。これを用いて、 X/K 上の収束アイソクリスタルの圏 $\text{Conv}(X)$ を

$$\text{Conv}(X) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Im}((F^*)^n : \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}})$$

と定める⁵。また、圏 $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ を

$$\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F := \{\mathcal{E} \in \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}} \mid F^*\mathcal{E} \cong \mathcal{E}\}$$

とおく。定義より

$$(5.1) \quad \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F \subseteq \text{Conv}(X) \subseteq \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$$

という包含関係がある。このとき、次が成り立つ。

⁵これは本来の定義とは異なる: 本来の定義については [B], [LS07] (リジッド解析空間を用いた定義), [Og84], [Og90] (収束サイトを用いた定義) を参照。ここでの定義との同値性は Frobenius 降下 [B00] による。

定理 5.1 (阿部-Esnault [AE], Kedlaya [K]). k を有限体とする. $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が自明ならば, 任意の $\mathcal{E} \in \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ は定数である. (つまり, k が有限体ならば, $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ の対象に対する de Jong 予想は正しい.)

この定理の証明の概略を述べる⁶. $f: X \rightarrow \text{Spec } k$ を構造射とし, また, $|k| = p^a$ とおく. $\mathcal{E} \in \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ をとると同型 $\Phi_{\mathcal{E}}: (F^*)^a \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}$ がある. このような同型 $\Phi_{\mathcal{E}}$ を \mathcal{E} 上の Frobenius 構造といい, また, 組 $(\mathcal{E}, \Phi_{\mathcal{E}})$ を X/W 上の F アイソクリスタルという. 注 4.5(3) より $(\mathcal{E}, \Phi_{\mathcal{E}})$ が F アイソクリスタルとして既約な場合に, \mathcal{E} が定数であることを示せばよい. 階数 1 の $f^*(\mathcal{L}, \Phi_{\mathcal{L}})$ の形の F アイソクリスタルとテンソル積をとることにより, $(\det \mathcal{E}, \det \Phi_{\mathcal{E}})$ が有限位数である (何回かテンソルをとると自明になる) と仮定してよいので, 以下そう仮定する. すると, Lafforgue による関数体の Langlands 対応 [Laf02] と阿部によるその p 進版 [A] を用いた議論により, $(\mathcal{E}, \Phi_{\mathcal{E}})$ と X の各閉点での Frobenius の固有多項式が等しいような既約で滑らかな $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ 層 \mathcal{F} が構成される ([AE], [K]). 仮定 $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}}) = \{1\}$ より $\mathcal{F} = f^* \mathcal{F}_0$ となる $\text{Spec } k$ 上の滑らかな $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ 層 \mathcal{F}_0 が存在する. すると $(\mathcal{E}, \Phi_{\mathcal{E}})$ も $f^*(\mathcal{E}_0, \Phi_{\mathcal{E}_0})$ の形に書けることがわかり, \mathcal{E}_0 は定数なので \mathcal{E} も定数となる.

k を一般の標数 $p > 0$ の完全体の場合に戻す. $g: Y \rightarrow X$ を固有で滑らかな射とすると, 相対クリスタルコホモロジー $\mathbb{Q} \otimes R^i g_* \mathcal{O}_{X/W}$ が X/W 上のアイソクリスタルとして定義され, $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ に属する (Ogus [Og84], Morrow [Mo]). このとき, 次が成り立つ.

定理 5.2 (Esnault-S. [EShb]). $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が自明ならば, 任意の固有で滑らかな射 $g: Y \rightarrow X$ に対して $\mathbb{Q} \otimes R^i g_* \mathcal{O}_{X/W}$ は定数である. (つまり, 相対クリスタルコホモロジーとして定まる $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ の対象に対する de Jong 予想は正しい.)

この定理は, k が有限体のときは定理 5.1 から従い⁷, k が一般のときは, 適当に有限体上の滑らかなスキーム上のモデルをとって, k が有限体の場合に帰着させることにより証明される.

以上の結果は, Frobenius 構造や Lafforgue/阿部の Langlands 対応などを用いているという意味で, 数論幾何学的手法による結果であると言える⁸. それに対して, 以下に紹介する Esnault と筆者による 2 つの結果はより代数幾何学的であると言える. 定理を述べる.

定理 5.3 (Esnault-S. [ESha], [EShb], S. [Sh]). $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が自明で $\mu_{\max}(\Omega_X^1) \leq 0$ ならば, 任意の $\mathcal{E} \in \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ は定数である. (つまり, $\mu_{\max}(\Omega_X^1) \leq 0$ ならば de Jong 予想は正しい.)

⁶以下の議論においては, 必要に応じて F アイソクリスタルの「係数拡大」をしなければいけないが, そのあたりは省略して書くことにする.

⁷[EShb] においては少し異なる議論により示されている

⁸もっとも, 何をもち「数論幾何学的」と呼ぶかということについては, 人により意見が分かれるかと思うが.

注 5.4. より正確には, $\pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}}, x_{\bar{k}})$ が自明で, かつ次のいずれかが成り立つ場合に \mathcal{E} が定数であることが示されている.

- (a) \mathcal{E} の任意の既約成分の階数が 1 のとき.
- (b) $\mu_{\max}(\Omega_X^1) < 2$ かつ \mathcal{E} の任意の既約成分の階数が 2 以下のとき.
- (c) $\mu_{\max}(\Omega_X^1) < 1$ かつ \mathcal{E} の任意の既約成分の階数が 3 以下のとき.
- (d) $r \geq 4$, $\mu_{\max}(\Omega_X^1) < N(r)^{-1}$ かつ \mathcal{E} の任意の既約成分の階数が r 以下のとき. 但し, $N(r) = \max_{a,b \geq 1, a+b \leq r} \text{lcm}(a, b)$ とする.

なお, $p \geq 3$ のとき, (a) の場合の de Jong 予想のコホモロジーを用いた証明が Esnault-Ogus により知られている [ESha, Proposition 2.10].

定理 5.5 (Esnault-S. [EShc]). k を有限体とする. もし, 任意の $\text{Conv}(X)$ の対象が定数ならば, 任意の $\mathcal{E} \in \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ は定数である.

k が有限体のとき, 圏の包含関係 (5.1) において, 一番左の圏 $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ の対象に対しては定理 5.1 より de Jong 予想は正しく, また de Jong 予想 (これは一番右の圏 $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ の対象に対する予想である) は定理 5.5 により真ん中の圏 $\text{Conv}(X)$ の対象に対する de Jong 予想に帰着される. 従って, $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F \subseteq \text{Conv}(X)$ の差が残された問題となる. $\text{Conv}(X)$ には関手 F^* が作用し, $\text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ はその固定点となるので, 3 節の Esnault-Mehta の定理の証明における Hrushovski の定理の類似のようなものがあればよいと思われるが, そのようなものは知られていない.

定理 5.5 は次の系を持つ.

系 5.6. k が有限体のとき, 曲面に対する de Jong 予想が正しければ, de Jong 予想は正しい.

$\dim X \geq 3$ として $Y \hookrightarrow X$ を滑らかな超平面切断とするとときにエタール基本群の射 $\pi_1^{\text{et}}(Y_{\bar{k}}) \rightarrow \pi_1^{\text{et}}(X_{\bar{k}})$ が同型であること (エタール基本群の Lefschetz 定理) と, 引き戻し関手 $\text{Conv}(X) \rightarrow \text{Conv}(Y)$ が忠実充満であること (Lazda-Pál [LP]) を用いれば, Y に対する de Jong 予想から X に対する de Jong 予想が従うことが定理 5.5 を用いて言えるので, 系 5.6 が従う.

定理 5.3 と定理 5.5 の証明の概略を述べるための準備をする. まず, アイソクリスタル $\mathcal{E} \in \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ に対して $\mathcal{E} = \mathbb{Q} \otimes E$ となる W 上平坦な $E \in \text{Crys}(X/W)$ のことを, \mathcal{E} の格子とよぶことにする. (なお, \mathcal{E} の格子はいつも存在する: $\mathcal{E} = \mathbb{Q} \otimes E'$ となる $E' \in \text{Crys}(X/W)$ は常に存在し, $E := E'/\text{Ker}(p^n : E' \rightarrow E')$ は $n \gg 0$ のとき W 上平坦になる.) また, $n \in \mathbb{N}$ (resp. $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$) に対して, 自然な関手

$$\text{Crys}(X/W) \longrightarrow \text{Crys}(X/W_n) \quad (\text{resp. } \text{Crys}(X/W_m) \longrightarrow \text{Crys}(X/W_n))$$

があるが, これによる $E \in \text{Crys}(X/W)$ (resp. $E \in \text{Crys}(X/W_m)$) の像を E_n と書く. また, $\text{Crys}(X/W)$ または $\text{Crys}(X/W_n)$ の対象 E の $(X \hookrightarrow X) \in (X/W_n)_{\text{crys}}$ での値を E_X と書く. (これは接続 \mathcal{O}_X 加群になる.)

以下、定理 5.3 の証明の概略を述べる。まず、次の定理 (クリスタリン Chern 類の消滅) を示す。

定理 5.7 (Esnault-S. [ESha], [EShb], S. [Sh], Bhatt-Lurie [BL], クリスタリン Chern-Weil 定理). k を標数 $p > 0$ の完全体, X を k 上の滑らかな代数多様体とする。このとき, W 上平坦な $E \in \text{Crys}(X/W)$ に対して

$$c_i^{\text{crys}}(E_X) = 0 \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{\text{crys}}^{2i}(X/W)$$

が成り立つ。

この定理の標数 0 における類似は Chern-Weil 理論の帰結である。

定理 5.7 は $\mathbb{Q} \otimes E \in \text{Conv}(X)$ のときには [ESha] において証明された。この場合は、圏 $\text{Conv}(X)$ の定義より、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(F^*)^n(\mathbb{Q} \otimes E^{(n)}) \cong \mathbb{Q} \otimes E$ を満たす $\mathbb{Q} \otimes E^{(n)} \in \text{Conv}(X)$ が存在し、この事実を用いることにより、比較的容易に証明される。次に、 $E \in \text{Crys}(X/W)$ が局所自由なときには、定理 5.7 は [EShb] において 2 通りの方法により証明された：一つは [E88] に始まる modified splitting principle と呼ばれる手法を用いた証明で、もう一つは BGL_r のクリスタリンコホモロジー、普遍クリスタリン Chern 類を用い、クリスタリンコホモロジーの Poincaré の補題および Čech-Alexander 分解による計算を利用した証明である。なお、以上の場合にはクリスタリン Chern 類 $c_i^{\text{crys}}(E_X)$ は $H_{\text{crys}}^{2i}(X/W)$ において既に 0 になっている。[Sh] においては、[EShb] における 1 つ目の方法の一般化とみなせる手法で X が射影的な場合に定理 5.7 を証明している。(定理 5.3 の証明のためにはこれで充分である。) Bhatt-Lurie の証明は [EShb] の証明の 2 つ目の方法の一般化とみなせる手法であるらしい。

次に、 $\mathcal{E} \in \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ の良い格子の存在を主張する次の定理を示す。

定理 5.8 (Esnault-S. [ESha], [EShc], クリスタリン Langton 定理). k を標数 $p > 0$ の完全体, X を k 上の滑らかな代数多様体とする。このとき, $\mathcal{E} \in \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ に対して、ある \mathcal{E} の格子 E で、 $E_1 \in \text{Crys}(X/k)$ が μ 半安定になるものが存在する。

但しここで、 $E_1 \in \text{Crys}(X/k)$ が μ 半安定であるとは、 E_1 の $(X \hookrightarrow X) \in (X/k)_{\text{crys}}$ における値 $E_{1,X}$ が無捻 \mathcal{O}_X 加群であり、かつ、 E_1 の任意の 0 でない $\text{Crys}(X/k)$ における部分対象 E' に対して、それらの $(X \hookrightarrow X) \in (X/k)_{\text{crys}}$ における値の勾配に関して $\mu(E'_X) \leq \mu(E_{1,X})$ が成り立つこととする。この定理は Langton の定理 [Lang75] のクリスタルに対する類似である。

この定理を示すには、まず \mathcal{E} の格子 E を任意にとり、それを変形して (ア) $E_{1,X}$ を無捻 \mathcal{O}_X 加群にできること、更に (イ) $E_1 \in \text{Crys}(X/k)$ を μ 半安定にできることを示せばよい。(ア)、(イ) を示す方法はほとんど同じなので以下、同時にその方法を述べる。 $E_1 \in \text{Crys}(X/k)$ が (ア) または (イ) に述べた通りになっていないときに、 $E_1 \supseteq B \in \text{Crys}(X/k)$ を、(ア) を考えているときには最大捻れ部分対象、(イ) を考

えているときには最大不安定部分対象として、 $\ell(E) := \text{Ker}(E \rightarrow E_1 \rightarrow E_1/B)$ とおく。すると、 $\ell(E)$ は再び \mathcal{E} の格子となる。この操作を繰り返すとある $a \in \mathbb{N}$ に対して $\ell^a(E)$ が (ア) または (イ) の条件を満たすことが示される。なお、あとの説明で必要になるので、 $E_{1,X}$ が無捻 \mathcal{O} 加群であるような $E \in \text{Crys}(X/W)$ に対して、 $E \mapsto \ell(E)$ という操作を Langton 操作と呼ぶことにする。

定理 5.3 の証明の説明に戻る。注 4.5 より k は標数 $p > 0$ の代数閉体であると仮定してよいので、以下そう仮定する。 X を k 上の射影的で滑らかな代数多様体として、 $\mu_{\max}(\Omega_X^1) \leq 0$ であると仮定する。そして、 $\mathcal{E} \in \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ とし、定理 5.8 を用いて、 \mathcal{E} の格子 E で $E_1 \in \text{Crys}(X/k)$ が μ 半安定であるようなものをとる。すると、仮定 $\mu_{\max}(\Omega_X^1) \leq 0$ を用いて Mehta-Ramanathan [MR83] の議論をすることにより、 $E_X = E_{1,X}$ が接続 \mathcal{O}_X 加群として強 μ 半安定 ($(F^*)^n E_X$ ($n \in \mathbb{N}$) が全て μ 半安定) となることが言える。更に定理 5.7 の帰結 $c_i^{\text{crys}}(E_X) = 0$ ($i > 0$) を用いて、Adrian Langer の結果 [Lan11, Thm. 4.1] を用いると、ある $b \in \mathbb{N}$ に対して、 $(F^*)^b E_X$ が局所自由かつ強 μ 安定 ($(F^*)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) による引き戻しが全て μ 安定) で $c_i^{\text{crys}} = 0$ ($i > 0$) であるような \mathcal{O}_X 加群たち $\{G_j\}_j$ の拡大で書けることが言える。

ここで $\pi_1^{\text{ét}}(X) = \{1\}$ であると仮定する。 j を一つ固定し、 G_j の階数を r としよう。 \mathcal{M} を 3 節で定義したモジュライとし、 $F_* : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{M}$ も 3 節で定めた有理写像とする。 \mathcal{M}_n を $(F_*)^n$ による (定義域の) 像とする。すると、Esnault-Mehta の定理 (Strat(X) の対象が定数しかないこと) と \mathcal{M} の Noether 性を用いて、 $r = 1$ ならば充分大きな n に対して $\mathcal{M}_n = \{[\mathcal{O}_X]\}$ 、 $r > 1$ ならば充分大きな n に対して $\mathcal{M}_n = \emptyset$ であることが言える。一方、 G_j の性質より $[(F^*)^n G_j] \in \mathcal{M}_n$ となるので、結局 $r = 1$ で、ある $c \in \mathbb{N}$ に対して $(F^*)^c G_j = \mathcal{O}_X$ となることが言える。この c は j に依らないようにとれるので、ある $c \in \mathbb{N}$ に対して $(F^*)^c E_X$ が \mathcal{O}_X の拡大の繰り返しで書けることになる。3 節で見たように、 F^* は拡大類が含まれる $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ に冪零に作用するので、 c を大きく取り直せば $(F^*)^{c-1} E_X$ は \mathcal{O}_X の直和となる。すると $(F^*)^c E_1$ は $\mathcal{O}_{X/k}$ の直和となる。

$(F^*)^c E_1 = \mathcal{O}_{X/k}^{\oplus s}$ とおく。また、 $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{D}_{n,m} := \{(G, \varphi) \mid G \in \text{Crys}(X/W_{n+m}), \varphi : G_n \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{X/W_n}^{\oplus s}\}$$

とおく。変形理論により、 $m \leq n$ のとき、Frobenius による引き戻し F^* と整合的な全単射

$$(5.2) \quad \mathcal{D}_{n,m} \xrightarrow{\cong} H_{\text{crys}}^1(X/W_m)^{\oplus s^2}$$

が存在する。 $m = 1$ のときは、 $H_{\text{crys}}^1(X/k)$ への F^* の作用が冪零であることが 3 節の $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の場合と同様に言えるので、(5.2) の両辺への F^* の作用は冪零である。従って、任意の $\mathcal{D}_{n,1}$ の元は、 F^* を何回か施すと自明な変形 $(\mathcal{O}_{X/W_{n+1}}^{\oplus s}, \text{id})$ となることがわかる。

$(F^*)^c E_2$ は $(F^*)^c E_1 = \mathcal{O}_{X/k}^{\oplus s}$ の変形なので $\mathcal{D}_{1,1}$ に属し, $(n, m) = (1, 1)$ に対する上の事実から, c を大きくとりかえると $(F^*)^c E_2 \cong \mathcal{O}_{X/W_2}^{\oplus s}$ となることがわかる. すると $(F^*)^c E_3$ は $\mathcal{D}_{2,1}$ に属し, $(n, m) = (2, 1)$ に対する上の事実から, c を更に大きくとりかえると $(F^*)^c E_3 \cong \mathcal{O}_{X/W_3}^{\oplus s}$ となることがわかる. これを繰り返していく.

注 4.5(3) で述べたように $H_{\text{crys}}^1(X/W) = 0$ である. 従って,

$$H_{\text{crys}}^1(X/W) = \varprojlim_n H_{\text{crys}}^1(X/W_n)$$

において, 右辺の射影系における射 $H_{\text{crys}}^1(X/W_N) \rightarrow H_{\text{crys}}^1(X/k)$ が零射になるような $N \in \mathbb{N}$ が存在する. 前段落の議論よりある $c \in \mathbb{N}$ に対して $(F^*)^c E_N \cong \mathcal{O}_{X/W_N}^{\oplus s}$ となる. すると, $(F^*)^c E_{2N} \in \text{Crys}(X/W_{2N})$ の $\text{Crys}(X/W_{N+1})$ への制限が $(F^*)^c E_{N+1}$ であるから, $(F^*)^c E_{N+1}$ は $\mathcal{D}_{N,N} \rightarrow \mathcal{D}_{N,1}$ の像の元を定める. $(n, m) = (N, 1), (N, N)$ に対する全単射 (5.2) を通じて見ると, これは $H_{\text{crys}}^1(X/W_N) \rightarrow H_{\text{crys}}^1(X/k)$ の像の元であり, それは 0 である. 従って, $(F^*)^c E_{N+1}$ は (c をこれ以上大きくしなくても) $\mathcal{O}_{X/W_{N+1}}^{\oplus s}$ と同型となる. この議論を繰り返すことにより $(F^*)^c E$ が $\mathcal{O}_{X/W}^{\oplus s}$ と同型, よって $(F^*)^c \mathcal{E}$ が $(\mathbb{Q} \otimes \mathcal{O}_{X/W})^{\oplus s}$ と同型であることが言える. $F^* : \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ は忠実充満なので, これより $\mathcal{E} \cong (\mathbb{Q} \otimes \mathcal{O}_{X/W})^{\oplus s}$ となり, 定理 5.3 の証明が完了する.

次に定理 5.5 の証明の概略を述べる. k, X を定理の主張の通りとし, $r \in \mathbb{N}$ を任意の一つとって固定する. $n \in \mathbb{N}$ に対して, \mathcal{S}_n を W_n 上平坦な階数 r の $E \in \text{Crys}(X/W_n)$ で $E_1 \in \text{Crys}(X/k)$ が μ 半安定かつ $c_i^{\text{crys}}(E_{1,X}) = 0 (\forall i > 0)$ を満たすものの同型類の集合とする. このとき \mathcal{S}_n は有限集合になる: 実際, $n = 1$ のときはこのような集合の有界性が Adrian Langer の結果 [Lan04a, Thm. 4.1, 4.2] (と Simpson による多少の議論 [Si94, Lem. 3.3, Cor. 3.4]) から従い, n が一般のときは自然な射 $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_{n-1}$ のファイバーが有限であることが変形理論から従う. $\mathcal{S} := \varprojlim_n \mathcal{S}_n$ とおくとこれは階数 r の $E \in \text{Crys}(X/W)$ で $E_1 \in \text{Crys}(X/k)$ が μ 半安定なものの同型類の集合となる.

階数 r の $\mathcal{E} \in \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ を任意にとると, 定理 5.8 より, ある $E \in \mathcal{S}$ を用いて $\mathcal{E} = \mathbb{Q} \otimes E$ と書ける. このとき, $F^* E \in \text{Crys}(X/W)$ は \mathcal{S} に属するとは限らないが, Langton 操作 $F^* E \mapsto \ell(F^* E)$ を何回か繰り返した結果 $\ell^a(F^* E)$ は \mathcal{S} に属する. そこで $\text{LF}(E) := \ell^a(F^* E)$ とおき, これを E の Langton-Frobenius 引き戻しと呼ぶ. Langton-Frobenius 引き戻しは Frobenius 引き戻しをアイソクリスタル $\mathbb{Q} \otimes F^* E$ とみたときの格子 $F^* E$ を適切に変えるという操作である.

族 $(\text{LF}^m(E))_{m \in \mathbb{N}}$ を考える. 各 \mathcal{S}_n が有限集合なので, 対角線論法より, ある \mathbb{N} の部分数列 $N = \{m_1, m_2, \dots\}$ に対して, $\mathbf{E} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \text{LF}^{m_n}(E)_n \in \text{Crys}(X/W)$ が well-defined となる. $e \in \mathbb{N}$ に対して, 族 $(\text{LF}^{m-e}(E))_{m \in \mathbb{N}, m \geq e}$ から始めて同じ議論をすると, ある \mathbb{N} の部分数列 $N' = \{m'_1, m'_2, \dots\}$ に対して, $\mathbf{E}^{(b)} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \text{LF}^{m'_n}(E)_n \in \text{Crys}(X/W)$ も well-defined となるが, 構成から $\text{LF}^e \mathbf{E}^{(e)} = \mathbf{E}$ となることを示すこと

ができる。従って

$$\mathbb{Q} \otimes \mathbf{E} = (F^*)^e(\mathbb{Q} \otimes \mathbf{E}^{(e)}) \in \text{Im}((F^*)^e : \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}})$$

となる。これが全ての $e \in \mathbb{N}$ に対して成り立つので $\mathbb{Q} \otimes \mathbf{E} \in \text{Conv}(X)$ となる。

定理の仮定より $\mathbb{Q} \otimes \mathbf{E}$ は定数となる。これと $\mathbf{E} \in \mathcal{S}$ であることから $\mathbf{E}_1 = \mathcal{O}_{X/k}^{\oplus s}$ であることを示すことができる。すると、構成より $\mathbf{E}_1 = \text{LF}^{m'_1}(E)_1$ であることから $\text{LF}^{m'_1}(E)_1 = \mathcal{O}_{X/k}^{\oplus r}$ となる。定理5.3の証明における変形理論を用いた議論を $\text{LF}^{m'_1}(E)$ に適用すると、ある $c \in \mathbb{N}$ に対して $(F^*)^c(\mathbb{Q} \otimes \text{LF}^{m'_1}(E)) = (F^*)^{m'_1+c}(\mathbb{Q} \otimes E) = (F^*)^{m'_1+c}\mathcal{E}$ が定数であることが言え、従って \mathcal{E} は定数となる。これで定理5.5の証明が完了する。

参考文献

- [A] T. Abe, *Langlands correspondence for isocrystals and existence of crystalline companion for curves*, arXiv:1310.0528.
- [AE] T. Abe and H. Esnault, *A Lefschetz theorem for overconvergent isocrystals with Frobenius structure*, arXiv:1607.07112.
- [B] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres première partie*, prépublication de l'IRMAR 96-03.
- [B00] P. Berthelot, *\mathcal{D} -modules arithmétiques II: Descente par Frobenius*, Mém. Soc. Math France (N.S.) **81** (2000), 1–136.
- [BO78] P. Berthelot and A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, 1978.
- [BL] B. Bhatt and J. Lurie, in preparation.
- [D89] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in Galois Groups over \mathbb{Q} , Springer Verlag, New York, 1989, pp. 79–297.
- [E88] H. Esnault, *Characteristic classes of flat bundles*, Topology **27** 3 (1988), 323–352.
- [EM10] H. Esnault and V. Mehta, *Simply connected projective manifolds in characteristic $p > 0$ have no nontrivial stratified bundles*, Invent. Math. **181** (2010), 449–465. (Erratum available

at http://www.mi.fu-berlin.de/users/esnault/helene_publ.html, 95b (2013)).

- [ESr16] H. Esnault and V. Srinivas, *Simply connected varieties in characteristic $p > 0$, with an appendix by Jean-Benoît Bost*, *Compositio math.* **152**(2016), 255–287.
- [ESha] H. Esnault and A. Shiho, *Convergent isocrystals on simply connected varieties*, to appear in *Ann. Inst. Fourier*.
- [EShb] H. Esnault and A. Shiho, *Chern classes of crystals*, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [EShc] H. Esnault and A. Shiho, *A remark on de Jong conjecture*, in preparation.
- [Gi75] D. Gieseker, *Flat vector bundles and the fundamental group in non-zero characteristics*, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, 4 Sér. **2** (1) (1975), 1–31.
- [Gr70] A. Grothendieck, *Représentations linéaires et compactifications profinies des groupes discrets*, *Manuscr. Math.* **2** (1970), 375–396.
- [SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, *Lecture Notes in Math.* **224**, Springer Verlag 1971.
- [Ha87] R. Hain, *The Geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group*, *Proc. Sympos. Pure Math.* **46**(1987) Part II, 247–282.
- [Hr] E. Hrushovski, *The elementary theory of Frobenius automorphisms*, arXiv:math/0406514.
- [K] K. S. Kedlaya, *Étale and crystalline companions*, preprint.
- [Laf02] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, *Invent. math.* **147**(2002), 1–241.
- [Lan04a] A. Langer, *Semistable sheaves in positive characteristic*, *Ann. Math.* **159** (2004), 251–276.
- [Lan04b] A. Langer, *Moduli spaces of sheaves in mixed characteristics*, *Duke Math. J.* **124**(3) (2004), 571–586.
- [Lan11] A. Langer, *On the S -fundamental group scheme*, *Ann. Inst. Fourier* **61** (2011), 2077–2119.

- [Lan15] A. Langer, *Generic positivity and foliations in positive characteristic*, Adv. Math. **277** (2015), 1–23.
- [Lang75] S. G. Langton, *Valuative criteria for families of vector bundles on algebraic varieties*, Ann. of Math., **101** (1975), 88–110.
- [LP] C. Lazda and A. Pál, *A homotopy exact sequence for overconvergent isocrystals*, arXiv:1704.07574
- [LS07] B. Le Stum, *Rigid cohomology*, Cambridge Tracts in Mathematics **172**, Cambridge University Press, 2007.
- [Ma40] A. Malčev, *On isomorphic matrix representations of infinite groups*, Mat. Sb. N.S. **8**(50) (1940), 405–422.
- [MR83] V. B. Mehta and A. Ramanathan, *Homogeneous bundles in characteristic p* , pp. 315–320 in Algebraic geometry—open problems (Ravello, 1982), Lecture Notes in Math. **997**, Springer Verlag 1983.
- [Mo] M. Morrow, *A Variational Tate Conjecture in crystalline cohomology*, to appear in Journal of the European Mathematical Society.
- [Og84] A. Ogus, *F -isocrystals and de Rham cohomology II — Convergent isocrystals*, Duke Math. J., **51** (1984), 765–850.
- [Og90] A. Ogus, *The convergent topos in characteristic p* , pp. 133–162 in Grothendieck Festschrift, Progress in Math. **88**, Birkhäuser (1990).
- [Ol11] M. Olsson, *Towards non-abelian p -adic Hodge theory in the good reduction case*, Memoirs of the AMS **210** (2011).
- [Sh00] A. Shiho, *Crystalline fundamental groups I — Isocrystals on log crystalline site and log convergent site*, **7**(2000), 509–656.
- [Sh02] A. Shiho, *Crystalline fundamental groups II — Log convergent cohomology and rigid cohomology*, **9**(2002), 1–163.
- [Sh] A. Shiho, *Chern classes of crystals II*, in preparation.
- [Si94] C. T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I*, Publ. Math. IHES **79**(1994), 47–129.
- [V18] Y. Varshavsky, *Intersection of a correspondence with a graph of Frobenius*, J. Algebraic Geom. **27**(2018), 1–20.