有限群の表現論における局所大域予想
– 最近 5 年間の大きな進展

越谷 重夫 (こしたに)　千葉大学 先進科学センター

1. 序文

今回の話題は、有限群のモジュラー表現論についてである。「有限群の表現論」とただ言ったら、一般的にまず思い浮かべることとは、複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限群 G の表現論であろう。これは群代数 $\mathbb{C}G$ 上の加群を考えることと、同値である。ふつうは、はっきり記述されないが、いわゆる 随伴 (adjoint, adjunction)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-algebara}}(\mathbb{C}G,\ \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))\ \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{groups}}(G,\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

により、どちら側から出発しても同じである[1]。以下ここでは、有限次数の表現のみを扱うので、考える加群たちは皆、有限生成（基礎体上ベクトル空間と考えると有限次元）であるもののみを考える、ということになる。今回の話は（もちろん $\mathbb{C}$ 上表現も考えるが）ポイントは、正標数 p （したがって、p はある素数）の体 k 上の表現論を考える、ということである。もちろん、上の随伴性は $\mathbb{C}$ を k に置き換えても成立する。G の位数が p で割り切れれば、Maschke の定理 (1898) より、kG は半単純代数ではないので、直既約性と既約性は異なる。一番易しい例は、

$$\mathbb{C}(\mathbb{Z}/2) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix} \quad \mathbb{C}\text{-代数として}, \quad k(\mathbb{Z}/2) \cong k[x]/(x^2) \quad k\text{-代数として。ただし } p = 2$$

ここで、$\mathbb{Z}/2$ は位数 2 の巡回群、$k[x]$ は 1 変数多項式代数である。このような表現論は、「有限群のモジュラー表現論」と呼ばれている。以下、有限群の表現論と言ったら、このモジュラー表現論を意味することにする。この理論は I. Schur (1875–1941) の弟子であった Richard Brauer(1901–77) がそのほとんどの基礎理論を作り上げた。1920 − 50 年代頃の話である [7, Chapters VI, VII], [8] 。彼は、総括的報告講演でいくつかの、非常に興味ある問題、そして予想を多く発表した [3]。そこでの問題/予想のうち、幾つかは肯定的に解かれ、そして否定的に解かれたものもある。だが大きな問題は、部分的な肯定的解答は得られていても、完全に解かれた、というものが多くなく、ある意味、問題の言い換え

e-mail address: `koshitan@math.s.chiba-u.ac.jp`.

[1] [34, p.234]

（別の解釈を与えること）が多かったように思う[2]。そして、2012 年ころの「Brauer の高さゼロ予想の一方向の解決」 [18]、2015 年の「$p=2$ のときのマッカイ予想解決」 [25] [3] あたりから、「有限単純群の分類定理」を用いて、ある意味力づくで、すべての場合を虱潰しに調べる、という方法で、いろいろな問題/予想を解いてしまう、というスタイルの論文が表れ始めた。もっとも正確に言うと Gerhard Michler などは 1980 年代からすでにその方向で定理を証明してはいたが [27]。この 2 つに、Gunter Malle の名前が出て来る。これはある意味自然である。もしもある予想/問題がほぼ単純群（準単純群）をチェックすれば十分、という風に帰着されたとする。すると、5 次以上の交代群に関してチェックすることは大体できる。26 個の散在型単純群についても何とか頑張る。リー型有限群で定義標数が p のものは、結構いろいろなことがわかっている。すると残りはリー型単純群で定義標数 ℓ が p とは異なる場合である。この群の表現論に関しては、G. Malle は非常に詳しい。これが上記で 2 回も彼の名前が出て来る理由だと私は推察している。いずれにしても、重要な未解決予想のうちマッカイ予想、およびアルペリンの重み予想の 2 つに関してはここ 10 年くらいの大発展のきっかけになった、一番の重要な結果は I.M. Isaace, G. Malle, G. Navarro の論文 [17] だと思う。これは有り体に言って、「マッカイ予想を解くには単純群の場合に帰着される」を正確に記述した最初の正式に公開された論文である[4]。

前置きが長くなってしまったが、今回の講演のポイントは

有限単純群の分類を十二分に使って、場合ごとのチェックで、とにかく力ずくで
有限群の表現論での未解決問題を解いてしまう

である。ということは、最終的に解いた人たちは疑いもなくすごいが、単純群の場合に帰着できる、を証明した人たちの貢献度も非常に高いと思う[5]。

2. 局所大域予想　その 1

以下、素数 p は止めておく。G は常に有限群である。ここで大域理論とは有限群 G の表現論を意味する。一方、局所理論とは G の部分群 $N_G(P)$ (ここで P は G の非自明な p-部分群）の表現論を意味することにする。

---

[2] 手前味噌ではあるが [19] に 7 年前くらい前までの情報が書いてある

[3] 2015 年 4 月ドイツ・オーバーヴォルファッハでの研究集会で初めて発表された。Malle はその瞬間の写真を自分のホームページに置いている。私もたまたまその場にいたが、結構感動した。ちなみにこの論文の共著者 Britta Späth は彼の元学生で、私も彼女と共著論文を 3 つ書いた。[22, 23, 24].

[4] 彼らも本文の中で言っているが「マッカイ予想よりずっと強いデイド予想を解くには、単純群の場合に帰着することができる、とデイド E.C.Dade 自身が幾つかの論文の中で述べているが ([10, 11, 12, 13])、彼ら 3 人の言い分は、その帰着定理の Dade による証明は未だに発表されていないじゃないか」と

[5] これで思い出すのは、例のフェルマーの定理は Andrew Wiles によって証明されたが、Gerhard Frey (フライ曲線) の貢献度も大きいはず

$$
\begin{array}{lc}
\text{大域} \cdots\cdots & \text{mod-}kG \\
 & \updownarrow \\
\text{局所} \cdots\cdots & \text{mod-}kN_G(P)
\end{array}
$$

ここで、mod-kG は有限生成右 kG-加群たちからなるアーベル圏のことである。以下 $\mathrm{Irr}(G)$ で G の通常 ($\mathbb{C}$ 上) 既約指標全体の集合（指標を表す時の数字は、次数)、$\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ で、次数が p と素である既約指標たちの集合、$|X|$ で集合 X の元の個数を意味する。

(2.1) McKay 予想.[26] P を G の Sylow p-部分群とする。

$$|\mathrm{Irr}_{p'}(G)| = |\mathrm{Irr}_{p'}(N_G(P))| \quad \text{は本当だろうか？}$$

実例を考えてみる。

(2.2) 例.　まずは、$G \gneqq N_G(P)$ となる世の中で一番小さい例から。

(1) $G := \mathfrak{S}_3$（3 次対称群), $p := 2$, $P := \langle(12)\rangle$ とする。P は G の位数 2 の Sylow 2-部分群。すると $N := N_G(P) = P$ だから $\mathrm{Irr}(G) = \{1_G, 1' := \text{sign character},\ 2\}$, したがって、$|\mathrm{Irr}_{2'}(G)| = |\{1_G, \mathrm{sign}\}| = 2 = |\mathrm{Irr}_{2'}(N)| = |\mathrm{Irr}(N)|$. 確かに、**(2.1)** は成立している。

(2) （もう少し群を大きくして） $G := \mathbf{M}$ (モンスター群), $p = 11$ とする[6] 。このとき、G の Sylow 11-部分群を P とすると、$P \cong \mathbb{Z}/11 \times \mathbb{Z}/11$, そして $N := N_G(P) = P \rtimes (\mathbb{Z}/5 \times \mathrm{SL}(2,5))$（半直積）がわかる。そして Atlas[6] などから $|\mathrm{Irr}_{11'}(G)| = 50 = |\mathrm{Irr}_{11'}(N)|$ が出て来る。このように大きな群でも **(2.1)** は成立している。

(2.3) 定理. Isaacs-Malle-Navarro [17]　 G に対しての McKay 予想を確かめるには、G が　帰納的マッカイ条件 inductive McKay condition (以後 iMc と略記) を満たしているかをチェックすれば十分である。

この条件は複雑すぎで、ここでは到底述べられない。大雑把に言って、G の外部自己同型 $\mathrm{Out}(G)$, そして $\mathrm{Out}(G)$ を含む G より大きい群への G の通常既約指標の拡張などの言葉で、述べられている。ただ特別に、G が準単純 (quasi-simple) で、$\mathrm{Out}(G)$ が巡回群であれば

G は iMc を満たしている

$\Leftrightarrow$　次の二つの条件を満たす全単射 $\Omega : \mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{Irr}_{p'}(N_G(P))$ が存在する。

(1) Ω は $\mathrm{Out}(G)$ の作用と可換 ($\mathrm{Out}(G)$-equivariant)

[6]ちなみに、$|G| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \fallingdotseq 8 \times 10^{53}$. [15].

(2) Ω は、$Z(G)$ (G の中心) への制限と可換. ただし、Ω に出て来る 2 つの集合の係数を $\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ で拡大しておかねばならないが。

がわかる。さて、我々、モジュラー表現論に関心がある者は、上の様に群 G 全体での表現論があると、それを直ぐにブロック版に拡張したくなる習性がある。そこで、ブロックの復習をする。

kG は有限次元 k 上代数であるから有限個の（両側加群としての）直既約成分に一意的に分解される。

$$kG = B_0 \times B_1 \times \cdots \times B_n$$

つまり、各 B_i は両側加群 (両側イデアル）として直既約で、kG のブロックと呼ばれる。自明な単純加群 k_G は必ずどこか一つのブロック B_i に含まれている（言い換えると $k_G{\cdot}B_i{\neq}0$ となる B_i がただ一つだけある）が、これを kG の主ブロックと呼び上の記号で、$B_0 =: B_0(kG)$ がそれだとする。以後単に B で kG のブロックを意味することとする。すると、B の不足群 (defect group) D が G-共役を除いて一意的に存在する。不足群とは、Sylow p-部分群の一般化で、いろいろ同値な定義、特徴づけがあるが、そのうちの一つは

D は自然な両側 B 代数としての全射 $B \otimes_{kH} B \twoheadrightarrow B$,
$\beta_1 \otimes \beta_2 \mapsto \beta_1\beta_2$ が分裂全射となる G の部分群 H のうちで極小のもの

で定義される。ここには D が p-群　という条件は入っていないがマシュケの定理より自動的に p-群となる。この D は G-共役を除いて一意的に定まる。全ての直既約 B-加群 X（つまり、X は直既約 kG-加群で、$XB{\neq}\{0\}$ となるもの）は、ある直既約 kD-加群を kG まで誘導した加群の直和因子になっている因みに、主ブロック B_0 の不足群とは G の Sylow p-部分群に他ならない。不足群 D の表現論が B の表現論を大きく統制（支配）していると言える。(不足群は、有限群と素数で決まる Sylow p 部分群の一般化である)。(このあたりのことは [29] 参照)。

B はもちろん k 上有限次元代数であるが、更に強い性質として対称代数になっている。以下、簡単のために、k は代数的閉体とする。マシュケの定理のブロック版（一般化）として

B は半単純（したがって単純）代数 $\Leftrightarrow$ B の不足群 (defect group) は自明

次に、ブロック理論での Brauer 対応の話が必要。G の p-ブロック B (kG のブロック・イデアルのこと）が不足群 D を持つとする。$N := N_G(D)$ とする。Brauer の第一主定理から、kN のブロック b が唯一つ決まる。この b を B のブラウアー対応子 (Brauer correspondent) と呼ぶ。その定義は、

b は、制限両側加群 $B{\downarrow}^{G\times G}_{N\times N}$ の直和因子として重複度 1 で現れる kN のブロック (b の不足群も D になる)。

今回の主題「局所大域」の観点で言えば、

$$\begin{array}{lcl} \text{大域} \cdots\cdots & \text{mod-}B \\ & \updownarrow \\ \text{局所} \cdots\cdots & \text{mod-}b \end{array}$$

さて、これで漸く McKay 予想のブロック版が定義できる。すなわち、

(2.4) Alperin-McKay 予想. [1] B, D, b を上の通りとする。また $N := N_G(D)$ とする。この時、

$$|\mathrm{Irr}_0(B)| = |\mathrm{Irr}_0(b)| \text{ は成立するであろうか?}$$

ここで $\mathrm{Irr}(B) := \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \,|\, \chi \text{は } B \text{ に属する }\}$（正確な定義を与えていない。[29, p.231] を参照)。また、$\mathrm{Irr}_0(B) := \{\chi \in \mathrm{Irr}(B) \,\big|\, p^{a-d}|\chi(1), p^{a-d+1} \nmid \chi(1)\}$. ここで、$G$ の Sylow p-部分群の位数を p^a, $|D| = p^d$ で、a, d は定義されている。$\mathrm{Irr}_0(B)$ に属する指標 χ は B に属する高さ height ゼロの指標、と呼ばれる。唐突ではあるが、D が G の Sylow p-部分群のときは $a = d$ なので、χ の高さゼロ $\Leftrightarrow p \nmid \chi(1)$ となり、したがって、Alperin-McKay 予想は、McKay 予想の一般化になっている。そしてこれに関しても「帰納的 Alperin-McKay アルペリン・マッカイ条件」 iAMc が定義される。すなわち

(2.5) 定理. iAMc. Späth [32] G のブロック B が iAMc を満たせば、B に関して **(2.4)** は成立する[7]。

3. 局所大域予想　その 2

以下記号は前節でのものを踏襲する。G, p, B, D, b, $N := N_G(D)$ などである。ここではまず最初に（前節でも名前が出てきた同じ）アルペリンによる重み予想、を扱う。更なる記号が必要。$\ell(G)$ で kG の非同型な既約（単純）加群の個数、そして G の重み weight とは、対 (Q, S) のことである。ここで Q は G の p-部分群をすべて動く。S は単純かつ射影的 $k(N_G(Q)/Q)$-加群。S は非同型なもののみを取っておく。また、(Q, S) に対して、G

[7] 余談をもうひとつ。私のこの結果の貢献 (?) は、Britta Späth に 2012 年 Oberwolfach で会った時、何度も「アルペリン・マッカイ予想だって、帰納的条件があるはずだ!」とけしかけたことである。実際彼女はこの時の講演で、Shigeo に何度も言われた、と発言している。

は共役で自然に作用しているが、G-共役である重みたちは同じもの、とみなすことにする。以上の下で、以下の予想が述べられた。

(3.1) 予想　Alperin の重み予想 (Alperin's Weight =AW conjecture) [2]

$$\ell(G) = |G \text{ の重み } (Q,S) \text{ たち }| \quad \text{は正しいだろうか?}$$

iMc の類似である、この予想の帰納的条件は Gabriel Navarro と Tiep によって与えられた。すなわち

(3.2) 定理. Navarro-Tiep [31]　G に対しての Alperin の重み予想を確かめるには、G に対して　帰納的アルペリン重み条件 inductive Alperin Weight condition iAWc をチェックすれば十分である。

この 2 つのことに対しても、当然のことながら、そのブロック版がある。予想自体は Alperin によって同時に既に提唱されている。記号と言葉の準備が必要。$\ell(B)$ は B に属する非同型単純 kG-加群の個数、そして「重み (Q,S) が B に属する」とは、「S を $kN_G(Q)$-加群と思った時、S は $N_G(Q)$ のあるブロック β に属するが、この β の G へのブラウアー誘導 β^G が B になっている」ということである（本当は言葉足らず。[29] を参照)。

(3.3) 予想.　ブロック版 Alperin の重み予想 (Block-wise Alperin's Weight =BAW 予想) [2]

$$\ell(B) = |B \text{ の重み } (Q,S) \text{ たち }| \quad \text{は正しいだろうか?}$$

そしてこれに対しても、やはり「帰納的ブロック版アルペリンの重み予想の条件」iBAWc が定義できる。またまた、Britta Späth の登場である[8]。

(3.4) 定理. iBAWc　Späth　[33]　G のブロック B が iBAWc を満たせば、B に関して **(3.3)** は成立する。

あと最後に、Brauer の高さゼロ予想を述べる。

(3.4) Brauer の高さゼロ予想. Height Zero Conjecture=HZC　[3]　B を G のブロック、D を B の不足群とする。この時、次は正しいだろうか？

$$\mathrm{Irr}_0(B) = \mathrm{Irr}(B) \iff D \text{ は可換.}$$

[8]彼女はこれら一連の素晴らしい仕事で、2015 年 10 月からドイツ・Wuppertal 大学で教授のである

次に、Brauer の高さゼロ予想と iAMc が不思議に結びついていることが次でわかる。後程もう一度述べるが、この事実には、実は**村井正文**による非常に大きな貢献がある[9] 。さて、下記の定理で必要な言葉使いの定義。ここで、「群 S が有限群 G に involve されている」とは、「G の部分群 H とそれの正規部分群 N が存在して $H/N \cong S$ となっていること」の意味だとする。

(3.5) 定理. (Brauer の高さゼロ予想と iAMc). Navarro-Späth [30] 素数 p と有限群 G を考える。ここで、G に involve されているすべての非可換単純群 S に対して iAMc が成立しているとする。すると Brauer の高さゼロ予想 **(3.4)**$\Rightarrow$ は正しい。

4. 局所大域予想に関する結果

(4.1) 定理. (Kessar-Malle [18]) ブラウアーの高さゼロ予想 **(3.4)** において、$\Leftarrow$ は正しい。

これも、有限単純群の分類を十二分に使って力業でねじ伏せた、といった感じの証明である。

(4.2) 定理. (Malle-Späth [25]) $p = 2$ の場合のマッカイ予想 **(2.1)** は正しい[10]。

証明は、もちろん iMc を使って、そして有限単純群の分類定理を十二分に使って解いている（ようだ)。

筆者が関わった定理についても紹介したい[11]。

---

[9] 下記の Navarro-Späth の定理、そして Späth による 2 つのブロック版（準）単純群への帰着定理**定理 (2.5), (3.4)** は実は、元々のアイデアは 村井正文による。村井氏は不幸な事故で、2012 年 7 月に亡くなった。[37] 参照。2011 年ころからずっと Navarro, Späth は ”I/We admire Murai's results!” と筆者に向かって、何度も言っていたことを思い出す。

[10] マッカイ予想 **(2.1)** において、マッカイ自身の論文での原型は $p = 2$ かつ G は有限単純群に限られていた。もちろん、Malle と Späth によるこの場合は、$p = 2$ という条件が付くものの、G は任意の有限群である。

[11] 裏話をすれば、この一連の 3 つの論文のきっかけは、これも「村井正文さんの論文 [28] を使えば Dade が考え出した群 $G[b]$ [9, Corollary 12.8] を上手く使うことができる！」と Britta Späth が見抜いたことが、始まりであった。

(4.3) 定理. (Späth-越谷). [22, 23, 24]

(1) G をある有限非可換単純群 S の普遍被覆 (universal covering) であって、B を不足群 D を持つ G のブロックとする。もしも D が巡回群であれば、B に対して iAMc は成立する。

(2) B は、準単純群 G のブロックとする。更にもしも B がベキ零 (nilpotent) ブロックであれば、iBAWc は成立する。

(3) S をある非可換単純群、G を S の普遍被覆とする。更に G の Sylow p-部分群は巡回群で、なおかつ $\mathrm{Out}(S)$ は非巡回群だとする。すると、G のすべてのブロック B に対して、iAMc, iBAWc の両方が成立する。

上記の定理は、ベキ零とか、不足群は巡回群、などの条件が付くわけだが、実はいろいろな一般的な条件の下でのの定理の証明の際には、実はいろいろなステップで必要となるので、結構使い勝手は悪くはない（と自負している）。

5. 局所大域予想 その 3—より構造的なもの

過去 5 年ではなくて、既に 20 年くらい続けてきている仕事はもちろん、局所大域予想の一つではあるのだが、今まで出て来たもののように、「指標の数を数える」に留まらず、より構造的な（したがって、より難しい？）予想に関係している。つまり、「ブルエの可換不足群予想 Broué's Abelian Defect Group Conjecture ADGC」である（ [4, 5] 参照）。ここでは ADGC に関してあまり詳しくは述べない。次の定理のみを紹介しておくにとどめる。

(5.1) 定理. 功刀-越谷 (2002) [21, 20] G を勝手な有限群で Sylow 3-部分群 D は可換だとする。そして、B, b をそれぞれ $G, N_G(D)$ の主ブロックとする。すると、次の 2 つの三角圏は同値である。

$$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\text{mod-}B) \cong \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\text{mod-}b).$$

ここで $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ はアーベル圏 $\mathcal{A}$ の有界 (bounded) 導来圏 (derived category) を意味している。見てお分かりの通り、これだってまさしく「大域、局所」の関係になっている。ちなみに上の B, b は、互いにブラウアー対応子になっている。

謝辞 千葉大学 澤辺正人さん、および会場関連で御世話になった大阪大学の関係の方々に深く感謝の意を表します。

References

[1] , J.L. Alperin, The main problem of block theory, In: Proceedings of the Conference on Finite Groups, Univ. Utah, Park City, Utah (1975), Academic Press, New York, 1976, pp.341–356.

[2] J.L. Alperin, Weights for finite groups, in "The Arcata Conference on Representations of Finite Groups", edited by P.Fong, Proc.Symposia in Pure Math. Vol.47, Amer. Math. Soc., 1987, pp.369–379.

[3] R. Brauer (河田敬義 訳), 有限群の表現, in "現代の数学 I" (T.L. サーティー編), 岩波書店, 1965, 197–257.

[4] M. Broué Isométries de caractères et équivalences de Morita ou dérivées, Publ. Math. I.H.E.S. **71** (1990), 45–63.

[5] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras. In: Finite Dimensional Algebras and Related Topics, edited by V. Dlab, L.L. Scott, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1994. pp.1–26.

[6] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, Atlas of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[7] C.W. Curtis, Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer, History of Mathematics, Vol.15, Amer. Math. Soc. and London Math. Soc., 1999.

[8] チャールズ・W・カーティス, 有限群の表現–フロベニウスからブラウアーまで, in 数学を語ろう **2** 代数・数論 数学史篇, R. ウイルソン/J. グレイ編, 三宅克哉 訳, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2006, pp.163–185.

[9] E.C. Dade, Block extensions, Ill. J. Math. **17** (1973), 198–272.

[10] E.C. Dade, Counting characters in blocks I, Inv. Math. **109** (1992), 187–210.

[11] E.C. Dade, Counting characters in blocks II, J. reine angew. Math. **448** (1994), 97–190.

[12] E.C. Dade, Counting characters in blocks with cyclic defect groups I, J. Algebra **186** (1996), 934–969.

[13] E.C. Dade, Counting characters in blocks 2.9, in "Representation Theory of Finite Groups", edited by R. Solomon, de Gruyter, 1997, pp.45–60.

[14] E.C. Dade, Another way to count characters, J. reine angew. Math. **510** (1999), 1–55.

[15] 原田 耕一郎, モンスター – 群のひろがり, 岩波書店, 1999.

[16] M. Holloway, S. Koshitani, N. Kunugi, Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of index p, Archiv der Mathematik **94** (2010), 101–116.

[17] I.M. Isaacs, G. Malle, G. Navarro, A reduction theorem for the McKay conjecture, Invent. math. **170** (2007), 33–101.

[18] R. Kessar, G. Malle, Quasi-isolated blocks and Brauer's height zero conjecture, Ann. of Math. **178** (2013), 321–384.

[19] 越谷重夫, 群を表現するとは–モジュラー表現論, 現在過去未来, 2010 年度日本数学会年会, 企画特別講演, 慶應義塾大学, 2010 年 3 月 27 日.

[20] S. Koshitani, N. Kunugi, The principal 3-blocks of the 3-dimensional projective special unitary groups in non-defining characteristic, J. reine angew. Math. **539** (2001), 1–27.

[21] S. Koshitani, N. Kunugi, Broué's conjecture holds for principal 3-blocks with elementary abelian defect group of order 9, J. Algebra **248** (2002), 575–604.

[22] S. Koshitani, B. Späth, Clifford theory of characters in induced blocks, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), 3687–3702.

[23] S. Koshitani, B. Späth, The inductive Alperin-McKay condition for 2-blocks with cyclic defect groups, Arch. Math. **106** (2016), 107–116.

[24] S. Koshitani, B. Späth, The inductive Alperin-McKay and blockwise Alperin weight conditions for blocks with cyclic defect group and odd primes, J. Group Theory **19** (2016), 777–813.

[25] G. Malle, B. Späth, Characters of odd degree, Ann. of Math. **184** (2016), 869–908.

[26] J. McKay, Irreducible representations of odd degree, J. Algebra **20** (1972), 416–418.

[27] G.O. Michler, Contributions to modular representation theory of finite groups, In: 'Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras', Birkhäuser, Basel, 1991, 99–140.

[28] M. Murai, On blocks of normal subgroups of finite groups, Osaka J. Math. **50** (2013), 1007–1020.

[29] 永尾 汎, 津島行男, 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[30] G. Navarro, B. Späth, On Brauer's height zero conjecture, J. European Math. Soc. **16** (2014), 695–747.

[31] G. Navarro, P.H. Tiep, A reduction theorem for the Alperin weight conjecture, Inv. Math. **184** (2011), 529–565.

[32] B. Späth, A resuction theorem for the Alperin-McKay conjecture, J. Reine Angew. Math. **680** (2013), 153–189.

[33] B. Späth, A resuction theorem for the blockwise Alperin weight conjecture, J. Group Theory **16** (2013), 159–220.

[34] 土岡俊介, 表現論と圏論化, 「圏論の歩き方」 圏論の歩き方委員会 編, 日本評論社, 第 14 章, 2015.

[35] 宇野勝博, 功刀直子, 有限群のモジュラー表現論における予想について, (論説) 雑誌「数学」 日本数学会編集, 岩波書店, 第 65 巻 第 1 号, 2013 年 1 月, pp.1–23.

[36] 渡辺アツミ, 有限群のモジュラー表現論, 数理科学 7 月号 (1996), pp.66-71.

[37] 渡辺アツミ, 村井正文 氏の業績 (On the work of Masafumi Murai), 数理解析研究所講究録 **1967** 巻 (2015), pp.138–152.