ユニタリ表現の指標と軌道の方法

大島 芳樹　(大阪大学大学院情報科学研究科)

この内容は Benjamin Harris 氏との共同研究に基づく．

G を Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする．G の $\mathfrak{g}^*$ への余随伴作用を考えると，その軌道 (余随伴軌道) は自然なシンプレクティック形式 (Kirillov–Kostant–Souriau 形式) をもつ．軌道の方法は，余随伴軌道と G の既約ユニタリ表現との関係について主張するものである．

$$\mathfrak{g}^*/G \quad \longleftrightarrow \{G \text{ の既約ユニタリ表現の同値類 }\} \tag{1}$$

軌道の方法は初めに冪零 Lie 群に対して Kirillov [6] によって導入された．連結単連結冪零 Lie 群については (1) の集合の間に 1 対 1 対応があり，さらに表現の側の重要な問題である指標，制限，誘導などが軌道の側の言葉で簡明に記述される ([8])．

一方簡約 Lie 群の場合には，冪零 Lie 群のときのような完全な対応は期待できないが，$\mathfrak{g}^*/G$ の方を適当に修正すると (1) の両辺の部分集合の間に対応ができて，表現の側の現象が軌道を使って良く記述できることがしばしば観察されている．以下では簡約 Lie 群のユニタリ表現について，既約表現の構成，指標，誘導が，軌道とどのように対応しているかを見る．

1　既約表現

G を実簡約 Lie 群とする．ただしここでは実簡約 Lie 群とは連結複素簡約 Lie 群の実形のこととする．余随伴軌道と表現の対応では，$\sqrt{-1}\mathfrak{g}^*/G$ を考えるのが自然である．$\sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ を不変形式により $\sqrt{-1}\mathfrak{g}$ と同一視し，さらに Lie 環の埋め込み $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$ を使って $\sqrt{-1}\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$ の部分空間とみなす．$G\cdot\xi \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ が半単純軌道であるとは，対応する $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$ の元が対角化可能であることとする．これは $G\cdot\xi \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ が閉集合になることと同値である．$G\cdot\xi \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ が冪零軌道であるとは，対応する $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$ の元が冪零行列であることとする．

既約表現の構成は半単純軌道の場合と冪零軌道の場合にわけられる．半単純軌道の場合は標準的な構成が知られている．冪零軌道については一般的な構成は得られていないが，対応する表現に極小表現など重要な表現が現れる ([14], [15] などを参照)．

ここでは半単純軌道の場合を扱う．余随伴軌道 $\mathcal{O} \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ に対して $\xi \in \mathcal{O}$ をとり，$G(\xi)$ をその固定部分群，$\mathfrak{g}(\xi)$ をその Lie 環とする．$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\xi)$ のシンプレクティック形式に関するメタプレクティック被覆を $\widetilde{G}(\xi)$ とする．

半単純軌道に付随する次のデータから表現が構成される．

定義 1.1. ペア $(\mathcal{O},\Lambda)$ が半単純軌道データとは，半単純軌道 $\mathcal{O} \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ と，各 $\xi \in \mathcal{O}$ に対する $\widetilde{G}(\xi)$ のユニタリ指標 Λ_ξ が定まっていて次をみたすものとする．

- $d\Lambda_\xi = \xi|_{\mathfrak{g}(\xi)}$,

- $g \cdot \Lambda_\xi \simeq \Lambda_{g\cdot\xi} \quad (\forall g \in G)$.
- Λ_ξ は $\widetilde{G}(\xi) \to G(\xi)$ を経由しない．

$(\mathcal{O}, \Lambda)$ を半単純軌道データとし，$\xi \in \mathcal{O}$ をとる．同型 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ で ξ に対応する元を $X_\xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{g}$ とする．X_ξ は半単純元なので，ある Cartan 部分代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ が存在して $X_\xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ となる．$\mathfrak{g}$ の Cartan 対合 θ を $\theta(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ となるようにとり，$K = G^\theta$ とする．$\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ を複素放物型部分代数，$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}$ をその Levi 分解とする．$\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_\mathbb{C}(\xi)$ をみたすとき $\mathfrak{q}$ を $\mathcal{O}$ の polarization という．また polarization $\mathfrak{q}$ は，$\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$ に対して

$$\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{R}_{>0} \Longrightarrow \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$$

であるとき admissible polarization という．さらに $\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}}$ の次元が admissible polarization のうち最大であるような $\mathfrak{q}$ を maximally real admissible polarization という．ここで $\bar{\mathfrak{q}}$ は，実形 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ に関する $\mathfrak{q}$ の複素共役である．

$(\mathcal{O}, \Lambda)$ に対応する表現は，admissible polarization $\mathfrak{q}$ をとると Harish-Chandra 加群の誘導関手 $I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{q},G(\xi)\cap K}$ を使って定義される ([9] を参照)．$s = \dim(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k})$ とし，virtual $(\mathfrak{g}, K)$ 加群を

$$X(\mathcal{O}, \Lambda) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j [(I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{q},G(\xi)\cap K})^{s+j}(\xi \otimes \mathbb{C}_{\rho(\mathfrak{n})})]$$

と定義する．$X(\mathcal{O}, \Lambda)$ は $\mathfrak{q}$ のとり方によらない．もし条件

$$\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{t}_\mathbb{C}) \text{ かつ } \alpha \text{ は imaginary root} \implies \langle \xi + \rho_\mathfrak{l}, \alpha \rangle > 0 \tag{2}$$

を満たせば，ある G の既約ユニタリ表現 $\pi(\mathcal{O}, \Lambda)$ が存在して $X(\mathcal{O}, \Lambda) = [\pi(\mathcal{O}, \Lambda)_K]$ となる．

この構成は Zuckerman 誘導と放物型誘導を組み合わせたものである．$X_\xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{k}$ のとき $\mathcal{O}$ を楕円型軌道，$X_\xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{g}^{-\theta}$ のとき $\mathcal{O}$ を双曲型軌道とよぶ．楕円型軌道 $\mathcal{O}$ には複素構造が入り Λ_ξ はその上の正則直線束を定める．この場合 $\pi(\mathcal{O}, \Lambda)$ はその Dolbeault コホモロジーと同型になる ([16])．双曲型軌道の場合は $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ が実の放物型部分代数になり，$\pi(\mathcal{O}, \Lambda)$ は (退化) ユニタリ主系列表現になる．

また $\mathcal{O}$ が余随伴軌道の中で次元が最大のとき regular という．regular な軌道には緩増加表現が対応する．特に $\operatorname{rank}\mathfrak{g} = \operatorname{rank}\mathfrak{k}$ のとき，regular な楕円型軌道は離散系列表現と対応する．

2 指標

有限次元表現 π に対して指標 $\Theta(g) = \operatorname{Trace}\pi(g)$ は G 上の関数を定めるが，無限次元表現に対しても G 上の distribution として指標を定義できることがある．例えば，冪零 Lie 群の既約ユニタリ表現や簡約 Lie 群の既約 admissible 表現については $f \in C_c^\infty(G)$ に対する $\pi(f)$ が trace class になり，$f \mapsto \operatorname{Trace}\pi(f)$ が G 上の distribution $\Theta(\pi)$ を定める．$\Theta(\pi)$ を指数写像で引き戻して $\mathfrak{g}$ 上の distribution $\theta(\pi)$ を得る．

軌道の方法によれば，軌道 $\mathcal{O}$ と表現 π が対応するとき $\theta(\pi)$ の Fourier 変換は軌道 $\mathcal{O}$ 上の積分で与えられる．

実際，冪零 Lie 群の既約ユニタリ表現の指標 $\theta(\pi)$ は緩増加になり，Fourier 変換 $f \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}) \mapsto \hat{f} \in \mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{g}^*)$ を

$$\hat{f}(\xi) := \int_\mathfrak{g} e^{\langle \xi, x \rangle} f(x) dx$$

とすると，

$$\langle \theta(\pi), f \rangle = \int_{\xi\in\mathcal{O}} \hat{f}(\xi) \omega_\mathcal{O} \tag{3}$$

が成り立つ．ここで $\omega_{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}$ のシンプレクティック形式から定まる体積形式を表す．

簡約 Lie 群の既約 admissible 表現の場合は $\theta(\pi)$ の定義を修正して

$$\theta(\pi) = \sqrt{\exp} \cdot \exp^*(\Theta(\pi))$$

とする．この補正により，π が無限小指標を持つことに応じて $\theta(\pi)$ が定数係数の微分方程式をみたす．また $\Theta(\pi)$ および $\theta(\pi)$ は局所 L^1 関数になる ([1]).

G がコンパクトの場合は，Kirillov [7] により (3) が示された．

G が非コンパクトでも π が緩増加表現の場合には $\theta(\pi)$ が緩増加になり，やはり (3) の式が成立する ([11]). ところが π が緩増加表現でない場合には $\theta(\pi)$ は一般に指数関数程度の増大度をもち緩増加でない．従って $\theta(\pi)$ は $\sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ の軌道の Fourier 変換とは等しくならない．

Rossmann [12] は実の余随伴軌道の代わりに，軌道の複素化の中のサイクルを使って指標が表せることを示した．π を regular な無限小指標をもつ既約 admissible 表現として，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ をその無限小指標に対応する複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の余随伴軌道とする．$2n = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rank} \mathfrak{g}$ とおく．このとき，ある実 $2n$ 次元のサイクル C が次の意味で指標 $\theta(\pi)$ を記述する：$f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ に対して

$$\langle \theta(\pi), f \rangle = \int_C \hat{f} \omega_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}. \tag{4}$$

ここで Fourier 変換 $\hat{f}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数にのばしている．$\omega_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の正則シンプレクティック形式から定まる正則 $2n$ 形式である．C の台はコンパクトとは限らないが，積分が収束するようなサイクルである．また C は一意的には定まらず $\omega_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}$ の中間次元のホモロジーの元とみなせる．

さらに (4) のサイクル C は，π と対応する旗多様体の同変層の特性サイクルにより表されることが Schmid–Vilonen [13] で示されている．$X = G_{\mathbb{C}}/B$ を G の複素化の旗多様体とする．X 上の G 同変層と表現 π の対応は柏原 [3] によって予想され，[4], [5] で示された．π に対応する X 上の G 同変層 $\mathcal{F}$ は，Beilinson–Bernstein 対応，Riemann–Hilbert 対応，松木対応 [10] の合成で得られる．このとき [13] は，(4) に現れるサイクル C が $\mathcal{F}$ の特性サイクルによる twisted moment map の像で与えられることを示した．

前節で定義した半単純軌道に付随した既約ユニタリ表現 π について考えてみよう．半単純軌道 $\mathcal{O}$ に対して前節の記号を用いる．U を $G_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群で K を含むものとする．π に対応する X 上の G 同変層 $\mathcal{F}$ の特性サイクルを求め，[13] を適用することにより次の定理が得られる ([2]).

定理 2.1. $(\mathcal{O}, \Lambda)$ を (2) を満たす半単純軌道データとする．また $\mathfrak{q}$ を maximally real admissible polarization とする．このとき既約ユニタリ表現 $\pi = \pi(\mathcal{O}, \Lambda)$ について

$$\langle \theta(\pi), f \rangle = \int_C \hat{f} \omega_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}, \qquad C = \{g \cdot \xi + u \cdot \rho_{\mathfrak{l}} : g \in G,\ u \in U,\ g \cdot \mathfrak{q} = u \cdot \mathfrak{q}\}$$

が成り立つ．

$\mathcal{O} = G \cdot \xi$ であるから，C の定義において $u \cdot \rho_{\mathfrak{l}}$ の項が無ければ (3) になる．

3 誘導

G を実簡約代数群，H をその部分代数群とする．ここでは H をユニモジュラーとし，自明表現からのユニタリ誘導を考える．軌道の方法によれば，G のユニタリ表現 $L^2(G/H)$ と $G \cdot \mathfrak{h}^\perp$ とが対応する．ここで $\mathfrak{h}^\perp := \{\xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{g}^* : \xi|_{\mathfrak{h}} = 0\}$ とおいた．

$L^2(G/H)$ の annihilator ideal に着目することにより，次の定理が証明できる．

定理 3.1. もし G の既約ユニタリ表現 π が $L^2(G/H)$ に寄与するなら，π はある半単純元 $\lambda \in G_{\mathbb{C}} \cdot \mathfrak{h}^{\perp}$ から定まる $G_{\mathbb{C}}$ の一般旗多様体上のあるねじれ $\mathscr{D}$ 加群として実現される．さらにこのとき，ねじれ $\mathscr{D}$ 加群のパラメータは $G_{\mathbb{C}} \cdot \mathfrak{h}^{\perp}$ の Zariski 閉包に入る．

参考文献

[1] Harish-Chandra, *Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group*, Trans. Amer. Math. Soc. **119** (1965), 457–508.

[2] B. Harris, Y. Oshima, *Irreducible characters and semisimple coadjoint orbits*, arXiv:1710.10190.

[3] M. Kashiwara, *Character, character cycle, fixed point theorem and group representations*, Representations of Lie groups, Adv. Stud. Pure Math. **14** (1987), 369–378.

[4] M. Kashiwara, *Equivariant derived category and representation of real semisimple Lie groups*, Representation theory and complex analysis, Lecture Notes in Math. **1931**, Springer, Berlin, (2008), 137–234.

[5] M. Kashiwara, W. Schmid, *Quasi-equivariant $\mathscr{D}$-modules, equivariant derived category, and representations of reductive Lie groups*, Lie theory and geometry, Progr. Math. **123**, Birkhäuser Boston, (1994), 457–488.

[6] A. A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Uspehi Mat. Nauk **17** (1962), 57–110.

[7] A. A. Kirillov, *Characters of unitary representations of Lie groups*, Funkcional. Anal. i Priložen **2** (1968), 40–55.

[8] A. A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*, Graduate Studies in Mathematics **64** (2004), Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[9] A. Knapp, D. Vogan, *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Mathematical Series **45** (1995), Princeton University Press, Princeton, NJ.

[10] I. Mirković, T. Uzawa, K. Vilonen, *Matsuki correspondence for sheaves*, Invent. Math. **109** (1992), 231–245.

[11] W. Rossmann, *Kirillov's character formula for reductive Lie groups*, Invent. Math. **48** (1978), 207–220.

[12] W. Rossmann, *Characters as contour integrals*, Lie group representations, III, Lecture Notes in Math. **1077**, Springer, Berlin, (1984), 375–388.

[13] W. Schmid, K. Vilonen, *Two geometric character formulas for reductive Lie groups*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 799–867.

[14] P. Torasso, *Méthode des orbites de Kirillov-Duflo et représentations minimales des groupes simples sur un corps local de caractéristique nulle*, Duke Math. J. **90** (1997), 261–377.

[15] D. Vogan, *The method of coadjoint orbits for real reductive groups*, Representation theory of Lie groups (Park City, UT), Amer. Math. Soc., Providence, RI. (2000), 179–238.

[16] H. Wong, *Dolbeault cohomological realization of Zuckerman modules associated with finite rank representations*, J. Funct. Anal. **129** (1995), 428–454.