p 進簡約群の既約法 p 表現の分類定理

阿部 紀行 *

1　はじめに

G を群，C を代数閉体とする．

定義 1.1　G の C ベクトル空間への線型な作用を**表現**という．つまり，G の C 上の表現とは，C ベクトル空間 V と準同型写像 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ の組 (π, V) である．ただし，$\mathrm{GL}(V)$ は V の自己線型同型からなる群である．

与えられた群 G と C に対してその表現を理解するのが表現論の目的であり，特に**既約表現**を理解することが表現論における中心的な問題となる．この問題は（当然ながら）群 G と体 C（特にその標数）に強く依存する．本稿では，G が p 進簡約群，C の標数が p である場合（この場合の表現を**法 p 表現**と呼ぶ）に既約表現の分類に関して知られている結果について述べる．

p 進簡約群の表現論は，主に整数論，特に Langlands 対応をその動機とする．大域 Langlands 対応は代数体の絶対 Galois 群の n 次元表現と GL_n の保型表現との間に自然な対応が存在することを主張する．また，その局所版である局所 Langlands 対応は，p 進体 F の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の n 次元表現と $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約表現との間に自然な対応が存在することを主張する．この局所 Langlands 対応は様々な進展の上，最終的に Harris-Taylor [HT01] により解決がなされた．（Henniart [Hen00] や Scholze [Sch13] による別証明も存在する．）

以上の，特に局所 Langlands 対応で考えている表現は，$\mathbb{C}$ 上または $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$（$\ell$ は p と異なる素数）上のものである．今世紀に入ってしばらくしてから，これらの係数を $\overline{\mathbb{F}}_p$ または $\overline{\mathbb{Q}}_p$[*1] にしようという考え方が，p 進保型形式の理論などを動機として起こってきた．これにより $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の Langlands 対応（法 p Langlands 対応）や $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の Langlands 対応（p 進 Langlands 対応）の考え方が生み出され，$n = 2$，$F = \mathbb{Q}_p$ においては満足のいく理論が存在する [Col10, Paš13, CDP14]．一般の n や F に対する p 進/法 p Langlands 対応を考えることは自然でありやはり重要な意味を持つと考えられるが，様々な障害が存在することがわかっており，完成までは時間がかかりそうである [Bre10]．

* 北海道大学 大学院理学研究院，abenori@math.sci.hokudai.ac.jp

*1 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の標数は $\mathbb{C}$ や $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ と同様 0 であるため，代数的なものを考えている限り表現論は似たような振る舞いをする．しかし $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ や $\mathrm{GL}_n(F)$ は自然な位相を持つ位相群であり，また Langlands 対応などで考える表現は連続な表現である．このように連続な表現を考える場合，係数が $\mathbb{C}$ や $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の場合と，$\overline{\mathbb{Q}}_p$ の場合では大きく表現論が異なる．例えば，$\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の表現は，$\mathbb{C}$ や $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の表現よりも遥かに多い．

いずれにせよ，そのような一般化を目指す上で，本稿で述べるような法 p 表現論は重要な役割を果たすはずである．

一方で，Langlands 対応は GL_n のみならず一般の連結簡約群に対しても考えることができる．また異なる群の間の Langlands 対応の関係（Langlands 関手性）を考えることもでき，この考え方は GL_n の Langlands 対応を示す際にも有効活用される．このように一般の連結簡約群に対する Langlands 対応は，単なる一般化以上の意味を持つ．そのような事情に基づき，法 p 表現論でも GL_n のみでなく一般の連結簡約群を考えることにする．

注意

表現は定義 1.1 にあるように正しくは組 (π, V) であるが，しばしば π や V のどちらかは略される．つまり $v \in V$ の代わりに $v \in \pi$ と書いたり，$\pi(g)v$ の代わりに gv（$g \in G$，$v \in V$）と書いたりする．本稿でもこのような省略を断らずに使う．

2 放物型誘導表現

以下 F を剰余標数が p の非アルキメデス的局所体，つまり $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大か $\mathbb{F}_q((t))$（q は p の冪で，$\mathbb{F}_q$ は位数 q の有限体）とし，G を F 上の連結簡約代数群とする．例えば $G = \mathrm{GL}_n$ がその例である．G の F 有理点のなす群 $G(F)$ も同じ記号 G で書く．これは位相群になる．また C を標数 p の代数閉体とする．

定義 2.1　π を G の表現とする．

(1) 任意の $v \in \pi$ に対して v の固定部分群 $\mathrm{Stab}_G(v) = \{g \in G \mid \pi(g)v = v\}$ が G 内で開となるとき π は**スムーズ**であるという．これは π に離散位相を入れたとき $G \times \pi \to \pi$ が連続になることと同値である．

(2) スムーズ表現 π が**許容表現**であるとは，任意の開部分群 $H \subset G$ に対してその固定部分 $\pi^H = \{v \in \pi \mid \pi(h)v = v \ (h \in H)\}$ が有限次元となることである．

スムーズであることはこの場合における自然な連続の概念である．許容表現は有限性に関する条件が課された表現であり，この有限性を使うことで様々な議論が可能になる．応用上出てくる表現は許容表現であるので，この表現に限定しても障害にはならない．以下では許容表現に関する分類について述べる．

一般に G の表現 π に対して，

$$\pi^{\mathrm{sm}} = \{v \in \pi \mid \mathrm{Stab}_G(v) \text{ は開}\}$$

とおくと π^{sm} は π の部分表現となり，定義から G のスムーズ表現を与える．π がスムーズであることは，$\pi = \pi^{\mathrm{sm}}$ と同値である．以下，単に表現と言えばスムーズ表現を指すこととする．

さて，既約表現の分類を試みるならばまずは表現を構成する必要がある．多くの場合と同様，この場合も**誘導**により部分群の表現から G の表現を構成することができる．$H \subset G$ を閉部分群と

し，σ を H の表現としたとき，誘導表現 $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ を

$$\mathrm{Ind}_H^G(\sigma) = \{f\colon G \to \sigma \mid f(hx) = \sigma(h)f(x)\ (x \in G, h \in H)\}^{\mathrm{sm}}$$

と定める．ただし $g \in G$ の作用は $(gf)(x) = f(xg)$ で与えられる．この表現は次の **Frobenius 相互律**を満たす．

命題 2.2（Frobenius 相互律） σ を H の表現，π を G の表現とすると，

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)) \simeq \mathrm{Hom}_H(\pi, \sigma)$$

が成り立つ．同型写像は $\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)) \ni \varphi \mapsto (v \mapsto \varphi(v)(1)) \in \mathrm{Hom}_H(\pi, \sigma)$ により与えられる．

注意 2.3 相互律から Ind は制限関手 $\pi \mapsto \pi|_H$ の右随伴関手である．制限関手の右随伴関手は有限群の表現論の文脈では coinduction と呼ばれることがある．有限群の表現論の文脈における誘導とは制限関手の左随伴関手のことである．なお，p 進群の表現に対しても H や C が特別な条件を満たすときは左随伴関手が存在し，その構成法からコンパクト誘導と呼ばれ，しばしば c-Ind と書かれる（節 4 を参照）．ここでの c は Compact の c であり，Coinduction の c ではない．

例えば $\sigma = \mathbf{1} = \mathbf{1}_H$ が自明表現の時を考えよう．つまり $\sigma = C$ かつ $\sigma(h) = \mathrm{id}\ (h \in H)$ とする．このとき $f \in \mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1}_H)$ は $f(hx) = f(x)\ (x \in G, h \in H)$ を満たす G 上の関数であり，従って $H\backslash G$ 上の関数と見なすことができる．つまり，この場合 $\mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1}_H)$ は $H\backslash G$ 上のスムーズな関数[*2]のなすベクトル空間である．一般の場合も $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ は $H\backslash G$ 上のある G 不変ベクトル束のスムーズな切断のなすベクトル空間であると見なせる．特に H が大きくなると（$H\backslash G$ が小さくなるため）$\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ も小さくなる．

さて，H をうまく選び G のよい表現を構成したい．この H の選び方には次のようなジレンマがある．

- H を小さくとると $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ が大きくなり既約表現から離れた表現ができてしまう．
- H を大きくとると H の表現論の解析が難しくなり，σ をとるのが難しくなる．

簡約群に対しては**放物型部分群**がこのジレンマを解決する．

例 2.4 $G = \mathrm{GL}_n$ の放物型部分群とは，次のような形の部分群 P と共役な部分群のことである．

[*2] sm に属する関数．

ただし $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$.

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \overbrace{}^{n_1} & \overbrace{}^{n_2} & \cdots & \overbrace{}^{n_r} \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1\{ \\ n_2\{ \\ \vdots \\ n_r\{ \end{array} & \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \end{array}.$$

P の部分群 M, N を

$$M = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $N \subset P$ は正規部分群であり，$P \simeq M \ltimes N$ となる．

一般の簡約群に対しても，放物型部分群 P の概念が定義され，$P = M \ltimes N$ と部分群の積に分解され，M はより小さな簡約群となる．M を P の Levi 部分群，N を P の冪端根基といい，$P = M \ltimes N$ を Levi 分解という．この部分群は以下のようにして先ほどのジレンマを解決する．

- P は「大きい」．例えば G/P はコンパクトである．
- M は G より小さい簡約群である．従って $\dim G$ に関する帰納法により，M の表現論はすべてわかっていると仮定して良い．一方，P の表現の中で N 上自明なものを考えると，$P/N \simeq M$ よりこれは簡約群 M の表現を考えることと同等である．

このことを踏まえて，次のように定義する．

定義 2.5 M の表現 σ に対して，P の表現を $P \to P/N \simeq M \xrightarrow{\sigma} \mathrm{GL}(\sigma)$ と定め，同じ記号 σ で書く．これに対する誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ を**放物型誘導表現**という．

注意 2.6 σ が許容表現ならば $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ も許容表現になることが示される．

この構成によりすべての表現が得られれば事情は簡単であるのだが，残念ながらそうは行かない．得られない表現に名前をつけておくことにする．

定義 2.7 G の既約許容表現 π が**超尖点**であるとは，任意の放物型部分群 $P = M \ltimes N \subsetneq G$ と任意の M の既約許容表現 σ に対して，π が $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ の部分商に現れないことである．

これらの概念に基づき，既約表現の分類を次の二段階に分割できる．

(1) 既約超尖点表現を分類する．

(2) G の放物型部分群 $P = M \ltimes N$ と M の超尖点表現 σ に対して，$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ の既約部分商を分類することで，既約表現の分類を既約超尖点表現の分類に帰着させる．

現在のところ (2) はほぼ完全に解決されているが，(1) は殆ど理解されていない．本稿の残りでは，この現状についてより詳しく解説を行う．

3 放物型誘導表現の構造

放物型誘導表現の構造を記述するという問題は，様々な場合における研究を経て [AHHV17] において完全解決された．この節ではその主定理を述べよう．$P = M \ltimes N$ を放物型部分群とし，σ を M の既約超尖点表現とする．次の例を念頭においていただきたい．

例 3.1 $\sigma = \mathbf{1}_M$ が自明表現の時を考える．このとき $\mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{1}_M) = \mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{1}_P)$ は $P\backslash G$ 上のスムーズな関数全体であり，{ 定数関数 } はその部分表現を定めるため，$P \neq G$ ならば既約ではない．より一般に，P を含む部分群 Q（これは自動的に放物型部分群になる）に対して，

$$\mathrm{Ind}_Q^G(\mathbf{1}_Q) \subset \mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{1}_P)$$

となる．これを踏まえて，

$$\mathrm{St}_P = \mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{1}_P) \Big/ \left(\sum_{P \subsetneq Q} \mathrm{Ind}_Q^G(\mathbf{1}_Q) \right)$$

と定める．St_P を **Steinberg 表現**という．Große-Klönne [GK14] および Ly [Ly15] により，St_P は既約であることが知られている．このことから，$\{\mathrm{St}_Q \mid Q \supset P\}$ が $\mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{1})$ の既約成分を与えることがわかる．

同様のことを一般の σ に対して考えるために，$P(\sigma)$ を P を含む σ が $P(\sigma)$ まで伸びるような最大の放物型部分群とする．このような $P(\sigma)$ は存在し，また σ の $P(\sigma)$ への拡張は一意であることが示される [AHHV17, II.7. Corollary 1]．σ の $P(\sigma)$ への拡張を $e_{P(\sigma)}(\sigma)$ と書く．Q を $P \subset Q \subset P(\sigma)$ を満たす部分群とし，$e_Q(\sigma) = e_{P(\sigma)}(\sigma)|_Q$ とおく．これは P の表現 σ の Q への拡張であり，そのような拡張はやはり一意的である．$P \subset Q \subset Q_1 \subset P(\sigma)$ なるとき Ind の定義から $\mathrm{Ind}_{Q_1}^G(e_{Q_1}(\sigma)) \subset \mathrm{Ind}_Q^G(e_Q(\sigma))$ が成り立つことがわかる．これを踏まえて，

$$I(P, \sigma, Q) = \mathrm{Ind}_Q^G(e_Q(\sigma)) \Big/ \left(\sum_{Q \subsetneq Q_1 \subset P(\sigma)} \mathrm{Ind}_{Q_1}^G(e_{Q_1}(\sigma)) \right)$$

とおく．$\sigma = \mathbf{1}$ の時は $I(P, \mathbf{1}, Q) = \mathrm{St}_Q$ となる．以下の定理が既約表現の分類におけるステップ (2) の答えを与える．

定理 3.2 ([AHHV17])　$I(P,\sigma,Q)$ は既約であり，$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ の既約成分は $\{I(P,\sigma,Q) \mid P \subset Q \subset P(\sigma)\}$ で与えられ，その重複度はすべて 1 である．また $(P,\sigma,Q) \mapsto I(P,\sigma,Q)$ は全単射

$$\{(P,\sigma,Q) \mid (P,\sigma,Q) \text{ は上の通り }\}/\sim\ \simeq \{G \text{ の既約許容表現の同型類 }\}$$

を与える．ただしここで同値関係 $\sim$ は次のように定義される：

- $P' = gPg^{-1}$，$Q' = gQg^{-1}$.
- P' の二つの表現 σ' と $p \mapsto \sigma(g^{-1}pg)$ $(p \in P')$ は同型.

の二つを満たす $g \in G$ が存在する時に $(P,\sigma,Q) \sim (P',\sigma',Q')$ である．

このように，例 3.1 のような単純な理由によってのみ放物型誘導表現は既約でなくなる．この定理は，$G = \mathrm{GL}_2$ の場合に Barthel-Livné [BL95, BL94] により初めて示された．その後 [Her11a]（GL_n），[Abe13]（分裂型），[Ly]（$\mathrm{GL}_n(D)$ $(n \le 3)$，D は F 上の中心斜体）などの研究を経て [AHHV17] にて上記の形で完全解決された．

注意 3.3　$C = \mathbb{C}$ ではこの定理は成立しない．たとえば，$G = \mathrm{GL}_2$，P を上三角元からなる部分群（例 2.4 において $n = 2, n_1 = n_2 = 1$ の場合），M を対角行列からなる部分群とする．$t \in F^\times$ に対してその正規化された付値を v とし，$|t| = q^{-v}$ とおく．$\sigma\colon M \to \mathbb{C}^\times$ を $\sigma(\mathrm{diag}(t_1,t_2)) = |t_1||t_2|^{-1}$ と定めると，$\omega \in \mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ に対してその積分値 $\int \omega \in \mathbb{C}$ が定義され，$\int\colon \mathrm{Ind}_p^G(\sigma) \to \mathbb{C}$ は G 準同型写像を与える．従って $\mathrm{Ker}(\int)$ は $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ の非自明な部分表現となるため，$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ は既約ではない．一方 $P(\sigma) = P$ である．

定理 3.2 の系として以下を得る．

系 3.4　$P = M \ltimes N$ を放物型部分群，σ を M の既約許容表現とする．このとき $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ は長さ有限である．

$P(\sigma)$ は次のようにルート系によって具体的に記述することができる．$S \subset G$ を極大分裂トーラスとし，Σ を (G,S) に関するルート系とする．正ルート系 $\Sigma^+ \subset \Sigma$ を一つ固定し，単純ルートからなる集合を Δ とする．Σ^+ から定まる極小放物型部分群を B，その冪単部分群を U とし，また Z を S の G における中心化群とする．Z は B の Levi 部分群である．B を含む放物型部分群は Δ の部分集合と一対一に対応する．放物型部分群 P に対応する Δ の部分集合を Δ_P と書く．各 $\alpha \in \Delta$ に対して，$\{\alpha\}$ に対応する放物型部分群を $P_\alpha = M_\alpha \ltimes N_\alpha$ とし，M'_α を $U \cap M_\alpha$ を含む最小の M_α の正規部分群とする．このとき，$P(\sigma)$ に対応する Δ の部分集合 $\Delta_{P(\sigma)}$ は

$$\Delta_{P(\sigma)} = \{\alpha \in \Delta \mid M'_\alpha \cap Z \text{ は } \sigma \text{ に自明に作用する }\} \cup \Delta_P$$

により与えられる．

4　超特異表現

すでに述べた通り，簡約群の表現論において放物型部分群が重要な役割を果たす．もう一つ重要な役割を果たす部分群がコンパクト部分群である．一般にコンパクト群の表現論は比較的調べやすく，G の表現 π をコンパクト群に制限することで π を調べることができる．

K を G のコンパクトかつ開な部分群とする[*3]．もし C の標数が 0 ならば，コンパクト群の表現は完全可約となり，従って π の K への制限は既約表現への分解 $\pi \simeq \bigoplus_V V^{m_V}$ を持つ．(V は K の既約表現全体を走る．）また Schur の補題から $m_V = \dim \mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ であり，従って $\pi|_K$ は $\mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ から決まる．つまり，$\pi|_K$ を調べることは，各 V に対して $\mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ を調べることと等価となる．

これをまねて，C の標数が p である場合にも，K の既約表現 V に対して $\mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ を考えよう．この空間は次のようにして，Hecke 環と呼ばれる環上の加群となる．V を K の既約表現とする．G 上の関数 f に対して $\mathrm{supp}(f)$ を f の台とし，

$$\text{c-Ind}_K^G(V) = \{f \in \mathrm{Ind}_K^G(V) \mid \mathrm{supp}(f) \text{ はコンパクト }\}$$

とおく．これは $\mathrm{Ind}_K^G(V)$ の部分表現であり，**コンパクト誘導表現**と呼ばれる．

注意 4.1　$\mathrm{Ind}_K^G(V)$ の定義から，$\mathrm{supp}(f)$ は左 K 不変であることがわかる．また，K が開なことから，$\mathrm{supp}(f)$ がコンパクトならば $K\backslash \mathrm{supp}(f)$ は有限集合となる．逆に $K\backslash \mathrm{supp}(f)$ が有限ならば K のコンパクト性から $\mathrm{supp}(f)$ はコンパクトとなる．よって $\text{c-Ind}_K^G(V)$ における $\mathrm{supp}(f)$ の条件は「$K\backslash \mathrm{supp}(f)$ が有限である」と書き換えても良い．

次の命題も **Frobenius 相互律**と呼ばれる．

命題 4.2　V を K の表現，π を G の表現とすると，

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_K(V, \pi)$$

が成り立つ．

同型写像は次のように与えられる．$v \in V$ に対して，$f_v \in \text{c-Ind}_K^G(V)$ を

$$f_v(x) = \begin{cases} xv & (x \in K), \\ 0 & (x \notin K) \end{cases}$$

と定めると，$v \mapsto f_v$ は K 準同型 $V \to \text{c-Ind}_K^G(V)$ を与える．このとき，$\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V), \pi) \ni \varphi \mapsto (v \mapsto \varphi(f_v)) \in \mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ が命題 4.2 の同型写像を与える．

[*3] G はこのような部分群を豊富に持つ．例えば，その単位元の基本近傍系としてコンパクトかつ開な部分群をとることができる．

ここで，$\mathcal{H}_K(G,V)=\mathrm{End}_G(\text{c-Ind}_K^G(V))$ とおこう．すると G の表現 π に対して $\mathrm{Hom}_K(V,\pi)\simeq\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\pi)$ は右 $\mathcal{H}_K(G,V)$ 加群となる．環 $\mathcal{H}_K(G,V)$ を **Hecke 環**という．この Hecke 環を通じて空間 $\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ を調べる．

特に重要な場合が，K が**スペシャルコンパクト群**と呼ばれる場合である．例えば $G=\mathrm{GL}_n$ の場合は，$\mathcal{O}$ を F の整数環（$F=\mathbb{Q}_p$ の場合は $\mathcal{O}=\mathbb{Z}_p$，$F=\mathbb{F}_q((t))$ の場合は $\mathcal{O}=\mathbb{F}_q[[t]]$）とすると，$K=\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ ととれる．さらに，放物型部分群 $P=M\ltimes N$ に対して K を「良い位置」にとっておけば，

- $G=PK$（岩澤分解）
- $P\cap K=(M\cap K)\ltimes(N\cap K)$

が成り立つ．このことから，σ を M の表現とすると，制限写像 $f\mapsto f|_K$ により

$$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)|_K\simeq\mathrm{Ind}_{P\cap K}^K(\sigma|_{M\cap K})$$

が成り立つことが容易にわかる．このことと Frobenius 相互律を使うと，次の同型の連鎖を得る：

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\mathrm{Ind}_P^G(\sigma))\simeq\mathrm{Hom}_K(V,\mathrm{Ind}_P^G(\sigma))\simeq\mathrm{Hom}_K(V,\mathrm{Ind}_{P\cap K}^K(\sigma))\simeq\mathrm{Hom}_{P\cap K}(V,\sigma).$$

さらに $P\cap K=(M\cap K)\ltimes(N\cap K)$ であり，また $N\cap K$ は σ に自明に作用することから，$P\cap K$ 準同型 $V\to\sigma$ は常に $(N\cap K)$ 余不変部分[*4]への射影 $V\to V_{N\cap K}$ を経由する．つまり同型 $\mathrm{Hom}_{P\cap K}(V,\sigma)\simeq\mathrm{Hom}_{M\cap K}(V_{N\cap K},\sigma)$ を得る．さらに同型を続けて

$$\mathrm{Hom}_{P\cap K}(V,\sigma)\simeq\mathrm{Hom}_{M\cap K}(V_{N\cap K},\sigma)\simeq\mathrm{Hom}_M(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}),\sigma)$$

を得る．まとめると，

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\mathrm{Ind}_P^G(\sigma))\simeq\mathrm{Hom}_M(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}),\sigma)$$

となる．

ところで米田の補題により，

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Functor}}(\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\,\cdot\,))\simeq\mathrm{End}_G(\text{c-Ind}_K^G(V))=\mathcal{H}_K(G,V)$$

である．この引数に $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ という特別な形の表現を入れることを考えれば，準同型写像

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Functor}}(\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\,\cdot\,))\to\mathrm{End}_{\mathrm{Functor}}(\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\mathrm{Ind}_P^G(\,\cdot\,)))$$

を得るが，上で得た同型とまた米田の補題を使うことで

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\mathrm{Functor}}(\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\mathrm{Ind}_P^G(\,\cdot\,)))&\simeq\mathrm{End}_{\mathrm{Functor}}(\mathrm{Hom}_M(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}),\,\cdot\,))\\&\simeq\mathrm{End}_M(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))=\mathcal{H}_{M\cap K}(M,V_{N\cap K})\end{aligned}$$

[*4] V を $\{nv-v\mid n\in N\cap K,v\in V\}$ の生成する部分空間で割ったもの．$N\cap K$ が自明に作用する最大の商である．

であるので，まとめて準同型写像

$$\mathcal{S}_M^G\colon \mathcal{H}_K(G,V) \to \mathcal{H}_{M\cap K}(M, V_{N\cap K})$$

を得る[*5]．これを（法 p）**佐武変換**と呼ぶ．$Q = L \ltimes U$ を P を含む放物型部分群であって，$M \subset L$ となるものとすると，推移律 $\mathcal{S}_M^G = \mathcal{S}_M^L \circ \mathcal{S}_L^G$ が成り立つ．P が極小なとき，$\mathcal{H}_{M\cap K}(M, V_{N\cap K})$ は可換にかなり近い環となる．これと上の佐武変換を使うことにより，$\mathcal{H}_K(G,V)$ の構造を特定することができる．

注意 4.3　古典的な理論により $V_{N\cap K}$ は $M\cap K$ の既約表現となることが知られている．

一般に $\mathcal{H}_K(G,V)$ の中心を $\mathcal{Z}_K(G,V)$ と書く．以下の定理が $\mathcal{H}_K(G,V)$ の構造を明らかにする．

定理 4.4（法 p 佐武同型 [Her11b, HV15]）　次が成り立つ．

- $\mathcal{S}_M^G$ は単射であり，その像を具体的に記述できる．
- $\mathcal{S}_M^G(\mathcal{Z}_K(G,V)) \subset \mathcal{Z}_{M\cap K}(M, V_{N\cap K})$.
- ある $\tau = \tau_M \in \mathcal{Z}_K(G,V)$ が存在し，$\mathcal{S}_M^G$ は同型 $\mathcal{H}_K(G,V)[\tau^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{M\cap K}(M, V_{N\cap K})$ および $\mathcal{Z}_K(G,V)[\tau^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_{M\cap K}(M, V_{N\cap K})$ を導く．

例 4.5　$G = \mathrm{GL}_n$ とし，P を極小放物型部分群，つまり上半三角行列全体のなす部分群とする．$P = M \ltimes N$ と分解すると，M は対角行列全体のなす群（特に可換群）である．また $V_{N\cap K}$ は $M\cap K$ の既約表現であるので，一次元表現である．簡単のため，$V_{N\cap K}$ が自明であると仮定しよう．このとき $\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})$ は $M/(M\cap K) \simeq (F^\times/\mathcal{O}^\times)^n$ 上の有限台を持つ関数のなす空間となる（注意 4.1）．$t \in (F^\times/\mathcal{O}^\times)^n$ を $f \in \text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})$ に作用させよう．f は $(F^\times/\mathcal{O}^\times)^n$ 上の関数と見なせるため，$x \in (F^\times/\mathcal{O}^\times)^n$ に対して $(tf)(x) = f(tx)$ と定めることができる．これにより群環 $C[(F^\times/\mathcal{O}^\times)^n]$ から $\mathrm{End}_M(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})) = \mathcal{H}_{M\cap K}(M, V_{N\cap K})$ への準同型写像が定まるが，これが同型となる．$(F^\times/\mathcal{O}^\times)^n \simeq \mathbb{Z}^n$ であるから，

$$\mathcal{H}_{M\cap K}(M, V_{N\cap K}) \simeq C[\mathbb{Z}^n] \simeq C[S_1^{\pm 1}, \dots, S_n^{\pm 1}]$$

を得る．ただし，S_i は不定元であり，i 番目のみが 1 で他が 0 である $\mathbb{Z}^n$ の元に対応する．（このような簡単な記述が得られるのは，$M/(M\cap K)$ が群構造を持っていること，つまり $M\cap K$ が M の正規部分群であることによる．）$T_i = S_1 \cdots S_i$ とおくと，$C[S_1^{\pm 1}, \dots, S_n^{\pm 1}] = C[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$ が容易にわかる．この記述において，$\mathcal{S}_M^G$ の像は $C[T_1, \dots, T_{n-1}, T_n^{\pm 1}]$ で与えられる．この場合は Hecke 環 $\mathcal{H}_K(G,V)$ は可換であり，従って $\mathcal{Z}_K(G,V) = \mathcal{H}_K(G,V)$ である．定理 4.4 の τ としては $T_1 \cdots T_{n-1}$ がとれる．

さて，G の表現 π に戻ろう．V を K の既約表現とすると，$\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ は右 $\mathcal{H}_K(G,V)$ 加群になる．さらに π が許容であると仮定すると，$\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ は有限次元となる[*6]．従って，

[*5] $\mathcal{S}_M^G$ は M だけでなく P の取り方に依存する．
[*6] K の開部分群 K_0 で V に自明に作用するものが存在することを使えば，許容表現の定義から従う．

$\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ は $\mathcal{Z}_K(G,V)$ の一般固有空間へと分解される．ここに現れる固有値を**佐武パラメータ**または **Hecke 固有値**という．K に関して良い位置にある極小放物型部分群 B を固定し，$B = Z \ltimes U$ と分解する．ただし $Z \subset B$ は Levi 部分群，$U \subset B$ は冪端根基である．

定義 4.6 π を G の許容表現とする．

(1) C 代数の準同型 $\chi\colon \mathcal{Z}_K(G,V) \to C$ が**超特異**であるとは，任意の $B \subset P = M \ltimes N \subsetneq G$, $Z \subset M$ なる放物型部分群 P に対して，χ が $\mathcal{S}_M^G$ を経由しないことである．

(2) π が**超特異**[*7]であるとは，任意の K の既約表現 V に対して，$\mathcal{Z}_K(G,V)$ の $\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ における固有値 χ（つまり，ある $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ が存在して任意の $T \in \mathcal{Z}_K(G,V)$ に対して $\varphi T = \chi(T)\varphi$ となるような $\chi\colon \mathcal{Z}_K(G,V) \to C$）が常に超特異となることである．

例 4.7 例 4.5 において，$\chi\colon \mathcal{Z}_K(G,V) \to C$ は $(\chi(T_1),\dots,\chi(T_{n-1}),\chi(T_n)) \in C^{n-1} \times C^\times$ により定まる．このとき，χ が $\mathcal{S}_M^G$（M は例 4.5 と同様）を経由するための必要十分条件は $\chi(T_1),\dots,\chi(T_{n-1})$ がすべて 0 でないことである．また χ が超特異であるための必要十分条件は $\chi(T_1),\dots,\chi(T_{n-1})$ がすべて 0 となることである．

次が成り立つ．

定理 4.8（[AHHV17, I.5. Theorem 5]） 既約許容表現 π が超特異であることと超尖点であることは同値である．

注意 4.9 実際には，定理 3.2 および 4.8 は次の手順で示される．

(1) まず定理 3.2 内の「超尖点」をすべて「超特異」に変えた定理を示す．
(2) その結果（特に既約表現の分類定理）により定理 4.8 が従う．
(3) よって定理 3.2 が成立する．

分類定理の帰結として，次も従う．

定理 4.10 既約許容表現 π に対して，次は同値である．

(1) π は超特異．
(2) ある K の既約表現 V に対して，$\mathcal{Z}_G(K,V)$ の $\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ における超特異な固有値が存在する．

[*7] より正確には，(K,B,Z) に関して超特異であると言うべきである．後述の定理 4.8 から，この概念は (K,B,Z) によらない．

5　既約超特異表現の分類

定理 3.2 により，既約許容表現の分類は既約超尖点表現，または定理 4.8 から既約超特異表現の分類に帰着される．しかし，現段階では既約超特異表現は殆ど理解されていない．それに関する現状を本節で述べる．

超特異表現に関する一つの注意から始める．π を既約超特異表現とし，$V \subset \pi$ を π の部分既約 K 表現とする．また $\varphi\colon V \hookrightarrow \pi$ は $\mathcal{Z}_K(G,V)$ に関する固有ベクトルであると仮定し，その固有値を χ とする．超特異表現の定義から χ は超特異となる．φ に Frobenius 相互律を適用すると，$\text{c-Ind}_K^G(V) \to \pi$ を得るが，φ が固有値 χ の固有ベクトルであることから，この準同型写像は

$$\chi \otimes_{\mathcal{Z}_K(G,V)} \text{c-Ind}_K^G(V) \to \pi$$

を引き起こし，π の既約性から全射になる．($\mathcal{Z}_K(G,V)$ の定義から $\text{c-Ind}_K^G(V)$ は左 $\mathcal{Z}_K(G,V)$ 加群であることに注意する．) 逆にこのような全射があれば，$\text{c-Ind}_K^G(V) \to \chi \otimes_{\mathcal{Z}_K(G,V)} \text{c-Ind}_K^G(V) \to \pi$ に Frobenius 相互律で対応する $V \to \pi$ は固有値 χ の固有ベクトルとなる．以上から，既約許容表現 π が超特異であることは，ある K の既約表現 V と超特異指標 χ に対して $\chi \otimes_{\mathcal{Z}_K(G,V)} \text{c-Ind}_K^G(V)$ の商となることと同値である．

さて，既約超特異表現の分類に関する現状について述べる．以下 $G = \mathrm{GL}_2(F)$ とする．いくつか記号を用意しよう．$K = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$（$\mathcal{O}$ は F の整数環）とし，

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, c \in F^\times,\ b \in F \right\},\ M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, c \in F^\times \right\},\ N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in F \right\}$$

とおく．$P = M \ltimes N$ は G の極小放物型部分群である．κ を F の剰余体とし，$q = \#\kappa r \in \mathbb{Z}$ とおく．$0 \le r \le q-1$ なる整数 r に対して，$\mathrm{GL}_2(C)$ は C^2 の r 次対称積 $\mathrm{Sym}^r(C^2)$ に自然に作用し，唯一の部分既約表現 V_r を持つ．具体的には，r の p 進表示を $r = \sum_{i=0}^{f-1} r_i p^i$（$q = p^f$）とし，また変数をとって $\mathrm{Sym}^r(C^2) = CX^r \oplus CX^{r-1}Y \oplus \cdots \oplus CY^r$ と書いておくと，

$$V_r = \left\{ \sum_{k_i \le r_i} a_k X^k Y^{r-k} \mid a_k \in C \right\}$$

となる．(ただし $k_i \ge 0$，$k = \sum_{i=0}^{f-1} k_i p^i$.) $\kappa \hookrightarrow C$ を固定すると，$K = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \to \mathrm{GL}_2(\kappa) \to \mathrm{GL}_2(C)$ を得る．これにより V_r は K の既約表現となる．さらに $0 \le a-b \le q-1$ を満たす整数の組 (a,b) に対して $V_{a,b} = V_{a-b} \otimes \det^b$ とおく．すると $V_{a,b}$ は K の既約表現を与え，また K の既約表現はこれで尽くされることが知られている．$V_{a,b}$ と $V_{a',b'}$ が同型であるための必要十分条件は，$(a-a', b-b') \in (q-1)\mathbb{Z}(1,1)$ となることである．

$\mathcal{O}$ の極大イデアルの生成元 ϖ を固定すると，例 4.5 と同様に，Hecke 環 $\mathcal{H}_K(G, V_{a,b})$ は $C[T_1, T_2^{\pm 1}]$ と同型になる．(一般には同型は ϖ の取り方に依存する．) $\lambda \in C^\times$ に対して $\chi_\lambda\colon \mathcal{H}_K(G,V) \to C$ を $\chi_\lambda(T_1) = 0$，$\chi_\lambda(T_2) = \lambda$ で定める．$\mathcal{H}_K(G, V_{a,b})$ の超特異指標はこれらで尽くされる．

$F=\mathbb{Q}_p$ の場合には Breuil により既約超特異表現は分類されている．

定理 5.1（Breuil [Bre03]） $F=\mathbb{Q}_p$ とする．このとき $\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \text{c-Ind}_K^G(V_{a,b})$ は既約許容表現であり，よって全ての既約許容超特異表現を尽くす．また $\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \text{c-Ind}_K^G(V_{a,b}) \simeq \chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{p-1+b,ac})} \text{c-Ind}_K^G(V_{p-1+b,a})$ であり，同型はこれのみである．

注意 5.2 $\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \text{c-Ind}_K^G(V_{a,b})$ には $\operatorname{diag}(\varpi,\varpi)$ が λ 倍で作用する．

なお Barthel-Livné および Breuil は許容表現とは限らない表現も対象に扱っている．分類結果およびそれを用いた Berger [Ber12] の議論から，次が成立する．（$C=\mathbb{C}$ の場合には任意の G に対してこの事実が成立する．C の標数が p である場合にこの事実が一般に成立することを期待してよいかは筆者にはわからない．）

系 5.3 $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現はすべて許容表現である．

以上（またはこの場合と本質的に同等な場合）が理解されている全ての場合である．$F\neq\mathbb{Q}_p$ の場合の現状を述べよう．まず Breuil の分類が壊滅的に破壊されることを述べる．

命題 5.4（[Mor12, Theorem 1.3]） F が $\mathbb{Q}_p$ の不分岐拡大であるとする[*8]．$a-b\neq 0, q-1$ とすると，ある K の既約表現 V と埋め込み $\text{c-Ind}_K^G(V)\hookrightarrow \chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \text{c-Ind}_K(V_{a,b})$ が存在する．特に（$\text{c-Ind}_K^G(V)$ がそうであるので）$\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \text{c-Ind}_K^G(V_{a,b})$ は許容表現ではなく，また無限の長さを持つ．

つまり，$F=\mathbb{Q}_p$ の場合と異なり $\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \text{c-Ind}_K^G(V_{a,b})$ は既約許容表現からかけ離れたものになっている．次の定理は，そもそも $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合よりも多くの既約超特異表現が存在することを示している．定理 5.1 とその後の注意から，$\operatorname{diag}(\varpi,\varpi)$ の作用を固定すると $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約超特異表現は有限個であることに注意しよう．

命題 5.5（[BP12, Proposition 10.2]） F を $\mathbb{Q}_p$ の二次拡大とする．このとき，$\operatorname{diag}(\varpi,\varpi)$ が自明に作用する G の既約超特異表現が無限個存在する．より詳しく，任意の $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$\dim\operatorname{Hom}_K(V_{p^2-p,p-1},\pi)=n$ となる既約超特異表現 π が存在する．

なお，$F=\mathbb{Q}_p$ の場合には，$0\le a'-b'\le p-1$ に対して

$$\dim\operatorname{Hom}_K(V_{a',b'},\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \text{c-Ind}_K^G(V_{a,b}))=\begin{cases}1 & (V_{a',b'}\simeq V_{a,b} \text{ または } V_{a',b'}\simeq V_{p-1-a,b}),\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

となることが定理 5.1 の証明よりわかる．

命題 5.5 の証明における既約超特異許容表現の構成には，Paškūnas [Paš04] により考えられた G 同変 coefficient system（または diagram）による議論と，コンパクト誘導表現 $\text{c-Ind}_K^G(V)$ の精密な解析を用いる．関連して Hu による canonical diagram の理論 [Hu12] などもあるが，より詳

[*8] 以下 F にしばしば仮定が着くが，おそらく本質的な仮定ではなく，$F\neq\mathbb{Q}_p$ ならば起きる現象であると思われる．

細な情報を得ることはできていないようである．

　また，次も成立する．

命題 5.6（[Sch15]）　F を $\mathbb{Q}_p$ の二次拡大とすると，G の既約超特異表現は有限表示ではない．

　$\text{c-Ind}_K^G(V_{a,b})$ が $V_{a,b}$ で生成され，従って有限生成であることに注意しよう．同型 $\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})\simeq C[T_1,T_2^{\pm 1}]$ を思い出す．完全系列

$$\text{c-Ind}_K^G(V_{a,b})^{\oplus 2}\xrightarrow{(T_1,T_2-\lambda)}\text{c-Ind}_K^G(V_{a,b})\to\chi_\lambda\otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})}\text{c-Ind}_K^G(V_{a,b})\to 0$$

と定理 5.1 から $F=\mathbb{Q}_p$ の場合には G の既約超特異表現は有限表示となる．

　以上のように，$G=\mathrm{GL}_2(F)$ の場合に限ってすら既約超特異表現はその「悪そうな様相」がいくつか判明しているのみであり，分類はおろかその具体的な例すらほぼない状況である．今後の研究が待たれる．

参考文献

[Abe13] N. Abe, *On a classification of irreducible admissible modulo p representations of a p-adic split reductive group*, Compos. Math. **149** (2013), no. 12, 2139–2168.

[AHHV17] N. Abe, G. Henniart, F. Herzig, and M.-F. Vignéras, *A classification of irreducible admissible mod p representations of p-adic reductive groups*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 2, 495–559.

[Ber12] L. Berger, *Central characters for smooth irreducible modular representations of* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **128** (2012), 1–6 (2013).

[BL94] L. Barthel and R. Livné, *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 2, 261–292.

[BL95] L. Barthel and R. Livné, *Modular representations of* GL_2 *of a local field: the ordinary, unramified case*, J. Number Theory **55** (1995), no. 1, 1–27.

[BP12] C. Breuil and V. Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, Mem. Amer. Math. Soc. **216** (2012), no. 1016, vi+114.

[Bre03] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*. I*, Compositio Math. **138** (2003), no. 2, 165–188.

[Bre10] C. Breuil, *The emerging p-adic Langlands programme*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II (New Delhi), Hindustan Book Agency, 2010, pp. 203–230.

[CDP14] P. Colmez, G. Dospinescu, and V. Paškūnas, *The p-adic local Langlands correspondence for* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Camb. J. Math. **2** (2014), no. 1, 1–47.

[Col10] P. Colmez, *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *et* (ϕ,Γ)*-modules*, Astérisque (2010), no. 330, 281–509.

[GK14] E. Grosse-Klönne, *On special representations of p-adic reductive groups*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 12, 2179–2216.

[Hen00] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), no. 2, 439–455.

[Her11a] F. Herzig, *The classification of irreducible admissible mod p representations of a p-adic* GL_n, Invent. Math. **186** (2011), no. 2, 373–434.

[Her11b] F. Herzig, *A Satake isomorphism in characteristic p*, Compos. Math. **147** (2011), no. 1, 263–283.

[HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[Hu12] Y. Hu, *Diagrammes canoniques et représentations modulo p de* $\mathrm{GL}_2(F)$, J. Inst. Math. Jussieu **11** (2012), no. 1, 67–118.

[HV15] G. Henniart and M.-F. Vignéras, *A Satake isomorphism for representations modulo p of reductive groups over local fields*, J. Reine Angew. Math. **701** (2015), 33–75.

[Ly] T. Ly, *Représentations modulo p de* $\mathrm{GL}(m, D)$*, D algèbre à division sur un corps local*, Thesis, Institut de mathématiques de Jussieu, arXiv:1409.4686.

[Ly15] T. Ly, *Représentations de Steinberg modulo p pour un groupe réductif sur un corps local*, Pacific J. Math. **277** (2015), no. 2, 425–462.

[Mor12] S. Morra, *On some representations of the Iwahori subgroup*, J. Number Theory **132** (2012), no. 5, 1074–1150.

[Paš04] V. Paškūnas, *Coefficient systems and supersingular representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2004), no. 99, vi+84.

[Paš13] V. Paškūnas, *The image of Colmez's Montreal functor*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **118** (2013), 1–191.

[Sch13] P. Scholze, *The local Langlands correspondence for* GL_n *over p-adic fields*, Invent. Math. **192** (2013), no. 3, 663–715.

[Sch15] B. Schraen, *Sur la présentation des représentations supersingulières de* $\mathrm{GL}_2(F)$, J. Reine Angew. Math. **704** (2015), 187–208.