第62回代数学シンポジウム報告集

於 大阪大学

2017 年9月4日〜9月7日

2017年度 第62回代数学シンポジウム 報告集

本書は平成29年9月に大阪大学で開催された第62回代数学シンポジウムの報告集です.

記

日時： 2017年9月4日（月）～ 9月7日（木）
場所： 大阪大学理学研究科 D501 大講義室
会場責任者： 渡部 隆夫
プログラム責任者：［環論］宮地 淳一，柳川 浩二［代数幾何］石井 亮，伊藤 浩行
［数論］中村 健太郎，成田 宏秋［群論・表現論］澤辺 正人，加藤 周
シンポジウム責任者： 市川 尚志（評議員）
主催： 日本数学会代数学分科会
共催： 大阪大学理学研究科数学専攻

プログラム

９月４日（月）
9:45-10:45 寺井 直樹（佐賀大学 教育学部）
「単項式イデアルのべきと記号的べきについて」
11:00-12:00 毛利 出（静岡大学 理学部）
「Noncommutative quotient singularities」
13:30-14:30 中嶋 祐介（東京大学 IPMU）
「Conic divisorial ideals of Hibi rings and their applications」
14:45-15:45 相原 琢磨（東京学芸大学 教育学部）
「On the existence of silting objects」
16:00-17:00 高橋 亮（名古屋大学 多元数理科学研究科）
「可換環の右有界導来圏のテンソル構造とBalmer spectrum」

９月５日（火）
9:45-10:45 石田 正典（東北大学 理学研究科）
「非有界凸多面体とトーリック型カスプ特異点」
11:00-12:00 川又 雄二郎（東京大学 数理科学研究科）
「非可換環上の変形について」
13:30-14:30 小島 秀雄（新潟大学 自然科学系）
「対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面について」
14:45-15:45 渡邉 究（埼玉大学 理工学研究科）
「Geometric characterizations of rational homogeneous manifolds」
16:00-17:00 高山 茂晴（東京大学 数理科学研究科）
「ファイバー空間の相対多重標準束と充填問題」

９月６日（水）
9:45-10:45 志甫 淳（東京大学 数理科学研究科）
「エタール層とアイソクリスタル」
11:00-12:00 古澤 昌秋（大阪市立大学 理学研究科）
「保型L函数の特殊値の代数性について－極私的総括－」
13:30-14:30 佐野 昂迪（大阪市立大学 理学研究科）
「Euler系の理論の最近の発展について」
14:45-15:45 山内 卓也（東北大学 理学研究科）
「高次代数群に対する保型形式とその周辺」
16:00-17:00 若林 泰央（東京大学 数理科学研究科）
「ℓ-adic CohFT and the Witten conjecture for dormant opers」

９月７日（木）
9:45-10:45 阿部 紀行（北海道大学 理学研究院）
　「p進簡約群の既約法p表現の分類定理とその応用」
11:00-12:00 越谷 重夫（千葉大学 先進科学センター）
　「有限群の表現論における局所大域予想 - 最近５年間の大きな進展」
13:30-14:30 土岡 俊介（東京大学 数理科学研究科）
　「柏原クリスタル理論を用いたRogers-Ramanujan型分割定理へのアプローチ」
14:45-15:45 大島 芳樹（大阪大学 情報科学研究科）
　「ユニタリ表現の指標と軌道の方法」
16:00-17:00 飯寄 信保（山口大学 教育学部）
　「クイバーの表現と有限群の部分群束」

目次

単項式イデアル のべきと記号的べきについて

寺井直樹 (佐賀大学教育学部)

1. 序と準備

本報告では, べきのない単項式で生成されるイデアル (squarefree monomial ideal) のべきと記号的べきの Cohen-Macaulay 性について概観する。

以下では, $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ を 体 K 上 n 変数の多項式環とする. $V = [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく.

V のべき集合 $\mathbf{2}^V$ の空でない部分集合 Δ が, $F \in \Delta$, $F' \subseteq F$ ならば $F' \in \Delta$ をみたすとき, V 上の**単体的複体 (simplicial complex)** であると言う. 特に断らない限り, 任意の $i \in V$ に対して $\{i\} \in \Delta$ であるものと仮定する. 単体的複体 Δ に対して, Δ の元 F を Δ の面 (face) と言い, $\dim F = \sharp(F) - 1$ を F の次元 (dimension) と言う. ここで, $\sharp(F)$ は F の濃度を表す. $\dim \Delta = \max\{\dim F : F \in \Delta\}$ を Δ の次元 (dimension) と言う. Δ のすべての極大面（facet) の濃度が等しいとき, Δ を**純（pure）**であるという.

Δ を V 上の単体的複体, F を Δ の面, W を V の部分集合とする. このとき,

$$\Delta_W = \{F' \in \Delta : F' \subseteq W\}$$

を Δ の W への**制限 (restriction)** と言う. V の, 空でない任意の部分集合 W に対して Δ_W が純であるとき Δ は**マトロイド** であるという.

$V = [n]$ 上の単体的複体 Δ と体 K に対して,

$$\begin{aligned} I_\Delta &= (x_{i_1} \cdots x_{i_p} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n, \{i_1, \ldots, i_p\} \notin \Delta), \\ K[\Delta] &= K[x_1, \ldots, x_n]/I_\Delta \end{aligned}$$

をそれぞれ Δ の **Stanley-Reisner イデアル**, **Stanley-Reisner 環**と呼ぶ. 勝手な体 K に対して, $\dim K[\Delta] = \dim \Delta + 1$ が成り立つことが知られている.

$P_F = (x_i : i \notin F)$ とおくとき, I_Δ の無駄のない準素分解は

$$I_\Delta = \bigcap_{F:\text{facet in } \Delta} P_F$$

で与えられる.

I_Δ の**記号的べき (symbolic power)** をこれを用いて定義する.

各整数 $\ell \geq 1$ に対して,

$$I_\Delta^{(\ell)} = \bigcap_{F:\text{facet in } \Delta} P_F^\ell$$

を I_Δ の ℓ-th symbolic power と言う.

通常べきの Cohen–Macaulay 性と記号べきの Cohen–Macaulay 性の関係については次のことが成立する.

Proposition 1.1. 単体的複体 Δ と $\ell \geq 1$ に対して、 次は同値である：

(1) S/I_Δ^ℓ は *Cohen–Macaulay* である.

(2) $S/I_\Delta^{(\ell)}$ は *Cohen–Macaulay* であり, $I_\Delta^\ell = I_\Delta^{(\ell)}$ である.

2. 3 乗以上の場合

記号的べきの Cohen-Macaulay 性に関しては次の定理が成立する.

Theorem 2.1 (Minh-N.V.Trung[5], Varbaro[10], Terai-N.V.Trung[8])**.** 単体的複体 Δ に対して, 次は同値である：

(1) 任意の $\ell \geq 1$ に対して, $S/I_\Delta^{(\ell)}$ は *Cohen–Macaulay* である.

(2) ある $\ell \geq 3$ に対して, $S/I_\Delta^{(\ell)}$ は *Cohen–Macaulay* である.

(3) Δ はマトロイド である.

通常べきに関しては Cowsik-Nori の定理 [2] の精密化として, 次の定理が成立する.

Theorem 2.2 (Terai-N.V.Trung[8])**.** 単体的複体 Δ に対して, 次は同値である：

(1) 任意の $\ell \geq 1$ に対して, S/I_Δ^ℓ は *Cohen–Macaulay* である.

(2) ある $\ell \geq 3$ に対して, S/I_Δ^ℓ は *Cohen–Macaulay* である.

(3) S/I_Δ は完全交叉 (*complete intersection*) である.

次の例が示すように, (2) において, $\ell \geq 3$ を $\ell \geq 2$ にすることはできない.

Example 2.3 (五角形 (pentagon))**.** Δ を下図の五角形とするとき,

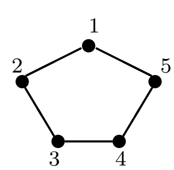
$$I_\Delta = (x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_5)$$

である. このとき,

(1) S/I_Δ は完全交叉ではない .

(2) S/I_Δ^2 は Cohen-Macaulay 環である.

(3) $\ell \geq 3$ に対して, S/I_Δ^ℓ は Cohen-Macaulay でない.

$\Delta =$ 

3. 2 乗の場合

次に 2 乗 の Cohen-Macaulay 性について考えてみる. まず単体的複体が 1 次元のときを考える。

Δ を 1 次元の単体的複体とする. このとき, Δ を自然にグラフ Λ とみなすことができる.

$S/I_\Delta^{(2)}$ の Cohen-Macaulay 性はグラフ理論的に判定することができる．その前に, diam Λ の定義を思い出しておこう．頂点集合 $V=[n]$ を持つグラフ Λ が連結であると仮定しよう．任意の $i,j\in V$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(i,j) &= \min\{k : \exists i_0,i_1,\ldots,i_k\in V \text{s.t. } i=i_0,\, i_k=j,\\ &\qquad \{i_p,i_{p+1}\}\in E(\Lambda)(p=0,1,\ldots,k-1)\}\end{aligned}$$

とおく．このとき,

$$\mathrm{diam}(\Lambda)=\max_{i,j\in V}\mathrm{dist}(i,j)$$

を Λ の**直径 (diameter)** と言う．

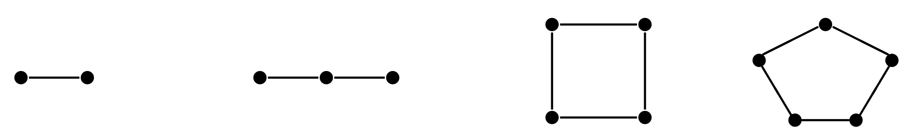
Theorem 3.1 (Minh-N.V.Trung [4])**.** Λ を 1 次元単体的複体 Δ を自然にみなしたグラフとする．このとき, 次は同値である：

(1) $S/I_\Delta^{(2)}$ は *Cohen-Macaulay* である.
(2) Λ が連結で, diam $\Lambda\le 2$ が成り立つ.

Example 3.2. Λ を 1 次元単体的複体 Δ を自然にみなしたグラフとする．Λ が n 角形のとき,diam $\Lambda\le 2$ となるのは, $n=3,4,5$ の場合であり, このときに限り, $S/I_\Delta^{(2)}$ が Cohen-Macaulay になる.

Proposition 3.3 (Minh-N.V.Trung [4])**.** Δ を 頂点集合 V 上の 1 次元の単体的複体とする．$S=K[x_1,\ldots,x_n]$ $(V=[n])$ とおくとき, 次は同値である：

(1) S/I_Δ^2 は *Cohen-Macaulay* である.
(2) Δ は次のいずれかに同型な単体的複体である：



また, このとき, S/I_Δ は *Gorenstein* である.

2 次元単体的複体の場合の分類も N.V.Trung -Tuan[9] によって与えられている．
上の命題の 1 次元単体的複体は Gorennstein 性を与えているが、一般に次の定理が成立する.

Theorem 3.4 (Rinaldo–Terai–Yoshida[6])**.** もし, 任意の体 K に対して S/I_Δ^2 が *Cohen-Macaulay* ならば, S/I_Δ は *Gorenstein* である.

Remark 3.5. また, 体 K に対する仮定は必要でないと思われるが, 今のところはずすことができない.

Stanley-Reisner イデアルが次数 2 の単項式で生成されているときは次の定理が成立する.

Theorem 3.6 (Hoang- T.N.Trung [3])**.** 単体的複体 Δ に対して, I_Δ は次数 2 の単項式で生成されているとする．このとき次は同値である：

(1) S/I_Δ^2 は *Cohen-Macaulay* である.
(2) S/I_Δ は *Gorenstein* であり, $I_\Delta^2=I_\Delta^{(2)}$ である.

References

[1] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[2] R. C. Cowsik and M. V. Nori, *On the fibres of blowing up*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **40** (1976), no. 1-4, 217–222.

[3] D. T. Hoang, and T. N. Trung, *A characterization of triangle-free Gorenstein graphs and Cohen-Macaulayness of second powers of edge ideals.*, J. Algebraic Combin. **43** (2016), 325-338.

[4] N. C. Minh and N. V. Trung, *Cohen–Macaulayness of powers of two-dimensional squarefree monomial ideals*, J. Algebra **322** (2009), 4219 –4227.

[5] N. C. Minh and N. V. Trung, *Cohen–Macaulayness of monomial ideals and symbolic powers of Stanley-Reisner ideals*, Adv. Math. **228** (2011), 1285 –1306.

[6] G. Rinaldo, N. Terai, and K. Yoshida, *Cohen–Macaulayness for second powers of Stanley-Reisner ideals*, J. Commut. Algebra **3** (2011), 405–430.

[7] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra, Second Edition*, Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart, 1996.

[8] N. Terai and N. V. Trung, *Cohen-Macaulayness of large powers of Stanley-Reisner ideals.*, Adv. Math. **229** (2012), 711 –730.

[9] N. V. Trung and T. M. Tuan, *Equality of ordinary and symbolic powers of Stanley-Reisner ideals*, J. Algebra **328** (2011), 77-93.

[10] M. Varbaro, *Symbolic powers and matroids*, Proc Amer. Math. Soc. **139** (2011), 2757–2366.

(Naoki Terai) Department of Mathematics, Faculty of Education, Saga University, Saga 840–8502, Japan

E-mail address: terai@cc.saga-u.ac.jp

NONCOMMUTATIVE QUOTIENT SINGULARITIES

IZURU MORI

Abstract. Tilting objects play a key role in the study of triangulated categories. A remarkable result due to Iyama and Takahashi asserts that the stable categories of graded maximal Cohen-Macaulay modules over quotient singularities have tilting objects. This paper proves a noncommutative generalization of Iyama and Takahashi's theorem using noncommutative algebraic geometry. Namely, if S is a noetherian AS-regular Koszul algebra and G is a finite group acting on S such that S^G is a "Gorenstein isolated singularity", then the stable category $\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}}(S^G)$ of graded maximal Cohen-Macaulay modules has a tilting object. In particular, the category $\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}}(S^G)$ is triangle equivalent to the derived category of a finite dimensional algebra.

1. Preliminaries

This is a report on the joint work with K. Ueyama [6], [7]. Throughout this paper, k denotes an algebraically closed field. Let $A = \oplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ be an $\mathbb{N}$-graded algebra. The category of graded right A-modules is denoted by $\mathrm{GrMod}\,A$ and the full subcategory of $\mathrm{GrMod}\,A$ consisting of finitely presented modules is denoted by $\mathrm{grmod}\,A$. The category of graded left A-modules is identified with $\mathrm{GrMod}\,A^o$ where A^o is the opposite graded algebra of A. For $M = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i \in \mathrm{GrMod}\,A$ and $n \in \mathbb{Z}$, we define $M_{\geq n} \in \mathrm{GrMod}\,A$ by $M_{\geq n} := \oplus_{i\geq n} M_i$, and $M(n) \in \mathrm{GrMod}\,A$ by $M(n)_i = M_{n+i}$. For $M, N \in \mathrm{GrMod}\,A$, we write $\mathrm{Ext}^i_A(M,N) := \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GrMod}\,A}(M,N)$ and $\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M,N) := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^i_A(M, N(n))$.

If A is graded right coherent, then $\mathrm{grmod}\,A$ is an abelian category, and, in this case, we define the quotient category $\mathrm{tails}\,A := \mathrm{grmod}\,A/\mathrm{tors}\,A$ where $\mathrm{tors}\,A$ is the full subcategory of $\mathrm{grmod}\,A$ consisting of finite dimensional modules over k. Following [2], we will view $\mathrm{tails}\,A$ as the noncommutative projective scheme associated to A, since if A is commutative and generated in degree 1 over k, then $\mathrm{tails}\,A$ is equivalent to the category of coherent sheaves on $\mathrm{Proj}\,A$ by Serre. If A is not commutative, then we will write $X = \mathrm{Proj}_{nc}\,A$ so that $\mathrm{tails}\,A = \mathrm{coh}\,X$ is the category of "coherent sheaves" on an "imaginary ringed space" X.

We say that a graded algebra A is connected graded if $A_0 = k$, and locally finite if $\dim_k A_i < \infty$ for all $i \in \mathbb{N}$. An AS-regular algebra defined below is the most important algebra studied in noncommutative algebraic geometry.

Definition 1.1. [1] A locally finite connected graded algebra A is called AS-regular (resp. AS-Gorenstein) over k of dimension d and of Gorenstein parameter ℓ if the following conditions are satisfied:

(1) $\mathrm{gldim}\,A = d < \infty$ (resp. $\mathrm{injdim}_A\,A = \mathrm{injdim}_{A^o}\,A = d < \infty$), and

(2) $\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(k, A) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^i_{A^o}(k, A) \cong \begin{cases} k(\ell) & \text{if } i = 0 \\ 0 & \text{if } i \neq d. \end{cases}$

If S is a right noetherian AS-regular algebra of dimension d, then we may view $\mathrm{tails}\,S$ as a quantum projective space of dimension $d-1$ since S is a commutative noetherian AS-regular algebra of dimension d if and only if $S \cong k[x_1, \dots, x_d]$.

This work was supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 16K05097.

Let A be a graded algebra. We denote by $\operatorname{GrAut} A$ the group of all graded algebra automorphisms of A. If $G \leq \operatorname{GrAut} A$ is a subgroup, then the fixed subalgebra $A^G := \{a \in A \mid g(a) = a \text{ for every } g \in G\}$ of A by G is a graded subalgebra of A. If S is a right noetherian AS-regular algebra and $G \leq \operatorname{GrAut} S$ is a finite subgroup, then we may view S^G as a (homogeneous coordinate ring of) a noncommutative quotient singularity, since if $S = k[x_1, \dots, x_d]$ is the polynomial algebra (the only noetherian commutative AS-regular algebra), then $\operatorname{Spec} S^G \cong \mathbb{A}^d/G$ is a quotient singularity. The purpose of this paper is to study noncommutative quotient singularities.

Triangulated categories are increasingly important in many areas of mathematics including algebraic geometry and representation theory. There are two major classes of triangulated categories, namely, (bounded) derived categories $\mathcal{D}^b(\mathcal{C})$ of abelian categories $\mathcal{C}$, and stable categories $\underline{\mathcal{C}}$ of Frobenius categories $\mathcal{C}$. For example, derived categories $\mathcal{D}^b(\operatorname{coh} X)$ of coherent sheaves on schemes X have been extensively studied in algebraic geometry, and stable module categories $\underline{\operatorname{mod}}\Lambda$ of self-injective algebras Λ have been extensively studied in representation theory of finite dimensional algebras. Let A be a noetherian AS-Gorenstein algebra. A graded right A-module M is called maximal Cohen-Macaulay if $\underline{\operatorname{Ext}}^i_A(M, A) = 0$ for every $i \geq 1$. The full subcategory of $\operatorname{grmod} A$ consisting of graded maximal Cohen-Macaulay modules is denoted by $\operatorname{CM}^{\mathbb{Z}}(A)$. Note that $\operatorname{CM}^{\mathbb{Z}}(A)$ is a Frobenius category, so the stable category $\underline{\operatorname{CM}}^{\mathbb{Z}}(A)$ is a triangulated category.

In the study of triangulated categories, tilting objects play a key role.

Definition 1.2. Let $\mathcal{T}$ be a triangulated category. An object $T \in \mathcal{T}$ is called tilting if

(1) $\operatorname{thick}(T) = \mathcal{T}$, and
(2) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[i]) = 0$ for all $i \neq 0$.

A tilting object plays an essential role in this paper due to the following result. It often enables us to realize abstract triangulated categories as concrete derived categories of modules over algebras.

Theorem 1.3. (cf. [4, Theorem 2.2]) *Let $\mathcal{T}$ be an algebraic Krull-Schmidt triangulated category and $T \in \mathcal{T}$ a tilting object. If $\operatorname{gldim} \operatorname{End}_{\mathcal{T}}(T) < \infty$, then $\mathcal{T} \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{mod} \operatorname{End}_{\mathcal{T}}(T))$.*

One of the remarkable results on the existence of tilting objects has been obtained by Iyama and Takahashi.

Theorem 1.4. [4, Theorem 2.7, Corollary 2.10] *Let $S = k[x_1, \dots, x_d]$ be a polynomial algebra over an algebraically closed field k of characteristic 0 such that $\deg x_i = 1$ for all i and $d \geq 2$. Let G be a finite subgroup of $\operatorname{SL}(d, k)$ acting linearly on S, and S^G the fixed subalgebra of S. Assume that S^G is an isolated singularity. If we define the graded S^G-module*

$$T := \bigoplus_{i=1}^{d} \Omega^i_S k(i),$$

then the stable category $\underline{\operatorname{CM}}^{\mathbb{Z}}(S^G)$ of graded maximal Cohen-Macaulay modules has a tilting object $[T]_{\operatorname{CM}}$, where $[T]_{\operatorname{CM}}$ is the maximal direct summand of T which is a graded maximal Cohen-Macaulay module. As a consequence, there exists a finite dimensional algebra Γ of finite global dimension such that

$$\underline{\operatorname{CM}}^{\mathbb{Z}}(S^G) \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{mod} \Gamma).$$

The stable categories of graded maximal Cohen-Macaulay modules are crucial objects studied in representation theory of algebras and also attract attention from the viewpoint of Kontsevich's homological mirror symmetry conjecture. The aim of the present paper is to generalize Theorem 1.4 to the noncommutative setting using noncommutative algebraic geometry.

2. Main Results

Let A be a graded algebra, and $G \leq \mathrm{GrAut}\, A$ a finite subgroup such that $\mathrm{char}\, k$ does not divide $|G|$. In this case, the group algebra kG is a semisimple algebra. The skew group algebra of A by G is a graded algebra $A * G = \oplus_{i \in \mathbb{N}} A_i \otimes_k kG$ with the multiplication $(a \otimes g)(b \otimes h) := ag(b) \otimes gh$. An element of $A * G$ is often denoted by $a * g := a \otimes g$. Two idempotent elements

$$e := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g, \quad \text{and} \quad e' := 1 - e$$

of kG play crucial roles in this paper. Since $kG \subset A * G$, we often view e, e' as idempotent elements of $A * G$. Moreover, since $e(A * G)e \cong A^G$ as graded algebras, we usually identify $e(A * G)e$ with A^G.

In [5], Jørgensen and Zhang defined the homological special linear group $\mathrm{HSL}(S) \leq \mathrm{GrAut}\, S$ for a noetherian AS-regular algebra S, and proved that if $G \leq \mathrm{HSL}(S)$ is a finite subgroup, then S^G is a noetherian AS-Gorenstein algebra. On the other hand, in [9], Ueyama introduced a notion of graded isolated singularity for noncommutative graded algebras, which agrees with the usual notion of isolated singularity if the algebra is commutative and generated in degree 1. For a noetherian AS-regular algebra S over k and a finite subgroup $G \leq \mathrm{GrAut}\, S$, it was shown in [6] that the condition that $S * G/(e)$ is finite dimensional over k is closely related to the noncommutative graded isolated singularity property of S^G.

Theorem 2.1. [6, Theorem 3.10] *Let S be a noetherian AS-regular algebra over k. For a finite subgroup $G \leq \mathrm{HSL}(S)$, $S*G/(e)$ is finite dimensional over k if and only if S^G is a noncommutative graded isolated singularity and $S * G \cong \underline{\mathrm{End}}_{S^G}(S)$.*

If $S = k[x_1, \dots, x_d]$ is the polynomial algebra with $\deg x_i = 1$ for all i, then $\mathrm{tails}\, S \cong \mathrm{coh}\, \mathbb{P}^{d-1}$, and it is well-known that $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-1}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-1}}(1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-1}}(d-1)$ is a full strong exceptional sequence for $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}\, \mathbb{P}^{d-1})$ so that $\bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-1}}(i)$ is a tilting object for $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}\, \mathbb{P}^{d-1})$. Suppose that a finite group G acts on a noetherian AS-regular algebra S over k of Gorenstein parameter ℓ so that the noncommutative projective scheme $X = \mathrm{Proj}_{nc}\, S$ associated to S is viewed as a quantum projective space. The inclusion map $f : S^G \to S$ induces a functor $f_* : \mathrm{tails}\, S \to \mathrm{tails}\, S^G$. If G is non-trivial, then $f_*\mathcal{O}_X, f_*\mathcal{O}_X(1), \dots, f_*\mathcal{O}_X(\ell - 1)$ is no longer an exceptional sequence for $\mathcal{D}^b(\mathrm{tails}\, S^G)$ where $\mathcal{O}_X$ is the "structure sheaf" on X, however, the following result shows that $\bigoplus_{i=0}^{\ell-1} f_*\mathcal{O}_X(i)$ is a tilting object for $\mathcal{D}^b(\mathrm{tails}\, S^G)$ if S^G is an "isolated singularity".

Theorem 2.2. [6, Theorem 3.14] *Let S be a noetherian AS-regular algebra over k of dimension $d \geq 2$ and of Gorenstein parameter ℓ, and $G \leq \mathrm{GrAut}\, S$ a finite subgroup such that $\mathrm{char}\, k$ does not divide $|G|$. If $S * G/(e)$ is finite dimensional over k, then*

$$\bigoplus_{i=0}^{\ell-1} f_*\mathcal{O}_X(i)$$

is a tilting object in $\mathcal{D}^b(\mathrm{tails}\, S^G)$ where $X = \mathrm{Proj}_{nc}\, S$ and $f : S^G \to S$ is the inclusion.

There exists another full strong exceptional sequence $\Omega^{d-1}_{\mathbb{P}^{d-1}}(d-1), \dots, \Omega^1_{\mathbb{P}^{d-1}}(1), \Omega^0_{\mathbb{P}^{d-1}}$ for $\mathcal{D}^b(\mathrm{coh}\, \mathbb{P}^{d-1})$ so that $\bigoplus_{i=0}^{d-1} \Omega^i_{\mathbb{P}^{d-1}}(i)$ is a tilting object. In the setting of the above theorem, if G is non-trivial, then $f_*\Omega^{d-1}_X(d-1), \dots, f_*\Omega^1_X(1), f_*\Omega^0_X$ is no longer an exceptional sequence for $\mathcal{D}^b(\mathrm{tails}\, S^G)$ where Ω^i_X is the "sheaf of differential i-forms" on X, however, we will show in this paper that $\bigoplus_{i=0}^{d-1} f_*\Omega^i_X(i)$ is a tilting object for $\mathcal{D}^b(\mathrm{tails}\, S^G)$ if S is Koszul.

Definition 2.3. Let A be a graded algebra. A linear resolution of $M \in \operatorname{GrMod} A$ is a graded projective resolution of M

$$\cdots \to P^2 \to P^1 \to P^0 \to M \to 0$$

where each P^i is a graded projective right A-module generated in degree i.

A locally finite graded algebra A is called Koszul if A_0 is a semisimple algebra, and $A_0 := A/A_{\geq 1} \in \operatorname{GrMod} A$ has a linear resolution.

Note that an AS-regular algebra of dimension d and of Gorenstein parameter ℓ is Koszul if and only if $d = \ell$. In particular, the polynomial algebra $k[x_1, \dots, x_d]$ is Koszul if and only if $\deg x_i = 1$ for all i.

Theorem 2.4. [7, Theorem 3.20] *Let S be a noetherian AS-regular Koszul algebra over k of dimension $d \geq 2$, and $G \leq \operatorname{GrAut} S$ a finite subgroup such that $\operatorname{char} k$ does not divide $|G|$. If $S * G/(e)$ is finite dimensional over k, then*

$$\bigoplus_{i=0}^{d-1} f_* \Omega^i_X(i)$$

is a tilting object in $\mathcal{D}^b(\operatorname{tails} S^G)$ where $X = \operatorname{Proj}_{nc} S$ and $f : S^G \to S$ is the inclusion. As a consequence, there exists a finite dimensional algebra Λ of finite global dimension such that

$$\mathcal{D}^b(\operatorname{tails} S^G) \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{mod} \Lambda).$$

We define a graded right $S * G$-module U by

$$U := \bigoplus_{i=1}^{d} \Omega^i_{S*G} kG(i).$$

Using Theorem 2.4, we will show the existence of a tilting object of the stable category $\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}}(S^G)$ if S^G is a "Gorenstein isolated singularity". The main result of this paper is as follows.

Theorem 2.5. [7, Theorem 4.10, Theorem 4.17] *Let S be a noetherian AS-regular Koszul algebra over k of dimension $d \geq 2$, and $G \leq \operatorname{HSL}(S)$ a finite subgroup such that $\operatorname{char} k$ does not divide $|G|$. If $S * G/(e)$ is finite dimensional over k, then*

$$e'Ue$$

is a tilting object in $\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}}(S^G)$. As a consequence, there exists a finite dimensional algebra $\Gamma = e'\Lambda e'$ of finite global dimension such that

$$\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}}(S^G) \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{mod} \Gamma).$$

If S is a commutative AS-regular Koszul algebra of dimension d, then $S \cong k[x_1, \dots, x_d]$ with $\deg x_i = 1$ for all i. In this case,

- $\operatorname{HSL}(S)$ coincides with $\operatorname{SL}(d, k)$.
- $S * G/(e)$ is finite dimensional over k if and only if S^G is a (graded) isolated singularity (see [6, Corollary 3.11]).
- $e'Ue = [T]_{\mathrm{CM}}$ (see [4, Proof of Theorem 2.9]).

Thus it follows that our result is a noncommutative generalization of Theorem 1.4. However, our proof is different from the original one given in [4]. Thanks to Theorem 2.4, we can give a more conceptual proof using a diagram of triangulated categories.

3. Flow of the Proofs

In this last section, we give a list of results needed and a flow diagram for the proofs of Theorem 2.4 and Theorem 2.5.

First, we will give properties of a "Gorenstein singularity". Let A be a noetherian graded algebra. The graded singularity category is defined by the Verdier localization $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{Sg}}(A) := \mathcal{D}^b(\operatorname{grmod} A)/\mathcal{D}^b(\operatorname{grproj} A)$ where $\operatorname{grproj} A$ is the full subcategory of $\operatorname{grmod} A$ consisting of projective modules. We denote the localization functor by $\upsilon : \mathcal{D}^b(\operatorname{grmod} A) \to \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{Sg}}(A)$.

Theorem 3.1. *Let A be a noetherian AS-Gorenstein algebra over k of Gorenstein parameter ℓ.*

1. (Buchweitz equivalence [3]) $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{Sg}}(A) \cong \underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}} A$.
2. (Orlov embedding [8]) *If $\ell > 0$, then there exists an embedding $\Phi : \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{Sg}}(A) \to \mathcal{D}^b(\operatorname{tails} A)$.*

Next, we give a property of a graded Frobenius algebra.

Definition 3.2. A locally finite graded algebra A is called graded Frobenius of Gorenstein parameter $-\ell$ if $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, k) \cong A(\ell)$ in $\operatorname{GrMod} A$.

The tilting object below was essentially obtained by Yamaura [10].

Lemma 3.3. (Yamaura tilting object [7, Lemma 3.11]) *If A is a graded Frobenius algebra of Gorenstein parameter $-\ell$ such that $\operatorname{gldim} A_0 < \infty$, then $\oplus_{i=0}^{\ell-1} A(i)/A(i)_{\geq 1}$ is a tilting object for $\underline{\operatorname{grmod}} A$.*

Next, we give the following generalization of BGG correspondence. For a graded algebra A, we define $A^! := \oplus_{i\in\mathbb{N}} \underline{\mathrm{Ext}}^i_A(A_0, A_0)$. Note that if A is a Koszul algebra, then $(A^!)^! \cong A$ as graded algebras.

Proposition 3.4. (BGG correspondence [7, Proposition 3.3]) *If A is a Frobenius Koszul algebra of Gorenstein parameter $-\ell$ such that $A^!$ is graded right coherent, then there exists an equivalence*

$$K : \mathcal{D}^b(\operatorname{grmod} A) \to \mathcal{D}^b(\operatorname{grmod} A^!)$$

of triangulated categories, which induces an equivalence

$$\overline{K} : \underline{\operatorname{grmod}} A \to \mathcal{D}^b(\operatorname{tails} A^!)$$

of triangulated categories.

Finally, we give a property of an "isolated singularity".

Proposition 3.5. [7, Proposition 3.18] *Let A be a right noetherian connected graded algebra, and $G \leq \operatorname{GrAut} A$ a finite subgroup such that $\operatorname{char} k$ does not divide $|G|$. Then the following are equivalent:*

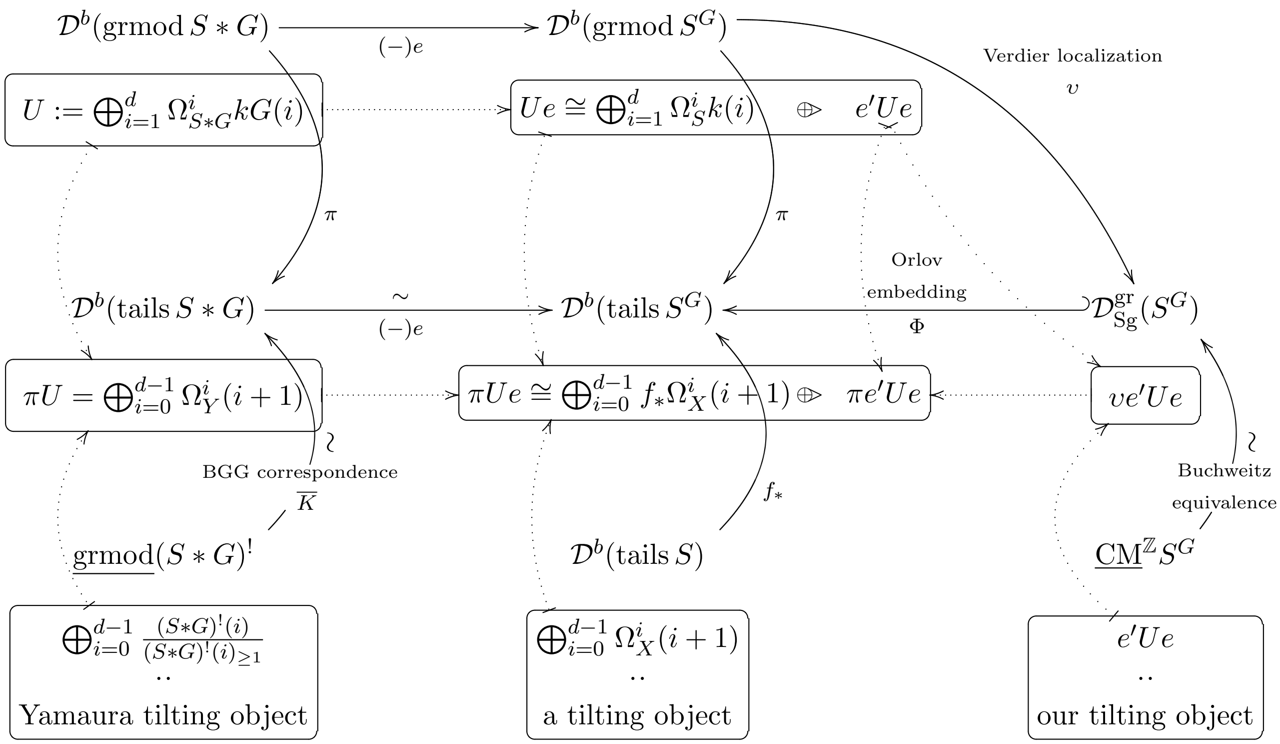
1. *$A * G/(e)$ is finite dimensional over k.*
2. *$(-)e : \operatorname{tails} A * G \to \operatorname{tails} A^G$ is an equivalence functor.*

In the setting of Theorem 2.5, $(S * G)^!$ is a Frobenius Koszul algebra of Gorenstein parameter $-d$ ([7, Proposition 2.27]) such that $((S * G)^!)^! \cong S * G$ is noetherian. The key point of our proof for Theorem 2.4 is to show that under the equivalences

$$\underline{\operatorname{grmod}}(S * G)^! \xrightarrow[\overline{K}]{\sim} \mathcal{D}^b(\operatorname{tails} S * G) \xrightarrow[(-)e]{\sim} \mathcal{D}^b(\operatorname{tails} S^G),$$

the tilting object in $\underline{\operatorname{grmod}}(S * G)^!$ obtained in Lemma 3.3 corresponds to the object $\bigoplus_{i=0}^{d-1} f_* \Omega^i_X(i)$ in $\mathcal{D}^b(\operatorname{tails} S^G)$ ([7, Corollary 3.15]).

The following is a diagram of triangulated categories which are essential for the proofs of Theorem 2.4 and Theorem 2.5.



where $X = \operatorname{Proj}_{nc} S$, $Y = \operatorname{Proj}_{nc} S*G$, and $M \oplus\!\!> N$ means that N is a direct summand of M.

References

[1] M. Artin and W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. Math.,* **66** (1987), 171-216.

[2] M. Artin and J. J. Zhang, Noncommutative projective schemes, *Adv. Math.* **109** (1994), 228-287.

[3] R.-O. Buchweitz, Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate cohomology over Gorenstein rings, unpublished manuscript (1985).

[4] O. Iyama and R. Takahashi, Tilting and cluster tilting for quotient singularities, *Math. Ann.* **356** (2013), 1065–1105.

[5] P. Jørgensen and J. J. Zhang, Gourmet's guide to Gorensteinness, *Adv. Math.* **151** (2000), 313–345.

[6] I. Mori and K. Ueyama, Ample group action on AS-regular algebras and noncommutative graded isolated singularities, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), no. 10, 73597383.

[7] I. Mori and K. Ueyama, Stable categories of graded maximal Cohen-Macaulay modules over noncommutative quotient singularities, *Adv. Math.* **297** (2016), 5492.

[8] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, 503–531, *Progr. Math.*, **270**, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[9] K. Ueyama, Graded maximal Cohen-Macaulay modules over noncommutative graded Gorenstein isolated singularities, *J. Algebra* **383** (2013), 85–103.

[10] K. Yamaura, Realizing stable categories as derived categories, *Adv. Math.* **248** (2013), 784–819.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Shizuoka University, 836 Ohya, Suruga-ku, Shizuoka 422-8529, JAPAN

E-mail address: `mori.izuru@shizuoka.ac.jp`

CONIC DIVISORIAL IDEALS OF HIBI RINGS AND THEIR APPLICATIONS

中嶋祐介 (YUSUKE NAKAJIMA)

Abstract. 本稿では日比環と呼ばれる半順序集合から構成されるトーリック環、及びその因子的イデアルを考察する。その中でも特に、正標数の可換環論や非可換特異点解消の概念と関連が深い、conic 加群と呼ばれる因子的イデアルに注目し、その特徴付けを日比環に付随する半順序集合の言葉を用いて与える。また、conic 加群を用いることで、いくつかの特別な日比環に対して非可換クレパント特異点解消を構成する。

本稿は東谷章弘氏との共同研究 [HN] の内容に基づいたものである。

1. 導入

本稿ではトーリック環上の *conic* と呼ばれる因子的イデアル (階数 1 の反射的加群) に注目する。以下、conic な因子的イデアルを conic 加群と呼ぶことにする。Conic 加群はトーリック環を定める錐 (cone) の情報を用いて定義されるものであり (詳細な定義は定義 1.1を参照)、特に階数 1 の極大 Cohen-Macaulay (= CM) 加群となる。また、下記の定理 1.2(1) に示すように特徴付けることもでき、この特徴付けにより conic 加群は正標数の可換環論とも深く関係する。さらに、定理 1.2(2) から、conic 加群は非可換特異点解消といった概念と関連することもわかっており、この加群を理解することは重要であると思われる。

Conic 加群を定義するために、本稿を通じて使用する記号をまず準備する。$\mathsf{N} \cong \mathbb{Z}^d$ を階数 d の格子とし、$\mathsf{M} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{N}, \mathbb{Z})$ を N の双対として定義される格子とする。また、$\mathsf{N}_{\mathbb{R}} \coloneqq \mathsf{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \mathsf{M}_{\mathbb{R}} \coloneqq \mathsf{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおき、これらの間に自然に定まる内積を $\langle\ ,\ \rangle : \mathsf{M}_{\mathbb{R}} \times \mathsf{N}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ と書くことにする。次に $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{Z}^d$ により生成される d 次元の有理強凸多面錐

$$\tau \coloneqq \mathrm{Cone}(v_1, \cdots, v_n) = \mathbb{R}_{\geq 0} v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} v_n \subset \mathsf{N}_{\mathbb{R}}$$

を考える。特に $v_1, \cdots, v_n$ は極小生成系であると仮定する。各 v_i に対して $\sigma_i(-) \coloneqq \langle -, v_i \rangle$ とおく。また $\sigma(-) \coloneqq (\sigma_1(-), \cdots, \sigma_n(-))$ と書くことにする。次にこの錐 τ の双対錐 $\tau^\vee$ を考える。

$$\tau^\vee \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}} \mid \sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ for all } i = 1, \cdots, n\}.$$

このとき、$\tau^\vee \cap \mathsf{M}$ はモノイドとなり、以下のようにトーリック環 R が定義される。

$$R \coloneqq \Bbbk[\tau^\vee \cap \mathsf{M}] = \Bbbk[t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} \mid (m_1, \cdots, m_d) \in \tau^\vee \cap \mathsf{M}].$$

ここで $\Bbbk$ は体であり、以下本稿では代数閉体であると仮定する。このトーリック環 R の性質は多くの文献で研究されており、上記の設定の下では d 次元の Cohen-Macaulay (= CM) 整閉整域となる。

次にトーリック環 R の因子的イデアルについて考える。実数の組 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathbb{T}(\mathbf{a}) \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathsf{M} \mid (\sigma_1(\mathbf{x}), \cdots, \sigma_n(\mathbf{x})) \geq (a_1, \cdots, a_n)\}$$

とおく。$T(\mathbf{a})$ を指数ベクトルが $\mathbb{T}(\mathbf{a})$ に含まれる単項式によって生成される加群と定めると、この $T(\mathbf{a})$ は因子的イデアルとなり、任意の因子的イデアルはこの形をしている。定義から $T(\mathbf{a}) = T(\ulcorner \mathbf{a} \urcorner)$ であるため、以下、整数の組 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ に対する因子的イデアル $T(\mathbf{a})$ を考える。(ここで $\ulcorner\ \urcorner$ は切り上げを意味し、$\ulcorner \mathbf{a} \urcorner = (\ulcorner a_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner a_n \urcorner)$ と定義する。) また、明らかに $\mathbb{T}(0) = \tau^\vee \cap \mathsf{M}$ であり、$T(0) = R$ が成立する。これら $T(\mathbf{a})$ は階数 1 の反射的 R 加群であるが、その中でも極大 CM 加群となるもの (すなわち加群の深度が R の次元 d と一致するもの) に注目する。トーリック環の階数 1 の極大 CM 加群は、例えば [Sta, VdB1, Don, BG1, Bae, Bru] といった文献において調べられて

おり、それらの同型類の個数は有限となることが知られている [BG1, Corollary 5.2]。以下、階数 1 の極大 CM 加群の中でもとりわけ良い性質を示す *conic* **加群**に注目する。

定義 1.1 ([BG1, Section 3]). 因子的イデアル $T(\mathbf{a})$ について、ある $\mathbf{x} \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}$ が存在して $\mathbf{a} = \ulcorner \sigma(\mathbf{x}) \urcorner$ とできるとき、$T(\mathbf{a})$ を *conic* **加群**と呼ぶ。

この conic 加群の性質は [BG1, Bru, SmVdB] などにおいて調べられており、特に conic 加群は階数 1 の極大 CM 加群となるが、一般には conic でない階数 1 の極大 CM 加群も存在する。前述のように階数 1 の極大 CM 加群の同型類の個数は有限であるため、conic 加群の同型類の個数も有限である。また、conic 加群は下記のような特徴づけ、及び良い性質を持っている。

定理 1.2. R を上記のようなトーリック環とする。このとき *conic* 加群に関して次が成立する。

(1) ([BG1, Proposition 3.6], [SmVdB, Proposition 3.2.3]) 任意の *conic* 加群は $R^{1/m} = \Bbbk[\tau^\vee \cap \frac{1}{m}\mathsf{M}]$ の R 加群としての直既約分解を考えた際の直和因子として現れる (ただし m は十分大きな自然数とする)。
(2) ([ŠpVdB1, Proposition 1.8]) 十分大きな自然数 $m \gg 0$ に対して、$\mathrm{End}_R(R^{1/m})$ の大域次元は有限となる。

もし、体 $\Bbbk$ の標数が $p > 0$ であるならば R^{1/p^e} は R の Frobenius 直像 F_*^eR と同型となる。(ここで F^e は Frobenius 写像 $F : R \to R$ $(r \mapsto r^p)$ を e 回合成したものであり、F_*^eR は R を F^e を通じて R 加群としてみたもの。) この F_*^eR は正標数の可換環論において非常に重要であり、例えば強 F 正則や F 純といった F 特異点と呼ばれれるクラスは、F_*^eR の構造により特徴付けることができる。この事から conic 加群は、トーリック環の正標数の可換環論における振る舞いを理解する上で非常に重要である。

また、定理 1.2(2) のような大域次元が有限となる自己準同型環は R の**非可換特異点解消** (*non-commutative resolution*) と呼ばれ [DITV]、このような環は多元環の表現論などの文脈などで深く研究されている。また、この非可換特異点解消よりも良いクラスとして Van den Bergh によって導入された**非可換クレパント特異点解消**という概念がある。

定義 1.3 ([VdB2]). A を Gorenstein 整閉整域とし、M を反射的 A 加群とする。このとき自己準同型環 $\mathrm{End}_A(M)$ が A の**非可換クレパント特異点解消** *(non-commutative crepant resolution)* であるとは次の条件を満たす時にいう。

(a) 大域次元 $\mathrm{gl.dim}\,\mathrm{End}_A(M)$ は有限である。
(b) A 加群として $\mathrm{End}_A(M)$ が極大 CM 加群となる。

(以下、non-commutative crepant resolution を略して NCCR と書くことにする。)

注意 1.4. 元々の [VdB2] における定義では上記のように A を Gorenstein と仮定しているが、最近は A を Cohen-Macaulay としている文献も多い。その場合、最初の条件 (a) を

(a') 任意の素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A$ に対して $\mathrm{gl.dim}\,\mathrm{End}_A(M)_{\mathfrak{p}} = \dim A_{\mathfrak{p}}$

と修正する必要があるが、A が Gorenstein であるならば、この条件は上記の定義と同値となる。

また、[DITW] により CM 整閉整域 A が NCCR を持つのであれば A は $\mathbb{Q}$-Gorenstein となることが示されている。本稿では因子類群が自由アーベル群となる環しか扱わないため、Gorenstein でない場合には NCCR は存在しない。よって、以下 NCCR を扱う際には定義 1.3のように Gorenstein であることを仮定することにする。

この NCCR という概念は、Bondal-Orlov 予想および Bridgeland による定理 [Bri] への非可換代数を用いたアプローチから生まれた概念であり、いくつかの良い特異点に対して、NCCR は通常の意味でのクレパント特異点解消と導来同値となる。(例えば導来 McKay 対応 [KV, BKR] の文脈でそのような例が現れる。) さらに自己準同型環 $\mathrm{End}_R(M)$ が NCCR となる加群 M は団傾部分圏、高次元 Auslander-Reiten 理論といった概念と深く関連する重要な対象である ([Iya, IR] などを参照)。しかし、通常のクレパント特異点解消と同様に、与えられた特異点がいつでも NCCR を持つとは限らない。よって、与えられた特異点に対して NCCR が存在するか、存在する場合に NCCR をどう構成するかは重要な問題である。本稿で扱うトーリック環に関しては、以下の場合に NCCR の存在が知られている。

- R が有限アーベル群 $G \subset \mathrm{SL}(d,\mathbb{C})$ に付随する商特異点であるとき [VdB2, IW]。
- トーリック環 R が Gorenstein で因子類群 $\mathrm{Cl}(R)$ が $\mathbb{Z}$ であるとき [VdB2]。
- トーリック環 R が 3 次元 Gorenstein であるとき [Bro, IU]。この場合 NCCR はダイマー模型と呼ばれるトーラス上に描かれた二部グラフの情報を用いることにより構成できる。(ダイマー模型を用いない構成法は [ŠpVdB3] を参照。)

トーリック環が 4 次元以上の場合でも、R を定義するトーラスの作用がある種の "良い性質" を満たすとき、NCCR が存在することが知られている (詳しくは [ŠpVdB1, ŠpVdB2] を参照)。しかし、任意のトーリック環が NCCR を持つか否かは未解決である。一方で、定理 1.2(2) から任意のトーリック環が非可換特異点解消を持つことはわかる。そこで、定理 1.2(2) に現れた $\mathrm{End}_R(R^{1/m})$ が NCCR になっていないか?という疑問が浮かぶが、一般にこれは NCCR とならない。つまり、自己準同型環が極大 CM 加群になるという定義 1.3(b) の条件が、$\mathrm{End}_R(R^{1/m})$ に対しては成り立たない。ただし、R が有限アーベル群 $G \subset \mathrm{SL}(d,\mathbb{C})$ に付随する商特異点なら $\mathrm{End}_R(R^{1/m})$ は NCCR になる。

以上のように conic 加群は正標数の可換環論や非可換 (クレパント) 特異点解消と深い関連のある対象である。もし conic 加群の具体的な表示や特徴付けを与えることができれば、上記の分野をより深く理解するための手助けとなるが、その特徴付けは一般には難しい。そこで本稿では日比環と呼ばれる半順序集合から定まるトーリック環に対して、この conic 加群を考察していく。

2. 準備

2.1. **トーリック環の因子的イデアルについて.**

本稿の目的のひとつは、日比環の conic 加群と呼ばれる因子的イデアルを理解することである。そこで、まず始めにトーリック環の因子的イデアルについての基本事項を復習しておく。$R = \Bbbk[\tau^\vee \cap \mathsf{M}]$ を前章で定義した錐 $\tau = \mathrm{Cone}(v_1, \cdots, v_n) \subset \mathsf{N}_\mathbb{R}$ に付随するトーリック環とする。前述のように R の因子的イデアルは $T(\mathbf{a})$ という形で書き表すことができる。R 双対を $(-)^* := \mathrm{Hom}_R(-, R)$ と書くことにすると、これら因子的イデアルは演算 $T(\mathbf{a}) \cdot T(\mathbf{b}) := (T(\mathbf{a}) \otimes T(\mathbf{b}))^{**} \cong T(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ によって群をなす。その群を R の**因子類群**と呼び、$\mathrm{Cl}(R)$ と書くことにする。$\mathrm{Cl}(R)$ を考察する際に次の完全列は基本的である (例えば [BG2, Corollary 4.56] を参照)。

$$0 \to \mathsf{M} = \mathbb{Z}^d \xrightarrow{\sigma(-)} \mathbb{Z}^n \to \mathrm{Cl}(R) \to 0 \tag{2.1}$$

従って、この完全列から $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{Z}^n$ に対して、$T(\mathbf{a}) \cong T(\mathbf{a}')$ となるための必要十分条件は、すべての $i = 1, \cdots, n$ に対して $a_i = a'_i + \sigma_i(\mathbf{y})$ となる $\mathbf{y} \in \mathsf{M}$ が存在することである。また、$\mathfrak{p}_i := T(\delta_{i1}, \cdots, \delta_{in})$ とおくことにすると (ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ)、$\mathfrak{p}_i$ は高さ 1 の素イデアルであり、素因子 $\mathcal{D}_i := \mathrm{V}(\mathfrak{p}_i) = \mathrm{Spec}\, R/\mathfrak{p}_i$ を定める。このとき因子的イデアル $T(\mathbf{a}) = T(a_1, \cdots, a_n)$ は Weil 因子 $-(a_1\mathcal{D}_1 + \cdots + a_n\mathcal{D}_n)$ に対応する。さらに完全列 (2.1) から次の関係式を得ることができる。

$$v_1\mathcal{D}_1 + \cdots + v_n\mathcal{D}_n = 0. \tag{2.2}$$

定義 1.1で見たように、$T(\mathbf{a})$ が conic 加群であるならば $\mathbf{x} \in \mathsf{M}_\mathbb{R}$ が存在して $\mathbf{a} = \ulcorner \sigma(\mathbf{x}) \urcorner$ となる。また、$\mathbf{y} \in \mathsf{M}$ に対して $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ とおけば、上記の考察より $T(\sigma(\mathbf{x}')) \cong T(\sigma(\mathbf{x}))$ を得る。すなわち conic 加群を考察するためには $\mathsf{M}_\mathbb{R}/\mathsf{M}$ の元を考えれば十分であり、特に次の補題が成立する。

補題 2.1 ([Bru, Corollary 1.2])**.** *Conic* 加群 $T(a_1, \cdots, a_n)$ は超平面 $H_{i,m} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{M}_\mathbb{R} \mid \sigma_i(\mathbf{x}) = m\}$ $(m \in \mathbb{Z},\ i = 1, \cdots, n)$ によって $(-1, 0]^d$ を分割した際にできる d 次元のセルと 1 対 1 に対応する。ただし、この対応は $L_{i,a_i} = \{\mathbf{x} \in \mathsf{M}_\mathbb{R} \mid a_i - 1 < \sigma_i(\mathbf{x}) \le a_i\}$ とおいたとき、セル $\bigcap_{i=1}^n L_{i,a_i}$ を $T(a_1, \cdots, a_n)$ に対応させることにより得られる。

2.2. **日比環の構成.**

本稿では特に、日比環と呼ばれる特別なトーリック環に注目する。この日比環は論文 [Hib] において考察された対象であり、半順序集合を用いて以下のように定義される。

$P = \{p_1, \cdots, p_{d-1}\}$ を有限半順序集合とする。(以下、半順序集合と言えば有限なものを意味することとする。) このとき $p_i, p_j \in P$ に対して $p_j \prec p_i$ かつ $p_j \prec p' \prec p_i$ をみたす $p' \in P$ が存

在しない時、p_i は p_j を**支配** (*cover*) するという。次に P に含まれていない二つの元 $\widehat{0},\widehat{1}$ を加えた $\widehat{P} := P \cup \{\widehat{0},\widehat{1}\}$ を考える。ただし、$\widehat{0}$ は P の順序 $\prec$ に関して任意の P の元より小さな元、$\widehat{1}$ は任意の P の元より大きな元とする。また、$p_0 = \widehat{0}, p_d = \widehat{1}$ と書くこともある。この半順序集合 $\widehat{P}$ に対し、$\{p_0, p_1, \cdots, p_d\}$ を頂点集合とし、p_i が p_j を支配するとき p_i と p_j を辺でつなぐことによってできるグラフを $\widehat{P}$ のハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ と呼ぶ。p_i と p_j が辺でつながっているとき、その辺を $\{p_i, p_j\}$ と書くこともある。

次に、ハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ における辺の集合を $\{e_1, \cdots, e_n\}$ とおき、以下のように $d \times n$ 行列 $H = (h_{p_ie_j})_{\substack{0\le i\le d-1\\ 1\le j\le n}}$ を定義する。(行列 H の定義においては、最大元 p_d を考えていないことに注意する。)

$$h_{p_ie_j} = \begin{cases} 1 & p_i \text{ が辺 } e_j \text{ の下側の端点のとき} \\ -1 & p_i \text{ が辺 } e_j \text{ の上側の端点のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

行列 H の i 番目の列ベクトルを $v_i \in \mathbb{Z}^d$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおき、これらの列ベクトルが生成する錐 $\tau_P := \mathrm{Cone}\{v_1, \cdots, v_n\}$ を定義する。$\sigma_i(-) := \langle -, v_i \rangle$ とおけば、錐 τ_P の双対は

$$\tau_P^\vee := \{\mathbf{x} \in \mathsf{M}_\mathbb{R} \mid \sigma_i(\mathbf{x}) \ge 0 \text{ for any } i = 1, \cdots, n\}$$

であり、トーリック環

$$R = \Bbbk[\tau_P^\vee \cap \mathsf{M}] = \Bbbk[t_1^{x_1} \cdots t_d^{x_d} \mid (x_1, \cdots, x_d) \in \tau_P^\vee \cap \mathsf{M}]$$

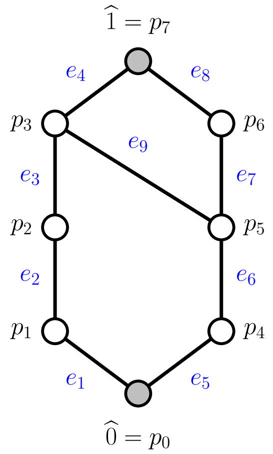
を定義することができる。上記のように半順序集合 P から構成されたトーリック環 R を P に付随する**日比環**と呼ぶ。

注意 2.2. 元々の論文 [Hib] では、半順序集合 P から構成した分配束 $I(P)$ を用いて定義される多項式環の商

$$\Bbbk[P] = \Bbbk[X_\alpha \mid \alpha \in I(P)] \big/ \langle X_\alpha X_\beta - X_{\alpha\cup\beta} X_{\alpha\cap\beta} \mid \alpha \not\sim \beta \rangle$$

を扱っており、この形の環を日比環として導入している文献も多くある。本稿で用いる $R = \Bbbk[\tau_P^\vee \cap \mathsf{M}]$ はこの $\Bbbk[P]$ と同型となるため、これを日比環と呼んでいる。以下で見るように、錐 τ_P を用いた構成の方が因子的イデアルと相性が良く、特に P (及び $\mathcal{H}(\widehat{P})$) の情報から日比環の因子類群を理解することができる (定理 2.4)。

例 2.3. 半順序集合 $P = \{p_1 \prec p_2 \prec p_3, p_5 \prec p_3, p_4 \prec p_5 \prec p_6\}$ に関して、ハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ および付随する行列 H は以下のようになる。



$$\begin{array}{c} \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

このとき、上記の行列の列ベクトル ($v_1 = {}^t(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $v_2 = {}^t(0, 1, -1, 0, 0, 0, 0)$ など) から生成される錐が τ_P である。

ここで日比環 R の持つ基本的な性質をまとめておく (詳細は [Hib] などを参照)。

- $\dim R = |P| + 1 = d$
- R は CM 整閉整域
- R が Gorenstein となる必要十分条件は P が**純** (*pure*) であること。ここで半順序集合 P が純であるとは、P における任意の極大鎖 $p_{i_1} \prec \cdots \prec p_{i_\ell}$ が同じ長さを持つときにいう。

日比環 R の因子類群 $\mathrm{Cl}(R)$ について考察するために、いくつかの用語を準備する。ハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ における頂点の列 $C = (p_{k_1}, \cdots, p_{k_m})$ について、$p_{k_i} \neq p_{k_j}$ $(1 \leq i \neq j \leq m)$, $p_{k_{m+1}} = p_{k_1}$ かつ、$\{p_{k_i}, p_{k_{i+1}}\}$ が $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺であるとき、C を $\widehat{P}$ の (あるいは $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の) **サイクル**という。次に全域木の概念を導入する。$\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺集合 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ の部分集合 $\{e_{i_1}, \cdots, e_{i_d}\}$ は、以下の条件を満たすとき**全域木** (*spanning tree*) であるという。

- 任意の $\widehat{P} = \{p_0, p_1, \cdots, p_d\}$ の元はある辺 e_{i_j} の端点となる。
- $\{e_{i_1}, \cdots, e_{i_d}\}$ はサイクルを成さない。

例えば、例 2.3において部分集合 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ をとると、これは全域木となっている。しかし、一般には全域木の選び方は一意的ではない。

これらの用語を使って日比環 R の因子類群を考察する。まず、錐 τ_P の定義から各素因子は $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺と 1 対 1 に対応する。辺 e に対応する素因子を $\mathcal{D}_e$ と書くことにすると、$\sigma(-)$ の定義と、関係式 (2.2) から

$$\sum_{q \in U(p)} \mathcal{D}_{\{q,p\}} = \sum_{q' \in D(p)} \mathcal{D}_{\{p,q'\}} \text{ for } p \in \widehat{P} \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}, \quad \sum_{q \in U(\hat{0})} \mathcal{D}_{\{q,p_0\}} = 0. \tag{2.3}$$

を得る。ただし、$U(p)$ は $p \in \widehat{P} \setminus \{\hat{1}\}$ を支配する $\widehat{P}$ の元の集合とする。また、$D(p)$ を $p \in \widehat{P} \setminus \{\hat{0}\}$ によって支配される $\widehat{P}$ の元の集合とする。

このとき次の定理が成立する。

定理 2.4 ([HHN]). R を半順序集合 P に付随する日比環とする。このとき $\mathrm{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^{n-d}$ を得る。ここで、n は $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺の数であり、$d+1$ は $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の頂点の数である。

特に、$\{e_1, \cdots, e_d\}$ を全域木とし、$e_{d+1}, \cdots, e_n$ を全域木に含まれない辺とすると、素因子 $\mathcal{D}_{e_{d+1}}, \cdots, \mathcal{D}_{e_n}$ が $\mathrm{Cl}(R)$ の生成元となる。

例 2.5. 例 2.3の半順序集合 P に付随する日比環 R を考える。特に $\widehat{P}$ の全域木として $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ を固定する。このとき辺 e_8, e_9 は全域木に含まれないため、定理 2.4より対応する因子 $\mathcal{D}_{e_8}, \mathcal{D}_{e_9}$ が $\mathrm{Cl}(R)$ を生成し、とくに $\mathrm{Cl}(R) = \langle \mathcal{D}_{e_8}, \mathcal{D}_{e_9} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ である。また、関係式 (2.3) を用いると

$$\mathcal{D}_{e_1} = \mathcal{D}_{e_2} = \mathcal{D}_{e_3} = -\mathcal{D}_{e_8} - \mathcal{D}_{e_9}, \quad \mathcal{D}_{e_4} = -\mathcal{D}_{e_7} = -\mathcal{D}_{e_8} \quad \mathcal{D}_{e_5} = \mathcal{D}_{e_6} = \mathcal{D}_{e_8} + \mathcal{D}_{e_9}$$

を得る。

3. 日比環の Conic 加群について

定理 2.4で見たように、日比環の因子類群は $\mathrm{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^{n-d}$ である。本節では、どの $\mathrm{Cl}(R)$ の元が conic 加群に対応するかを見ていく。鍵となるのは補題 2.1である。日比環の構成から $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺 e_i は錐 τ_P を生成する列ベクトル v_i と 1 対 1 に対応し、この v_i から線形形式 $\sigma_i(-) = \langle -, v_i \rangle$ が定まる。このことから補題 2.1に現れる超平面 $H_{i,m}$ を $\mathcal{H}(\widehat{P})$ を用いて理解することができる。特に本節では、日比環の conic 加群がハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の言葉を用いて特徴付けられることを示す (定理 3.2)。定理の詳細な証明は [HN] に譲ることにし、本稿では例 2.3の半順序集合を用いて、証明の鍵となるアイディアを紹介する。

例 3.1. P を例 2.3の半順序集合とする。このとき、$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ は全域木となる。よって、$\mathrm{Cl}(R) = \langle \mathcal{D}_{e_8}, \mathcal{D}_{e_9} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ を得る (例 2.5を参照)。以下、この $\mathrm{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^2$ の元で conic となるものを求める。補題 2.1から、超平面 $H_{i,m} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7 \mid \sigma_i(\mathbf{x}) = m\}$ $(m \in \mathbb{Z}, i = 1, \cdots, 9)$ による $(-1, 0]^7$ の分割を考えれば、その分割により得られる 7 次元のセルが conic 加群と 1 対 1 に対応す

る。しかし、複数の超平面の様子を同時に考察する必要があるため、その分割は非常に複雑である。そこで

$$\phi : \mathsf{M}_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7 \ (\mathbf{x} = (x_0, \cdots, x_6) \mapsto (\sigma_1(\mathbf{x}), \cdots, \sigma_7(\mathbf{x})) =: (X_1, \cdots, X_7))$$

という線形変換を考える。この変換はユニモジュラー変換である (すなわち ϕ の表現行列が $\mathrm{GL}(7,\mathbb{Z})$ に含まれる)。線形変換 ϕ を施したあとの座標系で定義されるトーリック環を R' とすると、ϕ がユニモジュラー変換であるときは $R \cong R'$ となることがわかる。変換後の座標系を用いて補題 2.1を考えると、超平面 $\sigma_i(\mathbf{x}) = m$ は $X_i = m$ に変換されており、この形の超平面は $(-1,0]^7$ の境界に乗っているため内部を分割しない。よって、以上の考察から $(-1,0]^7$ の超平面による分割は、R' で考えたほうが簡明である。上記のように全域木に対応する辺を標準基底に移す線形変換を考えた時、それがユニモジュラー変換となることが日比環の大きな特徴である。

そこで以下では変換 ϕ を施した後の超平面を用いて、$(-1,0]^7$ の分割を考えていく。前述のように $i = 1, \cdots, 7$ に対して超平面 $X_i = -1, 0$ は $(-1,0]^7$ の境界に乗っているため、conic 加群を求めるためには、残りの $\sigma_8(\mathbf{x}), \sigma_9(\mathbf{x})$ を変換した後の超平面を考えれば良い。ここで

$$X_8 \coloneqq \sigma_8(\mathbf{x}) = x_6, \quad X_9 \coloneqq \sigma_9(\mathbf{x}) = x_5 - x_3$$

とおき、超平面 $X_8 = m_8, X_9 = m_9 \, (m_8, m_9 \in \mathbb{Z})$ による $(-1,0]^7$ の分割を考察していく。(X_8, X_9 は $X_1, \cdots, X_7$ を用いて表記することができるが、詳しくは後述する。) 特に、補題 2.1から、その分割において

$$a - 1 < X_8 \le a \quad \text{and} \quad b - 1 < X_9 \le b$$

を満たす $(-1,0]^7$ の 7 次元のセルが conic 加群 $T(0, \cdots, 0, a, b)$ に対応する。

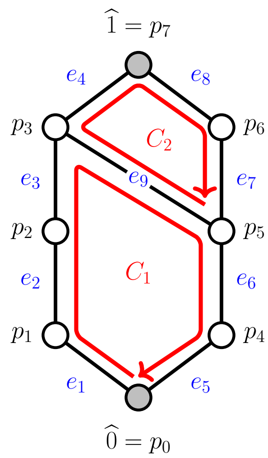
次に、$T(0, \cdots, 0, a, b)$ が conic 加群であるとき、$(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ の取り得る値を調べていく。(a,b) が conic 加群を定めると仮定すると、$a - 1 < X_8 \le a$, $b - 1 < X_9 \le b$ をみたすセルが存在する。ここで $\mathcal{H}(\widehat{P})$ 上のサイクル $C_1 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_5, p_4\}$ を考える。日比環に付随する錐 τ_P の定義から

$$\sigma_1(\mathbf{x}) + \sigma_2(\mathbf{x}) + \sigma_3(\mathbf{x}) - \sigma_5(\mathbf{x}) - \sigma_6(\mathbf{x}) - \sigma_9(\mathbf{x}) = 0$$

が成立するので、特に次の関係式を得る。

$$X_9 = X_1 + X_2 + X_3 - X_5 - X_6$$

考えているセルにおいては $-1 < X_i \le 0 \ (i = 1, \cdots, 7)$ なので、上記の式と合わせて $-3 < X_9 < 2$ を得る。また、$b - 1 < X_9 \le b$ であることから、$-2 \le b \le 2$ である。



サイクル $C_2 = \{p_5, p_3, p_7, p_6\}$ に対しても、同様の議論をすることにより $X_8 = X_4 + X_9 - X_7$ を得る。また、$-1 < X_i \le 0 \ (i = 1, \cdots, 7)$, $b - 1 < X_9 \le b$ なので $b - 2 < X_8 < b - 1$ が成立し、$a - 1 < X_8 \le a$ と合わせて $-1 \le a - b \le 1$ を得る。

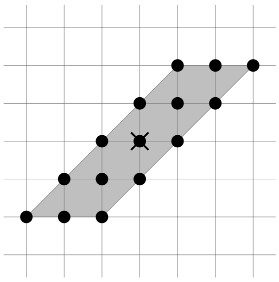
以上の議論により不等式

$$-2 \le b \le 2, \quad -1 \le a - b \le 1 \tag{3.1}$$

を得ることができた。$\mathcal{H}(\widehat{P})$ 上にはもうひとつのサイクル $C_3 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_7, p_6, p_5, p_4\}$ が存在するが、このサイクルから同様の議論で得られる不等式が定める領域は、(3.1) により定まる領域よりも大きいため、conic 加群を考える際には無視してもかまわない。

よって $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ が conic 加群に対応するならば、不等式 (3.1) を満たすことがわかった。また逆に、これらの不等式をみたす (a,b) は conic 加群を定めることも示すことができる。

以上より、Conic 加群を定める $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ は下記のように表示することができる。ただし $\times$ 印は原点を表す。



以上の考察は一般の日比環に対しても適用でき、特に下記の定理が成立する。

定理 3.2 ([HN, Theorem 2.4])**.** R を半順序集合 P に付随する日比環とする。$\{e_1, \cdots, e_d, e_{d+1}, \cdots, e_n\}$ をハッセ図 $\mathcal{H}(\widehat{P})$ の辺集合とし、$\mathcal{H}(\widehat{P})$ の頂点の個数を $d+1$ とする。(このとき $\dim R = d$ であり、定理 *2.4*から $\mathrm{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^{n-d}$ を得る。) また、$\{e_1, \cdots, e_d\}$ を全域木として固定する。サイクル $C = (p_{k_1}, \cdots, p_{k_m})$ に対して、以下のような C に含まれる辺の部分集合を定義する。

$$X_C^+ = \{\{p_{k_i}, p_{k_{i+1}}\} \mid 1 \le i \le m,\ p_{k_i} \prec p_{k_{i+1}}\},$$
$$X_C^- = \{\{p_{k_i}, p_{k_{i+1}}\} \mid 1 \le i \le m,\ p_{k_{i+1}} \prec p_{k_i}\},$$
$$Y_C^{\pm} = X_C^{\pm} \cap \{e_{d+1}, \cdots, e_n\}.$$

さらに、

$$\mathcal{C}(P) = \Big\{(y_1, \cdots, y_{n-d}) \in \mathrm{Cl}(R) \mid -|X_C^-| + 1 \le \sum_{e_{d+\ell} \in Y_C^+} y_\ell - \sum_{e_{d+\ell'} \in Y_C^-} y_{\ell'} \le |X_C^+| - 1\Big\}$$

とおく。ただし、$\mathcal{H}(\widehat{P})$ 上のすべてのサイクル C に対して上記の不等式を考えていることとする。

このとき、因子的イデアル $T(0, \cdots, 0, a_1, \cdots, a_{n-d})$ が *conic* であるための必要十分条件は、$(a_1, \cdots, a_{n-d}) \in \mathcal{C}(P)$ である。

注意 3.3. 定理 3.2における $\mathcal{C}(P)$ は**サーキット** (*circuit*) という概念を用いて、より精密化できるが、ここでは省略する。詳しくは [HN] を参照頂きたい。

4. 多項式環の Segre 積の非可換クレパント特異点解消

前章の定理 3.2では日比環の conic 加群の特徴付けを付随する半順序集合 P を用いて与えた。この定理と定理 1.2(2) を合わせることにより次を得る。

系 4.1. 定理 *3.2*と同じ記号を用いることとする。このとき自己準同型環

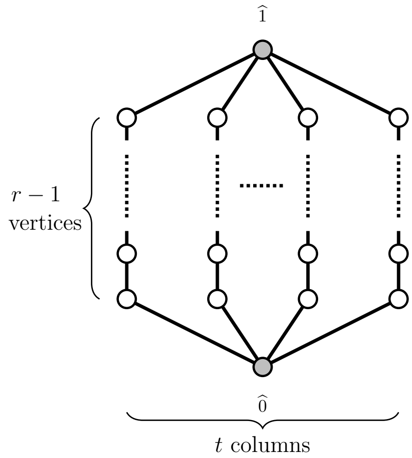
$$\mathrm{End}_R\Big(\bigoplus_{(a_1,\cdots,a_{n-d}) \in \mathcal{C}(P)} T(0, \cdots, 0, a_1, \cdots, a_{n-d})\Big)$$

の大域次元は有限である。すなわちこれは R の非可換特異点解消である。

ここで、M, N を conic 加群とすると、これらは極大 CM 加群であるが、一般に $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ が極大 CM 加群になるとは限らない。よって、上記の自己準同型環も極大 CM R 加群になるとは限らず、特に NCCR ではない。このようにすべての conic 加群の直和を考えると、その自己準同型環は一般に極大 CM 加群とならないため、余分な conic 加群を除くことで、大域次元が有限かつ

極大 CM 加群となる自己準同型環を構成できないかを考える。(実際、[ŠpVdB1] では conic 加群の一部分を用いることにより、特別な高次元トーリック環の NCCR を構成している。) 定理 3.2では日比環の conic 加群の具体的な表示を与えているため、$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ がいつ極大 CM 加群になるかを詳しく調べることができ、特に下記の日比環に対して NCCR を構成することができる。

以下、P をハッセ図が下記の形となる半順序集合とし、R を P に付随する日比環とする。



このとき R は t 個の多項式環の Segre 積 $S_1\#\cdots\#S_t$ と同型となる (ただし S_i は r 変数の多項式環)。特に R は次元 $t(r-1)+1$ の Gorenstein 環で、$\mathrm{Cl}(R)\cong\mathbb{Z}^{t-1}$ となる。また、定理 3.2から

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(P)=\{(c_1,\cdots,c_{t-1})\in\mathrm{Cl}(R)\mid &-(r-1)\le c_i\le r-1 \text{ for } 1\le i\le t-1,\\ &-(r-1)\le c_i-c_j\le r-1 \text{ for } 1\le i<j\le t-1\}\end{aligned}$$

が成立する。

定理 4.2 ([HN, Theorem 3.6])**.** R を上記の日比環 $R\cong S_1\#\cdots\#S_t$ とし、

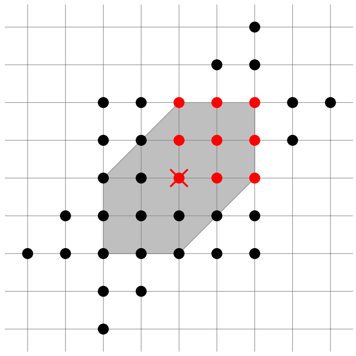
$$\mathcal{L}:=\{\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_{t-1})\in\mathcal{C}(P)\mid 0\le c_i\le r-1 \textit{ for } \ i=1,\cdots,t-1\}$$

とおく。このとき $M_{\mathcal{L}}:=\bigoplus_{\mathbf{c}\in\mathcal{L}}T(0,\cdots,0,\mathbf{c})$ の自己準同型環 $\mathrm{End}_R(M_{\mathcal{L}})$ は R の *NCCR* である。

注意 4.3. 上記の定理において $t=2$ であるとき、R は行列式環として表すこともできる。また特に $r=t=2$ であるならば、R は 3 次元の A_1 特異点 $\Bbbk[X,Y,Z,W]/(XW-YZ)$ と同型となる。行列式環の NCCR はすでに [BLVdB] において構成されているため、$t=2$ の場合には定理 4.2は [BLVdB] の結果に含まれる。

上記の定理を証明するためには $\mathrm{End}_R(M_{\mathcal{L}})$ の大域次元が有限であることと、$\mathrm{End}_R(M_{\mathcal{L}})$ が R 加群として極大 CM であることを示す必要があるが、大域次元の有限性は [ŠpVdB1, Section 10, 11] と類似の手法を用いて示すことができる。また極大 CM R 加群であることは局所コホモロジーの消滅を調べることにより成される。詳しくは [HN, Section 3] を参照頂きたい。定理 4.2は NCCR を与える加群をひとつ与えただけであるが、その加群 $M_{\mathcal{L}}$ に "変異" という操作を施すことにより、NCCR を与えるその他の加群を次々と構成していくことができる。

例 4.4. 定理 4.2において $r=3,t=3$ の場合を考える。すなわち R は 3 変数多項式環 3 つの Segre 積であり、$\mathrm{Cl}(R)\cong\mathbb{Z}^2$ である。下記の図において $\times$ 印は原点 $(0,0)$ を表すものとする。定理 3.2を用いると灰色で塗られた部分に含まれているドットが conic 加群に対応することがわかる。また、灰色の部分に含まれていないドットは、階数 1 の極大 CM 加群だが conic ではないものを表している。



このとき、定理 4.2から、赤色のドットに対応する conic 加群の直和 $M_{\mathcal{L}}$ を考えると、$\mathrm{End}_R(M_{\mathcal{L}})$ が R の NCCR となる。また、この加群 $M_{\mathcal{L}}$ を変異していくことによって、NCCR を与える他の加群を得ることができる。例えば、$M_{\mathcal{L}}$ から $(2,2)$ に対応する加群を取り除いて、代わりに $(-1,-1)$ に対応する加群を直和したものを M' とすれば、$\mathrm{End}_R(M')$ も R の NCCR となる。

また定理 4.2で扱った以外の日比環でも、それが Gorenstein かつ因子類群が $\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}^2$ であれば NCCR を構成することができる [Nak]。(日比環の因子類群は自由アーベル群であるため、注意 1.4で述べたように、日比環が Gorenstein でない場合には NCCR は存在しない。)

謝辞. 代数学シンポジウムにおける講演の機会を下さった世話人の皆様に感謝いたします。また、講演準備及び本稿の執筆において共同研究者の東谷章弘氏に多くの助言を頂きました。この場を借りて御礼申し上げます。

References

[Bae] C. Baeţica, *Cohen-Macaulay classes which are not conic*, Comm. Alg., **32** (2004), 1183–1188.

[Bri] T. Bridgeland, *Flops and derived categories*, Invent. Math. **147** (2002), no. 3, 613–632.

[BKR] T. Bridgeland, A. King and M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 535–554.

[Bro] N. Broomhead, *Dimer model and Calabi-Yau algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **215** no. 1011, (2012).

[Bru] W. Bruns, *Conic divisor classes over a normal monoid algebra*, Commutative algebra and algebraic geometry, Contemp. Math., **390**, Amer. Math. Soc., (2005), 63-71.

[BG1] W. Bruns and J. Gubeladze, *Divisorial linear algebra of normal semigroup rings*, Algebra and Represent. Theory, **6** (2003), 139-168.

[BG2] W. Bruns and J. Gubeladze, *Polytopes, rings and K-theory*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, (2009).

[BLVdB] R.-O. Buchweitz, G. J. Leuschke, and M. Van den Bergh, *Non-commutative desingularization of determinantal varieties II: arbitrary minors*, Int. Math. Res. Not. IMRN **9**, 2748–2812 (2016).

[DITV] H. Dao, O. Iyama, R. Takahashi and C. Vial, *Non-commutative resolutions and Grothendieck groups*, J. Noncommut. Geom., **9** (2015) no. 1, 21–34.

[DITW] H. Dao, O. Iyama, R. Takahashi and M. Wemyss, *Gorenstein modifications and $\mathbb{Q}$-Gorenstein rings*, arXiv:1611.04137.

[Don] X. Dong, *Canonical modules of semigroup rings and a conjecture of Reiner*, Discrete Comput. Geom. **27** (2002), 85–97.

[HHN] M. Hashimoto, T. Hibi and A. Noma, *Divisor class groups of affine semigroup rings associated with distributive lattices*, J. Algebra **149** (1992), no. 2, 352–357.

[Hib] T. Hibi, *Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws*, In:"Commutative Algebra and Combinatorics" (M. Nagata and H. Matsumura, Eds.), Adv. Stud. *Pure Math.* **11**, North–Holland, Amsterdam, (1987), 93–109.

[HN] A. Higashitani and Y. Nakajima, *Conic divisorial ideals of Hibi rings and their applications to non-commutative crepant resolutions*, arXiv:1702.07058.

[IU] A. Ishii and K. Ueda, *Dimer models and the special McKay correspondence*, Geom. Topol. **19** (2015) 3405–3466.

[Iya] O. Iyama, *Auslander correspondence*, Adv. Math. **210** (2007), no. 1, 51–82.

[IR] O. Iyama and I. Reiten, *Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 4, 1087–1149.
[IW] O. Iyama, M. Wemyss, *Maximal modifications and Auslander-Reiten duality for non-isolated singularities*, Invent. Math. **197** (2014), no. 3, 521–586.
[KV] M. Kapranov and E. Vasserot, *Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras*, Math. Ann. 316 (2000), no. 3, 565–576.
[Nak] Y. Nakajima, *Non-commutative crepant resolutions of Hibi rings with small class group*, in preparation.
[SmVdB] K. E. Smith and M. Van den Bergh, *Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic*, Proc. London Math. Soc. (3) **75** (1997), no. 1, 32–62.
[ŠpVdB1] Š. Špenko and M. Van den Bergh, *Non-commutative resolutions of quotient singularities for reductive groups*, Invent. Math. **210** (2017), no. 1, 3–67.
[ŠpVdB2] Š. Špenko and M. Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions for some toric singularities I*, arXiv:1701.05255.
[ŠpVdB3] Š. Špenko and M. Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions for some toric singularities II*, arXiv:1707.08245.
[Sta] R. P. Stanley, *Linear Diophantine equations and local cohomology*, Invent. Math. **68** (1982), no. 2, 175–193.
[VdB1] M. Van den Bergh, *Cohen-Macaulayness of semi-invariants for tori*, Trans. Amer. Math. Soc. **336** (1993), no. 2, 557–580.
[VdB2] M. Van den Bergh, *Non-Commutative Crepant Resolutions*, The Legacy of Niels Henrik Abel, Springer-Verlag, Berlin, (2004), 749–770.

〒 277-8583 千葉県柏市柏の葉 5-1-5 東京大学 国際高等研究所 カブリ数物連携宇宙研究機構
E-mail address: `yusuke.nakajima@ipmu.jp`

ON THE EXISTENCE OF SILTING OBJECTS

相原琢磨

多元環の表現論において, 傾理論は重要なトピックのうちの一つである. 傾理論は森田理論の一般化として 1980 年頃に導入され, 近年活発に研究が行われている. 特に, 傾理論で中心的な役割を果たす傾対象は, 導来同値を引き起こすことが知られており [H, R1, K], 数学の様々な分野で注目されている.

変異理論の観点から傾対象を眺めたとき, それらはある弱点を持っている: 傾対象の変異 (**傾変異**) とは, 与えられた傾対象の一部分 (直和因子) をある操作で取り替えて, 新しい傾対象を作り出す方法である. この方法は, Bernstein-Gelfand-Ponomarev の鏡映関手 [BGP] に起源を持ち, Auslander-Platzeck-Reiten [APR] や Brenner-Butler [BB], Riedtmann-Schofield [RS] らによって定式化された. 上述した傾変異の弱点とは, 傾変異はいつでも可能とは限らない点である.

その弱点を解消するために, 次のような 2 つの一般化が導入された.

- (三角圏における傾対象の一般化) **準傾対象**の変異 (**準傾変異**) [AI]
- (加群圏における傾加群の一般化) **台 τ 傾加群**の変異 (**τ 傾変異**) [AIR]

特筆すべき点は, 準傾変異および τ 傾変異はいつでも可能という点である.

$$\boxed{\text{加群圏における拡張}}$$

$$\begin{tikzcd} \text{射影生成加群} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \text{傾加群} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, phantom, "\cap|"] & \text{台}\,\tau\,\text{傾加群} \arrow[d, hook, "{[AIR]}"'] \\ & \text{傾複体} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \text{準傾複体} \end{tikzcd} \qquad \boxed{\text{変異が可能}}$$

$$\boxed{\text{導来圏への拡張}}$$

ここでは, 導来同値の観点から, 準傾対象とその変異に注目する: 準傾対象によっても導来同値が導かれる [K]. このとき, 一つでも準傾対象を見つけることができれば, 準傾変異によって, 無数に多くの準傾対象が得られる. そこで, 一つの大きな問題は, 準傾対象の分類を行うことである. この「分類問題」に対して, ここでは次の疑問について考えていく.

疑問 1. 一つの準傾対象から変異を繰り返すことで, すべての準傾対象を構成できるか?

この疑問が肯定的に解決されれば, 一つの準傾対象と準傾変異の繰り返しによってすべての準傾対象を理解でき, この意味で "分類できた" といえる.

一方, 考える三角圏によっては準傾対象が存在しないことがある. 例えば, 大域次元が無限の有限次元多元環上の有界導来圏や半単純でない自己入射的多元環の安定加群圏は, 準傾対象を持たない. 後者の例は, Buchweitz-Rickard の定理 [B, R2] より, 有界導来圏の完全導来圏による Verdier 商 (**特異圏**) と見ることができる. そのため, これらの例は次の疑問を引き起こす.

疑問 2. 特異圏はいつでも準傾対象を持たないのではないか?

特に, 自己入射的多元環 (右自己入射次元 0) の高次元版として, 右自己入射次元有限な多元環上の特異圏について議論する.

記号. 以下, Λ を代数閉体 k 上有限次元多元環とし, 次のような圏を考える.

- $\operatorname{mod}\Lambda$: 有限生成 (右) Λ 加群からなる圏 (**加群圏**)
- $\operatorname{proj}\Lambda$: 射影加群からなる $\operatorname{mod}\Lambda$ の充満部分圏
- $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda)$: 加群圏 $\operatorname{mod}\Lambda$ の有界導来圏
- $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$: 射影加群の圏 $\operatorname{proj}\Lambda$ の有界ホモトピー圏 (**完全導来圏**)

一般に, $\mathcal{T}$ を次の条件を満たす三角圏とする: - Krull-Schmidt - k 線型 - Hom 有限.

1. 準傾変異

ここでは, 与えられた一つの準傾対象から, 別の準傾対象を作り出す方法 (**準傾変異**, *silting mutation*) について解説する.

まずは, 準傾対象の定義から思い出そう.

定義 1.1. 三角圏 $\mathcal{T}$ の対象 T が**前準傾** (*presilting*) であるとは, 任意の整数 $i>0$ に対して, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[i])=0$ を満たすときにいう. さらに加えて, $\mathcal{T}=\mathsf{thick}\,T$ となるとき, T を**準傾対象** (*silting object*) とよぶ. ここで, $\mathsf{thick}\,T$ は $\mathcal{T}$ の T を含む最小の thick 部分圏を表す.

$\mathcal{T}$ の基本的な準傾対象の同型類の集合を $\mathsf{silt}\,\mathcal{T}$ と書くことにする.

例えば, 環 Λ は完全導来圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ の準傾対象であり, そのシフト $\Lambda[i]$ も準傾である.

逆に, 準傾対象を持つ (ある程度の) 三角圏は, 完全導来圏しかないことが知られている [R1, K]. つまり, 次の圏同値が得られる.

定理 1.2 (Rickard, Keller)**.** $\mathcal{T}$ を代数的な三角圏, すなわち, $\mathcal{T}$ はある Frobenius 圏の安定圏として得られるとする. このとき, $\mathcal{T}$ が準傾対象 T を持つならば, $\mathcal{T}$ は T の導来自己準同型多元環上の完全複体の圏と三角圏同値になる.

準傾対象に関する基本的な性質を見てみよう [AI].

命題 1.3. (1) 準傾対象の非同型な直既約因子の個数は, 準傾対象の取り方に依存しない ($\mathcal{T}$ のみで決まる).
(2) $\mathcal{T}$ が準傾対象を持つならば, 任意の対象 X, Y は十分大きな $\ell \gg 0$ で, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[\ell])=0$ となる.

もう一つ簡単な例を観察する.

例 1.4. Λ をクイバー $1 \to 2$ で与えられる多元環とする: これは 2 次の上三角行列環と同型である. このとき, $\mathcal{T}:=\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)\ (=\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda))$ を考える. Happel の結果 [H] から, $\mathcal{T}$ は Auslander-Reiten クイバーを持つことが知られており, 圏構造が次のように完全に理解できる.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[dr] & & 0 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dr] & \\
& -1 \arrow[ur] & & 1 \arrow[ur] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

整数は直既約対象, 矢は対象の間の既約射を表し, 2 本の矢を通すと零になる. さらに, $i<j$ のとき, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(j, i)=0$ が成り立つ. また, $\mathcal{T}$ の中でのシフトは 3 を足すことで与えられる ($i[1]=i+3$). 以上から, 簡単な議論により次が得られる.

$$\mathsf{silt}\,\mathcal{T}=\{i \oplus j \mid 0<j-i \equiv 1 \pmod 3\}$$

次に, 準傾変異を導入する [AI].

定義-定理 1.5 (**準傾変異**)**.** T を $\mathcal{T}$ の準傾対象とし, 直和因子 X を取る: $T=X \oplus M$. 次の 3 ステップにより, 新しい対象を定義する.

ステップ 1: X の (極小な) 左 $\mathsf{add}\, M$ 近似 $f : X \to M'$ を取る ($\mathsf{add}\, M$ は M の加法閉包). つまり, M' は $\mathsf{add}\, M$ に属し, 任意の射 $g : X \to M$ は f を通過する. $\mathcal{T}$ は Hom 有限なので, これはいつでも可能である.

ステップ 2: f を三角に拡張する: $X \xrightarrow{f} M' \to Y \to X[1]$.

ステップ 3: T の直和因子 X を Y と取り替える: $Y \oplus M$.

このとき, $Y \oplus M$ はまた, 準傾対象になる. そこでこれを, $\mu_X^-(T)$ と書き, T の X に関する**左変異**と呼ぶ. 双対的に, **右変異** $\mu_X^+(T)$ を定義する. 左変異および右変異をまとめて, 変異と呼ぶことにする. また, X が直既約のとき, その変異を**既約**な変異という.

注意 1.6. (1) 変異は近似の取り方に依らない.

上の設定で,

(2) $X = 0$ および $X = T$ でも変異可能である: $\mu_0^\pm(T) \simeq T$, $\mu_T^\pm(T) \simeq T[\mp 1]$ (複号同順).
(3) T が基本的のとき, 近似を極小に取れば, 変異も基本的になる.
(4) $\mu_Y^+(\mu_X^-(T)) \simeq T$ が成り立つ. (双対版も成り立つ.)

準傾変異によって, 一つでも準傾対象を見つけることができれば, 無数に多くの準傾対象を得ることができる. よって, 完全導来圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ は無数に多くの準傾対象を持つことがわかる.

例 1.7. 例 1.4 を見てみよう. 準傾対象 $T = i \oplus j$ $(i < j)$ の既約左変異は次の 3 種類がある:

(1) $\mu_j^-(T) \simeq i \oplus (j+3)$

(2) $\mu_i^-(T) \simeq \begin{cases} (j+1) \oplus j & (j = i+1) \\ (i+3) \oplus j & (j \neq i+1) \end{cases}$

ここから, 疑問 1 について考えていく. 特に, 既約な変異に絞り, 次の概念を導入する.

定義 1.8. $\mathcal{T}$ にある準傾対象 T が存在し, すべての準傾対象が T の既約な変異の繰り返しによって得られるとき, $\mathcal{T}$ は**準傾連結** (*silting-connected*) であるという.

例 1.9. 例 1.7 で見たように, この多元環における準傾変異は, (1) "遠ざける" (2-1) "ジグザグ" (2-2) "近づける" の 3 種類である. そのため, 準傾対象の形 (例 1.4) を見れば, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ が準傾連結であることがわかる. さらに, 任意の 2 つの準傾対象は, 適当にどちらか一つを選べば, 既約左変異のみの繰り返しで, もう片方に届く.

次のような準傾連結な完全導来圏を持つ多元環が知られている [AI, A, AAC, AM, BPP].

定理 1.10. 多元環 Λ が次のいずれかのとき, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ は準傾連結である.

(1) 局所多元環
(2) 区分的遺伝的多元環
(3) 有限表現型対称多元環
(4) 奇数型の Brauer グラフ多元環
(5) Dynkin 型前射影対称多元環
(6) 有限大域次元の導来離散多元環

注意 1.11. 上の定理において, (2) の場合を除いて, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ は特に, **準傾離散** (*silting-discrete*) になっている: 準傾離散とは, 準傾対象の個数がある意味で有限になっているときにいい, 準傾離散ならば準傾連結であることが従う (詳しくは [A] を参照). (2) ではさらに, Λ が有限表現型のとき, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ は準傾離散になる.

傾離散 (*tilting-discrete*) を導入して, (3) および (5) の対称性の仮定を自己入射的に置き換えることができる. つまり, 有限表現型自己入射的多元環および Dynkin 型前射影多元環 (この場合, 自動的に自己入射的になる) の完全導来圏は傾離散になる [CKL, AM].

準傾連結であっても, 一つの準傾対象から別の準傾対象へ, 既約左変異のみの繰り返し, もしくは, 既約右変異のみの繰り返しで到達するとは限らない.

例 1.12. Λ を Kronecker 多元環とする: つまり, クイバー $1 \rightrightarrows 2$ で与えられる多元環. このとき, Λ は遺伝的である. さらに, $\mathcal{T} := \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ $(= \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda))$ の Auslander-Reiten クイバーは次のような連結成分を無限個持ち, それらはシフトによって移り合う (cf. [ASS, H]):

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & 0_n \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & 2_n \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
& -1_n \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & 1_n \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$(i_n[1] = i_{n+1})$ また, 準傾対象は例 1.4 と似たような表示をすることができ, 準傾変異も例 1.7 と同様に, (1) “遠ざける” (2-1) “ジグザグ” (2-2) “近づける” の 3 種類がある.

定理 1.10 より, $\mathcal{T}$ は準傾連結であるが, 既約左変異のみの繰り返しでは得られないものがあることを見てみよう. $T := 0_0 \oplus 1_0$, $U := -1_1 \oplus 0_1$ とおくと, U は T の既約左変異のみの繰り返しでは得られない. 実際, T の “ジグザグ” の既約左変異のみでは 0 番目の連結成分から出ることはできず, また, 一度 “遠ざける” 既約左変異を使ってしまうと, U を飛び越えてしまい, 既約左変異では U へ戻ることができない. 一方, 既約右変異を用いれば T と U は繋がっている.

以上のことを, 既約左変異を矢で表すことにして視覚的に観察してみよう: $T, U \in \mathsf{silt}\,\mathcal{T}$ に対して, $T \to U$ は U が T の既約左変異であることを意味する.

$$
\begin{tikzcd}
& & \boxed{0_0 \oplus 1_0} \arrow[dl] \arrow[dddr] & \\
\begin{matrix}\text{すべて 0 番目の}\\ \text{連結成分に属す.}\end{matrix} & 1_0 \oplus 2_0 \arrow[d] & & \\
& 2_0 \oplus 3_0 \arrow[d] & & \\
& \vdots \arrow[d] & & 0_0 \oplus 1_1 \arrow[dddl] \\
& -2_1 \oplus -1_1 \arrow[d] & & \\
\begin{matrix}\text{すべて 1 番目の}\\ \text{連結成分に属す.}\end{matrix} & \boxed{-1_1 \oplus 0_1} \arrow[dr] & & \\
& & 0_1 \oplus 1_1 &
\end{tikzcd}
$$

この節の最後に, 完全導来圏が準傾連結でない多元環の例を挙げる [AGI].

例 1.13. Λ をクイバー $1 \mathrel{\substack{\rightrightarrows \\ \leftleftarrows}} 2$ で与えられる多元環で, ルビー列

$$\Lambda = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 2 \\ & 1 & \end{array} \bigoplus \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 1 \\ & 2 & \end{array}$$

を持つものとする. これは, 2 つの単純加群を持つルビー列の長さが 2 の自己入射的中山多元環の自明拡大, および, グラフ $\circ =\!=\!= \circ$ の Brauer グラフ多元環と同型である. このとき, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ が準傾連結でないことが, 線型代数的手法により観察できる. 詳細は省くが, 各準傾対象を行列 (**g 行列**) と対応させ, その固有ベクトルと固有値を計算する. そのとき, Λ の既約な変異の繰り返しで得られる準傾対象の g 行列と $\Lambda[1]$ の g 行列の固有値が異なり, Λ と $\Lambda[1]$ が既約な変異の繰り返しでは繋がらないことがわかる. 一方で, $\Lambda[1] \simeq \mu_\Lambda^-(\Lambda)$ となり, 疑問 1 の真偽はわかっていない.

注意 1.14. 2 つの単純加群を持つルビー列の長さが 2 の自己入射的中山多元環は, 準傾連結 (準傾離散) な完全導来圏を持つため, 上の例は自明拡大で準傾連結 (準傾離散) が壊れる例となっている.

2. 準傾対象の存在・非存在

前節では, 一つでも準傾対象を見つけることができれば, 無数に多くの準傾対象を得られることを見た. この節では, 「準傾対象はいつでも存在するか?」について考える.

$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ の $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ による Verdier 商 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,\Lambda)/\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ を Λ の**特異圏**といい, $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\Lambda)$ で表す.

次の圏同値がよく知られている [B, R2].

定理 2.1 (Buchweitz, Rickard)**.** Λ が岩永-Gorenstein 多元環, すなわち, 左および右の自己入射次元が有限ならば, 三角圏同値 $\mathsf{D}_{\mathsf{sg}}(\Lambda) \simeq \underline{\mathsf{CM}}\,\Lambda$ が得られる. ここで,

$$\mathsf{CM}\,\Lambda := \{M \in \mathrm{mod}\,\Lambda \mid \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = 0 \ (\text{任意の } i > 0)\}$$

であり, $\underline{\mathsf{CM}}\,\Lambda$ はその安定圏である.

前節において, 完全導来圏が無限個の準傾対象を含むことがわかったが, 有界導来圏や特異圏ではどうか?

次のことが知られている [AI].

命題 2.2. Λ は半単純でないとする.

(1) $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ が準傾対象を持つことと Λ が有限大域次元を持つことは同値である. 特に, Λ の大域次元が無限ならば, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ は準傾対象を含まない.
(2) Λ が自己入射的ならば, 安定加群圏 $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ は準傾対象を持たない. よって, Buchweitz-Rickard の定理より, Λ の特異圏に準傾対象は存在しない.

ここで疑問 2 を考える. 次の準傾退化 (silting reduction) が重要な役割を果たす [AI, IY].

定理 2.3 (**準傾退化**)**.** T を $\mathcal{T}$ の前準傾対象とし, 次を満たすと仮定する: 任意の $X \in \mathcal{T}$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, X[\ell]) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[\ell], T) \ (\ell \gg 0).$$

このとき, 標準的な関手 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\,\mathsf{thick}\,T$ は次の集合の間の全単射を引き起こす:

$$\mathsf{silt}_T\,\mathcal{T} \xrightarrow{1-1} \mathsf{silt}\,(\mathcal{T}/\,\mathsf{thick}\,T)\,.$$

ここで, $\mathsf{silt}_T\,\mathcal{T}$ は次のような $\mathsf{silt}\,\mathcal{T}$ の部分集合である:

$$\mathsf{silt}_T\,\mathcal{T} := \{U \in \mathsf{silt}\,\mathcal{T} \mid U \text{ は } T \text{ を直和因子に持つ}\}.$$

例えば, $\mathcal{T}$ が準傾対象を持てば, 任意の前準傾対象は上の定理の仮定を満たし (命題 1.3), 準傾退化を適用することができる.

特異圏における準傾対象の存在・非存在を見るためには, 準傾退化を $\mathcal{T} = \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ および $T = \Lambda$ として適用すればよい.

次の結果が得られる.

定理 2.4. 半単純でない右自己入射次元有限な多元環の特異圏は, 準傾対象を含まない.

これは, 例 2.2 (2) の一般化を与えている.

また, Buchweitz-Rickard の定理より, 定理 2.4 はすぐに次の系を導く.

系 2.5. Λ を半単純でない岩永-Gorenstein 多元環とする. このとき, $\underline{\mathsf{CM}}\,\Lambda$ は準傾対象を持たない.

注意 2.6. 次数付き多元環と次数付き加群を考えると状況が変わる. 次のことが知られている [Y].

定理. $\Lambda := \bigoplus_{i\geq 0} \Lambda_i$ を非負整数次数付き自己入射的多元環とし, Λ_0 は大域次元有限と仮定する. このとき, 次数付き加群の安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}}\,\Lambda$ は準傾対象を持つ.

References

[AAC] T. Adachi, T. Aihara and A. Chan, Classification of two-term tilting complexes over Brauer graph algebras. To appear in Math. Z.

[AIR] T. Adachi, O. Iyama and I. Reiten, τ-tilting theory. *Compos. Math.* **150**, no. 3, 415–452 (2014).

[A] T. Aihara, Tilting-connected symmetric algebras. *Algebr. Represent. Theory* **16** (2013), no. 3, 873–894.

[AGI] T. Aihara, J. Grant and O. Iyama, private communication.

[AI] T. Aihara and O. Iyama, Silting mutation in triangulated categories. *J. Lond. Math. Soc. (2)* **85** (2012), no. 3, 633–668.

[AM] T. Aihara and Y. Mizuno, Classifying tilting complexes over preprojective algebras of Dynkin type. *Algebra Number Theory* **11** (2017), no. 6, 1287–1315.

[ASS] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. **1**. London Mathematical Society Student Texts **65**. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2006.

[APR] M. Auslander, M. I. Platzech and I. Reiten, Coxeter functors without diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.* **250** (1979) 1–46.

[BB] S. Brenner and M.C.R. Butler, Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, pp.103-169, Lecture Notes in Math., **832**, Springer, Berlin-New York, 1980.

[BGP] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and V. A. Pnomarev, Coxeter functors, and Gabriel's theorem. *Uspehi Mat. Nauk* **28** (1973), no. 2, 19–33.

[BPP] N. Broomhead, D. Pauksztello and D. Ploog, Discrete derived categories II: the silting pairs CW complex and the stability manifold. *J. Lond. Math. Soc. (2)* **93** (2016), no. 2, 273–300.

[B] R.-O. Buchweitz, Maximal Cohen-Macaulay modules and Tata-Cohomology over Gorenstien rings. Preprint (1986), `http://hdl.handle.net/1807/16682`.

[CKL] A. Chan, S. Koenig and Y. Liu, Simple-minded systems, configurations and mutations for representation-finite self-injective algebras. *J. Pure Appl. Algebra* **219** (2015), no. 6, 1940–1961.

[H] D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, **119**. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1988.

[IY] O. Iyama and D. Yang, Silting reduction and Calabi–Yau reduction of triangulated categories. Preprint (2014), arXiv: 1408.2678.

[K] B. Keller, Deriving DG categories. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **27** (1994), no. 1, 63–102.

[R1] J. Rickard, Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc. (2)* **39** (1989), no. 3, 436–456.

[R2] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence. *J. Pure Appl. Algebra* **61** (1989), no. 3, 303–317.

[RS] C. Riedtmann, A. Schofield, On a simplicial complex associated with tilting modules. *Comment. Math. Helv.* **66**, no. 1, 70–78 (1991).

[Y] K. Yamaura, Realizing stable categories as derived categories. *Adv. Math.* **248** (2013), 784–819.

Department of Mathematics, Tokyo Gakugei University, 4-1-1 Nukuikita-machi, Koganei, Tokyo 184-8501, Japan

E-mail address: aihara@u-gakugei.ac.jp

TENSOR STRUCTURES OF RIGHT BOUNDED DERIVED CATEGORIES OF COMMUTATIVE RINGS AND BALMER SPECTRA

RYO TAKAHASHI

Introduction

This article makes a report of the talk given by the author at the 62nd Algebra Symposium, which was held at Osaka University in September, 2017. The talk is based on joint work with Hiroki Matsui. The complete proofs of the results in this article that are due to Matsui and the author are all stated in [10], together with more detailed information and other related results.

Tensor triangular geometry is a theory established by Balmer [2] at the beginning of the current century. Let $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \otimes, \mathbb{1})$ be an (essentially small) *tensor triangulated category*, that is, a triangulated category $\mathcal{T}$ equipped with symmetric tensor product $\otimes$ and unit object $\mathbb{1}$. A (thick tensor) *ideal* of $\mathcal{T}$ is defined to be a thick subcategory of $\mathcal{T}$ which is closed under the action of $\mathcal{T}$ by $\otimes$. A proper ideal $\mathcal{P}$ of $\mathcal{T}$ is called *prime* if it satisfies:

$$X \otimes Y \in \mathcal{P} \implies X \in \mathcal{P} \text{ or } Y \in \mathcal{P}.$$

Prime ideals of tensor triangulated categories turn out to behave similarly to prime ideals of commutative rings; both share a lot of analogous properties. Among other things, the *Balmer spectrum* $\mathsf{Spc}\,\mathcal{T}$ of $\mathcal{T}$, which is defined as the set of prime ideals of $\mathcal{T}$, has the structure of a topological space, corresponding to the fact that the Zariski spectrum $\operatorname{Spec} R$ of a commutative ring R has a Zariski topology. Tensor triangular geometry studies Balmer spectra and develops commutative-algebraic and algebro-geometric observations. It is related to a lot of branches of mathematics, including commutative algebra, algebraic geometry, stable homotopy theory, modular representation theory, motivic theory, noncommutative topology and symplectic geometry. As Balmer [4] addressed an invited lecture at the International Congress of Mathematicians (ICM) in 2010, tensor triangular geometry has been attracting a great deal of attention.

Let R be a commutative noetherian ring. Let $\mathsf{D}^-(R)$ be the right bounded derived category of finitely generated R-modules. It is then a routine to verify that

$$(\mathsf{D}^-(R), \otimes_R^{\mathbf{L}}, R)$$

is a tensor triangulated category. The main topics of the talk at the symposium by the author concern the structure of the ideals of $\mathsf{D}^-(R)$ and the structure of the Balmer spectrum $\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^-(R)$ of $\mathsf{D}^-(R)$.

1. Tensor triangulated categories and Balmer spectra

In this section, we introduce some of Balmer's works on general tensor triangulated categories. All the materials in this section are taken from [2, 3, 4]. First of all, we recall the definition of a tensor triangulated category.

Definition 1.1. A *tensor triangulated category* $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbb{1})$ is a triangulated category $\mathcal{T}$ equipped with symmetric tensor product $\otimes$ and unit object $\mathbb{1}$. To be more precise, $\mathcal{T}$ is both a triangulated category and a symmetric monoidal category such that the triangulated and symmetric monoidal structures are compatible.

Here are several examples of a tensor triangulated category. Note that all of them are essentially small.

Example 1.2.

(1) Let X be a (quasi-compact and quasi-separated) scheme. Denote by $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(X)$ the derived category of perfect complexes of $\mathcal{O}_X$-modules. Then $(\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(X), \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{O}_X}, \mathcal{O}_X)$ is a tensor triangulated category.
(2) Let R be a commutative ring. Denote by $\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\, R)$ the homotopy category of bounded complexes of finitely generated projective R-modules. Then $(\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\, R), \otimes_R, R)$ is a tensor triangulated category. This is nothing but the affine case of (1).
(3) Let k be a field of positive characteristic, and G a finite group (scheme over k). Denote by $\underline{\mathsf{mod}}\, kG$ the stable category of finitely generated kG-modules. Then $(\underline{\mathsf{mod}}\, kG, \otimes_k, k)$ is a tensor triangulated category.
(4) Let k, G be as in (3). Denote by $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\, kG)$ the derived category of bounded complexes of finitely generated kG-modules. Then $(\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\, kG), \otimes_k, k)$ is a tensor triangulated category.
(5) Let R be a commutative noetherian ring. Denote by $\mathsf{D}^{-}(\mathsf{mod}\, R)$ the derived category of homologically right bounded complexes of finitely generated R-modules. Then $(\mathsf{D}^{-}(\mathsf{mod}\, R), \otimes^{\mathbf{L}}_R, R)$ is a tensor triangulated category. This tensor triangulated category plays a main role in this article.

Next, we give the definitions of a (thick tensor) ideal and a Balmer spectrum. We recall here that a *thick* subcategory of a triangulated category is by definition a nonempty full subcategory which is closed under direct summands, shifts and cones.

Definition 1.3. Let $\mathcal{T}$ be an essentially small tensor triangulated category.

(1) A thick subcategory $\mathcal{I}$ of $\mathcal{T}$ is a *(tensor) ideal* if it satisfies the following implication.
$$a \in \mathcal{T},\ x \in \mathcal{I} \implies a \otimes x \in \mathcal{I}.$$
This is an analogue of an ideal of a commutative ring.
(2) An ideal $\mathcal{I}$ of $\mathcal{T}$ is *radical* if $\mathcal{I} = \sqrt{\mathcal{I}}$, where
$$\sqrt{\mathcal{I}} := \{a \in \mathcal{T} \mid \underbrace{a \otimes \cdots \otimes a}_{n} \in \mathcal{I} \text{ for some } n > 0\}$$
is the *radical* of $\mathcal{I}$. These are analogues of a radical ideal and the radical of an ideal of a commutative ring, respectively.
(3) A proper ideal $\mathcal{P}$ of $\mathcal{T}$ is *prime* if it satisfies the following implication.
$$x \otimes y \in \mathcal{P} \implies x \in \mathcal{P} \text{ or } y \in \mathcal{P}.$$
This is an analogue of a prime ideal of a commutative ring.
(4) The *Balmer spectrum* of $\mathcal{T}$ is defined by:
$$\mathsf{Spc}\, \mathcal{T} = \{\text{Prime ideals of } \mathcal{T}\}.$$
This corresponds to the Zariski spectrum $\operatorname{Spec} R$ of a commutative ring R.

(5) The *Balmer support* of an object x of $\mathcal{T}$ is defined by:

$$\mathtt{Spp}(x) = \{\mathcal{P} \in \mathtt{Spc}\,\mathcal{T} \mid x \notin \mathcal{P}\}.$$

This corresponds to the subset $\mathrm{V}(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \in \mathfrak{p}\}$ of $\operatorname{Spec} R$ for an element f of R. Note that the containment is opposite.

(6) We put

$$\mathtt{U}(x) := \mathtt{Spp}(x)^{\mathtt{C}} = \{\mathcal{P} \in \mathtt{Spc}\,\mathcal{T} \mid x \in \mathcal{P}\}.$$

This corresponds to the subset $\mathrm{D}(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ of $\operatorname{Spec} R$.

Throughout the rest of this article, we assume that all tensor triangulated categories are essentially small, so that we can always define their Balmer spectra.

We make the definitions of a maximal ideal and a minimal prime of a tensor triangulated category.

Definition 1.4. Let $\mathcal{T}$ be a tensor triangulated category.

(1) An ideal of $\mathcal{T}$ is said to be a *maximal ideal* of $\mathcal{T}$ if it is a proper ideal of $\mathcal{T}$ which is maximal with respect to the inclusion relation. We denote by $\mathtt{Mx}\,\mathcal{T}$ the set of maximal ideals of $\mathcal{T}$.
(2) An ideal of $\mathcal{T}$ is said to be a *minimal prime* of $\mathcal{T}$ if it is a prime ideal of $\mathcal{T}$ which is minimal with respect to the inclusion relation. We denote by $\mathtt{Mn}\,\mathcal{T}$ the set of minimal primes of $\mathcal{T}$.

Each Balmer spectrum has the structure of a topological space such that the Balmer supports are closed subsets. We state this here together with several fundamental properties which will often be used later.

Proposition 1.5 ([2])**.** *Let $\mathcal{T}$ be a tensor triangulated category.*

(1) $\mathtt{Spc}\,\mathcal{T}$ *is a topological space with an open basis* $\{\mathtt{U}(x)\}_{x\in\mathcal{T}}$.
(2) *Every proper ideal of $\mathcal{T}$ is contained in a maximal ideal.*
(3) *Maximal ideals of $\mathcal{T}$ are prime.*
(4) *Every prime ideal of $\mathcal{T}$ contains a minimal prime.*
(5) *For each $\mathcal{P} \in \mathtt{Spc}\,\mathcal{T}$ the closure $\overline{\{\mathcal{P}\}}$ of $\{\mathcal{P}\}$ is irreducible, and described as follows.*

$$\overline{\{\mathcal{P}\}} = \{\mathcal{Q} \in \mathtt{Spc}\,\mathcal{T} \mid \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}\}. \tag{1.5.1}$$

Conversely, any nonempty irreducible closed subset of $\mathtt{Spc}\,\mathcal{T}$ *has this form.*

(6) *The open subset* $\mathtt{U}(x)$ *of* $\mathtt{Spc}\,\mathcal{T}$ *is quasi-compact for each $x \in \mathcal{T}$. Conversely, any nonempty quasi-compact open subset of* $\mathtt{Spc}\,\mathcal{T}$ *has this form.*
(7) *For an ideal $\mathcal{I}$ of $\mathcal{T}$ one has*

$$\sqrt{\mathcal{I}} = \bigcap_{\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\in\mathtt{Spc}\,\mathcal{T}} \mathcal{P}.$$

The equality (1.5.1) corresponds to the equality

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}\}$$

of subsets of $\operatorname{Spec} R$ for a commutative ring R and a prime ideal $\mathfrak{p}$ of R. Again, the containment is opposite.

Thus, ideals of tensor triangulated categories have a lot of similar properties to ideals of commutative rings.

For a full subcategory $\mathcal{X}$ of $\mathcal{T}$ and a subset S of $\operatorname{Spc}\mathcal{T}$, set

$$\operatorname{Spp}\mathcal{X} = \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \operatorname{Spp}(x),$$
$$\operatorname{Spp}^{-1} S = \{x \in \mathcal{T} \mid \operatorname{Spp}(x) \in S\}.$$

The following theorem is a celebrated result due to Balmer [2, Theorem 4.10].

Theorem 1.6 (Balmer (2005))**.** *Let $\mathcal{T}$ be a tensor triangulated category. Then there is a one-to-one correspondence*

$$\{\textit{Radical ideals of } \mathcal{T}\} \underset{\operatorname{Spp}^{-1}}{\overset{\operatorname{Spp}}{\underset{1-1}{\rightleftarrows}}} \{\textit{Thomason subsets of } \operatorname{Spc}\mathcal{T}\}.$$

Here, a subset A of a topological space X is said to be *Thomason* if one can write

$$A = \bigcup_{i\in I} B_i$$

for some family $\{B_i\}_{i\in I}$ of subsets of X such that $B_i^{\complement} = X \setminus B_i$ is a quasi-compact open subset. A subset C of X is said to be *specialization-closed* if it satisfies the implication

$$x \in C \implies \overline{\{x\}} \subseteq C.$$

We notice that this condition is equivalent to saying that C is a (possibly infinite) union of closed subsets. Therefore, a Thomason subset is always specialization-closed. The name of a Thomason subset comes from the fact that for a quasi-compact quasi-separated scheme X, Thomason [13] gives a complete classification of the ideals of $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(X)$ in terms of the Thomason subsets of the underlying topological space of X.

Theorem 1.7 says that for a given tensor triangulated category $\mathcal{T}$ the understanding of the structure of the Balmer spectrum of $\mathcal{T}$ provides a complete classification of the radical ideals of $\mathcal{T}$. Since each ideal of $\mathcal{T}$ is the kernel of some tensor triangulated functor from $\mathcal{T}$ and vice versa, classifying ideals of $\mathcal{T}$ leads us to the understanding of the structure of tensor triangulated functors from $\mathcal{T}$. In this sense, the above theorem is quite meaningful.

For each tensor triangulated category $\mathcal{T}$ one can define the structure sheaf $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ on $\mathcal{T}$, and then the Balmer spectrum $\operatorname{Spc}\mathcal{T}$ has the structure of a locally ringed space [4, Constructions 24 and 29]. More precisely, for each quasi-compact open subset U of $\operatorname{Spc}\mathcal{T}$ we define

$$\mathcal{T}(U) := (\mathcal{T}/\operatorname{Spp}^{-1}(U^{\complement}))^{\natural},$$

where $(-)^{\natural}$ stands for the idempotent completion. Then it holds that

$$\operatorname{Spc}\mathcal{T}(U) \cong U.$$

The assignment $U \mapsto \operatorname{End}_{\mathcal{T}(U)}(\mathbb{1})$ induces a presheaf of commutative rings, and we define the structure sheaf $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ on $\mathcal{T}$ as its sheafification. Thus we obtain a locally ringed space

$$\operatorname{Spec}\mathcal{T} := (\operatorname{Spc}\mathcal{T}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}}).$$

The following theorem due to Balmer is also well-known. We refer the reader to [2, Theorem 6.3] and [4, Theorem 57]; see also [3, Proposition 6.11].

Theorem 1.7 (Balmer (2005, 2010))**.**

(1) *Let X be a quasi-compact quasi-separated scheme. Then there is an isomorphism*

$$\operatorname{Spec} \mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(X) \cong X$$

of locally ringed spaces.

(2) *Let k be a field of positive characteristic, and G a finite group (scheme over k). Then there are isomorphisms*

$$\operatorname{Spec} \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\, kG) \cong \operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} \mathsf{H}^{\bullet}(G,k),$$
$$\operatorname{Spec}(\underline{\mathsf{mod}}\, kG) \cong \operatorname{Proj} \mathsf{H}^{\bullet}(G,k)$$

of locally ringed spaces.

Here $\mathsf{H}^{\bullet}(G,k)$ stands for the group cohomology ring. For a graded-commutative ring A, we denote by $\operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} A$ the set of homogeneous prime ideals of A. For a commutative nonnegatively graded ring R we denote by $\operatorname{Proj} R$ the set of homogeneous prime ideals of R that do not contain $R_+ = \bigoplus_{i>0} R_i$. Note that $\operatorname{Proj} \mathsf{H}^{\bullet}(G,k)$ is nothing but the (projective) support variety $\mathcal{V}_G(k)$.

The isomorphism in Theorem 1.7(1) says that a scheme X is reconstructed from its derived category $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(X)$; see also [1]. This is actually because of the tensor structure of $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(X)$. Indeed, only from the triangulated structure of $\mathsf{D}^{\mathsf{perf}}(X)$ the original scheme X cannot be reconstructed, since there are a lot of derived equivalences of nonsingular algebraic varieties (e.g. the Fourier–Mukai transformation).

The second isomorphism in Theorem 1.7(2) is obtained by restricting the first one. Key roles in the proof of Theorem 1.7 are played by the classification theorems of ideals due to Hopkins [9], Neeman [11], Thomason [13], Benson–Carlson–Rickard [5] and Friedlander–Pevtsova [8]; see also the works of Benson–Iyengar–Krause [6] and Benson–Iyengar–Krause–Pevtsova [7]. The Balmer spectra are described for some other tensor triangulated categories by several authors; details can be found in [4].

Let $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbb{1})$ be a tensor triangulated category. Balmer [3] constructs a continuous map

$$\rho^{\bullet}_{\mathcal{T}} : \mathsf{Spc}\, \mathcal{T} \to \operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} \mathrm{R}^{\bullet}_{\mathcal{T}},$$

which is given by

$$\rho^{\bullet}_{\mathcal{T}}(\mathcal{P}) := (f \in \mathrm{R}^{\bullet}_{\mathcal{T}} \mid \operatorname{cone}(f) \notin \mathcal{P}).$$

Here,

$$\mathrm{R}^{\bullet}_{\mathcal{T}} = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}, \Sigma^{\bullet}\mathbb{1})$$

is a graded-commutative ring.

It is seen that for $\mathcal{T} = \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\, R)$ with R being a commutative ring we have $\mathrm{R}^{\bullet}_{\mathcal{T}} = R$, and it is also observed that for $\mathcal{T} = \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{mod}\, kG)$ with k being a field k of positive characteristic and G being a finite group (scheme over k) we have $\mathrm{R}^{\bullet}_{\mathcal{T}} = \mathsf{H}^{\bullet}(G,k)$. It is shown by Balmer [3, Propositions 8.1 and 8.5] that the isomorphism in Theorem 1.7(1) in the affine case, and the first isomorphism in Theorem 1.7(2) are given by the map $\rho^{\bullet}_{\mathcal{T}}$ given above. Thus the following conjecture has been presented by Balmer [4, Conjecture 72] in his invited lecture at the International Congress of Mathematicians (ICM), which was held in 2010 at Hyderabad.

Conjecture 1.8 (Balmer, ICM 2010)**.** The map $\rho^{\bullet}_{\mathcal{T}}$ is (locally) injective if $\mathcal{T}$ is algebraic as a triangulated category.

Let $f : X \to Y$ be a continuous map of topological spaces. We say that f is *locally injective* at a point $x \in X$ if there exists a neighborhood N of x such that the restriction $f|_N$ of f on N is injective. The map f is called *locally injective* if for all points $x \in X$ it is locally injective at x. Also, recall that a triangulated category is called *algebraic* if it is described as the stable category of a Frobenius exact category.

It is known that the conjecture does not hold for a non-algebraic triangulated category; indeed, if $\mathcal{T}$ is the Spanier–Whitehead stable homotopy category $\mathrm{SH}^{\mathrm{fin}}$ of finite pointed CW-complexes, then $\rho^{\bullet}_{\mathcal{T}}$ is not injective; see [4, Theorem 51]. On the other hand, as we have seen above, the conjecture does hold for $\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\operatorname{proj} R)$ and $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\operatorname{mod} kG)$.

Now we introduce some notation, which will be used throughout the rest of this article.

Notation 1.9.

(1) Let R be a commutative noetherian ring.

(2) We denote by $\operatorname{Spec} R$ the *Zariski spectrum* of R, namely, the set of prime ideals of R equipped with the Zariski topology.

(3) For an ideal I of R we define $\mathrm{V}(I)$ the set of prime ideals of R containing I, and put $\mathrm{D}(I) = \mathrm{V}(I)^{\complement} = \operatorname{Spec} R \setminus \mathrm{V}(I)$.

(4) The set of maximal ideals (respectively, minimal primes) of R is denoted by $\operatorname{Max} R$ (respectively, $\operatorname{Min} R$).

(5) We denote by $\operatorname{mod} R$ the category of finitely generated R-modules, and by $\operatorname{proj} R$ the full subcategory of $\operatorname{mod} R$ consisting of finitely generated projective R-modules.

(6) We denote by $\mathsf{D}^*(R)$ the derived category $\mathsf{D}^*(\operatorname{mod} R)$ of the abelian category $\operatorname{mod} R$, and by $\mathsf{K}^*(R)$ the homotopy category $\mathsf{K}^*(\operatorname{proj} R)$ of the additive category $\operatorname{proj} R$, where $* \in \{-, \mathrm{b}\}$. There are obvious inclusions
$$\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R) \subseteq \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(R) \subseteq \mathsf{D}^{-}(R).$$
Taking projective resolutions induces an equivalence
$$\mathsf{D}^{-}(R) \cong \mathsf{K}^{-}(R)$$
of tensor triangulated categories. We will often identify $\mathsf{D}^{-}(R)$ with $\mathsf{K}^{-}(R)$ via this equivalence.

From the next section on, we will investigate the structure of $\mathsf{D}^{-}(R)$ as a tensor triangulated category. We close this section by giving comments about how hard it is.

Difficulities for $\mathsf{D}^{-}(R)$. The tensor triangulated category $\mathsf{D}^{-}(R)$ possesses a lot of defects on its structure, compared with the other well-established tensor triangulated categories:

(1) $\mathsf{D}^{-}(R)$ does not have arbitrary products or coproducts. (However, it does have some specific infinite coproducts, which will somehow play a crucial role in the proofs of our results.)

(2) $\mathsf{D}^{-}(R)$ is not closed under duals. For example, in the case where R is an algebra over a field k, $\mathsf{D}^{-}(R)$ is not closed under k-duals.

(3) In particular, $\mathsf{D}^{-}(R)$ is never rigid. Recall that a triangulated category $\mathcal{T}$ is called *rigid* if there exist an exact functor $D : \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{T}$ and a functorial isomorphism
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(a \otimes b, c) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(a, D(b) \otimes c)$$
for $a, b, c \in \mathcal{T}$. In fact, $\mathsf{D}^{-}(R)$ is even never closed as a symmetric monoidal category. There are a lot of results on rigid tensor triangulated categories, but we cannot use them for $\mathsf{D}^{-}(R)$.

(4) One has
$$\mathsf{thick}_{\mathsf{D}^-(R)} R \neq \mathsf{D}^-(R).$$
Indeed, the left hand side coincides with $\mathsf{K}^b(R)$. There are several results on tensor triangulated categories $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbb{1})$ satisfying $\mathsf{thick}_{\mathcal{T}} \mathbb{1} = \mathcal{T}$, but they are not available for $\mathsf{D}^-(R)$.

Thus, results in the literature are quite limited on tensor triangulated categories that can be applied to our tensor triangulated category $\mathsf{D}^-(R)$.

2. Compactly and cocompactly generated thick tensor ideals of $\mathsf{D}^-(R)$

In this section, we classify compactly or cocompactly generated ideals of the tensor triangulated category $\mathsf{D}^-(R)$. We begin with recalling the definitions of compact and cocompact objects.

Definition 2.1. Let $\mathcal{T}$ be a triangulated category.

(1) An object $M \in \mathcal{T}$ is called *compact* (respectively, *cocompact*) if the natural morphism
$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, N_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda)$$
$$\left(\text{respectively, } \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N_\lambda, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda, M)\right)$$
is an isomorphism for all families $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ of objects of $\mathcal{T}$ such that the coproduct $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ (respectively, the product $\prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$) exists in $\mathcal{T}$.

(2) We denote by $\mathcal{T}^{\mathsf{c}}$ (respectively, $\mathcal{T}^{\mathsf{cc}}$) the full subcategory of $\mathcal{T}$ consisting of compact (respectively, cocompact) objects of $\mathcal{T}$.

(3) An ideal of $\mathcal{T}$ is said to be *compactly generated* (respectively, *cocompactly generated*) if it is generated by some compact (respectively, cocompact) objects of $\mathcal{T}$ as an ideal.

The following equalities hold for compactly and cocompactly generated ideals of $\mathsf{D}^-(R)$.

Fact 2.2. There are equalities
$$\mathsf{D}^-(R)^{\mathsf{c}} = \mathsf{K}^b(R),$$
$$\mathsf{D}^-(R)^{\mathsf{cc}} = \mathsf{D}^b(R).$$

The second equality in the above fact is due to Oppermann–Stovicek [12, Theorem 18]. The first equality is well-known, and actually proved along the same lines as in the proof of the fact that the compact objects of the unbounded derived category of all R-modules are the perfect complexes over R.

Next, let us recall the definition of the (usual) support of a chain complex. Note that this notion is different from that of a Balmer support introduced in the previous section.

Definition 2.3.

(1) Let $X \in \mathsf{D}^-(R)$ be a complex. The *support* of X is defined to be the union of the supports (as R-modules) of homologies of X. One has equalities

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Supp} X &= \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Supp} \mathsf{H}^i(X) \\
&= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid X_{\mathfrak{p}} \neq 0\} \qquad (2.3.1)\\
&= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R^{\mathbf{L}} X \neq 0\}
\end{aligned}
$$

of subsets of $\operatorname{Spec} R$, where $\kappa(\mathfrak{p})$ denotes the residue field $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ of the local ring $R_{\mathfrak{p}}$.

(2) For a full subcategory $\mathcal{X}$ of $\mathsf{D}^-(R)$, set

$$\operatorname{Supp} \mathcal{X} = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \operatorname{Supp} X.$$

It is easy to see that the following hold.
- $\operatorname{Supp} \mathcal{X}$ is a specialization-closed subset of $\operatorname{Spec} R$.
- There is an equality $\operatorname{Supp} \mathcal{X} = \operatorname{Supp}(\mathsf{thick}^{\otimes} \mathcal{X})$.

Here, $\mathsf{thick}^{\otimes} \mathcal{X}$ stands for the ideal generated by $\mathcal{X}$, that is, the smallest ideal of $\mathsf{D}^-(R)$ containing $\mathcal{X}$.

(3) For a subset S of $\operatorname{Spec} R$, set

$$\langle S \rangle = \mathsf{thick}^{\otimes}_{\mathsf{D}^-(R)}\{R/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in S\}.$$

The second equality in (2.3.1) holds even for unbounded complexes of non-finitely generated R-modules, while the third equality only holds for complexes in $\mathsf{D}^-(R)$.

The following theorem is the first main result of this article.

Theorem 2.4 ([10, Theorem 2.12]). *There is a one-to-one correspondence*

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Cocompactly generated} \\ \textit{ideals of } \mathsf{D}^-(R)\end{matrix}\right\} \underset{\langle\rangle}{\overset{\operatorname{Supp}}{\underset{1-1}{\rightleftarrows}}} \left\{\begin{matrix}\textit{Specialization-closed} \\ \textit{subsets of } \operatorname{Spec} R\end{matrix}\right\}.$$

Thus the cocompactly generated ideals of $\mathsf{D}^-(R)$ are completely classified.

In fact, this one-to-one correspondence is not just a bijection of sets. For ideals $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ of $\mathsf{D}^-(R)$, define $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$ and $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ by:

$$\begin{cases}\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} = \mathsf{thick}^{\otimes}\{X \otimes_R^{\mathbf{L}} Y \mid X \in \mathcal{X},\, Y \in \mathcal{Y}\}, \\ \mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = \mathsf{thick}^{\otimes}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}).\end{cases}$$

It is then seen that for specialization-closed subsets A, B of $\operatorname{Spec} R$ there are equalities

$$\begin{cases}\langle A \rangle \wedge \langle B \rangle = \langle A \cap B \rangle, \\ \langle A \rangle \vee \langle B \rangle = \langle A \cup B \rangle.\end{cases}$$

Using these equalities, one can show that the set of cocompactly generated ideals of $\mathsf{D}^-(R)$ forms a lattice with join $\vee$ and meet $\wedge$, and that the bijections in the theorem are lattice isomorphisms; see [10, Proposition 2.18].

On the other hand, using the above theorem, we observe that the assignments $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X} \cap \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R)$ and $\mathsf{thick}^{\otimes} \mathcal{Y} \leftarrow\!\shortmid \mathcal{Y}$ make a one-to-one correspondence

$$\{\text{Cocompactly generated ideals of } \mathsf{D}^-(R)\} \rightleftarrows \{\text{Thick subcategories of } \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R)\};$$

see [10, Corollary 2.14].

To prove the theorem, we need to extend the Hopkins–Neeman smash nilpotence theorem as follows; see [10, Theorem 2.7].

Lemma 2.5 (Generalized smash nilpotence). *Let $f : X \to Y$ be a morphism in $\mathsf{K}^-(R)$ such that $Y \in \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R)$. If $f \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) = 0$ for all prime ideals $\mathfrak{p}$ of R, then $f^{\otimes t} = 0$ for some integer $t > 0$.*

We do not state the proof of this lemma, but give several comments on the proof.

Remark 2.6.

(1) If we assume further that $X \in \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R)$, then the assertion of the lemma is nothing but the original smash nilpotence due to Hopkins [9, Theorem 10] and Neeman [11, Theorem 1.1]. In the proof of the original smash nilpotence, one can reduce to the case where $X = R$ by replacing the morphism $f : X \to Y$ with a morphism $f' : R \to \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ via the isomorphim

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R)}(R, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(X, Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R)}(X, Y).$$

Thanks to this reduction, one can identify the morphism $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R)}(R, Y)$ with the element $f(1) \in \mathsf{H}^0 Y$, which plays a key role in the proof of the original smash nilpotence.

(2) We show and use the following statements; see [10, Lemmas 2.5 and 2.6].
   (a) Let $\mathcal{T}$ be a tensor triangulated category. Let f, g be a morphism in $\mathcal{T}$, and let $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ be full subcategories of $\mathcal{T}$. If $f \otimes \mathcal{X} = 0$ and $g \otimes \mathcal{Y} = 0$, then $(f \otimes g) \otimes (\mathcal{X} * \mathcal{Y}) = 0$.
   (b) Let $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ be a sequence of elements of R. Let f be a morphism in $\mathsf{K}^-(R)$. If $f \otimes_R R/(\boldsymbol{x}) = 0$, then $f^{\otimes 2^n} \otimes_R \mathrm{K}(\boldsymbol{x}) = 0$.

Here, $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ stands for the full subcategory of $\mathsf{K}^-(R)$ consisting of objects E such that there exists an exact triangle

$$X \to E \to Y \rightsquigarrow$$

in $\mathcal{T}$ with $X \in \mathcal{X}$ and $Y \in \mathcal{Y}$, and $\mathrm{K}(\boldsymbol{x})$ stands for the Koszul complex of R with respect to $\boldsymbol{x}$. The statement (b) is deduced by using (a).

(3) We need the assumption that $Y \in \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R)$ to have the equality

$$\mathrm{ann}_{R_\mathfrak{p}}(f_\mathfrak{p}) = \mathrm{ann}_R(f)_\mathfrak{p}$$

for all prime ideals $\mathfrak{p}$ of R. Here, the *annihilator* of a morphism $f : X \to Y$ in $\mathsf{D}^-(R)$ is defined by

$$\mathrm{ann}_R(f) := \{a \in R \mid af = 0 \text{ in } \mathsf{D}^-(R)\},$$

which is nothing but the kernel of the morphism $R \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^-(R)}(X, Y)$ given by $a \mapsto af$.

By virtue of the generalized smash nilpotence, we can prove the following key proposition. For an object X of $\mathsf{D}^-(R)$ we define the *annihilator* $\mathrm{ann}\, X$ of X as the annihilator of the identity morphism of X.

Proposition 2.7 ([10, Proposition 2.9]). *Let $X, Y \in \mathsf{D}^-(R)$ be complexes. Then the following implication holds true.*

$$\mathrm{V}(\mathrm{ann}\, X) \subseteq \mathrm{Supp}\, Y \implies X \in \mathsf{thick}^{\otimes} Y.$$

Again, we do not state the proof of this proposition but give some comments on it.

Remark 2.8.
(1) For every $X \in \mathsf{D}^-(R)$ one has
$$\mathrm{V}(\operatorname{ann} X) \supseteq \operatorname{Supp} X.$$
The equality holds if $X \in \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(R)$.
(2) The original statement that is due to Hopkins and Neeman and corresponds to the proposition asserts that for perfect complexes X, Y over R the implication
$$\operatorname{Supp} X \subseteq \operatorname{Supp} Y \implies X \in \mathsf{thick}^{\otimes} Y$$
holds true; see [11, Lemma 1.2].
(3) Proposition 2.7 does not hold if $\mathrm{V}(\operatorname{ann} X)$ is replaced with $\operatorname{Supp} X$ or if $\operatorname{Supp} Y$ is replaced with $\mathrm{V}(\operatorname{ann} Y)$; we will see this in Remark 3.14.
(4) In the proof of the proposition, we first take a truncation $Y' \in \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R)$ of Y such that $\mathrm{V}(\operatorname{ann} X)$ is contained in $\operatorname{Supp} Y'$. Then we consider the morphism $R \to \operatorname{Hom}_R(Y', Y)$ sending $1 \in R$ to the inclusion morphism $Y' \to Y$. The stream of the proof is similar to [11, Lemma 1.2], but we need to make various modifications.
(5) In the proposition, we can replace the object Y of $\mathsf{D}^-(R)$ with any full subcategory $\mathcal{Y}$ of $\mathsf{D}^-(R)$. Indeed, we find an object $Y \in \mathcal{Y}$ such that $\operatorname{Supp} Y$ contains all the prime ideals (minimally) containing $\operatorname{ann} X$. Then $\mathrm{V}(\operatorname{ann} X)$ is contained in $\operatorname{Supp} Y$, and we can reduce to the case where the subcategory $\mathcal{Y}$ consists only of Y.

As a corollary of Proposition 2.7 we have the following result. This result will be used in the proof of Theorem 2.4, and several other places.

Corollary 2.9 ([10, Corollary 2.11 and Proposition 4.11])**.**
(1) *Let X be a complex in $\mathsf{D}^-(R)$. Then it holds that*
$$\operatorname{Supp} X = \operatorname{Spec} R \iff \mathsf{thick}^{\otimes} X = \mathsf{D}^-(R).$$
(2) *Let I be an ideal of R, and let $\mathcal{X}$ be an ideal of $\mathsf{D}^-(R)$. Take a system of generators $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ of I. Then it holds that*
$$\mathrm{V}(I) \subseteq \operatorname{Supp} \mathcal{X} \iff R/I \in \mathcal{X} \iff \mathrm{K}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{X}.$$

Proof. (1) The implication ($\Leftarrow$) follows from the equalities
$$\operatorname{Supp} X = \operatorname{Supp}(\mathsf{thick}^{\otimes} X) = \operatorname{Supp} \mathsf{D}^-(R) = \operatorname{Spec} R.$$
As for the implication ($\Rightarrow$), for all objects $M \in \mathsf{D}^-(R)$ one has that $\mathrm{V}(\operatorname{ann} M)$ is contained in $\operatorname{Supp} X$. Hence M belongs to $\mathsf{thick}^{\otimes} X$ by Proposition 2.7.

(2) We have
$$\operatorname{Supp} R/I = \mathrm{V}(\operatorname{ann} R/I) = \mathrm{V}(I) = \mathrm{V}(\operatorname{ann} \mathrm{K}(\boldsymbol{x})) = \operatorname{Supp} \mathrm{K}(\boldsymbol{x}).$$
Using Proposition 2.7 completes the proof of the assertion. $\square$

Now we can obtain the proof of the main result of this section.

Proof of Theorem 2.4. Let $\mathcal{X}$ be a cocompactly generated ideal of $\mathsf{D}^-(R)$. Then one can write $\mathcal{X} = \mathsf{thick}^{\otimes} \mathcal{C}$ for some full subcategory $\mathcal{C}$ of $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(R)$. What we want to show is the equality $\mathcal{X} = \langle \operatorname{Supp} \mathcal{X} \rangle$. As to the inclusion ($\supseteq$), Corollay 2.9(2) implies that $R/\mathfrak{p}$ is in $\mathcal{X}$ for all $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} \mathcal{X}$. As for the inclusion ($\subseteq$), it suffices to show that $\mathcal{C}$ is contained in $\langle \operatorname{Supp} \mathcal{X} \rangle = \langle \operatorname{Supp} \mathcal{C} \rangle$. Pick an object $M \in \mathcal{C}$. Then M is a bounded complex of finitely generated R-modules, whence it is in $\mathsf{thick}\{R/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M\}$. Now we are done. $\square$

As a corollary of Theorem 2.4 we have the following result.

Corollary 2.10 ([10, Corollary 2.16]). *The following are equivalent for an ideal $\mathcal{X}$ of $\mathsf{D}^-(R)$.*
(1) *$\mathcal{X}$ is compactly generated.*
(2) *$\mathcal{X}$ is cocompactly generated.*
When this is the case, we simply say that $\mathcal{X}$ is compact.

Proof. Since $\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(R)$ is contained in $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(R)$, compact generation implies cocompact generation. Therefore (1) implies (2). Let us show that (2) implies (1). Let W be a specialization-closed subset of $\operatorname{Spec} R$. Put

$$\mathcal{A} := \mathsf{thick}^{\otimes}\{R/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in W\},$$
$$\mathcal{B} := \mathsf{thick}^{\otimes}\{\mathrm{K}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}R \in W\}.$$

Then $\mathcal{A}$ is cocompactly generated, while $\mathcal{B}$ is compactly generated. We see that $\operatorname{Supp} \mathcal{A} = \operatorname{Supp} \mathcal{B} = W$. Using Theorem 2.4, we obtain $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. □

As another corollary of Proposition 2.7, we get the following result.

Corollary 2.11 ([10, Corollary 2.20]). *If R is artinian, then all ideals of $\mathsf{D}^-(R)$ are compact. Therefore one has a one-to-one correspondence*

$$\{\textit{Ideals of } \mathsf{D}^-(R)\} \rightleftarrows \{\textit{Subsets of } \operatorname{Spec} R\}.$$

3. The Balmer spectrum of $\mathsf{D}^-(R)$ and classifications of thick tensor ideals

In this section, we consider the structure of the Balmer spectrum of $\mathsf{D}^-(R)$, and make correspondences among some classes of ideals of $\mathsf{D}^-(R)$ and subsets of $\operatorname{Spec} R$ and $\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^-(R)$. The section consists of three subsections.

3.1. The structure of $\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^-(R)$.

We investigate the structure of the Balmer spectrum of $\mathsf{D}^-(R)$ as a topological space, comparing it with the Zariski spectrum of R. We start by defining a tame ideal of $\mathsf{D}^-(R)$.

Definition 3.1.
(1) For a subset S of $\operatorname{Spec} R$, we define the full subcategory $\operatorname{Supp}^{-1} S$ of $\mathsf{D}^-(R)$ by

$$\operatorname{Supp}^{-1} S = \{X \in \mathsf{D}^-(R) \mid \operatorname{Supp} X \subseteq S\}.$$

One easily sees that $\operatorname{Supp}^{-1} S$ is an ideal of $\mathsf{D}^-(R)$, and furthermore, the following equalities hold.
- $\operatorname{Supp}^{-1} S = \operatorname{Supp}^{-1} S_{\mathsf{spcl}}$.
- $\operatorname{Supp}(\operatorname{Supp}^{-1} S) = S_{\mathsf{spcl}}$.

Here, S_{spcl} stands for the largest specialization-closed subset of $\operatorname{Spec} R$ contained in S. (This is the spcl-*interior* of S in $\operatorname{Spec} R$ if we use the terminology in the next Subsection 3.2.)

(2) An ideal $\mathcal{X}$ of $\mathsf{D}^-(R)$ is called *tame* if $\mathcal{X} = \operatorname{Supp}^{-1} S$ for some subset S of $\operatorname{Spec} R$. We set

$${}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^-(R) = \{\text{tame prime ideals of } \mathsf{D}^-(R)\}.$$

One can construct the following correspondence between $\operatorname{Spec} R$ and $\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^-(R)$; see [10, Propositions 3.4 and 3.7].

Proposition 3.2.

(1) *For* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, *the full subcategory*

$$\mathcal{S}(\mathfrak{p}) := \{X \in \mathsf{D}^{-}(R) \mid X_{\mathfrak{p}} = 0\}$$

of $\mathsf{D}^{-}(R)$ *is a prime ideal of* $\mathsf{D}^{-}(R)$

(2) *For* $\mathcal{P} \in \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$, *the set*

$$\{I \subseteq R \mid R/I \notin \mathcal{P}\}$$

of ideals of R *has a unique maximal element* $\mathfrak{s}(\mathcal{P})$ *with respect to the inclusion relation, which is a prime ideal of* R

Concerning the correspondence constructed in the above proposition, the following statements hold.

Theorem 3.3 ([10, Theorems 3.9, 4.5, 4.7, 4.12 and 4.14])**.**

(1) *One has the order-reversing maps*

$$\mathcal{S} : \operatorname{Spec} R \rightleftarrows \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R) : \mathfrak{s}$$

such that

$$\begin{cases} \mathfrak{s} \cdot \mathcal{S} = 1, \\ \mathcal{S} \cdot \mathfrak{s} = \operatorname{Supp}^{-1} \operatorname{Supp}. \end{cases}$$

In particular, the inequality

$$\dim(\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)) \geq \dim R$$

between the Krull dimensions holds.

(2) *The subset* ${}^{\mathsf{t}}\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$ *of* $\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$ *is dense. There is a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[dr, "\mathcal{S}'"'] & \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R) \arrow[r, "\mathfrak{s}"] & \operatorname{Spec} R \\
& {}^{\mathsf{t}}\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R) \arrow[u, hook, "\mathsf{inc}"] \arrow[ur, "\mathfrak{s}'"'] &
\end{tikzcd}$$

such that $\mathcal{S}'$ *is an open bijection,* $\mathfrak{s}'$ *is a continuous bijection and* $\mathfrak{s}$ *is a continuous map. In particular, the image of* $\mathcal{S}$ *coincides with* ${}^{\mathsf{t}}\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$.

(3) *There is a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Min} R \arrow[r, "\mathcal{S}_{\min}"] \arrow[d, hook, "\mathsf{inc}"] & \mathtt{Mx}\,\mathsf{D}^{-}(R) \arrow[d, hook, "\mathsf{inc}"'] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "\mathcal{S}"] & \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R) \\
\operatorname{Max} R \arrow[u, hook, "\mathsf{inc}"] \arrow[r, hook, "\mathcal{S}_{\max}"] & \mathtt{Mn}\,\mathsf{D}^{-}(R) \arrow[u, hook, "\mathsf{inc}"']
\end{tikzcd}$$

such that $\mathcal{S}_{\min}$ *is a homeomorphism, and the injective map* $\mathcal{S}_{\max}$ *is also a homeomorphism if* R *is a semilocal ring.*

(4) *The following are equivalent.*

(a) *The map* $\mathcal{S}$ *is continuous.*
(b) *The map* $\mathcal{S}'$ *is homeomorphic.*
(c) *The map* $\mathfrak{s}'$ *is homeomorphic.*
(d) *The set* $\mathrm{Spec}\,R$ *is finite.*

Here are several comments on this theorem.

Remark 3.4.

(1) Recall that for a topological space X the *Krull dimension* $\dim X$ of X is by definition the supremum of the lengths of chains of nonempty irreducible closed subsets of X. For a tensor triangulated category $\mathcal{T}$ we have

$$\begin{aligned}\dim(\mathtt{Spc}\,\mathcal{T}) &= \sup\{n \geq 0 \mid \exists\,\text{chain } \overline{\{\mathcal{P}_0\}} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{\{\mathcal{P}_n\}} \text{ of subsets of } \mathtt{Spc}\,\mathcal{T}\} \\ &= \sup\{n \geq 0 \mid \exists\,\text{chain } \mathcal{P}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{P}_n \text{ of points of } \mathtt{Spc}\,\mathcal{T}\}.\end{aligned}$$

(2) Note that $\mathrm{Max}\,R$, $\mathrm{Min}\,R$, $\mathtt{Mx}\,\mathcal{T}$ and $\mathtt{Mn}\,\mathcal{T}$ are all T_1-spaces, and that, in general, any finite subset of a T_1-space is closed. Thus, to show Theorem 3.3(3), it is enough to check that the top and bottom horizontal maps are bijective and injective, respectively (after we verify that they are induced).
(3) The following are equivalent ([10, Lemma 4.6]).
   - All specialization-closed subsets of $\mathrm{Spec}\,R$ are closed.
   - There are only finitely many specialization-closed subsets of $\mathrm{Spec}\,R$.
   - There are only finitely many closed subsets of $\mathrm{Spec}\,R$.
   - There are only finitely many prime ideals of R.

   Using this equivalences, we can deduce Theorem 3.3(4).
(4) More precisely than Theorem 3.3(1), we actually have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
 & {}^{\mathsf{t}}\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R) \arrow[d, "\theta"', "\mathsf{inc}"] \arrow[dr, "\mathfrak{s}'"] & \\
\mathrm{Spec}\,R \arrow[ur, "\mathcal{S}'"] \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[dr, "\widetilde{\mathcal{S}}"] & \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R) \arrow[r, "\mathfrak{s}"] \arrow[d, "\pi"', "\mathsf{can}"] & \mathrm{Spec}\,R \\
 & \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)/\,\mathrm{Supp} \arrow[ur, "\widetilde{\mathfrak{s}}"'] &
\end{tikzcd}$$

   such that $\mathfrak{s}\mathcal{S}$ is identity, $\mathcal{S}', \widetilde{\mathcal{S}}, \mathfrak{s}', \widetilde{\mathfrak{s}}, \pi\theta$ are bijections, $\mathcal{S}', \widetilde{\mathcal{S}}$ are open and closed, and $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}', \widetilde{\mathfrak{s}}$ are continuous ([10, Theorem 4.5]). Here, $\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)/\,\mathrm{Supp}$ denotes the quotient topological space by the equivalence relation induced by taking $\mathrm{Supp}(-)$, and π the canonical surjection. (To be precise, we define a relation $\sim$ in $\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$ by

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{Q} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Supp}\,\mathcal{P} = \mathrm{Supp}\,\mathcal{Q}$$

   for $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$. Then $\sim$ is an equivalence relation in $\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$. We denote by $\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)/\sim$ the set of equivalence classes, and by $\pi : \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R) \to \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)/\sim$ the map sending each $\mathcal{P} \in \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$ to its equivalence class $[\mathcal{P}] \in \mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)/\sim$. The set $\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)/\sim$ is a topological space, where a subset S of $\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)/\sim$ is open if and only if $\pi^{-1}(S)$ is an open subset of $\mathtt{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$.)
(5) More precisely than Theorem 3.3(4), the following assertion holds true ([10, Theorem 4.7]). Consider the three conditions
   (a) The map $\widetilde{\mathcal{S}}$ is a homeomorphism,

(b) The map $\widetilde{\mathfrak{s}}$ is a homeomorphism,
(c) The map $\pi\theta$ is a homeomorphism.

Then (a) is equivalent to (b), and (b)$\wedge$(c) is equivalent to the four conditions in Theorem 3.3(4).

Suppose that R is artinian. Then R is semilocal, has only finitely many prime ideals and satisfies $\operatorname{Max} R = \operatorname{Spec} R = \operatorname{Min} R$. Hence, Theorem 3.3 yields the following corollary.

Corollary 3.5. *Let R be an artinian ring. Then the following statements hold true.*
(1) *The maps $\mathcal{S} : \operatorname{Spec} R \rightleftarrows \mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R) : \mathfrak{s}$ are mutually inverse homeomorphisms.*
(2) *One has $\dim \mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R) = \dim R = 0 < \infty$.*
(3) *All prime ideals of $\mathsf{D}^{-}(R)$ are tame.*

In fact, a more complete statement holds true; see Theorem 3.11.

3.2. **Classifications of ideals of $\mathsf{D}^{-}(R)$.**
In this subsection, we consider making correspondences among compact, radical and tame ideals of $\mathsf{D}^{-}(R)$, and specialization-closed subsets of $\operatorname{Spec} R$, $\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$ and ${}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)$. First of all, we explore the relationships among these three properties of ideals of $\mathsf{D}^{-}(R)$.

Proposition 3.6 ([10, Lemma 5.8])**.** *Let $\mathcal{X}$ be an ideal of $\mathsf{D}^{-}(R)$.*
(1) *There are equalities of ideals of $\mathsf{D}^{-}(R)$:*

$$\mathcal{X}_{\mathsf{cpt}} = \langle \operatorname{Supp} \mathcal{X} \rangle,$$
$$\mathcal{X}^{\mathsf{rad}} = \sqrt{\mathcal{X}},$$
$$\mathcal{X}^{\mathsf{tame}} = \operatorname{Supp}^{-1} \operatorname{Supp} \mathcal{X}.$$

(2) *There are inclusions*

$$\mathcal{X}_{\mathsf{cpt}} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^{\mathsf{rad}} \subseteq \mathcal{X}^{\mathsf{tame}}$$

of ideals of $\mathsf{D}^{-}(R)$, all of whose supports are equal. In particular, every tame ideal of $\mathsf{D}^{-}(R)$ is radical.

Here, $\mathcal{X}^{\mathbb{P}}$ (respectively, $\mathcal{X}_{\mathbb{P}}$) stands for the $\mathbb{P}$-*closure* (respectively, $\mathbb{P}$-*interior*) of $\mathcal{X}$, namely, the smallest (respectively, largest) $\mathbb{P}$-ideal containing (respectively, contained in) $\mathcal{X}$. Also, cpt and rad denote the compact and radical properties, respectively.

The assertion (1) of the above proposition is seen to hold just by checking the defintions. In relation to (2), the following statement holds: Let W be a specialization-closed subset of $\operatorname{Spec} R$. Then $\langle W \rangle$ (respectively, $\operatorname{Supp}^{-1} W$) is the smallest (respectively, largest) ideal of $\mathsf{D}^{-}(R)$ whose support coincides with W; see [10, Theorem 6.6(2)].

To state the main result of this section, we introduce notation.

Notation 3.7. We use the following sets in the rest of this subsection.

$$\mathbf{Rad} = \{\text{Radical ideals of } \mathsf{D}^{-}(R)\},$$
$$\mathbf{Tame} = \{\text{Tame ideals of } \mathsf{D}^{-}(R)\},$$
$$\mathbf{Cpt} = \{\text{Compact ideals of } \mathsf{D}^{-}(R)\},$$
$$\mathbf{Spcl}(\mathrm{Spec}) = \{\text{Specialization-closed subsets of } \operatorname{Spec} R\},$$
$$\mathbf{Spcl}({}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}) = \{\text{Specialization-closed subsets of } {}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)\},$$
$$\mathbf{Thom} = \{\text{Thomason subsets of } \mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R)\}.$$

Proposition 3.6(2) implies the inclusion

$$\mathbf{Rad} \supseteq \mathbf{Tame}.$$

The main result of this section makes correspondences among the above six sets.

Theorem 3.8. [10, Theorems 5.13 and 5.20] *One has the following diagram, which is naturally commutative. (More precisely, the diagram with sections and bijections and the diagram with retractions and bijections are commutative.)*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rad} \arrow[r, shift left, "\mathsf{Spp}"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[d, shift left, "()_{\mathsf{cpt}}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{Thom} \arrow[l, shift left, "\mathsf{Spp}^{-1}"] \arrow[d, shift left, "\mathcal{S}^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, shift left, "()_{\mathsf{spcl}}"] \arrow[dr, phantom, "\dashv"] & \\
\mathbf{Cpt} \arrow[u, shift left, "()^{\mathsf{rad}}"] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Supp}"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[dr, shift left, "()^{\mathsf{tame}}"] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & \mathbf{Spcl}(\mathrm{Spec}) \arrow[u, shift left, "\overline{\mathcal{S}}"] \arrow[l, shift left, "\langle\rangle"] \arrow[r, shift left, "\mathcal{S}"] \arrow[r, phantom, "\sim"] \arrow[d, shift left, "\mathrm{Supp}^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\sim"] & \mathbf{Spcl}({}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}) \arrow[l, shift left, "\mathfrak{s}"] \arrow[ul, shift left, "()^{\mathsf{spcl}}"] \arrow[dl, shift left, "\mathsf{Sp}^{-1}"] \\
 & \mathbf{Tame} \arrow[ul, shift left, "()_{\mathsf{cpt}}"] \arrow[u, shift left, "\mathrm{Supp}"] \arrow[ur, shift left, "\mathsf{Sp}"] \arrow[ur, phantom, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

Here:

- $\begin{cases} f \sim g \iff gf = 1 \text{ and } fg = 1 \text{ (i.e. } (f,g) \text{ is a bijection pair),} \\ f \dashv g \iff gf = 1 \text{ (i.e. } (f,g) \text{ is a section-retraction pair).} \end{cases}$
- $\begin{cases} A_{\mathsf{spcl}} = \text{ the } \mathsf{spcl}\text{-interior of } A \text{ in } {}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R), \\ B^{\mathsf{spcl}} = \text{ the } \mathsf{spcl}\text{-closure of } B \text{ in } \mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R). \end{cases}$
- $\begin{cases} \overline{\mathcal{S}}(W) = \bigcup_{\mathfrak{p}\in W} \overline{\{\mathcal{S}(\mathfrak{p})\}}, \\ \mathcal{S}^{-1}(A) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \mid \mathcal{S}(\mathfrak{p}) \in A\}, \\ \mathsf{Sp}(-) = \mathsf{Spp}(-) \cap {}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R), \\ \mathsf{Sp}^{-1}(B) = \{M \in \mathsf{D}^{-}(R) \mid \mathsf{Sp}\, M \subseteq B\}, \\ \mathcal{S}(W) = \{\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in W\}, \\ \mathfrak{s}(B) = \{\mathfrak{s}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in B\}. \end{cases}$

Moreover, the following are equivalent.

(1) *The pair* $\mathcal{S} : \mathrm{Spec}\, R \rightleftarrows \mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{-}(R) : \mathfrak{s}$ *of maps is a one-to-one correspondence.*
(2) *The pair* $(()^{\mathsf{rad}}, ()_{\mathsf{cpt}})$ *of maps is a one-to-one correspondence.*
(3) *The pair* $(\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S}^{-1})$ *of maps is a one-to-one correspondence.*
(4) *The pair* $(()^{\mathsf{spcl}}, ()_{\mathsf{spcl}})$ *of maps is a one-to-one correspondence.*
(5) *The equality* $\mathbf{Rad} = \mathbf{Tame}$ *holds.*

The spcl-*interior* A_{spcl} is the largest specialization-closed subset of ${}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{\mathsf{-}}(R)$ contained in A, while spcl-*closure* B^{spcl} is the smallest specialization-closed subset of $\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{\mathsf{-}}(R)$ containing B.

Here are some comments on the above theorem.

Remark 3.9.

(a) The one-to-one correspondence $\mathbf{Rad} \cong \mathbf{Thom}$ in the diagram of Theorem 3.8 is nothing but Theorem 1.6 due to Balmer, while the one-to-one correspondence $\mathbf{Cpt} \cong \mathbf{Spcl}(\mathrm{Spec})$ is nothing but Theorem 2.4. Thus this diagram connects Theorems 1.6 and 2.4, and gives rise to several related correspondences.

(b) The proof of Theorem 3.8 proceeds step by step; for example, we show and use the equalities

$$\begin{cases} A_{\mathsf{spcl}} = A \cap {}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{\mathsf{-}}(R), \\ B^{\mathsf{spcl}} = \{\mathcal{P} \in \mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^{\mathsf{-}}(R) \mid \mathcal{P}^{\mathsf{tame}} \in B\} = \bigcup_{\mathcal{P} \in B^{\mathsf{spcl}}} \mathsf{Spp}(R/\mathfrak{s}(\mathcal{P})). \end{cases}$$

(c) Theorem 3.8 yields a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & & \mathbf{Rad} \arrow[dll, "()_{\mathsf{cpt}}"'] \arrow[dl, "\mathrm{Supp}"] \arrow[d, "()^{\mathsf{tame}}"] \arrow[dr, "\mathsf{Sp}"] & \\ \mathbf{Cpt} \arrow[r, equal, "\sim"] & \mathbf{Spcl}(\mathrm{Spec}) \arrow[r, equal, "\sim"] & \mathbf{Tame} \arrow[r, equal, "\sim"] & \mathbf{Spcl}({}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}) \end{tikzcd}$$

where the bottom bijections are the ones in the diagram of Theorem 3.8. Furthermore, the conditions (1)–(5) in Theorem 3.8 are also equivalent to the following three conditions.

(6) The map $\mathrm{Supp} : \mathbf{Rad} \to \mathbf{Spcl}(\mathrm{Spec})$ is a bijection.
(7) The map $()^{\mathsf{tame}} : \mathbf{Rad} \to \mathbf{Tame}$ is a bijection.
(8) The map $\mathsf{Sp} : \mathbf{Rad} \to \mathbf{Spcl}({}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc})$ is a bijection.

For the details, we refer the reader to [10, Corollary 5.21].

The corollary below is immediately obtained from the above theorem.

Corollary 3.10. *If every radical ideal of* $\mathsf{D}^{\mathsf{-}}(R)$ *is compact, then* $\mathbf{Rad} = \mathbf{Tame}$.

Proof. For each radical ideal $\mathcal{X}$ of $\mathsf{D}^{\mathsf{-}}(R)$ one has $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathsf{cpt}} = (\mathcal{X}_{\mathsf{cpt}})^{\mathsf{rad}}$. Hence

$$()^{\mathsf{rad}} : \mathbf{Cpt} \rightleftarrows \mathbf{Rad} : ()_{\mathsf{cpt}}$$

is a one-to-one correspondence. Theorem 3.8 implies $\mathbf{Rad} = \mathbf{Tame}$. □

We are interested in what rings R are characterized by the eight conditions (1)–(8) appearing in Theorem 3.8 and Remark 3.9.

Theorem 3.11 ([10, Theorem 6.5])**.** *The equivalent conditions* (1)–(8) *are also equivalent to the condition that*

(9) *the ring R is artinian.*

Furthermore, when this is the case, every ideal of $\mathsf{D}^{\mathsf{-}}(R)$ *is compact, tame and radical.*

The most difficult part of the proof of this theorem is to show the necessity of the condition (9). Here, let us only check the last assertion of the theorem. Suppose that R is artinian, and pick any ideal $\mathcal{X}$ of $\mathsf{D}^-(R)$. Then Corollary 3.5(3) implies that $\mathcal{X}$ is compact, and that taking $\operatorname{Supp}(-)$ makes an injective map. Hence the equality

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{X}) = \operatorname{Supp}(\operatorname{Supp}^{-1}\operatorname{Supp}\mathcal{X})$$

implies that $\mathcal{X}$ coincides with $\operatorname{Supp}^{-1}\operatorname{Supp}\mathcal{X}$, which shows that $\mathcal{X}$ is tame. In general, a tame ideal of $\mathsf{D}^-(R)$ is radical, and hence $\mathcal{X}$ is radical.

Using Theorem 3.11 and Corollary 3.10, we immediately obtain the following.

Corollary 3.12. *Suppose that R is not artinian. Then there exists a non-compact radical ideal of $\mathsf{D}^-(R)$.*

3.3. **On Balmer's conjecture for $\mathsf{D}^-(R)$.**

From now on, we consider Balmer's conjecture stated in Section 1 for our tensor triangulated category $\mathsf{D}^-(R)$. First of all, we investigate the difference between radical and tame ideals of $\mathsf{D}^-(R)$. We have already learned that the following holds.

$$\mathcal{X}^{\mathsf{rad}} \subseteq \mathcal{X}^{\mathsf{tame}}.$$

The following theorem says that if $\mathcal{X}$ is compact, then the equality does not hold under mild assumptions.

Theorem 3.13 ([10, Theorem 6.6])**.** *Let W be a nonempty proper specialization-closed subset of $\operatorname{Spec} R$, and put $\mathcal{X} = \langle W \rangle$. Assume that R is either a domain or a local ring. Then*

$$\mathcal{X}^{\mathsf{rad}} \subsetneq \mathcal{X}^{\mathsf{tame}}.$$

Proof. Since W is nonempty, it contains a prime ideal P. Take a system of generators $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_r$ of P. It is essential to think of the following complex.

$$C := \bigoplus_{i>0} \mathrm{K}(\boldsymbol{x}^i)[i].$$

Thanks to the shifts, this infinite direct sum exists in our tensor triangulated category $\mathsf{D}^-(R)$. Since $\operatorname{Supp} C = \mathrm{V}(P)$ is contained in W, the complex C is in $\operatorname{Supp}^{-1} W = \mathcal{X}^{\mathsf{tame}}$ by Proposition 3.6(1).

Suppose $\mathcal{X}^{\mathsf{rad}} = \mathcal{X}^{\mathsf{tame}}$. Then C belongs to $\mathcal{X}^{\mathsf{rad}} = \sqrt{\mathcal{X}}$. Hence there is an integer $n > 0$ such that

$$C' := \underbrace{C \otimes^{\mathbf{L}}_R \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_R C}_{n}$$

belongs to $\mathcal{X}$. Note that C' contains

$$D := \bigoplus_{i>0} \mathrm{K}(\boldsymbol{x}^i)[ni]$$

as a direct summand. Therefore D is in $\mathcal{X} = \langle W \rangle = \mathsf{thick}^{\otimes}\{R/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in W\}$, and we find a finite number of prime ideals $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ in W such that

$$\operatorname{ann} D \supseteq (\operatorname{ann} R/\mathfrak{p}_1) \cdots (\operatorname{ann} R/\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_m.$$

Krull's intersection theorem implies

$$\operatorname{ann} D = \bigcap_{i>0} \boldsymbol{x}^i R = 0,$$

and we have $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_m = 0$. Thus for every prime ideal $\mathfrak{p}$ of R there exists an integer $1 \le t \le m$ such that $\mathfrak{p}$ contains $\mathfrak{p}_t$. Since W is specialization-closed and contains $\mathfrak{p}_t$, the prime ideal $\mathfrak{p}$ belongs to W. This shows that $W = \operatorname{Spec} R$, contrary to the assumption on W. $\square$

Using the above proof, we have an observation related to Proposition 2.7.

Remark 3.14. We use the same notation as in the proof of Theorem 3.13.

(1) It holds that $\operatorname{Supp} C$ is contained in $\operatorname{Supp} R/P$, but C does not belong to $\mathsf{thick}^{\otimes} R/P$. Indeed, we have $\operatorname{Supp} C = \mathrm{V}(P) = \operatorname{Supp} R/P$. Assume that C is in $\mathsf{thick}^{\otimes} R/P$. Then

$$0 = \operatorname{ann} C \supseteq (\operatorname{ann} R/P)^u = P^u$$

for some integer $u > 0$. Hence the equality $\operatorname{Spec} R = \mathrm{V}(P)$ holds, which is contained in W since W is specialization-closed. Therefore W coincides with $\operatorname{Spec} R$, which is a contradiction.

(2) It holds that $\mathrm{V}(\operatorname{ann} R)$ is contained in $\mathrm{V}(\operatorname{ann} C)$, but R does not belong to $\mathsf{thick}^{\otimes} C$. In fact, we have $\mathrm{V}(\operatorname{ann} R) = \mathrm{V}(0) = \mathrm{V}(\operatorname{ann} C)$. As $\operatorname{Supp} C = \mathrm{V}(P)$ is a proper subset of $\operatorname{Spec} R$, it is observed from Corollary 2.9(1) that R is not in $\mathsf{thick}^{\otimes} C$.

Now, we consider Balmer's conjecture (Conjecture 1.8) for our tensor triangulated category $\mathsf{D}^-(R)$. First of all, let us check that the triangulated category $\mathsf{D}^-(R)$ is algebraic. The category $\mathsf{C}^-(R)$ of right bounded complexes of finitely generated R-modules is a Frobenius exact category with respect to the split short exact sequences of complexes in $\mathsf{C}^-(R)$, and $\mathsf{K}^-(R)$ is the stable category of $\mathsf{C}^-(R)$. Thus $\mathsf{K}^-(R)$ is an algebraic triangulated category.

Recall that Conjecture 1.8 concerns the continuous map

$$\rho^{\bullet}_{\mathsf{D}^-(R)} : \mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^-(R) \to \operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} \mathrm{R}^{\bullet}_{\mathsf{D}^-(R)}.$$

One can actually observe that

(a) $\mathrm{R}^{\bullet}_{\mathsf{D}^-(R)} = \mathrm{R}^{0}_{\mathsf{D}^-(R)} = R$,
(b) $\operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} \mathrm{R}^{\bullet}_{\mathsf{D}^-(R)} = \operatorname{Spec} R$, and
(c) $\rho^{\bullet}_{\mathsf{D}^-(R)} = \mathfrak{s}$.

Thus, Conjecture 1.8 for $\mathsf{D}^-(R)$ just claims the local injectivity of the map $\mathfrak{s}$.

We can show that under quite mild assumptions the algebraic tensor triangulated category $\mathsf{D}^-(R)$ does not satisfy Balmer's conjecture.

Corollary 3.15 ([10, Corollary 6.10]). *Assume that* $\dim R > 0$*, and that* R *is either a domain or a local ring. Then* $\mathfrak{s}$ *is not locally injective. Hence, Balmer's Conjecture 1.8 does not hold true for* $\mathsf{D}^-(R)$.

Proof. By assumption we find a nonunit $x \in R$ such that the principal ideal xR of R has positive height. We apply Theorem 3.13 to $\mathcal{X} = \langle \mathrm{V}(x) \rangle$ to get

$$\bigcap_{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P} \in \mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^-(R)} \mathcal{P} = \mathcal{X}^{\mathsf{rad}} \subsetneq \mathcal{X}^{\mathsf{tame}} = \bigcap_{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P} \in {}^{\mathsf{t}}\mathsf{Spc}\,\mathsf{D}^-(R)} \mathcal{P}.$$

Hence we can choose a prime ideal $\mathcal{P}$ of $\mathsf{D}^-(R)$ such that $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P} \subsetneq \mathcal{P}^{\mathsf{tame}}$.

Assume that $\mathfrak{s}$ is locally injective at the point $\mathcal{P}$. Then there exists an object $M \in \mathsf{D}^-(R)$ with $\mathcal{P} \in \mathtt{U}(M)$ such that $\mathfrak{s}|_{\mathtt{U}(M)}$ is injective. Then $\mathtt{U}(M)$ contains two distinct points $\mathcal{P}$ and $\mathcal{P}^{\mathsf{tame}}$, which are sent by $\mathfrak{s}$ to the same point in $\operatorname{Spec} R$. This contradicts the injectivity of the map $\mathfrak{s}|_{\mathtt{U}(M)}$. □

We end this section by stating a bit about the case where R is a discrete valuation ring. Since everything is clarified when R is artinian, the case of discrete valuation rings should be the first nontrivial case, but in fact, it turns out that even in this case the structure of $\mathsf{D}^-(R)$ is highly complicated. For the details, we refer the reader to [10, Section 7].

References

[1] P. Balmer, Presheaves of triangulated categories and reconstruction of schemes, *Math. Ann.* **324** (2002), no. 3, 557–580.

[2] P. Balmer, The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories, *J. Reine Angew. Math.* **588** (2005), 149–168.

[3] P. Balmer, Spectra, spectra, spectra–tensor triangular spectra versus Zariski spectra of endomorphism rings, *Algebr. Geom. Topol.* **10** (2010), no. 3, 1521–1563.

[4] P. Balmer, Tensor triangular geometry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume II*, 85–112, *Hindustan Book Agency, New Delhi*, 2010.

[5] D. J. Benson; J. F. Carlson; J. Rickard, Thick subcategories of the stable module category, *Fund. Math.* **153** (1997), no. 1, 59–80.

[6] D. J. Benson; S. B. Iyengar; H. Krause, Stratifying modular representations of finite groups, *Ann. of Math. (2)* **174** (2011), no. 3, 1643–1684.

[7] D. Benson; S. B. Iyengar; H. Krause; J. Pevtsova, Stratification for module categories of finite group schemes, *J. Amer. Math. Soc.* **31** (2018), no. 1, 265–302.

[8] E. M. Friedlander; J. Pevtsova, Π-supports for modules for finite group schemes, *Duke Math. J.* **139** (2007), no. 2, 317–368.

[9] M. J. Hopkins, Global methods in homotopy theory, *Homotopy theory (Durham, 1985)*, 73–96, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 117, *Cambridge Univ. Press, Cambridge*, 1987.

[10] H. Matsui; R. Takahashi, Thick tensor ideals of right bounded derived categories, *Algebra Number Theory* **11** (2017), no. 7, 1677–1738.

[11] A. Neeman, The chromatic tower for $D(R)$, With an appendix by Marcel Bökstedt, *Topology* **31** (1992), no. 3, 519–532.

[12] S. Oppermann; J. Šťovíček, Duality for bounded derived categories of complete intersections, *Bull. Lond. Math. Soc.* **46** (2014), no. 2, 245–257.

[13] R. W. Thomason, The classification of triangulated subcategories, *Compos. Math.* **105** (1997), no. 1, 1–27.

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya, Aichi 464-8602, Japan

E-mail address: takahashi@math.nagoya-u.ac.jp

URL: http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~takahashi/

Unbounded polytopes and toric type cusp singularities

Masanori Ishida
Mathematical Institute, Tohoku University

December 27, 2017

Introduction

In the theory of toric varieties, a fundamental result is the fact that a toric variety of dimension r with an ample invertible sheaf corresponds to a convex polytope with integral vertices in $\mathbf{R}^r$. In this note, we define quasi-polyhedral sets in $\mathbf{R}^r$ as a generalization of convex polytopes. For a quasi-polyhedral set P, the cc-dimension is defined as the dimension of the characteristic cone of P. A convex polytope is the case of cc-dimension zero. We call P a quasi-polytope if every proper face of P is bounded.

We recall the theory of cusp singularities defined by Tsuchihashi in this view point. This cusp singularity is defined for a pair of an open convex cone C and a discrete linear group Γ acting on it. Since the cusp singularity is constructed by contracting a toric divisor, it is important to consider the singularity with the toric resolution. In Section 4, we describe the construction over an arbitrary field by using a formal scheme, and algebraize the toric resolution to a scheme morphism. In Section 5, we consider a quasi-polytope of maximal cc-dimension with a group action. Such a quasi-polytope gives a cusp singularity if the action satisfies some conditions. Finally, in Section 6, we introduce beautiful examples obtained by Tsuchihashi recently. The four-dimensional example has a simple normal crossing exceptional divisor consisting of four irreducible components with 48 quadruple points.

1 Quasi-polyhedral sets

Let r be a non-negative integer and let M, N be mutually dual free $\mathbf{Z}$-modules of rank r. We denote $M_{\mathbf{R}} = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ and $N_{\mathbf{R}} = N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, which are real spaces of dimension r. Then there exists a natural perfect bilinear map

$$\langle\ ,\ \rangle : M_{\mathbf{R}} \times N_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{R}\ .$$

Although M and N have standard roles in the theory of toric varieties, we may exchange the roles in the study of dualities (cf. [I3]). Points in M and N are called *lattice points*, and those in $M_{\mathbf{Q}}$ and $N_{\mathbf{Q}}$ are *rational points*.

Since each $u \in N_{\mathbf{R}}$ is a linear function of $M_{\mathbf{R}}$ by the bilinear map, $\{x \in M_{\mathbf{R}} ; \langle x, u\rangle \geq a\}$ is a closed half space of $M_{\mathbf{R}}$ for every $a \in \mathbf{R}$ if $u \neq 0$. We denote it by $(u \geq a)$. The closed half space $(u \leq a)$ and open half spaces $(u > a)$, $(u < a)$ as well as the hyperplane $(x = a)$ are defined similarly. We will use this notation also for $u = 0$, where the set is not a half space nor a hyperplane.

A non-empty subset $C \subset M_{\mathbf{R}}$ is called a *polyhedral cone* if there exist $x_1, \ldots, x_s \in M_{\mathbf{R}}$ with $C = \mathbf{R}_0 x_1 + \cdots + \mathbf{R}_0 x_s$, where $\mathbf{R}_0 = \{c \in \mathbf{R} ; c \geq 0\}$. It is known that C is also expressed as $(u_1 \geq 0) \cap \cdots \cap (u_t \geq 0)$ with $u_1, \ldots, u_t$ in $N_{\mathbf{R}}$ (cf. [O, A.1]). We say C is *rational* if $x_1, \ldots, x_s$, or equivalently $u_1, \ldots, u_t$, are rational points. In this case, we can take these points in M and N, respectively.

For a subset $E \subset M_{\mathbf{R}}$ and $x \in M_{\mathbf{R}}$, we denote $E - x = \{y - x ; y \in E\}$. A subset E is said to be *locally polyhedral at* x if $E - x$ is equal to a polyhedral cone in a neighborhood of the origin. This is equivalent to the condition that $x \in E$ and E is equal to $(u_1 \geq a_1) \cap \cdots \cap (u_t \geq a_t)$ for some $u_1, \ldots, u_t \in N_{\mathbf{R}}$ and $a_1, \ldots, a_t \in \mathbf{R}$ in a neighborhood of x. If $\dim E = r$, then we may assume that $\langle x, u_i\rangle = a_i$ and u_i defines an $(r-1)$-dimensional face of the polyhedral cone for every i by reducing redundant members. A non-empty convex subset P is called a *quasi-polyhedral set* if P is locally polyhedral at every point $x \in \overline{P}$. Then it follows that $P = \overline{P}$, i.e., P is closed. A quasi-polyhedral set P is *rational* if $u_1, \ldots, u_t$ and $a_1, \ldots, a_t$ above are rational for all x. A non-empty subset Q of a quasi-polyhedral set $P \subset M_{\mathbf{R}}$ is called a *face* if there exist $u \in N_{\mathbf{R}}$ and $a \in \mathbf{R}$ such that $P \subset (u \geq a)$ and $Q = P \cap (u = a)$. If $\dim P = r$ and P has an irredundant expression $(u_1 \geq a_1) \cap \cdots \cap (u_t \geq a_t)$ at a point $x \in P$, then P is contained in $(u_i \geq a_i)$ and $P \cap (u_i = a_i)$ is a face of dimension $r - 1$ for each i. We call P a *quasi-polytope* if every proper face of P is bounded.

For a non-empty closed convex set D, the *characteristic cone* $\mathrm{cc}(D)$ is defined by

$$\mathrm{cc}(D) = \{y \in M_{\mathbf{R}} ; x + \mathbf{R}_0 y \subset D\}$$

for $x \in D$ (cf. [G, p.24]). This is a closed convex cone which does not depend on the choice of x since we assume D closed. We define *cc-dimension* by $\text{cc-dim}(D) = \dim \mathrm{cc}(D)$ which has a value between 0 and r, and is zero if and only if D is bounded (cf. [G, p.24]).

2 Open cone with lattice

We fix Euclidean metrics on the real spaces $N_{\mathbf{R}}$ and $M_{\mathbf{R}}$. The metrics are used in the proof of Theorem 2.3 and in the definition of the characteristic function of a cone.

Let C be an open convex cone in $N_{\mathbf{R}}$, i.e., C is the interior of a full-dimensional closed convex cone in $N_{\mathbf{R}}$. We assume the closure $\overline{C}$ of C is strongly convex. Then the dual cone $\overline{C}^{\vee}$ in $M_{\mathbf{R}}$ is also a strongly convex closed cone of dimension r. We set $C^* = \mathrm{int}(\overline{C}^{\vee})$, which is an open convex cone in $M_{\mathbf{R}}$. Note that if $x \in C^*$ then $\{u \in \overline{C} ; \langle x, u\rangle \leq a\}$ is bounded for any $a \geq 0$. Actually, there exist linearly independent $x_1, \ldots, x_r \in C^*$ with $x = x_1 + \cdots + x_r$ since C^* is an open convex cone. Then the set is contained in $(x_1 \geq 0) \cap \cdots \cap (x_r \geq 0) \cap (x_1 + \cdots + x_r \leq a)$ which is clearly bounded.

For a subset $S \subset C^*$, we set

$$K(S) = \{u \in N_{\mathbf{R}} \ ; \ \langle x, u\rangle \geq 1 \text{ for all } x \in S\} = \bigcap_{x\in S} (x \geq 1) \ .$$

Clearly, $K(S)$ is a closed convex set of $N_{\mathbf{R}}$ which might be empty.

Lemma 2.1 *Assume that $S \subset C^*$ is discrete in $M_{\mathbf{R}}$. Let u be a point of C. Then (1) u is outside $K(S)$ if $S \cap (u < 1) \neq \emptyset$, (2) $K(S)$ is locally equal to the convex set $\bigcap_{x\in S\cap(u=1)}(x \geq 1)$ at u if $S \cap (u < 1) = \emptyset$. A point u is in the interior of $K(S)$ if $S \cap (u \leq 1) = \emptyset$. In particular, $K(S)$ is locally polyhedral at every point of $\overline{K(S)} \cap C$.*

Proof If there exists $x \in S \cap (u < 1)$, then u is outside $K(S) \subset (x \geq 1)$. Assume $S \cap (u < 1) = \emptyset$. Set $S_1 = S \cap (u = 1)$ and $S_2 = S \cap (u > 1)$. Since $u \in C = \mathrm{int}(\overline{C})$, $C^* \cap (u < c)$ is bounded and $S \cap (u < c)$ is a finite set for any $c > 0$. Hence S_1 is finite, and there exists $a = \min\{\langle x, u\rangle \ ; \ x \in S_2\} > 1$ if $S_2 \neq \emptyset$. Then $a^{-1}u \in K(S_2)$ and $a^{-1}u + C \subset K(S_2)$. Since $a^{-1}u + C$ is an open set which contains $u = a^{-1}u + (1 - a^{-1})u$ and $K(S) = K(S_1) \cap K(S_2)$, $K(S)$ is equal to $K(S_1) = \bigcap_{x\in S_1}(x \geq 1)$ in this neighborhood of u. It is locally polyhedral since S_1 is finite. QED

Lemma 2.2 *Let $A \subset N_{\mathbf{R}}$ be a bounded closed convex subset and $u_0 \in N_{\mathbf{R}}$ a point such that the convex hull $B = \mathrm{conv}(A \cup \{u_0\})$ is of dimension r. Let D be the cone generated by $A - u_0$. Then, for any subsets $E \subset N_{\mathbf{R}}$ and $F \subset (D + u_0) \setminus B$, we have*

$$B \cap \mathrm{conv}(A \cup E) = B \cap \mathrm{conv}(A \cup E \cup F) \ .$$

In particular, if $\mathrm{conv}(A \cup E)$ is a polyhedron, then $P = \mathrm{conv}(A \cup E \cup F)$ is locally polyhedral at each point of $\overline{P} \cap \mathrm{int}(B)$.

Proof By a translation, we may assume $u_0 = 0$. If $0 \in A$, then $B = A$ and the assertion is obvious. We assume $0 \notin A$. Then $B \setminus A$ is an open subset of D (see Remark 2.3). Let u be a point of $B \cap \mathrm{conv}(A \cup E \cup F)$. It suffices to show that u is in $\mathrm{conv}(A \cup E)$. We may assume $u \notin A$. Since $u \in \mathrm{conv}(A \cup E \cup F)$, there exist $s > 0$, $v_1, \ldots, v_s \in A \cup E \cup F$ and $a_1, \ldots, a_s > 0$ with

$$a_1(v_1 - u) + \cdots + a_s(v_s - u) = 0 \ .$$

If $v_i \in F$ for an i, then take the maximal $c_i \geq 0$ with $v'_i = u + c_i(v_i - u) \in B$. Clearly $c_i < 1$ since $v_i \notin B$. Since $u + c'(v_i - u) \in D \setminus B$ for $c_i < c' \leq 1$, $v'_i \in B$ is in the closure of $D \setminus B$, and is in A since $B \setminus A$ is open in D. In particular, c_i is positive. Namely, we can replace $a_i(v_i - u)$ by $(a_i/c_i)(v'_i - u)$ in the equality. If we do it for all v_i's in F, we get an equality which says that u is in $\mathrm{conv}(A \cup E)$. QED

Remark 2.3 Here we prove this fact. Let w be a point in $B \setminus A$. Then there exist $p \in A$ and $0 \leq a < 1$ with $w = ap$. Since A is closed, there exists an open convex neighborhood U of w in $N_{\mathbf{R}}$ which does not intersect A. Suppose that U contains a point z of $D \setminus B$. Then there exist $q \in A$ and $b > 1$ with $z = bq$. For the real numbers $0 \leq a < 1$, $b > 1$, the equation $ta + (1 - t)b = 1$ has a solution $0 < t < 1$. Then $tw + (1 - t)z = tap + (1 - t)bq$ is in $U \cap A$, which is a contradiction since $U \cap A = \emptyset$. Hence $w \in U \cap D \subset B \setminus A$, which means $B \setminus A$ is open in D.

Let S_C be the set of elements $m \in M \cap C^*$ such that there exists $u \in C$ with $\langle m, u \rangle = 1$ and $\langle m', u \rangle > 1$ for $m' \in (M \cap C^*) \setminus \{m\}$. If $(m_1 \geq 1) \cap \cdots \cap (m_t \geq 1)$ is the irredundant expression of $K(M \cap C^*)$ at a point u, then $m_1, \ldots, m_t$ are in S_C. We see easily that $K(M \cap C^*) \cap C = K(S_C) \cap C$, and hence $K(M \cap C^*) = K(S_C)$ as closures. We set $Q_m = K(S_C) \cap (m = 1)$ for $m \in S_C$, which is locally equal to the hyperplane $(m = 1)$ at u in the definition of S_C. Then, we get one-to-one correspondences $m \mapsto Q_m$ between S_C and the set of codimension one faces of $K(S_C)$. $N \cap (\overline{C} \setminus \{0\})$ is contained in $K(S_C)$ since $\langle x, u \rangle$ is a positive integer for $x \in M \cap C^*$ and $u \in N \cap (\overline{C} \setminus \{0\})$. In particular, $K(S_C)$ is not necessarily contained in C (cf. [AMRT, II, 5.3]).

Theorem 2.4 *Let Θ be the convex hull of $N \cap C$. If C contains $K(S_C)$ and Θ contains $K_d = dK(S_C)$ for a positive integer d, then Θ is a locally polyhedral closed subset of $N_{\mathbf{R}}$. The vertices of Θ are in $N \cap C$.*

Proof Since $N \cap C \subset K(S_C)$, Θ is a subset of the closed convex set $K(S_C)$. Since we assume $K(S_C) \subset C$, the closure of Θ is contained in C. Hence it suffices to show that Θ is locally polyhedral at every point $u \in \overline{\Theta}$ with assuming $u \in C \setminus \mathrm{int}(K_d)$. Set $S_1 = \{m \in S_C \ ; \langle m, u \rangle \leq d\}$ and $S_2 = S_C \setminus S_1$. Then $a = \min\{\langle m, u \rangle \ ; m \in S_2\}$ is greater than d.

We set $b = d/a$, which is a positive number less than 1. Since $(1/d)u$ is outside $\mathrm{int}\, K(S_C)$, S_1 is not empty by Lemma 2.1. Let A_0 be the union of $(r-1)$-dimensional polytopes $K_d \cap (m = d)$ for $m \in S_1$.

We set $u' = bu$ and will show that $E = \{v \in N \cap C \ ; \overline{u'v} \cap K_d = \emptyset\}$ is finite. If it failed, we get a sequence $\{v_i\}$ from this set such that $\lim_{i \to \infty} |v_i| = \infty$ and $|v_i|^{-1} v_i$ converges to a unit vector w. Since v_i's are in C, w is in $\overline{C} \setminus \{0\}$. Hence $\langle m, w \rangle > 0$ for every $m \in S_C$. Since $\langle m, u' + cw \rangle = \langle m, u' \rangle + c\langle m, w \rangle$ and $\langle m, u' \rangle < d$ for $m \in S_1$, there exists $c > 0$ such that $\min\{\langle m, u' + cw \rangle \ ; m \in S_1\} = d$. Note that $\langle m, u' \rangle = b\langle m, u \rangle \geq ba = d$ and $\langle m, u' + cw \rangle > d$ for $m \in S_2$. Hence $u' + cw$ is a point of A_0 which is not on $K_d \cap (m = d)$ for any $m \in S_2$. Furthermore, $u' + c'w$ is a point of $\mathrm{int}(K_d)$ for $c' > c$. Since w is also the limit of $w_i = |v_i|^{-1}(v_i - u')$, and since $v_i = u' + |v_i| w_i$, the segment $\overline{u'v_i}$, which contains $u' + c'w_i$ if $c' < |v_i|$, intersects K_d for large i. This is a contradiction.

Assume that $v \in N \cap C$ and $\overline{u'v}$ intersects K_d. Let $c \geq 0$ be the minimal number with $v' = u' + c(v - u') \in K_d$. Since $K_d = dK(S_1) \cap dK(S_2)$ and $\overline{u'v'} \subset dK(S_2)$, there exists $m \in S_1$ with $\langle m, v' \rangle = d$, and hence v' is an intersection point of $\overline{u'v}$ and A_0. Let $A = \mathrm{conv}(A_0)$ and $B = \mathrm{conv}(A \cup \{u'\})$. Then u is in the interior of B unless $S_1 = \{m_0\}$ and u is on $K_d \cap (m_0 = d)$. In this case u is in the interior of Θ or locally defined by $(m_0 \geq d)$ at u. We assume u is in the interior of B. Set $F = (N \cap C) \setminus E$. Then by applying Lemma 2.2 for $u_0 = u'$, $\Theta = \mathrm{conv}(E \cup F)$ is locally polyhedral at each point of $\mathrm{int}\, B \cap \overline{\Theta}$, in particular, at u. If u is a vertex of Θ, then $u \in E \subset N \cap C$. QED

The *characteristic function* ϕ of a strongly convex open cone C is defined by

$$\phi(u) = \int_{C^*} \exp(-\langle x, u \rangle) dx$$

for $u \in C$. Important properties of ϕ are written and proved in Vinberg [V1, §2]. In particular, $\phi(u)$ is a positive valued differentiable convex function satisfying $\phi(\lambda u) =$

$\lambda^{-r}\phi(u)$ for $\lambda > 0$, here r is the dimension of $N_{\mathbf{R}}$. Furthermore, by defining $\phi(u) = \infty$ for $u \in \overline{C} \setminus C$, the map $\phi : \overline{C} \to (0, \infty]$ is continuous, and $\{u \in C \ ; \ \phi(u) \leq a\}$ is a closed convex subset of $N_{\mathbf{R}}$ for every $a > 0$.

A subgroup Γ of $\mathrm{GL}(N)$ is also considered as the subgroup $\{{}^{\mathrm{t}}g^{-1} \ ; \ g \in \Gamma\}$ of $\mathrm{GL}(M)$, and acts on both $N_{\mathbf{R}}$ and $M_{\mathbf{R}}$ linearly from the left. Namely, the equality $\langle g(x), g(u)\rangle = \langle x, u\rangle$ holds for $g \in \Gamma$, $x \in M_{\mathbf{R}}$ and $u \in N_{\mathbf{R}}$. We say Γ acts on C if $g(C) = C$ for all $g \in \Gamma$. Then Γ acts also on C^*. Since $g(M) = M$, Γ acts on $K(S_C)$ and $K(S_C) \cap C$. Note that $\det(g) = \pm 1$ is uniquely defined for $g \in \Gamma$.

Let $C/\mathbf{R}_+$ be the set of half lines $\{\mathbf{R}_+ u \ ; \ u \in C\}$ with the topology as the quotient space of C. For any $\lambda > 0$, $\{u \in C \ ; \ \phi(u) = \lambda\}$ is homeomorphic to $C/\mathbf{R}_+$. The following projective transformation maps C to the cylindrical area $\mathbf{R}_+ \times (C/\mathbf{R}_+)$.

Take points $n_0 \in C$ and $x_0 \in C^*$ with $\langle x_0, u_0\rangle = 1$. Let $p : N_{\mathbf{R}} \to N_{\mathbf{R}}/\mathbf{R}n_0$ be the natural surjection, and let $D_C = p(C \cap (x_0 = 1))$. Then, the map

$$q : C \longrightarrow \mathbf{R}_+ \times D_C \ , \ \ q(u) = \left(\frac{1}{\langle x_0, u\rangle}, \frac{p(u)}{\langle x_0, u\rangle}\right) \ ,$$

is a homeomorphic projective transformation. For $x \in C^*$ and $a > 0$, the subset $C \cap (x \geq a)$ is mapped to $\{(t, v) \in \mathbf{R}_+ \times D_C \ ; \ at \leq l_x(v)\}$, where l_x is the affine function on $N_{\mathbf{R}}/\mathbf{R}n_0$ such that $l_x(p(u)) = \langle x, u\rangle$ for $u \in (x_0 = 1)$. Since $x \in C^*$, there exist $m_x, M_x > 0$ with $m_x \leq l_x \leq M_x$. For $S \subset C^*$, $q(K(S) \cap C) = \{(t, v) \ ; \ t \leq l_x \text{ for all } x \in S\}$. We regard D_C as the quotient $C/\mathbf{R}_+$ through this homeomorphism. If a linear automorphism g of $N_{\mathbf{R}}$ fixes the cone C, then g induces a homeomorphism on D_C which is compatible with that on C. We see ϕq^{-1} is also a differentiable convex function, which satisfies $\phi q^{-1}(\lambda t, v) = \lambda^r \phi q^{-1}(t, v)$ for $\lambda > 0$. In particular, $\{u \in C \ ; \ \phi(u) = a\}$ is homeomorphic to D_C for any $a > 0$. Furthermore, q extends to a homeomorphism $\overline{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}_+ \times \overline{D_C}$.

Lemma 2.5 *If a subgroup $\Gamma \subset \mathrm{GL}(N)$ acts on C and the quotient D_C/Γ is compact, then the condition of Theorem 2.4 is satisfied.*

Proof Let $\partial K(S_C)$ be the boundary of $K(S_C)$. Then Γ acts on $\partial K(S_C) \cap C$ which is naturally homeomorphic to $C/\mathbf{R}_+$. Since ϕ is constant on each orbit of Γ and $(C/\mathbf{R}_+)/\Gamma$ is compact, ϕ is bounded on $\partial K(S_C) \cap C$ and has the maximum λ. Let u be a point in the interior of $K(S_C)$. Then $a = \min\{\langle m, u\rangle \ ; \ m \in S_C\} > 1$ and $(1/a)u \in \partial K(S_C) \cap C$. Hence $\phi(u) = a^{-r}\phi((1/a)u) < \lambda$. Since $K(S_C)$ is the closure of its interior as a convex set, ϕ is at most λ on $K(S_C)$. Hence $K(S_C) \subset \phi^{-1}((0, \lambda])$ is contained in C. The vertices of $K(S_C)$ are rational points and form a finite number of orbits since D_C/Γ is compact. Hence there exists $d > 0$ such that all vertices of $dK(S_C)$ are in N. Since $K(S_C)$ is the convex hull of the union of proper faces, and hence of vertices, $dK(S_C)$ is contained in the convex hull of $N \cap C$. QED

3 Toric type cusp singularity

Let $C \subset N_{\mathbf{R}}$ be an open convex cone such that $\overline{C}$ is strongly convex. In this section, we assume that a group $\Gamma \subset \mathrm{GL}(N)$ acts on C and the quotient D_C/Γ is compact. When the action of Γ on C is free, a singularity, which we call a *toric type cusp singularity*, is constructed by Tsuchihashi [T1, Proposition 1.7] (see also [AMRT, p.162, Appendix]). In this paper, we call such pair (C, Γ) a *Tsuchihashi pair* if the action is free. We will discuss on Γ-invariant fans and their blowups.

We define the *canonical fan* Π by the convex closure Θ of $N \cap C$ as follows. Let $F(\Theta)$ be the set of proper faces of Θ. We get the following lemma by Theorem 2.4.

Lemma 3.1 *Each $Q \in F(\Theta)$ is a polytope whose vertices are points of $N \cap C$.*

Since $Q \in F(\Theta)$ is a polytope in a hyperplane $(x = a)$ with $x \in C^*$ and $a > 0$, $\mathbf{R}_0 Q$ is a rational polyhedral cone generated by the set of the vertices of Q. Define

$$\Pi = \{\mathbf{R}_0 Q \ ; \ Q \in F(\Theta)\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

where $\mathbf{0} = \{0\}$, i.e., the zero cone. The following lemma is easy.

Lemma 3.2 *Under the assumption of this section, Π is a fan of $N_{\mathbf{R}}$ with the support $C \cup \{0\}$. The action of Γ on C induces an action on $\Pi \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that $(\Pi \setminus \{\mathbf{0}\})/\Gamma$ is finite and every stabilizer is finite. The action is free if and only if that on C is free.*

Similarly, we can also define a fan Π_0 from the Γ-invariant quasi-polytope $K(S_C)$. We consider the case that Γ acts on a fan Σ of $N_{\mathbf{R}}$ with the support $C \cup \{0\}$ which is locally finite at each point of C. Then Σ is said to be Γ-*invarinat* or Γ-*admissible* if $(\Sigma \setminus \{\mathbf{0}\})/\Gamma$ is finite (cf. [AMRT, Chapter 2]). In our case, this finite condition follows from the compactness of D_C/Γ.

Let Σ be a Γ-invariant fan. A *support function* of Σ is a real-valued function h on $C \cup \{0\}$ such that the restriction to each $\sigma \in \Sigma$ is linear and $\mathbf{Z}$-valued on $N \cap \sigma$, i.e., there exists $m_\sigma \in M$ with $h = m_\sigma$ as functions on σ. We call it a support $\mathbf{Q}$-function if we weaken the last condition to $\mathbf{Q}$-valued on $N \cap \sigma$. A support function h is continuous on C since Σ is locally finite. We say h is *convex* if $h(u + v) \geq h(u) + h(v)$ for any $u, v \in C$, and *strictly convex* if $h(u + v) > h(u) + h(v)$ for u, v which are not in a common cone of Σ. For example, $h(u) = \min\{\langle x, u\rangle \ ; \ x \in M \cap C^*\}$ is a strictly convex support function of Π_0.

For an element $\rho \in \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$, we set $\Sigma(\rho\prec) = \{\tau \in \Sigma \ ; \ \rho \prec \tau\}$. Let $\rho \in \Sigma$ be an element of dimension at least two such that $\Sigma(\rho\prec) \cap g(\Sigma(\rho\prec)) = \emptyset$ for every $g \in \Gamma \setminus \{1\}$. Let u be an element of $N \cap \operatorname{rel.int} \rho$. For each $\tau \in \Sigma(\rho\prec)$, we set

$$F(\tau, \rho) = \{\sigma \prec \tau \ ; \ u \notin \sigma, (\mathbf{R}_0 u + \sigma) \cap \operatorname{rel.int} \tau \neq \emptyset\} ,$$

which does not depend on the choice of u. Then, the Γ-*equivariant blowup*, or *star subdivision*, $\operatorname{Bl}_{\Gamma,u} \Sigma$ of Σ at u is defined by

$$\operatorname{Bl}_{\Gamma,u} \Sigma = (\Sigma \setminus \bigcup_{g \in \Gamma} g(\Sigma(\rho\prec))) \cup (\bigcup_{g \in \Gamma} g(\Delta)) ,$$

where

$$\Delta = \{\mathbf{R}_0 u + \sigma \ ; \ \sigma \in F(\tau, \rho), \tau \in \Sigma(\rho\prec)\} .$$

Note that, if Γ acts on Σ freely, then $\rho \in \Sigma$ of dimension r satisfies the condition since $\Sigma(\rho\prec) = \{\rho\}$. Clearly, $\mathrm{Bl}_{\Gamma,u}\Sigma$ is Γ-invariant. The barycentric subdivision of Σ is done by iterating the blowups for all elements of dimensions from r to 2 in Σ in this order. Namely, let $\overline{\Sigma}$ be a set of representatives of Σ/Γ, and take a primitive element $u_\rho \in N \cap \mathrm{rel.\,int}\,\rho$ for all $\rho \in \overline{\Sigma}$. The Γ-equivariant blowups at u_ρ for all $\rho \in \overline{\Sigma}(r)$ do not depend on the order, and all cones of $\overline{\Sigma} \setminus \overline{\Sigma}(r)$ remain in the obtained fan. Furthermore, cones in $\overline{\Sigma}(r-1)$ satisfy the condition in the new fan. Thus we can blowup Σ at all cones of dimension greater than one. A subdivision of Σ to a non-singular fan can also be done by these blowups if we take u_ρ's properly.

Lemma 3.3 *If Σ has a strictly convex support function h, then $\mathrm{Bl}_{\Gamma,u}\Sigma$ has also a strictly convex support function.*

Proof Let $U = \bigcup_{\tau \in \Sigma(\rho\prec)} \mathrm{rel.\,int}\,\tau$. If $v \in U$ is in $\mathrm{rel.\,int}\,\tau$ and $v = au + u'$ with $a \in \mathbf{R}_0$ and $u' \in \sigma \in F(\tau,\rho)$, then define $l(v) = a$. For $v \in C$, we set $l(v) = l(g^{-1}(v))$ if there exists $g \in \Gamma$ with $v \in g(U)$, and define $l(v) = 0$, otherwise. Then l is a support $\mathbf{Q}$-function on $\mathrm{Bl}_{\Gamma,u}\Sigma$ which is strictly convex on the subdivision of each $\tau \in \Sigma(\rho\prec)$, while h is linear on these cones. Now, we replace l by a multiple cl of an integer $c > 0$ so that l has integral values on $N \cap C$. Then the finiteness of Σ/Γ implies that, for a sufficiently large positive integer d, $dh + l$ is a strictly convex support function of $\mathrm{Bl}_{\Gamma,u}\Sigma$. QED

We assume that Σ has a Γ-invariant strictly convex support function h. For each $\gamma \in \Sigma(1)$, denote the associated prime divisor by $V(\gamma)$. Since the toric variety $Z(\Sigma)$ is not of finite type, a divisor on it may be an infinite sum. Namely, an infinite sum $D = \sum a_\gamma V(\gamma)$ is a *Cartier divisor* if the restriction $D|U(\sigma)$ to the affine toric variety $U(\sigma)$ is principal for every $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$. A Cartier divisor $D = \sum a_\gamma V(\gamma)$ is Γ-invariant if $a_\gamma = g(a_\gamma)$ for all $\gamma \in \Sigma(1)$ and $g \in \Gamma$. The associated invertible sheaf $\mathcal{O}_{Z(\Sigma)}(D)$ is also Γ-invariant if D is so. For a support function h of Σ, the associated Cartier divisor is defined by $D_h = -\sum h(n_\gamma)V(\gamma)$, where n_γ is the primitive generator of γ (cf. [O, p.69]). When h has only non-negative values, the coefficients of D_h are non-positive, i.e., $\mathcal{O}_{Z(\Sigma)}(D_h)$ is an ideal sheaf.

Lemma 3.4 *For a strictly convex support function h, the restriction of $\mathcal{O}_{Z(\Sigma)}(D_h)$ to $V(\gamma)$ is ample for all $\gamma \in \Sigma(1)$.*

Proof We set $N(\gamma) = N \cap (\gamma + (-\gamma))$ and $N[\gamma] = N/N(\gamma)$. Then $V(\gamma)$ is the $(r-1)$-dimensional complete toric variety defined by the complete fan $\Sigma[\gamma] = \{\sigma[\gamma]\ ;\ \sigma \in \Sigma(\gamma\prec)\}$ of $N[\gamma]_{\mathbf{R}}$, where $\sigma[\gamma]$ is the image of σ in $N[\gamma]_{\mathbf{R}} = N_{\mathbf{R}}/N(\gamma)_{\mathbf{R}}$ (cf. [O, Corollary 1.7]). There exists an element $m_0 \in M$ such that $h = m_0$ on γ. Then $\{(h - m_0)|\sigma\ ;\ \sigma \in \Sigma(\gamma\prec)\}$ induces a strictly convex support function $\bar{h}$ of $\Sigma[\gamma]$ which defines an invertible sheaf isomorphic to $\mathcal{O}_{Z(\Sigma)}(D_h)|V(\gamma)$. Hence it is ample by [O, Corollary 2.14]. QED

4 Power series ring

We fix a field k of an arbitrary characteristic from this section.

Let σ be a strongly convex rational polyhedral cone of $N_{\mathbf{R}}$, and let $\{n_1, \ldots, n_s\}$ be the set of primitive generators of the one-dimensional faces. In particular, $\sigma^\vee = (n_1 \geq 0) \cap \cdots \cap (n_s \geq 0)$. We consider the topology of the ring $k[M \cap \sigma^\vee]$ defined by the ideals

$$I_d = \langle \mathbf{e}(m) \; ; m \in M \cap (n_1 \geq d) \cap \cdots \cap (n_s \geq d) \rangle_k$$

for $d \geq 0$. We denote by $k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge$ the completion of $k[M \cap \sigma^\vee]$ with respect to this topology.

We denote by $\langle\langle M \rangle\rangle_k$ the k-vector space $\prod_{m \in M} k\mathbf{e}(m)$, which is not a ring if $r \geq 1$. An element of $\langle\langle M \rangle\rangle_k$ is written as an infinite sum $\sum a_m \mathbf{e}(m)$. We regard $k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge$ a vector subspace for every cone σ. Then $\sum a_m \mathbf{e}(m)$ is in $k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge$ if and only if $a_m = 0$ for $m \notin M \cap \sigma^\vee$ and there exist only finite m with $a_m \neq 0$ outside $m_0 + M \cap \sigma^\vee$ for every $m_0 \in M \cap \sigma^\vee$. Note that $\langle\langle M \rangle\rangle_k$ has a structure of $k[M]$-module.

Let (C, Γ) be a Tsuchihashi pair. We consider a Γ-invarinat fan Σ satisfying the following conditions.

(1) For any $\sigma, \tau \in \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$, there exist at most one $g \in \Gamma$ with $g(\sigma) \cap \tau \neq \mathbf{0}$. In particular, $g(\sigma) \neq \sigma$ if $g \neq 1$.

(2) There exists a strictly upper convex Γ-invariant support $\mathbf{Q}$-function h on Σ, i.e., $h(g(u)) = h(u)$ for $u \in C$ and $g \in \Gamma$, $h(u + u') \geq h(u) + h(u')$ for $u, u' \in C$ and the equality holds if and only if u and u' are in a common cone $\sigma \in \Sigma$, and $h(u)$ are rational for all $u \in N \cap C$.

Since $(\Sigma \setminus \{\mathbf{0}\})/\Gamma$ is finite, we may assume that $h(u) \in \mathbf{Z}$ for every $u \in N \cap C$ by replacing h by dh for a positive integer d, if necessary. For each $\gamma \in \Sigma(1)$, let n_γ be the primitive generator and $V(\gamma)$ the associated prime divisor of the toric variety $Z(\Sigma)$. Then $D_h = -\sum_\gamma h(n_\gamma) V(\gamma)$ is a Cartier divisor. The restriction of the line bundle $\mathcal{O}_{Z(\Sigma)}(D_h)$ to each prime divisor $V(\gamma)$ is ample by Lemma 3.4.

We consider the reduced divisor $D(\Sigma) = Z(\Sigma) \setminus T_N$, and let $\widehat{Z}(\Sigma)$ be the formal completion of $Z(\Sigma)$ along $D(\Sigma)$. The formal scheme $\widehat{Z}(\Sigma)$ is covered by affine formal schemes $\widehat{U}_\sigma = \operatorname{Spf} k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge$ for $\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$.

The quotient $\widehat{Z}(\Sigma)/\Gamma$ is defined naturally. Namely, $\widehat{W} = \widehat{Z}(\Sigma)/\Gamma$ is covered by $\widehat{U}_\sigma$ for σ in the set of representatives $\overline{\Sigma}$ of $(\Sigma \setminus \{\mathbf{0}\})/\Gamma$, and $\widehat{U}_\sigma \cap \widehat{U}_\tau$ is $\widehat{U}_\rho$ if there exist $g_1, g_2 \in \Gamma$ with $\rho = g_1(\sigma) \cap g_2(\tau) \in \overline{\Sigma}$ and empty if otherwise. Note that the ρ here exists uniquely by the property (1). It follows also that $\widehat{W}$ is separated.

Let $A(C^*)$ be the completion of the semigroup ring $k[M \cap C^*]$ with respect to the topology defined by all monomial ideals of finite codimensions. $A(C^*)$ is described as $\prod_{m \in M \cap C^*} k\mathbf{e}(m)$, and each element is denoted as an infinite sum $\sum_{m \in M \cap C^*} a_m \mathbf{e}(m)$ or simply $\sum a_m \mathbf{e}(m)$. For $g \in \Gamma$, we define the automorphism g^* of $A(C^*)$ by

$$g^*(\sum a_m \mathbf{e}(m)) = \sum a_m \mathbf{e}(g^{-1}(m)) \; . \tag{4}$$

Note that $(g_1 g_2)^* = g_2^* g_1^*$, i.e., Γ acts on $A(C^*)$ from the right. We denote the invariant subring $A(C^*)^\Gamma$ by $B(C^*, \Gamma)$, which is integrally closed since so is $A(C^*)$.

Proposition 4.1 *$\widehat{Z}(\Sigma)$ is a formal scheme over $\operatorname{Spf} A(C^*)$, and $\mathrm{H}^0(\widehat{W}, \mathcal{O}_{\widehat{W}}) = B(C^*, \Gamma)$.*

Proof The action of Γ on $A(C^*)$ can be extended to $\langle\langle M\rangle\rangle_k$ by applying (4). Since $\widehat{W}$ is covered by open subspaces $\widehat{U}_\sigma$ for $\sigma \in \overline{\Sigma}$, a section of $\mathcal{O}_{\widehat{W}}$ is written as $(s_\sigma)_{\sigma\in\overline{\Sigma}}$ with $s_\sigma \in k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge$. We will show that each s_σ is in $B(C^*, \Gamma)$. Let g be an arbitrary element of Γ. Take a point x in the relative interior of σ. Since $\sigma \neq \mathbf{0}$, x and $g(x)$ are in C. Hence the segment $E = \overline{xg(x)}$ is contained in C. Since C is the disjoint union of $\operatorname{rel.int}\sigma'$ for $\sigma' \in \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$ and the intersection $E \cap \sigma'$ is a closed segment or a point if non-empty, there exist a sequence

$$\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_l = g(\sigma_0) \in \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$$

such that $x \in \operatorname{rel.int}\sigma_0$, $g(x) \in \operatorname{rel.int}\sigma_l$ and $E \cap \sigma_{i-1} \cap \sigma_i \neq \emptyset$ for $i = 1, \dots, l$. Since $\sigma_{i-1} \cap \sigma_i$ is in $\Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$, by adding this cone if necessary, we may assume $\sigma_{i-1} \prec \sigma_i$ or $\sigma_i \prec \sigma_{i-1}$ for all i. Then we can take $\tau_0, \dots, \tau_l \in \overline{\Sigma}$ and $g_0, \dots, g_l \in \Gamma$ with $\sigma_i = g_i(\tau_i)$ for all i since $\overline{\Sigma}$ is a set of representatives. We have $\tau_l = \tau_0$ since $g(\sigma_0) = \sigma_l$. By assumption, $g_i^{-1}(g_{i-1}(\tau_{i-1})) \prec \tau_i$ or $g_{i-1}^{-1}(g_i(\tau_i)) \prec \tau_{i-1}$, and hence $(g_{i-1}^{-1}g_i)^*(s_{\tau_{i-1}}) = s_{\tau_i}$ as an element of $\langle\langle M\rangle\rangle_k$ for each i. Hence

$$s_{\tau_l} = (g_{l-1}^{-1}g_l)^* \cdots (g_0^{-1}g_1)^*(s_{\tau_0}) = (g_0^{-1}g_l)^*(s_{\tau_0}) \ .$$

Since $\sigma_0 = \sigma \in \overline{\Sigma}$, we have $\tau_0 = \tau_l = \sigma$, $g_0 = 1$ and $g_l = g$. Hence $g^*(s_\sigma) = s_\sigma$. Since g is arbitrary, s_σ is in $B(C^*, \Gamma)$.

If $\sigma, \tau \in \overline{\Sigma}$ has the relation $g(\sigma) \prec \tau$ for an element $g \in \Gamma$, there exists a restriction map $\mathcal{O}_{\widehat{W}}(\widehat{U}_\tau) \to \mathcal{O}_{\widehat{W}}(\widehat{U}_\sigma)$ which is given by g^*. Hence $s_\sigma = g^*(s_\tau) = s_\tau$. Since any two elements of $\overline{\Sigma}$ is connected by this relation, all s_σ's are equal. Thus we know $\mathrm{H}^0(\widehat{W}, \mathcal{O}_{\widehat{W}}) \subset B(C^*, \Gamma)$.

Conversely, for any element $s \in B(C^*, \Gamma)$, $(s_\sigma)_{\sigma\in\overline{\Sigma}}$ defined by $s_\sigma = s$ for all σ is clearly an element of $\mathrm{H}^0(\widehat{W}, \mathcal{O}_{\widehat{W}})$. We are done. QED

Assume that Σ is non-singular and has a positive valued strictly convex Γ-invariant support function h. For each $\sigma \in \Sigma(r)$, there exists a unique $m_\sigma \in M$ with $h = m_\sigma$ on σ. The toric variety $Z(\Sigma)$ is covered by $U_\sigma = \operatorname{Spec}(k[M \cap \sigma^\vee])$ for $\sigma \in \Sigma(r)$, and the invertible sheaf $\mathcal{O}_{Z(\Sigma)}(D_h)$ is the associated sheaf of the ideal $k[M \cap \sigma^\vee]\mathbf{e}(m_\sigma)$ on each affine open set $U(\sigma)$. Hence the induced sheaf $\mathcal{O}_{\widehat{Z}(\Sigma)}(D_h)$ on the formal scheme $\widehat{Z}(\Sigma)$ is that of the ideal $k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge\mathbf{e}(m_\sigma) \subset k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge$ on each $\widehat{U}(\sigma)$.

Proposition 4.2 *Let $\hat{p} : \widehat{Z}(\Sigma) \to \widehat{W}$ be the natural morphism. Then there exists an invertible ideal sheaf $\widehat{\mathcal{L}} \subset \mathcal{O}_{\widehat{W}}$ such that $p^*\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\widehat{Z}(\Sigma)}(D_h)$.*

Proof It is enough to show that $k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge\mathbf{e}(m_\sigma)^\sim$ on each $\widehat{U}(\sigma)$ for $\sigma \in \overline{\Sigma}$ form an invertible sheaf on $\widehat{W}$. For $\sigma, \tau \in \overline{\Sigma}$, the intersection $\widehat{U}(\sigma) \cap \widehat{U}(\tau)$ is covered by $\widehat{U}(\rho)$ such that there exist $g_1, g_2 \in \Gamma$ with $\rho = g_1(\sigma) \cap g_2(\tau) \in \overline{\Sigma}$. Since $\mathbf{e}(g_1(m_\sigma))$, $\mathbf{e}(g_2(m_\tau))$ and $\mathbf{e}(m_\rho)$ defines a same Cartier divisor on $U(\rho)$, $\mathbf{e}(g_1(m_\sigma) - g_2(m_\tau))$ is invertible in $k[M \cap \rho^\vee]^\wedge$. Hence the restriction of $k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge\mathbf{e}(m_\sigma)^\sim$ and $k[M \cap \tau^\vee]^\wedge\mathbf{e}(m_\tau)^\sim$ to $\widehat{U}(\rho)$

through $(g_1^{-1})^*$ and $(g_2^{-1})^*$, respectively, are equal. Hence these invertible sheaves on the affine formal schemes are patched together to an invertible sheaf $\widehat{\mathcal{L}}$. The relation $\hat{p}^*\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\widehat{Z}(\Sigma)}(D_h)$ is clear by the construction. QED

Here we omit the proof of the following theorem (cf. [I4, Theorem 2.4]).

Theorem 4.3 *The ring $B(C^*, \Gamma)$ is a quotient of a formal power series ring of finite variables, i.e., a complete noetherian local ring with the residue field k.*

Lemma 4.4 *The morphism $\hat{q} : \widehat{W} \to \widehat{S} = \mathrm{Spf}\, B(C^*, \Gamma)$ of formal schemes is adic of finite type (cf.* [EGA, I, 10.12, 10.13]*).*

Proof For $m \in M \cap C^*$, the infinite sum $\sum_{g\in\Gamma} \mathbf{e}(g(m))$ is an element of the maximal ideal of $B(C^*, \Gamma)$. Take a positive valued Γ-invariant strictly convex support function h of Σ. Then $P = \{x \in M_{\mathbf{R}} \ ; \langle x, n_\gamma\rangle \geq h(n_\gamma)\}$ is a quasi-polytope contained in C^*. For each $\sigma \in \Sigma(r)$, $m_\sigma \in M \cap C^*$ with $h = m_\sigma$ on σ is a vertex of P such that $P - m_\sigma$ is locally equal to $\sigma^\vee$ at the origin. We set $f_\sigma = \sum_{g\in\Gamma} \mathbf{e}(g(m_\sigma))$. Let $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ be the set of edges of σ. We set $x_i = \mathbf{e}(\gamma_i)$ for $i = 1, \ldots, r$, then $k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge$ is the completion of the polynomial ring $k[x_1, \ldots, x_r]$ by the monomial ideal $I = (x_1 \cdots x_r)$. For $g \in \Gamma \setminus \{1\}$, $g(m_\sigma)$ is not on the face $P \cap (n_{\gamma_i} = h(n_{\gamma_i}))$ of P for $i = 1, \ldots, r$ by the condition (1), and hence $\mathbf{e}(g(m_\sigma) - m_\sigma)$ is in the ideal I. If we write $f_\sigma = u\mathbf{e}(m_\sigma)$ in the $k[M]$-module $\langle\langle M\rangle\rangle_k$, then u is in $1 + I^\wedge \subset k[M \cap \sigma^\vee]^\wedge$. Hence u is a unit on the affine formal scheme $\widehat{U}_\sigma$, and f_σ generates a defining ideal of $\widehat{U}(\sigma)$ with the residue $k[x_1, \ldots, x_r]/(\mathbf{e}(m_\sigma))$. Hence the morphism $\hat{q} : \widehat{W} \to \widehat{S}$ is adic of finite type. QED

Let $q_0 : \widehat{W}_0 \to \mathrm{Spec}\, k$ be the fiber over the residue field. By this lemma, $\widehat{W}_0$ is a k-scheme and $(\widehat{W}_0)_{\mathrm{red}}$ is a union of $V(\gamma)$ for $\gamma \in \overline{\Sigma}(1)$.

Lemma 4.5 *The morphism $\hat{q}$ is proper and $\widehat{\mathcal{L}}|\widehat{W}_0$ is ample.*

Proof Since each $V(\gamma)$ is a compact toric variety and $\overline{\Sigma}(1)$ is finite, $\widehat{W}_0$ is also complete. Hence $\hat{q}$ is proper (cf. [EGA, III, 3.4]). Since the restriction $\widehat{\mathcal{L}}|V(\gamma)$ is isomorphic to $\mathcal{O}_{\widehat{Z}(\Sigma)}(D_h)|V(\gamma)$, it is ample by Lemma 3.4. Hence $\widehat{\mathcal{L}}|\widehat{W}_0$ is ample.
QED

By this lemma, $\hat{q}$ is algebraizable to a scheme morphism [EGA, III, Théorèm 5.4.5]. Namely, there exists a proper morphism $q : W \to \mathrm{Spec}\, B(C^*, \Gamma)$ such that $\widehat{W}$ is the completion of W along the closed fiber. Furthermore, there exists an ample invertible sheaf $\mathcal{L}$ on W such that $\widehat{\mathcal{L}}$ is the pull-back to $\widehat{W}$. We have $q_*\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, B(C^*,\Gamma)}$ by Proposition 4.1. If regard $-D_h = D_{-h}$ as a closed subscheme of $Z(\Sigma)$, then the quotient $\overline{D} = D_{-h}/\Gamma$ is a scheme with the structure sheaf $\mathcal{O}_{\widehat{W}}/\widehat{\mathcal{L}}$. The exact sequence

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{W}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{D}} \longrightarrow 0$$

is algebraized to

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_W \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{D}} \longrightarrow 0\ .$$

Let s_0 be the closed point of $S = \mathrm{Spec}\, B(C^*, \Gamma)$. Then $W_0 = q^{-1}(p_0)$ is equal to $\widehat{W}_0$, and is a subscheme of $\overline{D}$ with the same support $(\widehat{W}_0)_{\mathrm{red}}$.

Theorem 4.6 *Then k-scheme $S \setminus \{s_0\}$ is geometrically regular at every point, i.e., s_0 is an isolated singularity of S.*

Proof Since the toric variety $Z(\Sigma)$ is smooth over k, the local rings of $\widehat{W}$ are geometrically regular. Hence every point of W is also geometrically regular. The proper morphism $q' : W \setminus W_0 \to S \setminus \{s_0\}$ is isomorphic since $\mathcal{L}|(W \setminus W_0)$ is trivial and q'-ample. In other words, q is the contraction of W_0 to the point s_0. Hence each point of $S \setminus \{s_0\}$ is geometrically regular. QED

By Theorem 4.6, we can apply Artin's algebraization theorem [A, Theorem 3.8]. Namely, there exists a closed point v of an algebraic variety V, and $B(C^*, \Gamma)$ is isomorphic to the completion of the local ring $\mathcal{O}_v$ by the maximal ideal. Namely, the cusp singularity is realized as a k-rational isolated singularity of an algebraic variety.

5 Quasi-polytope with group action

We say a quasi-polyhedral set $P \subset M_{\mathbf{R}}$ *non-degenerate* if P contains an interior point, and *strongly convex* if P contains no line (cf. [I5, §1]).

Let P be a non-degenerate strongly convex rational quasi-polyhedral set. For each point $x \in P$, we denote by C_x the cone generated by $P - x$. Since P is non-degenerate, locally polyhedral and rational, C_x is a rational polyhedral cone of dimension r. Hence the dual cone $C_x^\vee \subset N_{\mathbf{R}}$ is a strongly convex rational polyhedral cone. We set

$$\Sigma(P) = \{C_x^\vee \, ; x \in P\} \, .$$

Then $\Sigma(P)$ is a fan of $N_{\mathbf{R}}$ with the support $|\Sigma(P)|$ such that

$$\mathrm{int}(\mathrm{cc}(P)^\vee) \subset |\Sigma(P)| \subset \mathrm{cc}(P)^\vee$$

(cf. [I5, Theorem 1.4]). There exists a one-to-one correspondence $Q \mapsto \sigma_Q$ from the set of faces of P to $\Sigma(P)$ such that $x \in \mathrm{rel.\,int}\, Q$ gives $\sigma_Q = C_x^\vee$, and $\mathrm{rel.\,int}\, \sigma_Q$ is contained in $\mathrm{int}(\mathrm{cc}(P)^\vee)$ if and only if Q is bounded (cf. [I5, Theorem 1.5, Proposition 1.6]). If P is a quasi-polytope, i.e., if every proper face of P is bounded, then $|\Sigma(P)| = \mathrm{int}(\mathrm{cc}(P)^\vee) \cup \{0\}$ [I5, Lemma 3.2].

Let P be a quasi-polytope of cc-dimension r. We consider the case where an affine transformation group $\widetilde{\Gamma}$ of M is acting on P. Namely, each $\tilde{g} \in \widetilde{\Gamma}$ is an affine transformation $x \mapsto g(x) + m_g$ for $x \in M_{\mathbf{R}}$ with $g \in \mathrm{GL}(M)$ and $m_g \in M$. We denote also g the element ${}^{\mathrm{t}}g^{-1} \in \mathrm{GL}(N)$. Then the group $\Gamma = \{g \, ; \tilde{g} \in \widetilde{\Gamma}\}$ acts on both M and N from the left. The corresponding ring isomorphism $g^* : k[M] \to k[M]$ is defined by the map $\mathbf{e}(m) \mapsto \mathbf{e}(g^{-1}(m))$.

We define

$$\widehat{P} = \{(x, t) \in M_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R} \, ; t \geq 0, x \in tP\} \, ,$$

where $0P = \mathrm{cc}(P)$. Then $\widehat{P}$ is a strongly convex closed cone (cf. [I5, Lemma 2.2]). For $\mathcal{A}(P) = (M \oplus \mathbf{Z}) \cap \widehat{P}$, the semigroup ring $A(P) = k[\mathcal{A}(P)]$ has a grading defined by

$$A(P)_d = \bigoplus_{m \in M \cap dP} k\mathbf{e}(m, d)$$

for $d \geq 0$. Here we denote $\mathbf{e}(m, d)$ for $\mathbf{e}((m, d))$. The action of $\widetilde{\Gamma}$ on M induces a linear action on $M \oplus \mathbf{Z}$ such that $\tilde{g}(x, t) = (g(x) + tm_g, t)$ for $(x, t) \in M_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$, which fix the cone $\widehat{P}$. Then $Z(P) = \operatorname{Proj} A(P)$ is equal to the toric variety on which $\widetilde{\Gamma}$ acts (cf. [I5, Proposition 2.5]).

Now we assume that $\widetilde{\Gamma}$ acts on the set of proper faces of P freely, and it has only finite orbits. If we set $C = \operatorname{int} \operatorname{cc}(P)^\vee$ and $\Gamma = \{g \,;\, \tilde{g} \in \widetilde{\Gamma}\}$, then (C, Γ) is a Tsuchihashi pair and we get a cusp singularity (cf. [I5, Proposition 3.3]).

The rational support function h_P on $|\Sigma(P)|$ is defined by

$$h_P(u) = \min\{\langle x, u\rangle \,;\, x \in P\}$$

for $u \in |\Sigma(P)| = C^* \cup \{0\}$. If Q is a face of P, then $h(u) = \langle x, u\rangle$ for $x \in Q$ and $u \in \sigma_Q$. We have $h_P(g(u)) = h_P(u) + \langle m_g, g(u)\rangle$ for $\tilde{g} \in \widetilde{\Gamma}$. Hence $h_P(g(u)) - h_P(u)$ is an integer if $u \in N \cap C$. Since $\Sigma(P) \setminus \{\mathbf{0}\}$ has only finite cones modulo Γ, there exists a positive integer d such that dh_P is integral on $N \cap C$. We take the minimal d. Then dh_P defines a Cartier divisor $D_P = D_{h_P} = -\sum_{\gamma \in \Sigma(P)} dh_P(n_\gamma) V(\gamma)$ and an invertible sheaf $\mathcal{O}_{Z(P)}(D_P)$. Since $g^{-1}(D_P) = D_P - (\mathbf{e}(dg^{-1}(m_g)))$ as divisor, we have an isomorphism

$$g^*(\mathcal{O}_{Z(P)}(D_P)) \simeq \mathcal{O}_{Z(P)}(D_P)$$

of invertible sheaves by multiplying $\mathbf{e}(dg^{-1}(m_g))$. We denote the formal completion of $Z(P)$ along $Y(P) = Z(P) \setminus T_N$ by $\widehat{Z}(P)$, and pull-back of this invertible sheaf by $\mathcal{O}_{\widehat{Z}(P)}(D_P)$. If the morphism $\hat{p} : \widehat{Z}(P) \to \widehat{Z}(P)/\Gamma$ is defined, there exists an invertible sheaf $\widehat{\mathcal{L}}_P$ such that $\hat{p}^*\widehat{\mathcal{L}}_P = \mathcal{O}_{\widehat{Z}(P)}(D_P)$ by the above isomorphisms for $g \in \Gamma$.

Although the fan $\Sigma(P)$ might be singular and does not satisfy the condition (1) in Section 4, the algebraization of the quotient of $\widehat{Z}(P)$ by Γ to a scheme morphism $q : W \to \operatorname{Spec} B(C^*, \Gamma)$ by $\widehat{\mathcal{L}}_P$ is possible as in Section 4. Namely, the condition (1) is satisfied if we replace Γ by a sufficiently small normal subgroup Γ' of finite index. The assertion corresponding to Lemma 4.4 is also proved by taking a sufficiently small Γ', while Σ being non-singular is not necessary. Thus we get a projective morphism $q' : W' \to \operatorname{Spec} B(C^*, \Gamma')$ for Γ', then q is obtained by taking the quotient by the action of the finite group Γ/Γ'. Then q is the contraction of $Y(P)/\Gamma$ to the closed point s_0 of $S = \operatorname{Spec} B(C^*, \Gamma)$. The algebraization $\mathcal{L}_P$ of $\widehat{\mathcal{L}}_P$ defines an invertible sheaf on $S \setminus \{s_0\}$.

Example 5.1 Let $\{p_i \,;\, i \in \mathbf{Z}\}$ be a set of points in $M_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^2$ defined by the recurrence relation

$$p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{i+1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} p_i + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

and let P be the convex closure of this set. Then P is a quasi-polytope of cc-dimension two with a cyclic group action.

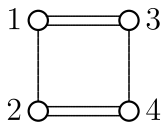
Also, for any Γ-invariant subdivision Σ' of Σ, we can algebraize $\hat{q}' : \widehat{Z(\Sigma')}/\Gamma \to \widehat{S} = \operatorname{Spf} B(C^*, \Gamma)$ to a scheme morphism as a toroidal modifications of $q : W \to S$ if the toroidal embedding $(W, S \setminus \{s_0\})$ is without self-intersection [KKMS, II, §2].

6 Examples by Tsuchihashi

Cusp singularities in arithmetic quotient spaces of $\mathbf{Q}$-rank one are classified by Satake [S, §3]. In particular, there are 3- and 4-dimensional examples obtained from quaternion algebras over $\mathbf{Q}$ or an imaginary quadratic field. Some explicit calculations are done in [Ch]

A beautiful 4-dimensional example of cusp singularity is obtained by Tsuchihashi [T2, §6]. The Dynkin diagram

Λ :



,

which we denote by Λ, gives an infinite Coxeter group.

This group is realized as a linear Coxeter group [V2, Definition 2] as follows. Let K be the simplicial cone generated by the standard basis $\{e_1, \dots, e_4\}$ of $\mathbf{R}^4$. For the vertices of this diagram labeled from 1 to 4, define the matrices by

$$s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

which operate on $\mathbf{R}^4$ with the coordinates (x_1, x_2, x_3, x_4) from the left. Then the subgroup $G = \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \rangle \subset \mathrm{GL}(4, \mathbf{Z})$ is isomorphic to the Coxeter group. Namely, the relations

$$s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = s_4^2 = 1\ , \quad (s_1 s_4)^2 = (s_2 s_3)^2 = 1\ ,$$
$$(s_1 s_2)^3 = (s_3 s_4)^3 = 1\ , \quad (s_1 s_3)^4 = (s_2 s_4)^4 = 1$$

are checked easily. Each s_i fixes the facet $K \cap (x_i = 0)$ of K for $i = 1, \dots, 4$. Then by Vinberg's result [V2, Theorem 2], G is a linear Coxeter gorup, and these are actually the defining relations of the group. We denote the set $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ by $S = S_\Lambda$. Then the parabolic subgroup H_i generated by $S \setminus \{s_i\}$ is a finite group of order 48 for each i. On the other hand, the Dynkin diagram obtained by removing the edge connecting 1 and 3 (resp. 2 and 4) defines a Coxeter group of order 1152, which is isomorphic to the automorphism group of a regular 24-cell (cf. [C2, p.148]). These groups have an important role in the construction. It follows from [V2, Theorem 2] that there exists an open convex cone C, and we have

$$\bigcup_{g \in G} g(K) = C \cup \{0\}\ .$$

Tsuchihashi found a subgroup $\Gamma \subset G$ of index 48 such that $H_i \cap \Gamma = \{1\}$ for every i. Then Γ acts on C freely, and (C, Γ) is a Tsuchihashi pair. The cone $\sigma_0 = K$ is non-singular and the 4-dimensional cones $g(\sigma_0)$ and their faces for $g \in \Gamma$ form a Γ-invariant non-singular fan with the support $C \cup \{0\}$. There exists a strictly positive h, and we get $q : W \to \operatorname{Spec} B(C^*, \Gamma)$ as in previous sections. This is a resolution of the cusp singularity since Σ is non-singular.

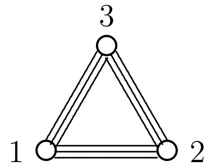
Let $\gamma_i = \mathbf{R}_0 e_i$ for $i = 1, \ldots, 4$. Then $\Sigma_i = \Sigma[\gamma_i]$ is a 3-dimensional complete non-singular fan on which H_i acts. Let V_i be the complete non-singular toric variety associated to Σ_i for each i. Although the canonical divisor of W is not q-ample, $-(4V_1 + 3V_2 + 3V_3 + 4V_4)$ is q-ample.

These 3-dimensional fans are described as follows. Let $\{e_1, e_2, e_3\}$ be the standard basis of $\mathbf{R}^3$. For an order (i, j, k) of $\{1, 2, 3\}$ and $\epsilon_i, \epsilon_j, \epsilon_k = \pm 1$, the cone generated by $\{\epsilon_i e_i, \epsilon_i e_i + \epsilon_j e_j, \epsilon_i e_i + \epsilon_j e_j + \epsilon_k e_k\}$ is a nonsingular cone in $\mathbf{R}^3$ with the lattice Z^3. There are exactly 48 such cones and form a non-singular complete fan Δ_1. Then, Σ_2 and Σ_3 are isomorphic to Δ_1. The fan Δ_2 consists of the same set of cone but in $\mathbf{R}^3$ with the lattice $\mathbf{Z}^3 + \mathbf{Z}(1/2, 1/2, 1/2)$, which is also a non-singular complete fan. The fans Σ_1 and Σ_4 are isomorphic to Δ_2. Hence, each of V_i has 48 torus action invariant points corresponding to the 48 maximal cones.

The exceptional divisor of q is a simple normal crossing divisor consisting of these four toric varieties. There are 48 quadruple points, and all four components go through each of these points at an invariant point. For a choice of the group Γ, I have calculated the intersection of the four irreducible components. By cutting the fan Σ_i with a cube with the center at the origin, each square face is triangulated to six triangles. Figures 1 through 4 are the nets of the cubes and each triangle on the net presents an invariant point of the component. The invariant points of each component are numbered from 0 to 47, and the four points labeled a same number form a quadruple point of the normal crossing exceptional divisor.

Tsuchihashi also found a very nice example in dimension three. Let Ω be the Dynkin diagram:

Ω :



.

Define the matrices

$$s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Then $S = S_\Omega = \{s_1, s_2, s_3\}$ generates a linear Coxeter group acting on $\mathbf{R}^3$, with the base cone K generated by the standard basis of $\mathbf{R}^3$. Let $\widetilde{G}$ be the linear group generated by S and the order 3 rotation

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let Σ be the fan consisting of the 3-dimensional cones $g(K)$ and their faces for all $g \in \widetilde{G}$. Then the subgroup

$$H = \langle rs_1s_2s_3, rs_2s_3s_1, rs_3s_1s_2 \rangle \subset \widetilde{G}$$

of index 12 acts on $\Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$ freely. Thus we get a 3-dimensional toric type cusp singularity. This example is analyzed more precisely in [K].

In this example, $\Sigma(1)$ has only one orbit and $\Sigma(3)$ has four. Hence the exceptional set E of this cusp is a normal crossing irreducible divisor with four triples points. Furthermore, $h : C \cup \{0\} \to \mathbf{R}$ defined by $h(u) = \min\{\langle x, u\rangle \ ; \ x \in M \cap C^*\}$ is a strictly convex support function of Σ. In this case, $h(n_\gamma) = 1$ for the primitive generator n_γ for all $\gamma \in \Sigma(1)$. Hence D_h is the canonical divisor of the toric variety $Z(\Sigma)$ (cf. [O, 2.1]). The canonical divisor is defined by the Euler form

$$\omega = \frac{d\mathbf{e}(m_1)}{\mathbf{e}(m_1)} \wedge \frac{d\mathbf{e}(m_2)}{\mathbf{e}(m_2)} \wedge \frac{d\mathbf{e}(m_3)}{\mathbf{e}(m_3)} \ ,$$

where $\{m_1, m_2, m_3\}$ is a basis of M. Hence $g^*\omega = \det(g)\omega$ for $g \in \mathrm{GL}(N)$. Since $\det(g) = \pm 1$, $\omega^{\otimes 2}$ is invariant by the action of Γ. Hence we know $\mathcal{O}_W(-2E) \simeq \omega_W^{\otimes 2}$, where ω_W is the canonical invertible sheaf of W. Since $\mathcal{O}_W(-E)$ is relatively ample for the contraction morphism $q : W \to \operatorname{Spec} B(C^*, \Gamma)$, so is the canonical sheaf ω_W.

References

[A] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **36**, (1969), 23–58.

[AMRT] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport and Y. Tai, Smooth compactification of locally symmetric varieties, Lie Groups: History Frontiers and Applications IV, Math. Sci. Press, Brookline, Mass. 1975; Second edition, Cambridge University Press, 2010.

[C1] H. S. M. Coxeter, Discrete groups generated by reflections, Ann. of Math. (2) **35** (1934), 588–621.

[C2] H. S. M. Coxeter, Regular Polytopes, the third edition, Dover Publications, Inc, New York, 1973.

[Ch] K. Chinda, Cusp singularities constructed from maximal orders of a quaternion algebra (in Japanese), Master's thesis at Tohoku University, in preparation.

[EGA] A. Grothendieck and J. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique I, II, III, IV, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32**, (1960-1967).

[G] B. Grünbaum, Convex Polytopes, Second edition, Graduate Texts in Math. **221**, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2003.

[I1] M. Ishida, Convex bodies and algebraic geometry - toric varieties and applications, II, in Proc. of the Seminar in Algebraic Geometry, Singapore 1987, World Scientific Publishing CO., Singapore, 1988, 15–32.

[I2] M. Ishida, Cusp singularities given by reflections of stellable cones, International J. Math. **2**, (1991), 635–657.

[I3] M. Ishida, The duality of cusp singularities, Math. Ann. **294**, (1992), 81–97.

[I4] M. Ishida, The graded rings associated to cusp singularities, preprint, (included in the proceedings of Symposium of Algebraic Geometry in Kinosaki 2012)

[I5] M. Ishida, Cusp singularities and quasi-polyhedral sets, to appear in ASPM 75.

[KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford and B. Saint-Donat, Toroidal embeddings I, Lecture Notes in Math. 339, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[K] Y. Komatsu, Construction of cusp singularities by Coxeter groups (in Japanese), Master's thesis at Tohoku University, in preparation.

[N1] Y. Namikawa, Toroidal compactification of Siegel spaces, Lecture Notes in Math. **812**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[O] T. Oda, Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties, Ergebnisse der Math. (3), **15**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1988.

[S] I. Satake, On numerical invariants of arithmetic varieties (The case of $\mathbf{Q}$-rank one), Sugaku Expo., **1**, (1988), Amer. Math. Soc., 59–74.

[T1] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. **35**, (1983), 607–639.

[T2] H. Tsuchihashi, Examples of four dimensional cusp singularities, to appear in J. of MSJ.

[V1] È. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, Trans. Moscaw Math. Soc. **12** (1967), 303–368.

[V2] È. B. Vinberg, Discrete linear groups generated by reflections, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **35** (1971), 1083–1119.

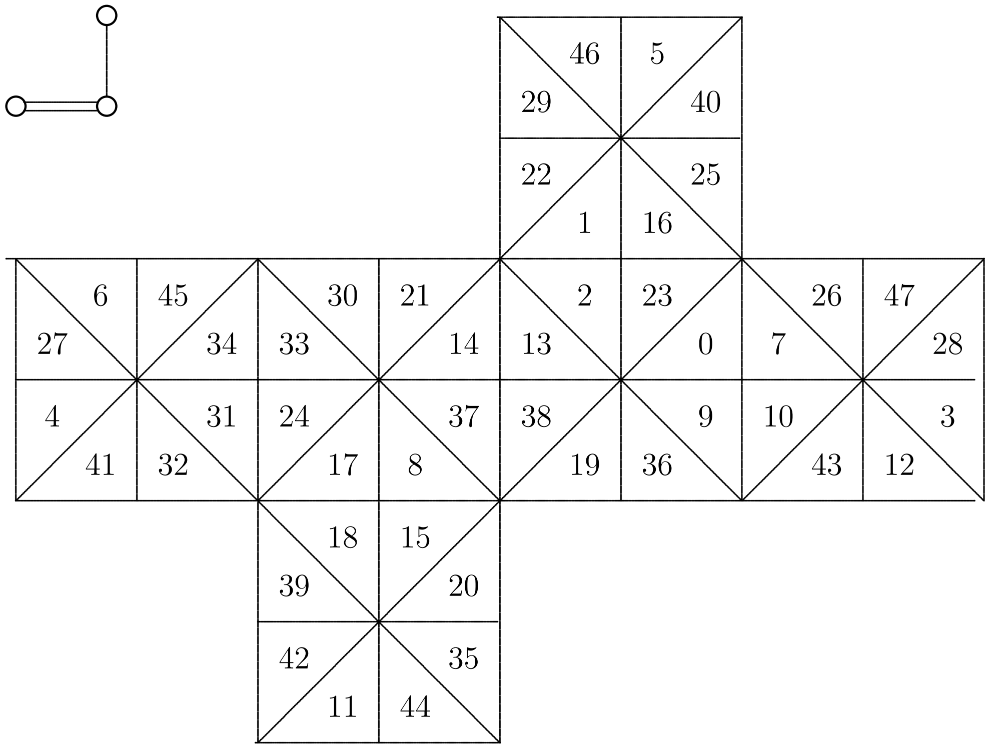


Figure 1:

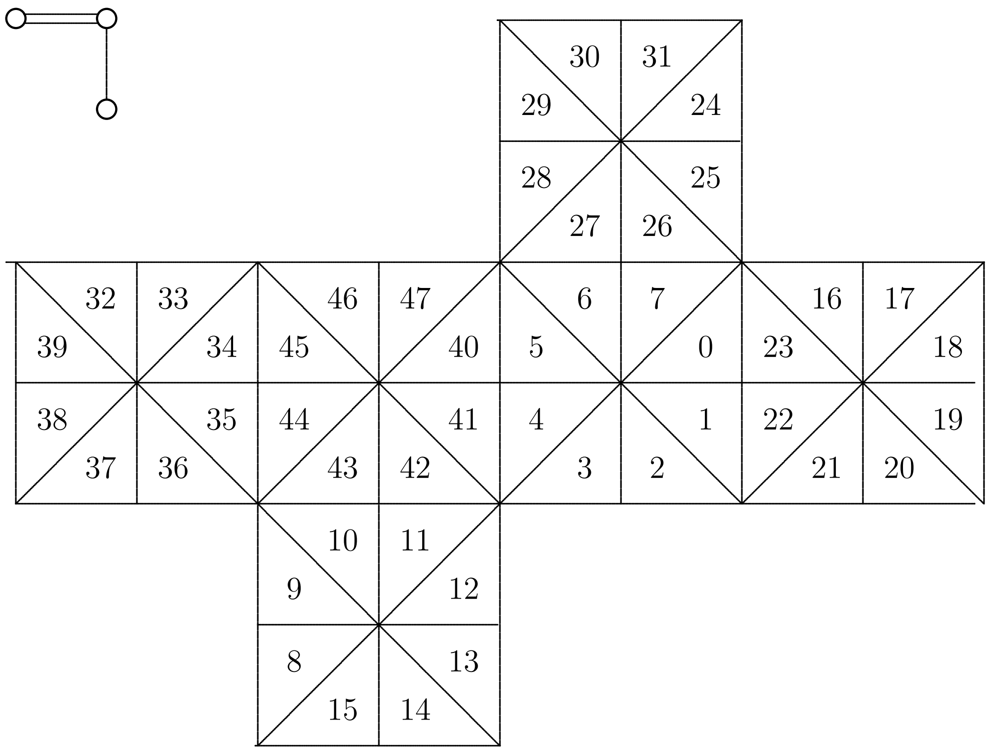


Figure 2:

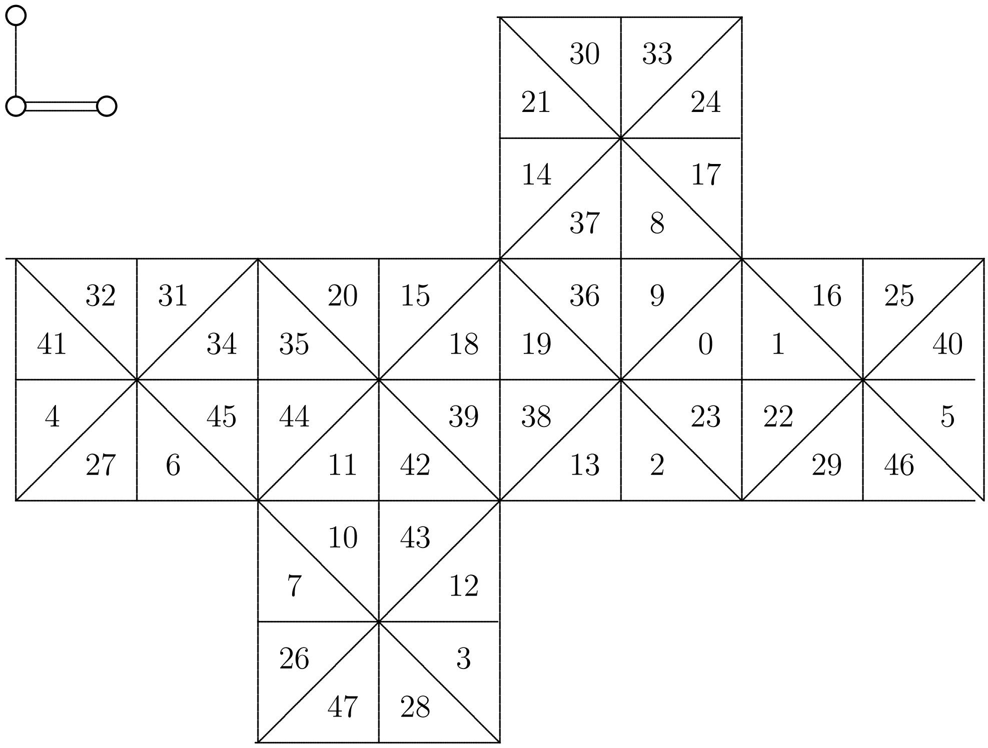


Figure 3:

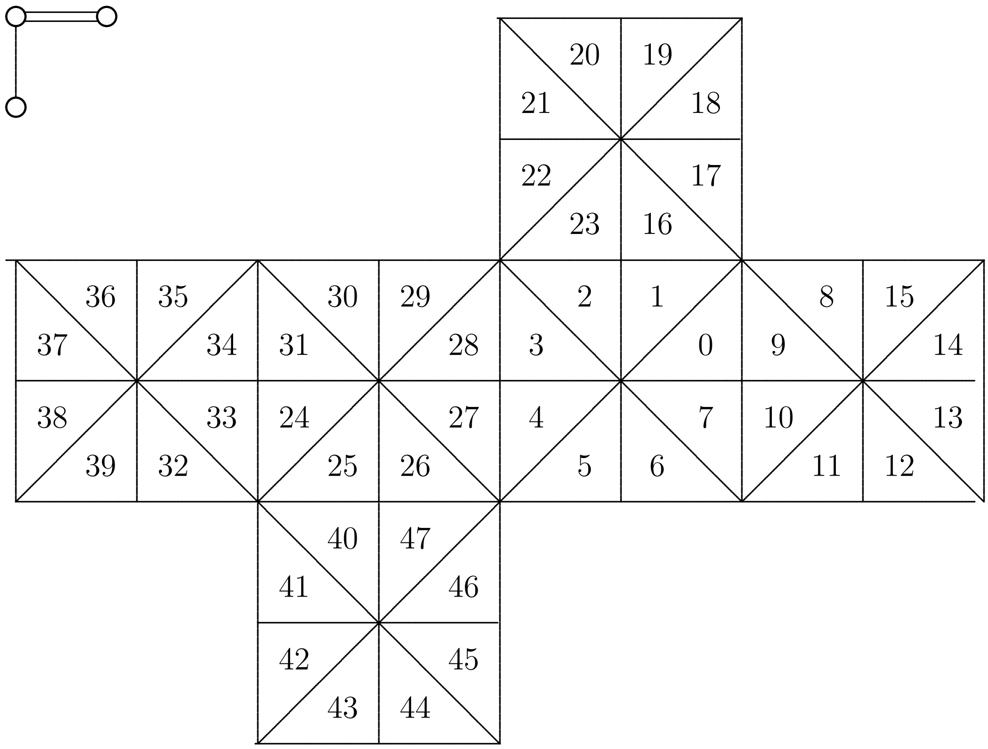


Figure 4:

非可換環上の変形について

川又雄二郎（東大・数理）

1. INTRODUCTION

非可換 Artin 環上の変形理論について述べる。議論は初等的であるが、なかなかうまくいくところが面白いと思う。

小平・Spencer の変形理論ではパラメーター空間は複素多様体であった：コンパクト複素多様体 X の変形とは、複素多様体 $\mathcal{X}$ から点付きの複素多様体（または複素解析空間） $s_0 \in S$ への滑らかで固有的な正則写像 $f : \mathcal{X} \to S$ と、s_0 上のファイバー $f^{-1}(s_0)$ への同型写像 $\phi : X \to f^{-1}(s_0)$ の組のことである。微分可能多様体としての X 上で偏微分方程式を解くことによって、半普遍変形族の存在などが示された。また、半普遍変形族の底空間 S の原点 s_0 における Zariski 接空間はコホモロジー群 $H^1(X, T_X)$ で与えられ、S が滑らかになることに対する障害の空間が $H^2(X, T_X)$ で与えられることなどが示された（東大セミナー・ノート「小平邦彦述：複素多様体の構造の変形」を参照。大事な点がよくまとまっている）。

Grothendieck, Artin, Schlessinger はパラメーター空間として（可換な） Artin 局所環（のスペック）$S = \mathrm{Spec}(R)$ を考えた ([8] 参照)。代数多様体 X の変形とは、代数的スキーム $\mathcal{X}$ からの平坦な射 $f : \mathcal{X} \to S$ と、極大イデアルに対応する点 s_0 上のファイバー $f^{-1}(s_0)$ への同型写像 $\phi : X \to f^{-1}(s_0)$ の組のことである。X が特異点を持つ場合には、f は滑らかではなく平坦になる。半普遍変形の底空間は Artin 局所環の逆極限 $\hat{R}$ として得られ、これは複素解析空間としての半普遍変形の底空間 S の原点 s_0 における完備化と一致する。$\hat{R}$ は無限小拡大の列によって逐次近似され、$T^i = H^i(X, T_X)$, $i = 1, 2$ によって制御される。多様体の代わりに、固定した多様体上の層 F の変形を考えるときには、$T^i = \mathrm{Ext}^i(F, F)$ となる。

Laudal [5] はパラメーター空間として非可換 Artin 環を考えた。変形の定義において、R を非可換にすればあとは同じである。Donovan, Wemyss は 3 次元 flop の例外曲線に対して非可換変形を考えた。すると、非可換変形は可換変形よりもむしろ自然であり、幾何学的により深い意味があることがわかった。非可換 Artin 環は局所環の直積にはならないので、非可換変形は相互作用を持つ多体問題となる。この講演では、単純組というものを定義し、その非可換変形を考えると、Abel 圏における拡大の理論と一致することを見た。そして、相対的例外対象や相対的球面対象を構成し、半直交分解や球面関手が得られることを解説した。

なお、非可換とは必ずしも可換とは限らないという意味とし、可換の場合も含むと解釈する。定義体は $k = \mathbf{C}$ とする。ただし、多くの議論はより一般の体でも成り立つ。以下の記述の詳細は [4] にある。

2. 非可換変形の定義

まず、パラメーター空間として採用する環のカテゴリーを決める：

定義 2.1. 非可換環 R が r-**点付き** k-**代数**であるとは、環準同型の列 $k^r \to R \to k^r$ で合成が恒等写像になっているものがあるときとする。ここで k^r は r 個の k の直積環である。

k^r の i 番目 $(1 \le i \le r)$ の基本ベクトルの像を $e_i \in R$ と書く。これらは互いに直交する冪零元であり、$\sum_{i=1}^r e_i = 1$ が成り立つ。$R_{ij} = e_i R e_j$ とおけば、$R = \bigoplus_{i,j=1}^r R_{ij}$ であり、R を行列表示することができる。$M_i = \mathrm{Ker}(R \to k^r \to k)$ とおく。ここで、2 番目の写像は第 i 成分への射影である。$M = \bigcap_{i=1}^r M_i$ とおくと、$R/M = \bigoplus_{i=1}^r R/M_i$ である。

$R \in (\mathrm{Art}_r)$ とは、$\dim_k R < \infty$ かつ M が冪零となるときとする。このとき、R/M_i はすべての単純両側加群を尽くす。

$R \in (\mathrm{Art}_r)$ 上の変形を定義する：

定義 2.2. $\mathcal{A}$ を k-線形なアーベル圏とする。$F \in \mathcal{A}$ の左 R-加群の構造は、環準同型 $R \to \mathrm{End}(F)$ によって与えられる。F が R 上**平坦**であるとは、右 R-加群に対する関手 $\otimes_R F$ が完全になることである。

$F = \bigoplus_{i=1}^r F_i \in \mathcal{A}$ の $R \in (\mathrm{Art}_r)$ 上の**変形**とは、左平坦 R-加群 F_R と、同型 $\phi : R/M \otimes_R F_R \cong F$ の組のことである。R に対して R 上の変形全体の同型類を対応させれば、**変形関手** $\mathrm{Def}_F : (\mathrm{Art}_r) \to (\mathrm{Set})$ が得られる。

半普遍 (versal) 変形を定義する：

定義 2.3. $F \in \mathcal{A}$ を固定する。$(\hat{R}, \hat{M}) = \lim(R_n, M_n)$ を (Art_r) の対象の逆極限として得られる環とする。ここで $(\hat{R}/\hat{M}^n, \hat{M}/\hat{M}^n) = (R_n, M_n) \in (\mathrm{Art}_r)$ と仮定する。各 R_n 上に与えられた F の変形 F_{R_n} の列と、$n < n'$ に対する同型 $\phi_{nn'} : R_n \otimes_{R_{n'}} F_{n'} \cong F_n$ の組みが以下の条件を満たすとき、F の**半普遍変形**と呼ぶ：

(1) 任意の R' 上の変形 $F_{R'}$ を与えると、ある n と環準同型 $f : R_n \to R'$ 及び同型 $R' \otimes_{R_n} F_{R_n} \cong F_{R'}$ が存在する。

(2) f が誘導する写像 $\hat{M}/\hat{M}^2 \to M'/(M')^2$ はただ一つに定まる。

もしも $\dim \mathrm{Ext}^1(F, F) < \infty$ ならば半普遍変形が存在する ([5])。$\hat{R}$ のアーベル化は、可換な半普遍変形の底空間を与える ([8])。

3. 単純組の非可換変形

以下では単純組の非可換変形を考える：

定義 3.1. $F = \sum_{i=1}^r F_i$ が**単純組**であるとは、$\mathrm{Hom}(F_i, F_j) \cong k^{\delta_{ij}}$ が成り立つときとする。

例 3.2. $f : X \to Y$ を滑らかな 3 次元代数多様体 X の**小さな収縮射**とする。つまり、f は射影的双有理射で、例外集合が 1 次元であるとする。Y は末端特異点を持つ。一つの特異点 $y \in Y$ 上のスキーム論的ファイバーを $f^{-1}(y)$ とする。$f^{-1}(y)$ の純 1 次元閉部分スキーム $Z_1, \dots, Z_r$ で、互いの台の交わりが 0 次元になるものを取る。このとき、$F_i = \mathcal{O}_{Z_i}$ とすれば、$F = \sum F_i$ は単純組になる。

単純組の半普遍変形は、普遍拡大の完全系列を繰り返し適用することによって得られる：

定理 3.3. 単純組 $F = \sum F_i$ に対して、**普遍拡大**の完全系列を帰納的に構成する：

$$0 \to \bigoplus Ext^1(F^{(n)}, F_i) \otimes F_i \to F^{(n+1)} \to F^{(n)} \to 0$$

$R_n = End(F^{(n)})$、 $\hat{R} = \lim R_n$ とおく。このとき、$\{F^{(n)}\}$ は $\hat{R}$ を底空間とする半普遍変形になる。

4. 相対的例外対象

定義 4.1. 射影的多様体 X 上の連接層の有界導来圏 $D^b(\mathrm{coh}(X))$ を考える。

(1) $F \in D^b(\mathrm{coh}(X))$ が**傾斜対象**であるとは、任意の $p \neq 0$ に対して $\mathrm{Hom}^p(F, F) = 0$ が成り立つこととする。

(2) F の**生成する**三角圏 $\langle F \rangle$ とは、以下の条件が成り立つ最大の三角部分圏のことである：$a \in \langle F \rangle$ において、任意の整数 p に対して $\mathrm{Hom}^p(F, a) = 0$ が成り立つならば、$a \cong 0$ となる。

定理 4.2. 傾斜対象 $F \in D^b(coh(X))$ が生成する三角圏 $\langle F \rangle$ において、$R = End(F)$ とおくとき、三角圏の同値 $\langle F \rangle \cong D^b(mod\text{-}R)$ が成り立つ *(*[2], [7], [11]*)*。

相対的例外対象を定義する：

定義 4.3. 射影的多様体 X 上の連接層からなる単純組 F を考える。$R \in (\mathrm{Art}_r)$ 上の変形 F_R が半普遍変形になっていると仮定する。さらに、$p > 0$ ならば $\mathrm{Hom}^p(F_R, F) = 0$ となると仮定する。このとき、F_R は R 上相対的に**例外対象**であるという。

定義 4.4. 三角圏の**半直交分解** $\mathcal{D} = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ とは、

(1) $\mathcal{A}_i$ たちは三角部分圏であり、すべての $\mathcal{A}_i$ を含む三角部分圏は $\mathcal{D}$ しかない。

(2) $a_i \in \mathcal{A}_i$ かつ $i < j$ ならば、$\mathrm{Hom}(a_j, a_i) = 0$ が成り立つ。

定理 4.5. 射影的多様体 X 上の連接層からなる単純組 F の半普遍変形 F_R が R 上の相対的例外対象になっていると仮定する。さらに、F_R は完全複体（局所的に自由層の有界複体と擬同型）であると仮定する。このとき、半直交分解 $D^b(coh(X)) = \langle F^{\perp}, F \rangle$ と、三角圏の同値 $\langle F \rangle \cong D^b(mod\text{-}R)$ が成り立つ。

証明の概略は以下の通りである。R は非可換なので $\mathrm{Spec}(R)$ というものは存在しないが、仮に空間 $[R]$ のようなものを考える。$[R]$ 上の連接層とは、有限生成 R-加群のことである。すると、$F_R \in (\mathrm{coh}(X \times [R]))$ と考えられる。つまり F_R は $\mathcal{O}_X \otimes R$-加群である。二つの射影

$$X \xleftarrow{\ p\ } X \times [R] \xrightarrow{\ q\ } [R]$$

がある。**Fourier-Mukai 型の変換** $\Phi^{F_R^*} : D^b(\mathrm{coh}(X)) \to D^b(\mathrm{mod}\text{-}(R))$ と $\Phi^{F_R} : D^b(\mathrm{mod}\text{-}(R)) \to D^b(\mathrm{coh}(X))$ が、$\Phi^{F_R^*}(a) = q_*(p^* a \otimes_{\mathcal{O}_X} F_R^*)$ 及び $\Phi^{F_R}(b) = p_*(q^* b \otimes_R F_R)$ によって定義される。ここで、F_R^* は F_R の導来双対である。

半直交分解は、関手 $\Psi = \mathrm{cone}(\Phi^{F_R}\Phi^{F_R^*} \to \mathrm{Id})$ で与えられる。つまり、特別三角形 $\mathrm{Hom}_X(F_R, a) \otimes_R F_R \to a \to \Psi(a)$ が成り立つ。

以下ではいくつかの例を述べる：

例 4.6. (1) $X = \mathbf{P}(1, 1, 2)$、$F = \mathcal{O}_X(-1)$ とする。F は可逆ではないが、その半普遍変形 F_R は階数 2 の局所自由層になる。底空間は $R = k[t]/t^2$ である。半直交分解

$$D^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle \mathcal{O}_X(-2), F_R, \mathcal{O}_X \rangle$$

が成り立つ。

(2) X は $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 上の豊富層 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1}(1,1)$ に関する射影的錐体とし、$F = \mathcal{O}_X(-1,0) \oplus \mathcal{O}_X(0,-1)$ とする。非自明な拡大

$$0 \to F_2 \to G_1 \to F_1 \to 0$$

などにより、$F_R = G_1 \oplus G_2$ を得る。$R = \begin{pmatrix} k & kt \\ kt & k \end{pmatrix} \mod t^2$ と書ける。半直交分解

$$D^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle \mathcal{O}_X(-2,-2), \mathcal{O}_X(-1,-1), F_R, \mathcal{O}_X \rangle$$

を得る。

(3) $X = \mathbf{P}(1,1,d)$、$F = \mathcal{O}_X(-1)$ とする。半普遍変形は $R = k[t_1, \dots, t_{d-1}]/(t_1, \dots, t_{d-1})^2$ で与えられる。

$$D^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle \mathcal{O}_X(-d), F_R, \mathcal{O}_X \rangle$$

となる。

(4) $X = \mathbf{P}(1,2,3)$、$F_i = \mathcal{O}_X(-i)$ とする。

F_1 の半普遍変形は、底空間が $k\langle x,y \rangle/(x^2, y^3)$ で与えられ、無限次元になる。可換変形に限れば有限次元になる。

F_2 と F_3 の半普遍変形 G_2, G_3 は有限次元になり、底空間はそれぞれ $R_2 = k[t]/t^3$、$R_3 = k[t]/t^2$ で与えられる。$D^b(\mathrm{coh}(X)) = \langle G_3, G_2, \mathcal{O}_X \rangle$ となる。

5. 相対的球面対象

Fano 多様体には例外対象が現れるが、Calabi-Yau 多様体には球面対象が現れる：

定義 5.1. 滑らかな射影的多様体 X 上に連接層からなる単純組 F を考える。$n = \dim X \geq 2$ とする。$R \in (\mathrm{Art}_r)$ 上の変形 F_R が半普遍変形になっていると仮定する。さらに、以下の仮定が成り立つとき、F_R は R 上相対的に n**-球面対象**であるという：

(1) $p \neq 0, n$ ならば $\mathrm{Hom}^p(F_R, F) = 0$、$\mathrm{Hom}(F_R, F_i) \cong R/M_i$、かつ置換 $\sigma \in S_n$ が存在して $\mathrm{Hom}^n(F_R, F_i) \cong R/M_{\sigma(i)}$ が成り立つ。

(2) $F \otimes \omega_X \cong F$ が成り立つ。

X が滑らかである代わりに、より一般に Serre 関手 S_X の存在を仮定しても良い。この時は (2) の条件は $S(F) \cong F[n]$ となる。

定理 5.2. 相対的 n-球面対象 F_R において、R は 対称環（または *0* 次元の *Gorenstein* 環）になる：$R^* = Hom_k(R,k)$ は階数 *1* の自由右 R-加群になる。

系 5.3. 以下のような双対定理が成り立つ：有限生成右 R-加群 M に対して、$Hom_k(M,k) \cong Hom_R(M,R)$。

これは「射」$[R] \to \mathrm{Spec}(k)$ に対する相対的双対定理である。

定義-定理 5.4. $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は導来圏の間の *Fourier-Mukai* 型の関手（積分関手）とする。F が**球面関手**であるとは、左随伴関手 L と右随伴関手 R が存在し、さらに以下の４条件のうちの２条件が成り立つ時とする。このとき残りの２条件も自動的に成り立つ。[9], [1], [6]。

(1) 特別三角形 $C \to Id_{\mathcal{A}} \to RF$ によって定義される余ねじれ関手 C は $\mathcal{A}$ の自己同値である。

(2) 特別三角形 $FR \to Id_B \to T$ によって定義されるねじれ関手 T は $\mathcal{B}$ の自己同値である。
(3) $R \cong CL[1]$.
(4) $R \cong LT[-1]$.

球面対象は球面関手を与える：

定理 5.5. 相対的 n-球面対象 F_R に対して、$F(\bullet) = \bullet \otimes_R F_R$ で与えられる関手 $F : D^b(\mathit{mod}\text{-}R) \to D^b(\mathit{coh}(X))$ は球面関手になる。

証明の概略。F の右随伴関手は $\Phi_R(\bullet) = R\mathrm{Hom}_X(F_R, \bullet)$、左随伴関手は $\Phi_L = \Phi_R[n]$ で与えられる。$D^b(\mathrm{mod}\text{-}R)$ の生成元 R に対して、$C(R) \cong R[1-n]$ が成り立つので、F は球面関手になる。

例 5.6. (1) $f : X \to Y$ を滑らかな 3 次元代数多様体から孤立特異点を持つ正規代数多様体への射影的双有理射で、例外集合が素因子 E であって、特異 2 次曲面 $\mathbf{P}(1,1,2)$ と同型になるものとする。Y の特異点は複素解析的には $\{(x,y,z,w) \in \mathbf{C}^4 \mid xy + z^2 + w^3 = 0\}$ と同型である。

$\mathcal{O}_E(E) = \mathcal{O}_E(-2) \in D^b(\mathrm{coh}(X))$ は例外対象になる。左直交部分圏 $\mathcal{D} = {}^\perp\mathcal{O}_E(E) \subset D^b(\mathrm{coh}(X))$ を考える。$F = \mathcal{O}_E(-1)$ は $\mathcal{D}$ の元となり、$\mathcal{D}$ の Serre 関手は $S_{\mathcal{D}}(F) = F[2]$ を満たす。F の半普遍変形 F_R の底空間は $R = k[t]/(t^2)$ で与えられ、2-球面対象を得る。

(2) $f : X \to Y$ を滑らかな 4 次元代数多様体から孤立特異点を持つ正規代数多様体への射影的双有理射で、例外集合が素因子 E であって、$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ を射影空間に豊富因子 $\mathcal{O}(1,1)$ により埋め込んだときの射影的錐体と同型になるものとする。このとき、$(\mathcal{O}_E(-2,-2), \mathcal{O}_E(-1,-1)) \in D^b(\mathrm{coh}(X))$ は例外列となる。左直交部分圏 $D = {}^\perp\langle \mathcal{O}_E(-2,-2), \mathcal{O}_E(-1,-1)\rangle \subset D^b(\mathrm{coh}(X))$ を考える。$F = \mathcal{O}_E(-1,0) \oplus \mathcal{O}_E(0,-1)$ は $\mathcal{D}$ の元となり、$\mathcal{D}$ の Serre 関手は $S_{\mathcal{D}}(F) = F[2]$ を満たす。F の半普遍変形 F_R の底空間は $R = \begin{pmatrix} k & kt \\ kt & k \end{pmatrix} \mod t^2$ で与えられ、2-球面対象を得る。ここで、σ は互換である。

さらに高次元の場合でも、E が孤立特異点を持つ 2 次超曲面に対して、Spinor ベクトル束を考えれば同様の結果を得る。この場合でも、いつも 2-球面対象になることは興味深い。

6. 3 次元フロップ

小さな収縮（例 3.2）はフリップやフロップの片側である。

定理 6.1 ([12])**.** 滑らかな 3 次元代数多様体 X からアフィン代数多様体 $Y = \mathit{Spec}(B)$ への小さな収縮射 $f : X \to Y$ を考える。このとき、X 上の局所自由層 M で、$D^b(\mathit{coh}(X))$ を生成し、しかも $H^1(\mathit{Hom}(M,M)) = 0$ が成り立つもの、つまり**傾斜束**が存在する。そして、自己同型環 $A = \mathit{End}(M)$ は非可換 B-代数となり、三角圏の同値 $D^b(\mathit{coh}(X)) \cong D^b(\mathit{mod}\text{-}A)$ が成り立つ。

次の定理がこの研究の出発点であった：

定理 6.2 ([3])**.** 前の定理の状況で、さらに f の例外集合 C が $\mathbf{P}^1$ と同型になっていると仮定する。$I \subset A$ を層準同型 $h : M \to M$ のうちで $M \to \mathcal{O}_X \to M$ の形に分解するもの全体

で生成された両側イデアルとする。このとき、$\mathcal{O}_C$ の半普遍非可換変形の底空間は、環 R/I で与えられる。

非可換環 A は M に対応した箙で表示できるので、$R = A/I$ は具体的に計算できる：

例 6.3. (1) $Y = \{(x,y,u,v) \in \mathbf{C}^4 \mid u^2 + v^2 y = x(x^2+y^3)\}$ とする。このとき、$R = k\langle x,y\rangle/(xy+yx, x^2-y^3)$ となる。R の最大可換商環は、$\mathcal{O}_C$ の可換変形に対応するが、$R^{ab} = k[x,y]/(xy, x^2-y^3)$ となる。

(2) $Y = \{(a,y,z,w) \in \mathbf{C}^4 \mid xy - zw(z+w) = 0\}$ とする。このときは例外集合 C は $\mathbf{P}^1$ と同型な 2 個の曲線 C_1, C_2 からなり、これらが一点で交わっている。$F = \mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2}$ の半普遍非可換変形の底空間は、非可換環 $R = \begin{pmatrix} k+kt^2 & kt \\ kt & k+kt^2 \end{pmatrix} \mod t^3$ で与えられる。

[10] は Gopakumar-Vafa 不変量と非可換変形の関係を明らかにした：

定理 6.4. 滑らかな 3 次元代数多様体 X からアフィン代数多様体 $Y = \mathit{Spec}(B)$ への小さな収縮射 $f: X \to Y$ を考える。Y の特異点 p 上のスキーム論的ファイバー $f^{-1}(p)$ は $C \cong \mathbf{P}^1$ を台とし、C の一般点での長さが l になると仮定する。$\mathcal{O}_C$ の半普遍非可換変形の底空間を R とし、$w = \mathit{length}(R)$, $w^{ab} = \mathit{length}(R^{ab})$ とおく。n_j を j 番目の *Gopakumar-Vafa* 不変量とする。すなわち、X を一般的に変形したときに得られる多様体の上の $(-1,-1)$-曲線であって、X へ退化させたときのクラスが $j[C]$ になるようなものの本数を n_j とする。このとき、以下の公式が成り立つ：$w = \sum_{i=j}^{l} j^2 n_j$, $w^{ab} = n_1$。

References

[1] Anno, Rina; Logvinenko, Timothy. *Spherical DG-functors.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 19 (2017), no. 9, 2577–2656.

[2] Bondal, A. I.; M. M. Kapranov, M. M. *Representable functors, Serre functors, and reconstructions.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 53 (1989), no. 6, 1183–1205, 1337.

[3] Donovan, Will; Wemyss, Michael. *Noncommutative deformations and flops.* Duke Math. J. 165 (2016), no. 8, 1397–1474.

[4] Kawamata, Yujiro. *On multi-pointed non-commutative deformations and Calabi-Yau threefolds.* arXiv: 1512.06170

[5] Laudal, O. A. *Noncommutative deformations of modules.* The Roos Festschrift volume, 2. Homology Homotopy Appl. 4 (2002), no. 2, part 2, 357–396.

[6] Meachan, Ciaran. *A note on spherical functors.* arXiv:1606.09377

[7] Rickard, J. *Morita theory for derived categories.* J. London Math. Soc. Vol. 39, pp. 436–456, 1989.

[8] Schlessinger, Michael. *Functors of Artin rings.* Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 208–222.

[9] Seidel, Paul; Thomas, Richard. *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves.* Duke Math. J., Volume 108, Number 1 (2001), 37–108.

[10] Toda, Yukinobu. *Non-commutative width and Gopakumar-Vafa invariants.* Manuscripta Math. 148 (2015), no. 3-4, 521–533.

[11] Toda, Yukinobu; Uehara, Hokuto. *Tilting generators via ample line bundles.* Adv. Math. 223 (2010), no. 1, 1–29.

[12] Van den Bergh, Michel. *Three-dimensional flops and noncommutative rings.* Duke Math. J. 122 (2004), no. 3, 423–455.

対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面について

小島秀雄

0. 序

飯高茂氏による対数的小平次元の理論 (cf. [7], [10] 等) により, 開代数多様体 (完備でない代数多様体) に対してもその完備化を考えることにより, 完備な場合と同様に研究できることが期待できるようになった. これは特にアフィン代数多様体の研究には有用であり, 代数幾何の手法を用いたアフィン代数多様体の研究が進展している. 開代数曲面については, 代数曲面の研究の深化に伴い, 特に研究が進展している. 開代数曲面の研究成果については, 宮西 [24], [25], [26] に 10 年位前までの主要な結果が紹介されている. 近年も, 特に対数的小平次元が 2 の $\mathbb{Q}$ ホモロジー平面 (注. $\mathbb{Q}$ ホモロジー平面とは, 複素アフィン平面と $\mathbb{Q}$ 係数ホモロジー群が等しくなる非特異アフィン代数曲面である) に関する研究が飛躍的に進歩しており, その応用として, 尖点平面有理曲線 (全ての特異点が解析的に既約となる平面有理曲線) の研究が K. Palka 氏を中心に精力的に進められている.

本稿は対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面の研究成果に関する概説である. 対数的小平次元がゼロとなる代数多様体のクラスは特殊なもののように思われるかも知れないが, 小平次元がゼロとなる代数多様体のクラスには興味深い性質を持つものが多くあることと同様に, 対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面にも興味深いものがある, と筆者は考えている. また, 対数的小平次元がゼロとなる代数多様体は飯高ファイバー空間の一般ファイバーとして現れる.

シンポジウムでの発表では, 対数的小平次元がゼロでない場合の構造定理も紹介したが, 本稿ではそれは掲載しない. 尚, 本稿は既に筆者が発表した報告 [17] と [19] とかなり重複している. 本稿では, [17] と [19] で触れられていない結果も紹介する. 特に, 正標数の場合の結果にも言及している. 更に, [17] と [19] には分類結果に不備があった結果も含まれているので, それも修正する.

1. 基本的結果と極小モデルの構成

いくつか用語を定義する. k を代数閉体とし, 以下, 基礎体として固定する. S を非特異開代数曲面とする. このとき, 非特異射影代数曲面 X とその上の被約単純正規交差因子 (今後, SNC 因子と呼ぶ) B で, $X \setminus \mathrm{Supp} B \cong S$ となるものが存在する. この対 (X, B) を S の SNC 完備化と呼ぶ. S の**対数的** n **種数** $\overline{P}_n(S)$ と**対数的小平次元** $\overline{\kappa}(S)$ を次のように定義する:

$$\overline{P}_n(S) := h^0(X, n(B + K_X)) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \overline{\kappa}(S) := \kappa(X, B + K_X).$$

ここで, $\kappa(X, B+K_X)$ は X の $(B+K_X)$ 次元である. 上記の定義は S の SNC 完備化のとり方には依存しない. $\overline{p}_g(X)=\overline{P}_1(S)$ と書いて, これを**対数的幾何種数**と呼ぶこともある. ここまでは, 基礎体 k の標数が正となる場合も定義される (上林 [11]).

S を研究するためには S の SNC 完備化 (X, B) を研究すると有用であることが多い. また, (X, B) を研究するためには, (X, B) の (ある種の) 極小モデルを考えると構造を調べやすい. 非特異射影代数曲面とその上の SNC 因子の対に関する極小モデル理論は川又氏, 藤田氏, 角田氏等によって確立された. また, この極小モデル理論は 3 次元以上の場合や, SNC 因子ではなく $\mathbb{R}$ 因子との対の場合等に拡張されている. ただ, 非特異射影代数曲面とその上の SNC 因子の対に関する極小モデル理論は (一見すると大分異なる) いくつかのヴァージョンがある. ここでは, 非特異射影代数曲面とその上の SNC 因子の対に関する極小モデル理論は [25, Chapter 2] にあるものを利用する. [25, Chapter 2] は角田 [35] で展開されているものを, 対数的小平次元が $-\infty$ の場合にも成り立つようにしたものである. [25, Chapter 2] にあるものは極小モデルの構成方法が具体的であるため, 極小モデルから元の曲面の状況を知るのには便利である. その反面, やや複雑な組み合わせ論的議論が含まれているため, 一見すると難しく感じられるかも知れない.

S の対数的小平次元はゼロ以上であると仮定する. このとき, $B+K_X$ は pseudo-effective であるので, $B+K_X$ の Zariski 分解が存在する. $B+K_X$ の Zariski 分解を次のように表す:

$$B+K_X=(B+K_X)^{+}+(B+K_X)^{-}.$$

ここで, $(B+K_X)^{+}$ は nef $\mathbb{Q}$ 因子で (通常, $B+K_X$ の nef 部分と呼ばれる), $(B+K_X)^{-}$ は 0 でなければ正因子でその交叉行列は不定値行列となる. 次の定理は対数的小平次元がゼロ以上となる開代数曲面を調べる上で, 基本的な結果である.

定理 1.1. (川又 [12], 藤田 [6]) *上記の仮定と記号の下, $(B+K_X)^{+}$ は半豊富である. 特に, $\overline{\kappa}(S)=0$ ならば, 正の整数 n で $n(B+K_X)^{+}\sim 0$ となるものが存在する.*

尚, 定理 1.1 は k の標数がゼロの場合は [12] で, 一般の場合は [6] で示されている.

このとき, (X, B) の極小モデルは次のようにして構成される. $f: X\to W$ を $\mathrm{Supp}(B+K_X)^{-}$ 内の (-1) 曲線を順次ブローダウンしたものとする (つまり, $\mathrm{Supp} f_*((B+K_X)^{-})$ が (-1) 曲線を含まなくなるまでブローダウンを繰り返す). $C:=f_*(B)$ と置く. このとき, 次が成り立つ.

補題 1.2. (cf. [35], [25, Chapter 2, §3]) *上記の仮定と記号の下, 次の (1)–(4) が成り立つ.*

(1) C は SNC 因子である.
(2) 任意の $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $\overline{P}_n(W\setminus \mathrm{Supp}C)=\overline{P}_n(X\setminus \mathrm{Supp}B)$ となる. 特に, $\overline{\kappa}(W\setminus \mathrm{Supp}C)=\overline{\kappa}(X\setminus \mathrm{Supp}B)$ となる.
(3) $f_*((B+K_X)^{+})=(C+K_W)^{+}$ となり (注. $C+K_W$ は (2) より pseudo-effective となるので, その Zariski 分解の nef 部分を $(C+K_W)^{+}$ とする), $C^{\#}:=C-(C+K_W)^{-}\geq 0$ となる.

(4) $\pi : W \to \overline{W}$ を $\mathrm{Supp}(C + K_W)^-$ の縮約とすると, $(\overline{W}, \pi_*(C))$ は高々対数的末端特異点しか持たない.

上記の対 (W, C) は (X, B) の極小モデルで, 通常, **概極小モデル** (almost minimal model) と呼ばれる. 尚, [35] では基礎体の標数がゼロであることを仮定しているが, 上記は正標数の場合も成り立つことを注意する.

$\overline{\kappa}(S) = 0$ の場合, 定理 1.1 と補題 1.2 (3) により $n(C + K_W)^+ \sim 0$ となる正の整数 n が存在する. 特にそのような n の最小値を求めることは重要である. 今の場合, $n(C + K_W)^+ \sim 0$ となることと $\overline{P}_n(S) = 1$ となることが同値である. (注. $\overline{\kappa}(S) = 0$ の場合, S の対数的 n 種数は 0 または 1 である.) 以下, $I(S)$ を $\overline{P}_n(S) > 0$ となる正の整数 n の中で最小のものとする. (この記号は以降でも用いる.) k の標数がゼロの場合は, 次の結果がある.

定理 1.3. $\overline{\kappa}(S) = 0$ で, k の標数はゼロであると仮定する. このとき, 次の (1) と (2) が成り立つ.

(1) (Blache [4]) $1 \leq I(S) \leq 21$.
(2) ([35]) $\lfloor C^\# \rfloor \neq 0$ ($\lfloor C^\# \rfloor$ は $\mathbb{Q}$ 因子 $C^\#$ の切り下げ) ならば, $I(S) \leq 6$.

さて, 上記の (W, C) について, $\lfloor C^\# \rfloor = 0$ となる場合は C の各連結成分は対数的末端特異点につぶれる. この場合は, これで極小モデルが得られたと考えて良い. しかし, $\lfloor C^\# \rfloor \neq 0$ となる場合では, (W, C) は**それほど極小的ではない**ことが分かる. これは, 概極小モデルの構成方法から分かるのだが, その感覚を次の例で説明する.

例 1.4. V を非特異射影代数曲面, D を V 上の非特異既約曲線で, $\overline{\kappa}(V \setminus D) \geq 0$ で更に, D は有理曲線ではないと仮定する. (V, D) が概極小的ではないとすると, $D + K_V$ は nef ではないことになるので, $E \cdot (D + K_V) < 0$ となる既約曲線 E が存在する. このとき, D が有理曲線でないことと $D + K_V$ が pseudo-effective であることから, E は (-1) 曲線で, $E \cdot D = 0$ となる. つまり, この場合は (V, D) の概極小モデルは D と交わらない (-1) 曲線を順次ブローダウンすることにより得られる. しかしながら, この場合には $E \cdot D = 1$ となる (-1) 曲線をつぶしても (像を (V', D') とする), 任意の正の整数 n に対して $\overline{P}_n(V \setminus D) = \overline{P}_n(V' \setminus D')$ となることが分かる.

強極小モデルの構成

(W, C) を上記の S の SNC 完備化 (X, B) の概極小モデルとする. $C' := C - \lfloor C^\# \rfloor$ とおく. 補題 1.2 (4) より, C' の各連結成分は対数的末端特異点につぶれる. $\pi : W \to \overline{W}$ を $\mathrm{Supp} C'$ の縮約とする. ここで, $\overline{W}$ に対して対数的極小モデルプログラムを実行し, $\overline{W}$ の対数的極小モデルを $\overline{V}$ とする. $\overline{g} : \overline{W} \to \overline{V}$ を対応する双有理射とする. $C' = C$ ならば (つまり, $\lfloor C^\# \rfloor = 0$ ならば), $\overline{\kappa}(S) \geq 0$ より $\overline{W}$ の標準因子は nef なので, $\overline{g}$ は恒等写像である.

もっと詳しく言うと, 上記の $\overline{V}$ は次のようにして構成される. $\overline{W}$ 上の曲線 $\overline{C}$ で, $\overline{C}^2 < 0$ かつ $\overline{C} \cdot K_{\overline{W}} < 0$ ($K_{\overline{W}}$ は $\overline{W}$ の標準因子で, 交点数は特異点解消した上での引き戻したものの交点数のことである (詳しくは [34] をみよ)) となるものが存在した

とする. $\overline{C}$ の自己交点数は負であることから, $\overline{C}$ を縮約することができるが, $\overline{C}$ を縮約することによりできる曲面 $\overline{W}_1$ は ($\overline{W}$ が高々対数的末端特異点しか持たないことから) 高々対数的末端特異点しか持たない正規射影代数曲面であることが分かる (詳しくは極小モデル理論を説明している文献を参照せよ. [25, Chapter 2, §4] にもある). $\overline{V}$ は $\overline{C}^2 < 0$, $\overline{C} \cdot K_{\overline{W}} < 0$ となる曲線 $\overline{C}$ を順次縮約することによって得られる.

$\pi_1 : V \to \overline{V}$ を $\overline{V}$ の最小特異点解消とすると, 双有理射 $g : W \to V$ で, $\overline{g} \circ \pi = \pi_1 \circ g$ となるものが存在する. $D := g_*(C)$ とおく. 通常, D は SNC 因子ではなくなるが, 次の補題が成り立つ.

補題 1.5. S が $\overline{\kappa}(S) = \overline{p}_g(S) = 0$ となる非特異開有理曲面であると仮定する. このとき, 次の (1)–(4) が成り立つ.

(1) D は SNC 因子である.
(2) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $\overline{P}_n(V \setminus \mathrm{Supp} D) = \overline{P}_n(W \setminus \mathrm{Supp} C)$ となる. 特に, $\overline{\kappa}(V \setminus \mathrm{Supp} D) = \overline{\kappa}(W \setminus \mathrm{Supp} C)(= 0)$ となる.
(3) (V, D) は almost minimal (つまり, (V, D) 自身が (V, D) の概極小モデルになる) で, $D^\# + K_V \equiv g_*(C^\# + K_W) \equiv 0$ になる. ($D^\#$ の定義は補題 1.2 の $C^\#$ と同じ.)

本稿では, 上記の対 (V, D) を (X, B) の**強極小モデル**と呼ぶ. 実は, (V, D) は (W, C) からどのような曲線を縮約することにより得られるか, ということも分かる.

2. 極小モデルはどの位分類されているか?

§1 で, 対数的小平次元が非負の非特異開代数曲面に対して, その SNC 完備化の概極小モデルと強極小モデルの構成を説明した. 本節では, 対数的小平次元がゼロの場合に, それらの極小モデルの分類がどの位分かっているかについて説明する. 分類結果が複雑であるので, 個々の分類結果を紹介するのではなく, 大雑把な紹介をするだけにする. また, 筆者の能力不足で, 全ての結果を紹介できていない (特に対数的 Enriques 曲面に関する結果).

以後, k を標数 $p(\geq 0)$ の代数閉体とし, 基礎体として固定する. S を対数的小平次元ゼロの非特異開代数曲面とし, (X, B) を S の SNC 完備化とする. (W, C) と (V, D) をそれぞれ, (X, B) の概極小モデルと強極小モデルとする. (複雑になってしまうが, 個々の設定において, (W, C) を決定する場合と (V, D) の方を決定する場合に分かれるので, 分けて書く.) $C^\#$, $D^\#$ の記号については, 補題 1.2 と補題 1.5 をみよ.

$\overline{\kappa}(S) = 0$ より, X の小平次元はゼロ以下である. X の小平次元がゼロのときは, 定理 1.1 と補題 1.2 により, 次の結果を得る.

命題 2.1. X の小平次元がゼロのとき, (W, C) について, 次の結果が成り立つ.

(1) W は極小的である. 従って, $K_W \equiv 0$ となる.
(2) $C^\# = 0$ である. 特に, C の各連結成分は標準特異点につぶれる (C の各既約成分は (-2) 曲線である).

この場合の S の分類は小平次元ゼロの非特異射影代数曲面の分類に帰着される.

以後, X の小平次元が $-\infty$ であるとする. この場合, これまでのところ, 次の場合の概極小モデル (W, C) の分類が完成している.

(1) **有理曲面でない曲面 (つまり, 非有理線織曲面) の分類.** $p = 0$ の場合は飯高 [8] [9], 酒井 [33] 等で分類されている. 最近, $p > 0$ の場合も分類された. 詳しくは, [20, §2] をみよ.

(2) $p = 0$ **で** $\overline{p}_g(S) > 0$ **となる場合の分類.** (飯高 [9], Zhang [36].) 有理曲面でない場合は上記 (1) で分類されているので, ここでは, S が有理曲面であることを仮定している. [36] では論文の題名にある通り, この場合の対 (W, C) を**飯高曲面**と呼んでいる.

(3) C **が連結 (**Supp$C$ **が連結) となる場合の分類.** (藤田 [5, §8], [14].) 例えば, S がアフィン代数曲面の場合は, S の無限遠境界 B が連結になり, 自動的に C も連結になるので, この仮定をつけても意味がある. 尚, この場合は $p > 0$ の場合も確立している ([14]).

尚, 上記の分類結果は膨大であるため, 分類結果の詳細は省略する.

以後, S は有理曲面で $\overline{p}_g(S) = 0$ (つまり, 定理 1.3 の前で定義した $I(S)$ を使うと, $I(S) > 1$) となる場合を考える. また, この節では以後, $p = 0$ であると仮定する. (以下の部分では部分的には $p > 0$ のときも成り立つ結果があるが, 全て分かっている訳ではないので, $p = 0$ とする.) この場合, 次の 2 つの場合が考えられる.

I. $\lfloor C^{\#} \rfloor = 0$ となる場合. この場合は, 補題 1.2 (4) により, C の各連結成分は対数的末端特異点につぶれる. $\pi : W \to \overline{W}$ を Supp$C$ の縮約とする. このとき, $\overline{W}$ の標準因子は数値的に自明である. このような曲面 $\overline{W}$ は**対数的 Enriques 曲面**と呼ばれ, 現在まで様々な興味深い研究が行われている. 詳しくは, Blache [4], Kudryavtsev [21] [22], 小木曽–Zhang [29] [30] [31], Zhang [37] [38] [39] [40] [41] 等を参照せよ. 簡単にいうと, $\overline{W}$ の標準被覆はアーベル曲面か高々有理 2 重点のみを持つ $K3$ 曲面となる. 標準被覆がアーベル曲面になる場合は Blache [4] で分類されており, $K3$ 曲面の場合も, 分類は完全には分かっていないものの, とても興味深い研究成果が得られている.

II. $\lfloor C^{\#} \rfloor \neq 0$ となる場合. 本節では以後, この場合の考察を行う. この場合は先の I の場合よりも面白くない対象のように思われる. しかし, この場合もある程度意味がある. 例えば, $\overline{S}$ を高々対数的末端特異点のみを持つ正規アフィン代数曲面で $\overline{S}$ の非特異部分 $\overline{S} \setminus \mathrm{Sing}\overline{S}$ の対数的小平次元と対数的幾何種数が共にゼロであったと仮定する. $S = \overline{S} \setminus \mathrm{Sing}\overline{S}$ として, 上の記号を用いると, この場合の概極小モデル (W, C) は II の仮定をみたす.

この場合は, 強極小モデル (V, D) を考えると上手くいく. §1 でも書いたが, (W, C) からどのような曲線をつぶして (V, D) が得られるかが大体分かっているので, (V, D) が分類できれば, (W, C) も分かる. 更に, 補題 1.5 により, D は SNC 因子で対 (V, D) は概極小的であるので, 考察しやすい. 以後, (V, D) を調べることにする.

$\pi_1 : V \to \overline{V}$ は前節でのものだが, V からみると, $D - \lfloor D^{\#} \rfloor$ の縮約になっている. $\overline{D} := \pi_*(D)$ とおくと, $\overline{D} \neq 0$ で, $\overline{D} + K_{\overline{V}} \equiv 0$ となる. よって, $K_{\overline{V}} \equiv -\overline{D}$ は nef でない. $\overline{V}$ は対数的極小モデルプログラムの結果生じたものであるので, $\overline{V}$ は対数的森ファイバー空間の構造を持つことが分かる. よって, 次の (A), (B) のいずれかの場合が成り立つ.

(A) $\overline{V}$ は曲線上の log conic bundle structure を持つ. 今の場合, $\mathbb{P}^1$ ファイブレーション (一般ファイバーが $\mathbb{P}^1$ となるファイブレーション) $\overline{h} : \overline{V} \to \mathbb{P}^1$ で, $\overline{h}$ の全てのファイバーが既約となるものが存在する.

(B) $\overline{V}$ のピカール数は 1 で, $\overline{V}$ の反標準因子 $-K_{\overline{V}}$ は豊富である. このような曲面 $\overline{V}$ は対数的 del Pezzo 曲面と呼ばれる.

(A) の場合を考察する. $\overline{F}$ を $\overline{h}$ の一般ファイバーとすると, $\overline{D} \equiv -K_{\overline{V}}$ であることから, $\overline{D} \cdot \overline{F} = 2$ となる. 従って, $h := \overline{h} \circ \pi_1$ とおくと, h は V の $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$ ファイブレーションとなり, h の $V - D$ への制限 $h|_{V-D}$ は一般ファイバーが $\mathbb{A}^1_*$ (アフィン直線 $\mathbb{A}^1$ から一点を除いたもの) となるファイブレーション ($\mathbb{A}^1_*$ ファイブレーションと呼ぶ) となる. つまり, 次の結果が成り立つ.

命題 2.2. (V, D) は上記の (A) をみたすと仮定する. このとき, $V - D$ から曲線への $\mathbb{A}^1_*$-ファイブレーションが存在する.

この場合の (V, D) の分類は完成しているが, 分類結果がかなり複雑なので, 省略する.

対数的 2 種数が正になる, つまり, $I(S) = 2$ となる場合は, 指数 2 以下の対数的 del Pezzo 曲面の分類結果 ([1], [27], [16] 等) により次のことが分かる.

命題 2.3. ([18]) $I(S) = 2$ ならば, (B) の場合は起こらない.

従って, $I(S) = 2$ の場合は対 (V, D) の分類が完成する. 詳しくは [18] をみよ.

さて, (B) の場合の分類結果は次のようになる.

定理 2.4. (V, D) は上記の (B) をみたすと仮定する. このとき, (V, D) は次の例 1–例 5 のようにして構成される.

例 1. (cf. [14, Example 2.5]) H_1, H_2, H_3 を $\mathbb{P}^2$ 内の $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \emptyset$ となる直線とし, $P_1 := H_1 \cap H_2$, $P_2 := H_2 \cap H_3$, $P_3 := H_3 \cap H_1$ とおく. H_4 をどの P_i $(1 \leq i \leq 3)$ も通らない直線とする. $\mu_0 : V_1 \to \mathbb{P}^2$ を 3 点 P_i $(i = 1, 2, 3)$ でのブローアップとし, $E_i := \mu_0^{-1}(P_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ とおく. $\mu_1 : V \to V_1$ を 3 点 $\mu_0'(H_i) \cap E_i$ $(i = 1, 2, 3)$ でのブローアップとし,

$$D := \mu_1'(E_1 + E_2 + E_3 + \mu_0'(\sum_{i=1}^{4} H_i))$$

とおく. D は以下の図 1-(i) のようになっている. この対 (V, D) を [5, §8] に従って, $Y\{3, 3, 3\}$ と呼ぶこともある. 尚, この例では $I(S) = 3$ となる.

例 2. (cf. [14, Example 2.6]) $V_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とする．ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 を第一射影 $V_0 \to \mathbb{P}^1$ の 3 つのファイバーとし, $\overline{\ell}_1$, $\overline{\ell}_2$, $\overline{\ell}_3$ を第二射影 $V_0 \to \mathbb{P}^1$ の 3 つのファイバーとする．$P_1 := \ell_1 \cap \overline{\ell}_1$, $P_2 := \ell_2 \cap \overline{\ell}_1$, $P_3 := \ell_2 \cap \overline{\ell}_3$, $P_4 := \ell_3 \cap \overline{\ell}_3$ とおき, $\mu_0 : V_1 \to V_0$ を $P_1, \ldots, P_4$ でのブローアップとする．$E_1 := \mu_0^{-1}(P_1)$, $E_4 := \mu_0^{-1}(P_4)$ とおく．$\mu_1 : V \to V_1$ を 2 点 $E_1 \cap \mu_0'(\ell_1)$, $E_4 \cap \mu_0'(\ell_3)$ でのブローアップとし,

$$D := \mu_1'(E_1 + E_4 + \mu_0'(\sum_{i=1}^{3}(\ell_i + \overline{\ell}_i)))$$

とおく．D は以下の図 1-(ii) のようになっている．この対 (V, D) を [5, §8] に従って, $Y\{2,4,4\}$ と呼ぶこともある．尚, この例では $I(S) = 4$ となる．

例 3. (cf. [14, Example 2.7]) $V_0 := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, ℓ_i $(i = 1,2,3)$, $\overline{\ell}_j$ $(j = 1,2,3)$ は例 2 と同じものとする．$P_1 := \ell_1 \cap \overline{\ell}_2$, $P_2 := \ell_2 \cap \overline{\ell}_3$, $P_3 := \ell_3 \cap \overline{\ell}_1$, $P_4 := \ell_1 \cap \overline{\ell}_3$ とおき, $\mu_0 : V_1 \to V_0$ を $P_1, \ldots, P_4$ でのブローアップとする．$E_i := \mu_0^{-1}(P_i)$ $(1 \leq i \leq 3)$ とおく．$\mu_1 : V \to V_1$ を 3 点 $E_1 \cap \mu_0'(\overline{\ell_2})$, $E_2 \cap \mu_0'(\ell_2)$, $E_3 \cap \mu_0'(\ell_3)$ でのブローアップとし,

$$D := \mu_1'(E_1 + E_2 + E_3 + \mu_0'(\sum_{i=1}^{3}(\ell_i + \overline{\ell}_i)))$$

とおく．D は以下の図 1-(iii) のようになっている．この対 (V, D) を [5, §8] に従って, $Y\{2,3,6\}$ と呼ぶこともある．尚, この例では $I(S) = 6$ となる．

例 4. C を $\mathbb{P}^2$ 内の既約 2 次曲線, H_1, H_2, H_3 を $\mathbb{P}^2$ 内の直線で, 次の性質をみたすものとする．

(1) H_1, H_2, H_3 は 1 点 P で交わり, $P \notin C$ となる．
(2) H_i $(i = 1,2)$ は C のある点 P_i での接線となり, H_3 は C と異なる 2 点 (P_3, P_3' とする) で交わる．

$\mu : V \to \mathbb{P}^2$ を P, P_1, P_2, P_3 およびそれらの無限小近傍上の点のブローアップで, $\mu^{-1}(C \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3)$ が図 2 のようになっているものとする．D を $\mu^{-1}(C \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3)$ から図 2 で点線で表されている (-1)-曲線を除いたものとする．D は 2 つの連結成分よりなり, その片方は Y のように見え, もう片方は A_1 型有理二重点につぶれることに注意せよ．この例では $I(S) = 4$ となる．

例 5. (cf. [32, Construction 5.4]) 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の斉次座標を (x, y, z) とする．$P_1 = (0,1,1)$, $P_2 = (1,1,0)$, $Q_1 = (1,0,0)$, $Q_2 = (0,0,1)$ とし, 4 本の直線 $\overline{Q_1P_1}$, $\overline{Q_1P_2}$, $\overline{Q_2P_1}$, $\overline{Q_2P_2}$ を考える．1 の原始 3 乗根 ζ を一つ固定し, $P_3 = (1, \epsilon, \epsilon - 1)$ (ここで, $\epsilon = -\zeta$) とする．$\overline{Q_1P_1} \cap \overline{Q_2P_2} = (1,1,1)$, $\overline{Q_1P_2} \cap \overline{Q_2P_3} = (\epsilon, \epsilon - 1, 0)$, $\overline{Q_1P_3} \cap \overline{Q_2P_1} = (0,1,\epsilon)$ となり, これらの点は直線 $E_2 = V((1-\epsilon)x + \epsilon y - z)$ 上にある．更に, $\overline{Q_1P_1} \cap \overline{Q_2P_3} = (1, \epsilon, \epsilon)$, $\overline{Q_1P_2} \cap \overline{Q_2P_1} = (0,1,0)$, $\overline{Q_1P_3} \cap \overline{Q_2P_2} = (1,1,\epsilon)$ となり, これらの点は直線 $E_1 = V(z - \epsilon x)$ 上にある．Q_1, Q_2 をそれぞれ 1 回ブローアップして, 最初のブローアップに関する例外曲線を B とする．更に, 直線 $\overline{Q_iP_j}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ と $E_1 + E_2$ の交点となる 6 点をそれぞれ 1 回ずつブローアップする．こうしてできた曲面を V, D を B, $\mathbb{P}^2$ 上の 8 本の直線 $\overline{Q_iP_j}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$, E_1, E_2 の V 上の固有変換

像の和とする．D は以下の図 3 のようになる．$E_1 + E_2$ の固有変換像は A_2 型有理二重点につぶれ，それ以外の D の成分は連結で Y のように見えることに注意せよ．この例では，$I(S) = 3$ となる．

以下の図では，D の既約成分は線分で表され，線分の近くにある数字は，対応する D の既約成分の自己交点数を表している．また，図 2 では C, H_1, H_2, H_3 の固有変換像がどれになるのかを同じ記号で表している．

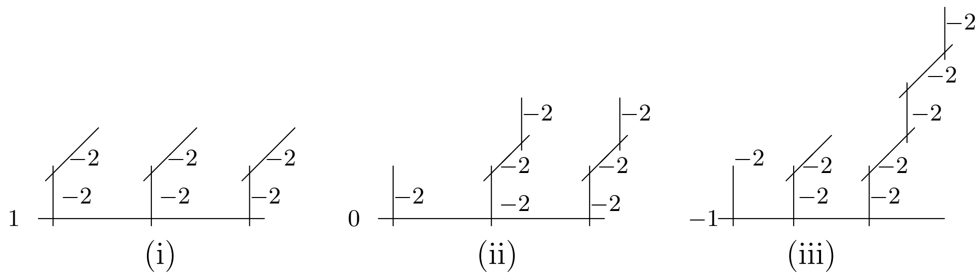


図 1

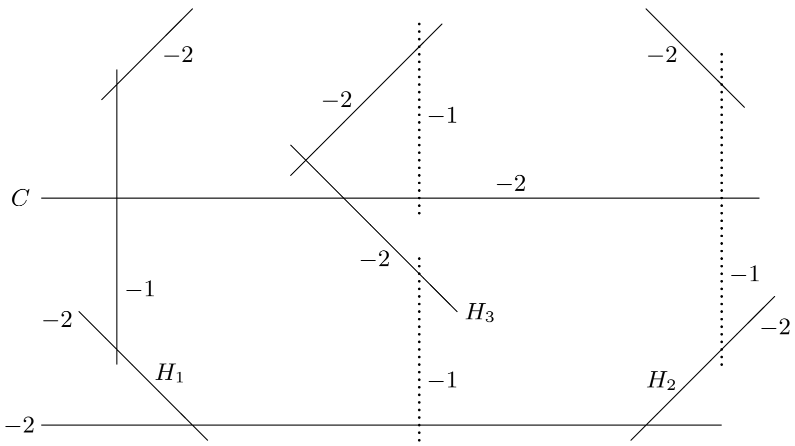


図 2

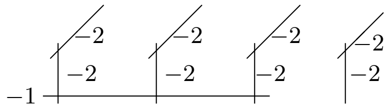


図 3

例 1〜例 3 では D は連結であるので，[14] で考察した場合に含まれている．$Y\{3, 3, 3\}$, $Y\{2, 4, 4\}$, $Y\{2, 3, 6\}$ の名前の由来は D の図より想像がつくかと思う．

定理 2.4 の証明はかなり長くなることと，論文執筆中であるので詳しくは書かないが，ピカール数 1 の対数的 del Pezzo 曲面に関する結果 ((B) では $\overline{V}$ はピカール数 1 の対数的 del Pezzo 曲面であったことを注意せよ) を用いる．例えば，Belousov [2] [3] ([3] は [2] の主結果の別証明を与えている) より，ピカール数 1 の対数的 del Pezzo 曲面の特異点の個数は 4 以下であることが分かる．更に，Palka [32] の結果も使う．

3. 任意標数での結果

§2 の後半では, 基礎体の標数がゼロであることを仮定していた. §2 での II では, (A) と (B) のいずれかが成り立つことは正標数の場合も成り立つが, その後を分類するのは, 特に (B) の場合は難しくなる. だが, 特殊な場合は分類できたので, 本節ではその結果を報告する.

S を非特異開代数曲面とし, (X, B) を S の SNC 完備化 (cf. §1) とする. このとき, $r(S) = \rho(X) - \#B$ と定義する. ここで, $\rho(X)$ は X のピカール数で $\#B$ は $\mathrm{Supp}B$ に含まれる既約曲線の個数とする. 勿論, $r(S)$ は S の SNC 完備化のとり方にはよらずに定まる.

ここでは, 対数的小平次元がゼロで, $r(S)$ の値が小さくなるような非特異開代数曲面 S について考える. Shokurov 氏等によるトーリック曲面の特徴づけ (文献については, 中山 [28] の参考文献をみよ), および中山 [28] による不足数 1 の擬トーリック曲面 (pseudo-toric surface) と半トーリック曲面 (half-toric surface) の分類に関する結果をみて, この開代数曲面版に相当する結果も得られるのではないかと思ったことがこのようなことを考えた動機である. [28] での不足数の -1 倍が上記の $r(S)$ に相当する.

このことに関して得られた結果を紹介する.

定理 3.1. S を対数的小平次元がゼロとなる非特異開代数曲面とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $r(S) \geq -2$ となる. 更に, $r(S) = -2$ となる必要十分条件は, S が 2 次元代数的トーラス $\mathbb{G}_m^2$ から n 点 $(n \geq 0)$ を除いてできる曲面とと同型であることである.

(2) 更に, S の対数的幾何種数が 0 であるとする. このとき, $r(S) \geq -1$ で, $r(S) = -1$ となる必要十分条件は, S が $H[-1, 0, -1]$ という曲面 ($H[-1, 0, -1]$ の定義は [5, (8.5)] をみよ) から n 点 $(n \geq 0)$ を除いてできる曲面とと同型であることである.

定理 3.1 の証明の概略を述べる. (X, B) を S の SNC 完備化とし, (W, C) を (X, B) の概極小モデルとする. すると, $r(S) \geq r(W \setminus \mathrm{Supp}C)$ となり, 更に, $r(S) = r(W \setminus \mathrm{Supp}C)$ となるための必要十分条件は, (W, C) が $\mathrm{Supp}B$ 内の曲線のブローダウンだけで得られることである, ということが直ぐに分かる. 従って, 概極小モデル (W, C) について定理 3.1 を確かめれば十分である. ここで, Hodge の指数定理により, $\lfloor C^{\#} \rfloor = 0$ となる場合は $r(W \setminus \mathrm{Supp}C) \geq 1$ となる. ($\lfloor C^{\#} \rfloor = 0$ となるときは, C の各連結成分は対数的端末特異点につぶれることを注意せよ.) 同様な理由で, S が有理曲面でその対数的幾何種数がゼロである場合は, (X, B) の強極小モデル (V, D) に対して定理 3.1 を確かめれば十分である. §2 の後半で述べたこれらの概極小モデルや強極小モデルに関する分類は $r(S) < 0$ という条件が付くことで, 正標数の場合も実行できる.

最後に, 定理 3.1 の応用として, 次の結果が得られることを報告する.

定理 3.2. $B \subset \mathbb{P}^2$ を射影平面曲線で, その補集合 $S := \mathbb{P}^2 \setminus B$ の対数的小平次元がゼロであるものとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) S の対数的幾何種数が 1 になる.
(2) 更に, B が非特異 3 次曲線でないとすると, S は 2 次元代数的トーラス $\mathbb{G}_m^2$ を Zariski 開集合として含む.

上記の結果の (1) と (2) は, 標数ゼロのときはそれぞれ [13], [14] で証明されている. それらの証明の中で, 標数ゼロの結果を使っている部分を定理 3.1 を用いることにより, 基礎体の標数に関する仮定をとることができた.

定理 3.2 は大したことは示していないように見えるかも知れないが, 例えば, S の代数的基本群がアーベル群になることが (2) よりすぐに分かる. また最近, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義された射影平面曲線の補集合の整数点に関する結果が Levin–安福 [23] によって研究され, 補集合の対数的小平次元がゼロの場合は, 定理 3.2 (2) より, その整数点の集合は potentially dense であることが示された.

References

[1] V. Alexeev and V. V. Nikulin, Del Pezzo and $K3$ surfaces, MSJ Memoirs vol. 15, Math. Soc. Japan, 2006.

[2] G. N. Belousov, Del Pezzo surfaces with log terminal singularities, Math. Notes, **83** (2008), 152–161.

[3] G. N. Belousov, The maximal number of singular points on log del Pezzo surfaces, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **16** (2009), 231–238.

[4] R. Blache, The structure of l.c. surfaces of Kodaira dimension zero. I, J. Alg. Geom., **4** (1995), 137–179.

[5] T. Fujita, On the topology of non-complete algebraic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **29** (1982), 503–566.

[6] T. Fujita, Fractionally logarithmic canonical rings of algebraic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **30** (1984), 685–696.

[7] S. Iitaka, On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties, Complex Analysis and Algebraic Geometry (W. L. Baily, Tr. and T. Shioda, eds.), Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 175–189.

[8] S. Iitaka, A numerical criterion of quasi-abelian surfaces, Nagoya Math. J., **73** (1979), 99–115.

[9] S. Iitaka, On logarithmic $K3$ surfaces, Osaka J. Math., **16** (1979), 675–705.

[10] S. Iitaka, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, vol. 76, 1981.

[11] T. Kambayashi, On Fujita's strong cancellation theorem for the affine plane, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **27** (1980), 535–548.

[12] Y. Kawamata, On the classification of non-complete algebraic surfaces, Proc. Copenhagen Summer meeting in Algebraic Geometry, Lecture Notes in Mathematics, No. **732**, 215–232, Berlin-Heiderberg-New York, Springer, 1978.

[13] H. Kojima, Complements of plane curves with logarithmic Kodaira dimension zero. J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 793–806.

[14] H. Kojima, Open surfaces of logarithmic Kodaira dimension zero in arbitrary characteristic, J. Math. Soc. Japan, **53** (2001), 933–955.

[15] H. Kojima, Structure of affine surfaces $\mathbb{P}^2 - B$ with $\overline{\kappa} \leq 1$, J. Algebra, **253** (2002), 100–111.

[16] H. Kojima, Rank one log del Pezzo surfaces of index two, J. Math. Kyoto Univ., **43** (2003), 100–122.

[17] 小島秀雄, 対数的小平次元と対数的幾何種数がゼロとなる開代数曲面について, 射影多様体の幾何とその周辺 2007 報告集, 103–111.

[18] H. Kojima, Open algebraic surfaces with $\overline{\kappa} = \overline{p}_g = 0$ and $\overline{P}_2 > 0$, Osaka J. Math., **48** (2011), 1063–1084.

[19] 小島秀雄, 対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面について, 2013 代数幾何ミニ研究集会報告集 (於 埼玉大学), 71–80.

[20] H. Kojima, Irrational open surfaces of non-negative logarithmic Kodaira dimension, Adv. Stud. Pure Math., **75** (2017), 187–206.

[21] S. A. Kudryavtsev, Classification of logarithmic Enriques surfaces with $\delta = 2$, Math. Notes, **72** (2002), 660–666.

[22] S. A. Kudryavtsev, Classification of Enriques log surfaces with $\delta = 1$, Math. Notes, **76** (2004), 81–89.

[23] A. Levin and Y. Yasufuku, Integral points and orbits of endomorphisms on the projective plane, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[24] M. Miyanishi, Non-complete algebraic surfaces, Lecture Notes in Mathematics, No. **857**, Berlin-Heiderberg-New York, Springer, 1981.

[25] M. Miyanishi, Open algebraic surfaces, CRM Monograph Series, vol. **12**, Amer. Math. Soc., 2000.

[26] M. Miyanishi, Recent developments in affine algebraic geometry: from the personal viewpoints of the author, Affine algebraic geometry, 307–378, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.

[27] N. Nakayama, Classification of log del Pezzo surfaces of index two, J. Math. Univ. Tokyo, **14** (2007), 293–498.

[28] N. Nakayama, A variant of Shokurov's criterion of toric surface, Adv. Stud. Pure Math., **75** (2017), 287–392.

[29] K. Oguiso and D.-Q. Zhang, On the most algebraic $K3$ surfaces and the most extremal log Enriques surfaces, Amer. J. Math., **118** (1996), 1277–1297.

[30] K. Oguiso and D.-Q. Zhang, On extremal log Enriques surfaces, II, Tôhoku Math. J., **50** (1998), 419–436.

[31] K. Oguiso and D.-Q. Zhang, On the complete classification of extremal log Enriques surfaces, Math. Z., **231** (1999), 23–50.

[32] K. Palka, Exceptional singular $\mathbb{Q}$-homology planes, Ann. Inst. Fourier, **61** (2011), 745–774.

[33] F. Sakai, Semi-stable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps, Math. Ann., **254** (1980), 89–102.

[34] F. Sakai, Weil divisors on normal surfaces, Duke Math. J., **51** (1984), 877–889.

[35] S. Tsunoda, Structure of open algebraic surfaces, I, J. Math. Kyoto Univ., **23** (1983), 95–125.

[36] D.-Q. Zhang, On Iitaka surfaces, Osaka J. Math., **24** (1987), 417–460.

[37] D.-Q. Zhang, Logarithmic Enriques surfaces, J. Math. Kyoto Univ., **31** (1991), 419–466.

[38] D.-Q. Zhang, Logarithmic Enriques surfaces. II, J. Math. Kyoto Univ., **33** (1993), 183–193.

[39] D.-Q. Zhang, Normal algebraic surfaces with trivial tricanonical divisors, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **33** (1997), 427–442.

[40] D.-Q. Zhang, Quotients of $K3$ surfaces modulo involutions, Japan. J. Math., **24** (1998), 335–366.

[41] D.-Q. Zhang, Normal algebraic surfaces with trivial two or four times of the canonical divisors, Internat. J. Math., **9** (1998), 377–406.

〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 新潟大学理学部数学教室
E-mail address: kojima@math.sc.niigata-u.ac.jp

GEOMETRIC CHARACTERIZATIONS OF RATIONAL HOMOGENEOUS MANIFOLDS

埼玉大学・理工学研究科　渡邉　究

1. はじめに

本稿において，多様体とは複素数体上定義された非特異代数多様体を意味する．多様体 X が群多様体の推移的な代数的作用をもつとき，X を等質多様体と呼ぶ．以下，等質多様体とは射影的な等質多様体を意味する．A. Borel と R. Remmert の結果（定理 2.1）により，全ての等質多様体はアーベル多様体と有理等質多様体の積として記述されることが知られている．本稿では Hwang, Mok を中心に構築された有理曲線の接ベクトルの理論（VMRT 理論）の観点から得られる種々の等質多様体の特徴付けについて概説する．

本稿は以下のように構成されている．まず第 2 章で等質多様体の分類に関する古典的な結果をまとめる．第 3 章では単線織多様体上の有理曲線の変形理論の復習をしたのち，それを用いて VMRT の定義を述べる．さらに，ピカール数 1 の有理等質多様体に対して，その VMRT の構造を具体的に記述する．第 4 章において，VMRT の観点から種々の等質多様体の特徴付けについて概説する．基本的には [4] の記号や用語を用いる．特に，多様体 X 上の局所自由層 $\mathcal{E}$ に対し，$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ はグロタンディックの意味での射影化 $\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}))$ とする．

2. 等質多様体の分類について

この章では等質多様体の分類について述べる．A. Borel と R. Remmert により，以下の等質多様体の構造定理が知られている：

定理 2.1 ([2]). 任意の等質多様体はアーベル多様体と有理等質多様体の積と同型である．さらに，任意の有理等質多様体は半単純線形代数群 G の閉部分群 P による幾何学的商 G/P と同型である．

g 次元のアーベル多様体はリーマンの条件を満たす階数 $2g$ の格子 Λ による g 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^g$ の商空間 $\mathbb{C}^g/\Lambda$ として記述される．一方，有理等質多様体は印付きディンキン図形により分類される．この章では後者の分類について復習する．

線形代数群 G に対し，そのリー代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(G)}$ は G 上の左不変代数的ベクトル場全体の集合として定義される（例えば，[6, 9.1] 参照）．幾つか定義を思い出そう．

定義 2.2. G を連結線形代数群，$\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする．

(i) $\mathfrak{g}$ が非自明なイデアルを含まず，かつ導来イデアル $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が 0 でないとき，G と $\mathfrak{g}$ はそれぞれ**単純**という．

代数学シンポジウムにおける講演の機会を下さったプログラム責任者の石井亮先生，伊藤浩行先生とシンポジウム責任者の市川尚志先生に感謝いたします．本研究は科学研究費「若手研究 B（研究課題番号 ♯17K14153）」のサポートを受けています．

(ii) $\mathfrak{g}$ が単純イデアル $\mathfrak{g}_i$ の直和 $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$ とかけるとき，G と $\mathfrak{g}$ はそれぞれ**半単純**という．

定理 2.1 により，有理等質多様体を分類するためには，半単純線形代数群 G とその放物的部分群 P の商 G/P を分類すればよい．ここで，G/P が射影多様体となる G の閉部分群 P を G の**放物的部分群**と呼ぶ．G の普遍被覆 $\tilde{G} \to G$ をとると，$\tilde{G}$ は $\mathrm{Lie}(\tilde{\mathrm{G}}) \cong \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ を満たす半単純線形代数群である．さらに，G/P は $\tilde{G}$ の作用に関して等質になる．従って，G を初めから単連結半単純線形代数群としてよい．このようにとることにより，単連結半単純線形代数群 G と半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ は一対一に対応する．以下，単連結半単純線形代数群 G に対応する半単純リー代数 $\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ を $\mathfrak{g}$ と記す．

単連結半単純線形代数群 G の極大連結可解閉部分群 B を G の**ボレル部分群**と呼ぶ．ボレル部分群と放物的部分群に関して次の結果が知られている．

命題 2.3 ([6, Theorem, Corollary B, 21.3])**.** 単連結半単純線形代数群 G に対し，以下が成立する．

(i) ボレル部分群は放物的部分群である．
(ii) G の連結閉部分群 P に対し，P がボレル部分群を含むことと P が放物的部分群であることは同値である．
(iii) G の任意のボレル部分群は互いに共役である．

G のボレル部分群 B を固定する．P を G の任意の放物的部分群とする．命題 2.3 (ii) より，P はあるボレル部分群 B' を含む．B と B' は互いに共役なので，ある $g \in G$ が存在して，$B = g^{-1}B'g$ となる．このとき，$Q := g^{-1}Pg$ と定めると，$G/P \cong G/Q$ かつ Q は B を含む放物的部分群である．

一方，半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，その極大可解部分リー代数 $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の**ボレル部分代数**，ボレル部分代数 $\mathfrak{b}$ を含む $\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{p}$ を**放物的部分代数**と呼ぶ．このとき，次が成立する．

命題 2.4 ([6, Theorem 13.1], [25, 命題 9.31])**.** 半単純線形代数群 G とそのリー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，

$$\{G \text{ の閉部分群}\} \to \{\mathfrak{g} \text{ の部分リー代数}\}; H \mapsto \mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$$

なる写像は単射である．さらに，この写像の下，G のボレル部分群と $\mathfrak{g}$ のボレル部分代数，G の放物的部分群と $\mathfrak{g}$ の放物的部分代数はそれぞれ一対一に対応する．

以上をまとめると，有理等質多様体を分類するためには，各半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，そのボレル部分代数 $\mathfrak{b}$ を一つ固定し，$\mathfrak{b}$ を含む放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ を分類すればよい．

半単純リー代数 $\mathfrak{b}$ を含む放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ を分類するために，$\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ を一つ固定する．カルタン部分代数は可換なので，$\mathfrak{g}$ の随伴表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ による像 $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ も可換である．従って，$\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ に含まれる $\mathfrak{g}$ 上の線形変換は同時対角化可能であり，$\mathfrak{g}$ は同時固有空間分解可能である．これにより，$\mathfrak{g}$ のルート空間分解を得る（例えば，[7, Chap. 8] 参照）：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

ただし，

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} | \operatorname{ad}(h)(x) = \alpha(h)x \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\},$$

$$\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^\vee \setminus \{0\} | \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

とする．さらに，Φ の基底 $\Delta := \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\ell\}$ を固定し，Φ を正のルートの集合と負のルートの集合へ分解する：$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$．このとき，以下が成立する．

命題 2.5. 上記記号の下，以下が成立する．

(i) $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{g}$ のボレル部分代数である．

(ii) (i) の $\mathfrak{b}$ を含む任意の放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ に対し，$I \subset \Delta$ が存在し，

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+(I)} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

と表される．ただし，$\Phi^+(I) := \{\sum_{\alpha_i \in \Delta \setminus I} k_{\alpha_i}\alpha_i \in \Phi | k_{\alpha_i} \in \mathbb{Z}\}$ とする．

以下，この $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}_I$ とかく．さらに，$\mathfrak{p}_I$ に対応する放物的部分群を P_I とかく．

証明. (i) ルート $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が成り立つことに注意する．このとき，導来イデアル $D\mathfrak{b} := [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}], D^i\mathfrak{b} := D(D^{i-1}\mathfrak{b})$ に対して，$D\mathfrak{b} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ となる．このことから，十分大きい正整数 n について，$D^n\mathfrak{b} = 0$ となることが簡単に分かる．従って，$\mathfrak{b}$ は可解リー代数である．極大性を示すために，$\mathfrak{b}$ を真に含む $\mathfrak{g}$ の可解部分リー代数 $\mathfrak{b}'$ が存在したと仮定する．このとき，$\mathfrak{b}'$ は $\operatorname{ad}(\mathfrak{h})$-不変なので，ルート空間分解と同様に，ある Φ の部分集合 S が存在し，$\mathfrak{b}' = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in S} \mathfrak{g}_\alpha$ とかける．仮定より，$\Phi^+ \subset S$ かつ S は少なくとも一つの負のルート $-\alpha \in \Phi^-$ を含む．このとき，

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{b}'$$

となるが，$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ は可解でないので矛盾．

(ii) $\mathfrak{b}$ を含む任意の放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ に対し，$\mathfrak{p}$ が $\operatorname{ad}(\mathfrak{h})$-不変なので，(i) と同様にある Φ の部分集合 T が存在し，$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in T} \mathfrak{g}_\alpha$ とかける．このとき，$\Phi^+ \subset T$ が成り立つ．さらに，$\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$ が $\alpha = \beta + \gamma$ かつ $-\alpha \in T$ を満たすならば $-\beta, -\gamma \in T$ が成り立つ．このことから主張は従う． ■

これにより，有理等質多様体 G/P は推移的に作用する群 G も込めて，半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ と単純ルートの集合 Δ の部分集合 I の組 $(\mathfrak{g}, I)$ により決まる．半単純リー代数は単純ルートを頂点として得られるディンキン図形により分類されるので，有理等質多様体 G/P は $(\mathcal{D}, I)$ により群作用も込めて一意的に定まる．ただし，$\mathcal{D}$ は $\mathfrak{g}$ から定まるディンキン図形であり，$I \subset \Delta$ はその頂点の部分集合である．以下，場合に応じて単純ルート α_k を k，ルートの基底 Δ を $\{1, 2, \cdots, \ell\}$ と略記する．ディンキン図形の頂点の番号付けは [7, P. 58] に従う．以下，印付きディンキン図形 $(\mathcal{D}, I)$ に対応する有理等質多様体を $\mathcal{D}(I)$ とかく．

例 2.6. (i) $A_\ell(r)$ は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{\ell+1}$ の r 次元線形部分空間をパラメータ付けするグラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^{\ell+1})$ に対応する．

(ii) 正整数の組 $(r_1 < r_2 < \cdots < r_s \leq \ell)$ に対し，$A_\ell(r_1, r_2, \cdots, r_s)$ は旗多様体

$$\{(V_{r_1}, V_{r_2}, \cdots, V_{r_s}) | V_{r_i} \subset V_{r_{i+1}},\ V_{r_i} \text{ は } \mathbb{C}^{\ell+1} \text{ の } r_i \text{ 次元線形部分空間}\}$$

に対応する．

(iii) ω を $\mathbb{C}^n$ の非退化対称双線形形式とする．このとき，グラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^n)$ の部分集合

$$OG(r, \mathbb{C}^n) := \{[W] \in G(r, \mathbb{C}^n) \mid \omega(W, W) = 0\}$$

を考える．$n = 2\ell + 1$ かつ $1 \leq r \leq \ell$ のとき，$B_\ell(r)$ は $OG(r, \mathbb{C}^{2\ell+1})$ に対応する．また，$n = 2\ell$ かつ $1 \leq r \leq \ell - 2$ のとき，$D_\ell(r)$ は $OG(r, \mathbb{C}^{2\ell})$ に対応する．一方，$OG(\ell, \mathbb{C}^{2\ell})$ は二つの互いに同型な既約成分 $S_{\ell-1}$ からなり，$D_{2\ell}(\ell - 1)$ と $D_{2\ell}(\ell)$ は $S_{\ell-1}$ と同型である．$OG(r, \mathbb{C}^n)$ を**直交グラスマン多様体**，$S_{\ell-1}$ を**スピノール多様体**という（$OG(\ell+1, \mathbb{C}^{2\ell+2})$ の既約成分として S_ℓ を定義することもあるが，ここでは [18] の記号に従う）．

(iv) ω を $\mathbb{C}^{2\ell}$ の非退化反対称双線形形式（シンプレクティック形式）とする．このとき，グラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^{2\ell})$ の部分集合

$$LG(r, \mathbb{C}^{2\ell}) := \{[W] \in G(r, \mathbb{C}^{2\ell}) \mid \omega(W, W) = 0\}$$

を考える．$1 \leq r \leq \ell$ のとき，$C_\ell(r)$ は $LG(r, \mathbb{C}^{2\ell+1})$ に対応する．$LG(r, \mathbb{C}^{2\ell})$ を**シンプレクティックグラスマン多様体**，もしくは**ラグランジアングラスマン多様体**という．

注意 2.7. 上記例から，例えば $A_{2\ell-1}(1), A_{2\ell-1}(2\ell-1)$, $C_\ell(1)$ は全て $(2\ell-1)$ 次元の射影空間 $\mathbb{P}^{2\ell-1}$ と同型である．多様体としては全て同型だが，最初の二つは互いに双対の関係にあり，ともに対応する群は特殊線形群 $\mathrm{SL}(2\ell)$ である．一方，$C_\ell(1)$ に対応する群はシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(2\ell)$ である．

命題 2.8. $\dim \mathcal{D}(I) = \sharp(\Phi^+ \setminus \Phi^+(I))$

証明. 任意の点 $o \in \mathcal{D}(I)$ に対し $\mathcal{D}(I)$ の o における接空間を $T_o(\mathcal{D}(I))$ と書くと，$\dim \mathcal{D}(I) = \dim T_o(\mathcal{D}(I)) = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}_I$ が成り立つ．命題 2.5 により，ベクトル空間として $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_I \cong \bigoplus_{\Phi^+\setminus\Phi^+(I)} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ となり，任意のルート α に対し $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ であることから主張は従う． ■

$I \subset J \subset \Delta$ に対して，対応する放物的部分代数 $\mathfrak{p}_J \subset \mathfrak{p}_I \subset \mathfrak{g}$ とそれらに対応する放物的部分群 $P_J \subset P_I \subset G$ を考える．このとき，自然な射影 $\pi_{J,I} : G/P_J \to G/P_I$ は代数多様体の射となる．この射に対して以下が成立する．

命題 2.9. 上記記号の下，$\pi_{J,I}$ の任意のファイバーは $(\mathcal{D} \setminus I, J \setminus I)$ なる印付きディンキン図形に対応する有理等質多様体である．ただし，$\mathcal{D} \setminus I$ はディンキン図形 $\mathcal{D}$ から I に対応する頂点を取り除いて得られるディンキン図形とする．

証明. $\pi_{J,I}$ の任意のファイバーは P_I/P_J と表すことができる．放物的部分群 P_I のレヴィ分解を考えると，P_I のユニポテント根基 $R_u(P_I)$ による P_I の商は簡

約代数群となる（[6, Theorem 30.2]）．さらにその簡約代数群をその中心で割ることにより半単純線形代数群 G_I を得る．G_I に対応するリー代数 $\mathrm{Lie}(G_I)$ は

$$\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+(I)} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}])$$

とかける．これはディンキン図形 $\mathcal{D}\setminus I$ に対応するリー代数である．さらに，自然な射影 $\mathfrak{p}_I \to \mathrm{Lie}(G_I)$ による $\mathfrak{p}_J \subset \mathfrak{p}_I$ の像 $\overline{\mathfrak{p}_J}$ は

$$\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+(I)} ([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus \mathfrak{g}_\alpha)\right) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+(J)} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

とかける．これは $\mathrm{Lie}(G_I)$ の放物的部分代数である．そこで，$\overline{\mathfrak{p}_J}$ に対応する G_I の放物的部分群を $\overline{P_J}$ とかくと，$P_I/P_J \cong G_I/\overline{P_J}$ となる．上記 $\overline{\mathfrak{p}_J}$ の記述から主張が従う． ■

有理等質多様体 $\mathcal{D}(I)$ のピカール群や曲線の錐，因子の錐，コホモロジーの計算についても多くのことが知られている（例えば，[24] 参照）．特に，$\mathcal{D}(I)$ のピカール数 $\rho(\mathcal{D}(I))$ は $\sharp I$ と一致する．

3 章以降のために 2 つ定義を述べる．

定義 2.10. 有理等質多様体 X が長いルート α_k（定義は [7, 10.4] を参照）を用いて $\mathcal{D}(\alpha_k)$ と表されるとき，X を**長いルートに対応する有理等質多様体**と呼ぶ．

定義 2.11. 有理等質多様体 $\mathcal{D}(\Delta)$ を**完全旗多様体**と呼ぶ．$\mathcal{D}(\Delta)$ は G/B に他ならない．

命題 2.12. 長いルートに**対応しない**ピカール数 1 の有理等質多様体 $\mathcal{D}(k)$ はシンプレクティックグラスマン多様体 $C_\ell(k)$ (ただし，$1<k<\ell$) と $F_4(k)$（ただし，$k=3$ または 4）である．

証明. 長いルートに対応しないピカール数 1 の有理等質多様体 $\mathcal{D}(k)$ に対し，ディンキン図形 $\mathcal{D}$ は連結であり，α_k は短いルートである．従って，連結ディンキン図形の分類 [7, 11.4] により，$\mathcal{D}(k)$ は以下のいずれかである：

$$B_\ell(\ell),\ C_\ell(k)\ (k<\ell),\ F_4(k)\ (k=3,\ 4),\ G_2(1).$$

$B_\ell(\ell)$ は多様体として $D_{\ell+1}(\ell+1)$ と同型である．実際，$B_\ell(\ell)$ は非特異 2 次超曲面 $Q^{2\ell-1}$ に含まれる $(\ell-1)$ 次元線形部分空間をパラメータ付けする直交グラスマン $OG(\ell-1, Q^{2\ell-1})$ であり，$D_{\ell+1}(\ell+1)$ は非特異 2 次超曲面 $Q^{2\ell}$ に含まれる ℓ 次元線形部分空間をパラメータ付けする直交グラスマンの既約成分 $OG(\ell, Q^{2\ell})^o$ である．ここで，$Q^{2\ell}$ が張る射影空間の超平面 H を用いて $Q^{2\ell-1}=Q^{2\ell}\cap H$ とみることにより，

$$OG(\ell, Q^{2\ell})^o \to OG(\ell-1, Q^{2\ell-1}); [\mathbb{P}^\ell] \mapsto [\mathbb{P}^\ell \cap H]$$

なる射を得るが，これは同型射である．また，注意 2.7 で述べた通り，$C_\ell(1)\cong A_{2\ell-1}(1)$ である．最後に，$G_2(1)$ は Q^5 と同型であることが知られている（例えば，[3, 23.3] 参照）．従って，$G_2(1)\cong B_3(1)$ である．以上により，$B_\ell(\ell), C_\ell(1), G_2(1)$ はそれぞれ $D_{\ell+1}(\ell+1), A_{2\ell-1}(1), B_3(1)$ とみなすことができるので，長いルートに対応する有理等質多様体である． ■

多様体間の非特異射 $f : X \to Y$ の全てのファイバーが $\mathbb{P}^1$ と同型なとき f を $\mathbb{P}^1$ **束**という．完全旗多様体は多くの $\mathbb{P}^1$ 束構造をもつ．

命題 2.13. 完全旗多様体 $\mathcal{D}(\Delta) = G/B$ は $\sharp\Delta$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束構造をもつ．

証明. 命題 2.9 により，任意の $\alpha_k \in \Delta$ に対して，$\mathcal{D}(\Delta) \to \mathcal{D}(\Delta \setminus \{\alpha_k\})$ は $\mathbb{P}^1$ 束である． ■

3. VMRT について

この章では有理曲線の変形理論と VMRT について知られていることをまとめる．有理曲線の変形理論に関しては [13] を，VMRT の一般論に関しては，[8, 12, 15, 17, 18] を参照されたい．

3.1. 有理曲線の変形理論と VMRT の定義.

有理曲線の族により覆われる多様体を**単線織多様体**と呼ぶ．また，反標準因子 $-K_X$ が豊富な多様体を**ファノ多様体**と呼ぶ．よく知られている通り，ファノ多様体は単線織多様体である．この章では断りがない限り，X を単線織（非特異）射影多様体とする．$\mathbb{P}^1$ から X への射をパラメータ付けする Hom スキームを $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく．また，非定値射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ に対し，対応する Hom スキームの点を $[f] \in \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく．有理曲線 $C \subset X$ に対しその正規化をとることにより非定値射 $f_C : \mathbb{P}^1 \to C \subset X$ が定まる．グロタンディックの定理（例えば [23, Chap. 1, Theorem 2.1.1] 参照）により $\mathbb{P}^1$ 上の任意のベクトル束は直線束の直和としてかけるので，X の接束 T_X の f_C による引き戻し $f_C^* T_X$ に対しある整数 $a_1 \geq a_2 \ldots \geq a_m$ が存在して，

$$f_C^* T_X = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_2) \oplus \ldots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_m)$$

とかける．

定義 3.1. 上記記号のもと，全ての i に対し $a_i \geq 0$ が成り立つとき，C を**自由有理曲線（free rational curve）**という．また，$a_1 = 2 > a_2$ を満たす自由有理曲線 C を**標準的有理曲線（standard rational curve）**という（[13, Definition IV.2.8] では「極小有理射」と呼んでいることに注意する）．

像と双有理同値な射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ をパラメータ付けする $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ の開部分スキームを $\mathrm{Hom}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく．さらに，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ の正規化を $\mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく（肩付きの $^{\mathrm{n}}$ は正規化 (normalization) を意味し，次元を表しているわけではない）．自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ は自然に $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ と $\mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ へ作用し，それらの幾何学的商をそれぞれ

$$\mathrm{Univ}(X), \ \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$$

と記す（[13, Comment II.2.7, Definition-Proposition II.2.11] 参照）．有理曲線 $C \subset X$ に対し，対応する点を $[C] \in \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ とかく．

定理 3.2 ([13, Corollary II.2.12, Theorem II.2.15])**.** 上記記号のもと，以下の可換図式が成り立つ

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \arrow[r, "U"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Univ}(X) \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \arrow[r, "u"] & \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X). \end{tikzcd}$$

さらに，U と u はそれぞれ主 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 束であり，p は $\mathbb{P}^1$ 束である．

注意 3.3. 一般に，$\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ から X のチャウスキームへの自然な有限射 $\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X) \to \mathrm{Chow}(X)$ が存在する．この射はほとんどの点で単射（generically injective）であるが，一般には必ずしも単射ではない．

評価写像 $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \to X$ に対応し，$\mathrm{Univ}(X)$ の評価写像

$$\mathrm{Univ}(X) \to X$$

が定まる．以下，$\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ の既約成分 $\mathcal{M}$ を固定し，$p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ により $\mathrm{Univ}(X) \to \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ の引き戻しを，$\iota : \mathcal{U} \to X$ により評価写像を表す．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & X \\ \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

定義 3.4. 上記記号のもと，$\iota : \mathcal{U} \to X$ が支配的となるとき，既約成分 $\mathcal{M}$ を**支配的**という．支配的な既約成分のうち反標準次数が最小のものを**極小有理成分（minimal rational component）**という．さらに，極小有理成分 $\mathcal{M}$ がスキームとして $\mathbb{C}$ 上固有的ならば，$\mathcal{M}$ を**非分裂（unsplit）**という．また，極小有理成分 $\mathcal{M}$ と任意の $x \in X$ に対し $p(\iota^{-1}(x))$ の正規化を $\mathcal{M}_x$ と記し，$p_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{M}_x$ と $\iota_x : \mathcal{U}_x \to X$ により対応する普遍族を表す．[13, Corollary II.2.12] により p_x は $\mathbb{P}^1$ 束である．

注意 3.5. 極小有理成分 $\mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{M}$ が $\mathbb{C}$ 上固有的であることと $\mathbb{C}$ 上射影的であることは同値である．実際，$\mathcal{M}$ が $\mathbb{C}$ 上固有的ならば，有限射 $\pi : \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X) \to \mathrm{Chow}(X)$ による像 $\pi(\mathcal{M})$ も $\mathbb{C}$ 上固有的である．一般に，$\mathrm{Chow}(X)$ が $\mathbb{C}$ 上射影的なので $\pi(\mathcal{M})$ も射影的となり，$\pi : \mathcal{M} \to \pi(\mathcal{M})$ が有限であることから $\mathcal{M}$ の射影性も従う．

例 3.6. $X \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 3 次曲面とする．X に含まれる直線は 27 本のみであり，X は直線では覆われない．この場合，X の極小有理成分 $\mathcal{M}$ はコニックの族である．また，2 本の直線の和集合が極限として現れるコニックの列が存在するので，$\mathcal{M}$ は一般にスキームとして $\mathbb{C}$ 上固有的ではない．

定理 3.7. $\mathcal{M}$ を X の極小有理成分とする．一般の点 $x \in X$ と $[C] \in \mathcal{M}_x$ に対し，以下が成立する．

(i) C は自由である．
(ii) $\mathcal{M}_x$ は非特異かつ $\mathbb{C}$ 上射影的であり，$\dim \mathcal{M}_x = -K_X.C - 2$ を満たす．
(iii) $[C] \in \mathcal{M}_x$ が $\mathcal{M}_x$ の既約成分の一般元であれば，C は標準的である．

(iv) $f_C(o) = x$ ($o \in \mathbb{P}^1$) とすると，f は o においてはめ込みである．すなわち，f_C の o における微分 $(df_C)_o$ は零写像でない．

(v) $\mathcal{M}_x$ は $\iota^{-1}(x)$ と同型である．

証明. (i) は [13, Theorem II.3.11] と同様の議論により従う．(ii) の射影性以外の主張は [13, Theorem II.1.7, Theorem II.2.16] から従う．$\mathcal{M}_x$ が射影的であることは [13, Proposition II.2.2] と極小有理成分の次数の最小性から従う．(iii) は [13, Corollary II.2.9] より従う．(iv) と (v) は [11, Theorem 3.3] より従う．■

定義 3.8. X の極小有理成分 $\mathcal{M}$ と一般の点 $x \in X$ に対し，定理 3.7 (iv) により，次の射が定まる：

$$\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathbb{P}(\Omega_{X,x}); [C] \mapsto [\mathrm{Im}((df_C)_o)]$$

この射を x **における接写像（tangent map at** x**）**，

$$\mathcal{C}_x := \mathrm{Im}(\tau_x) \subset \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$$

を X **の点** x **における VMRT (Variety of Minimal Rational Tangents at** x**)** という．さらに，一般の点 $x \in X$ に対し τ_x が定まることと定理 3.7 (v) により，有理写像

$$\tau : \mathcal{U} \cdots \to \mathbb{P}(\Omega_X)$$

が定まる．この有理写像を**グローバル接写像（global tangent map）**という．

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(\Omega_X) \arrow[d, "\text{projection}"] \\ \mathcal{U} \arrow[ur, dotted, "\tau"] \arrow[r, "\iota"] & X \end{tikzcd}$$

定理 3.9 ([11, Theorem 3.4], [9, Theorem 1, Corollary 1])**.** 定義 3.8 の仮定のもと，以下が成立する．

(i) $\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ は有限射である．

(ii) $\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ は双有理射である．

従って，$\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ は正規化である．

命題 3.10 ([1, Proposition 2.7])**.** 定義 3.8 の仮定のもと，$\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ が $[C] \in \mathcal{M}_x$ においてはめ込みであることと，C が標準的であることは同値である．

例 3.11. 多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が直線で覆われている場合を考える．このとき，X の極小有理成分 $\mathcal{M}$ は直線の族である．定理 3.7 (i) により，一般の $x \in X$ と任意の $[\ell] \in \mathcal{M}_x$ に対し，ℓ は自由有理曲線である．また，2 つの単射

$$T_{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow T_X|_\ell,\ T_X|_\ell \hookrightarrow T_{\mathbb{P}^N}|_\ell$$

により，ℓ は標準的有理曲線であることが分かる．よって，命題 3.10 により，τ_x ははめ込みである．また，固定点 x を通る直線は x における接方向により一意的に定まるので，τ_x は単射である．以上により，$\tau_x : \mathcal{M}_x \hookrightarrow \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$ は閉埋め込みであり，従って $\mathcal{M}_x \cong \mathcal{C}_x$ となる．

注意 3.12. X 上の極小有理成分 $\mathcal{M}$ と一般の点 $x \in X$ に対し，$p_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{M}_x$ と $\iota_x : \mathcal{U}_x \to X$ を普遍族に付随する射，$T_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}$ と $K_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}$ をそれぞれ $\mathcal{U}_x \to \mathcal{M}_x$ の相対接束と相対標準因子とする．自然な射 $T_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}|_{q^{-1}(x)} \subset T_{\mathcal{U}_x}|_{q^{-1}(x)}$ と $T_{\mathcal{U}_x}|_{q^{-1}(x)} \to T_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{q^{-1}(x)}$ の合成を考えると，[11, Theorem 3.3, Theorem 3.4] により $T_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}|_{q^{-1}(x)}$ は $T_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{q^{-1}(x)}$ の部分束である．この束により定まる射 $q^{-1}(x) \to \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$ が接写像 τ_x である．よって，接写像 τ_x は次を満たす：

$$\tau_x^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_{X,x})}(1) = \mathcal{O}_{q^{-1}(x)}(K_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}). \tag{1}$$

3.2. **ピカール数 1 の有理等質多様体の VMRT.** X をピカール数 1 の有理等質多様体とする．このとき，X のピカール群の豊富な生成元 L は非常に豊富なので，完備線形系 $|L|$ により X を射影空間に埋め込むことができる（例えば，[24, Theorem 6.5] 参照）．さらに，この埋め込みに関して X は直線により覆われる（例えば，[13, Theorem V.1.15] 参照）．従って，例 3.11 により，接写像 τ_x は埋め込みになり，$\mathcal{M}_x \cong \mathcal{C}_x$ が成り立つ．また，注意 3.12 により，$\mathcal{C}_x$ の埋め込みの情報が得られる．一般の多様体に対して VMRT $\mathcal{C}_x$ は一般の点 $x \in X$ においてのみ定義されるが，X が等質ならば推移的群作用により任意の点で VMRT は定義され，それらは互いに射影同値であることに注意する．

一般に，ピカール数 1 の有理等質多様体の VMRT の構造は完全に決定されている（例えば，[8, 14, 15] などを参照）．まず，長い単純ルートに対応する有理等質多様体（定義 2.10）について考える．連結なディンキン図形 $\mathcal{D}$ に対し，その第 r 番目の頂点と辺を共有する頂点の集合を $N(r) \subset D$ とおく．このとき以下が成り立つ．

命題 3.13 ([14, Theorem 4.9] 参照)**.** 連結なディンキン図形 $\mathcal{D}$ に対し，X を有理等質多様体 $\mathcal{D}(r)$ とする．r 番目の頂点が長い単純ルートならば，X の任意の点における VMRT は $\mathcal{D}$ から r 番目の頂点を取り除いて得られるディンキン図形 $\mathcal{D} \setminus \{r\}$ とその頂点の部分集合 $N(r)$ の組に対応する有理等質多様体 $(\mathcal{D} \setminus \{r\})(N(r))$ である．

この命題を用いて長い単純ルートに対応する有理等質多様体の VMRT の構造を次頁の Table 1 にまとめる．ただし，$\mathcal{O}(1)$ により対応する多様体のピカール群の豊富な生成元を表す．また，多様体の積 $Y_1 \times Y_2 \times \dots$ とその第 i 射影 p_i に対し，$p_1^*\mathcal{O}(a_1) \otimes p_2^*\mathcal{O}(a_2) \otimes \dots$ を $\mathcal{O}(a_1, a_2, \dots)$ により表す．全ての場合において，VMRT の埋め込みは対応する直線束の完備線形系による埋め込みとする．

命題 2.12 により，長い単純ルートに対応しない等質多様体はシンプレクティックグラスマン多様体 $C_\ell(k)$ (ただし，$1 < k < \ell$) と $F_4(k)$（ただし，$k = 3$ または 4）の 3 種類のみである．それらに関しては次が成立する．

命題 3.14. $(\mathcal{D}, r) = (C_\ell, r),\ r = 2, \dots, \ell - 1, \quad (F_4, 3), \quad (F_4, 4)$ に対応する有理等質多様体 $\mathcal{D}(r)$ の VMRT はそれぞれ以下により与えられる:

- (C_ℓ, r) $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(1)^{2\ell-2r})$ とそのトートロジー的直線束による完備線形系 $|\mathcal{O}(1)|$.
- $(F_4, 3)$ $\mathbb{P}^1$ 上の階数 4 のあるベクトル束 $\mathcal{E}$ により定まるグラスマン束 $G(2, \mathcal{E})$ とそのプリュッカー直線束による完備線形系.
- $(F_4, 4)$ スピノール多様体 $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$ の超平面切断.

$\mathcal{D}$	頂点 r	X	VMRT	埋め込み
A_ℓ	$\leq \ell$	$G(r, \mathbb{C}^{\ell+1})$	$\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{P}^{\ell-r}$	$\mathcal{O}(1,1)$
B_ℓ	$\leq \ell - 2$	$OG(r, \mathbb{C}^{2\ell+1})$	$\mathbb{P}^{r-1} \times Q^{2(\ell-r)-1}$	$\mathcal{O}(1,1)$
	$\ell - 1$	$OG(\ell-1, \mathbb{C}^{2\ell+1})$	$\mathbb{P}^{\ell-2} \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(1,2)$
	ℓ	S_ℓ	$G(\ell-1, \mathbb{C}^{\ell+1})$	$\mathcal{O}(1)$
C_ℓ	1	$\mathbb{P}^{2\ell-1}$	$\mathbb{P}^{2\ell-2}$	$\mathcal{O}(1)$
	$\leq n - 1$	$LG(r, \mathbb{C}^{2\ell})$	(命題 3.14 参照)	
	ℓ	$LG(\ell, \mathbb{C}^{2\ell})$	$\mathbb{P}^{\ell-1}$	$\mathcal{O}(2)$
D_ℓ	$\leq \ell - 3$	$OG(r, \mathbb{C}^{2\ell})$	$\mathbb{P}^{r-1} \times Q^{2(\ell-r-1)}$	$\mathcal{O}(1,1)$
	$\ell - 2$	$OG(\ell-2, \mathbb{C}^{2\ell})$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{\ell-3}$	$\mathcal{O}(1,1,1)$
	$\ell - 1, \ell$	$S_{\ell-1}$	$G(2, \mathbb{C}^\ell)$	$\mathcal{O}(1)$
E_k	1	$E_k(1)$	S_{k-2}	$\mathcal{O}(1)$
	2	$E_k(2)$	$G(3, \mathbb{C}^k)$	$\mathcal{O}(1)$
	3	$E_k(3)$	$\mathbb{P}^1 \times G(2, \mathbb{C}^{k-1})$	$\mathcal{O}(1,1)$
	4	$E_k(4)$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{k-4}$	$\mathcal{O}(1,1,1)$
	5	$E_k(5)$	$G(2, \mathbb{C}^5) \times \mathbb{P}^{k-5}$	$\mathcal{O}(1,1)$
	6	$E_k(6)$	$S_4 \times \mathbb{P}^{k-6}$	$\mathcal{O}(1,1)$
	7	$E_k(7)$	$E_6(1) \times \mathbb{P}^{k-7}$	$\mathcal{O}(1,1)$
	8	$E_8(8)$	$E_7(7)$	$\mathcal{O}(1)$
F_4	1	$F_4(1)$	$LG(3, \mathbb{C}^6)$	$\mathcal{O}(1)$
	2	$F_4(2)$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1,2)$
	3	$F_4(3)$	(命題 3.14 参照)	
	4	$F_4(4)$	(命題 3.14 参照)	
G_2	1	Q^5	Q^3	$\mathcal{O}(1)$
	2	$G_2(2)$	$\mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(3)$

Table 1. ピカール数 1 の有理等質多様体の VMRT

特に，VMRT は等質多様体でない．

証明. 例えば [14] 参照．また，$C_\ell(r)$ と $F_4(4)$ の VMRT やその射影幾何学的性質に関しては，それぞれ [19, 20] にも記述がある．$F_4(3)$ の VMRT に関しては [10] に詳しい記述が載っている． ■

4. VMRT による等質多様体の特徴付け

この章では VMRT の観点からピカール数 1 の有理等質多様体の特徴付けについて考える．前章において有理等質多様体の VMRT の構造をみたが，N. Mok [16] と J. Hong, J. M. Hwang [5] により，長い単純ルートに対応する有理等質多様体は VMRT により特徴付けられることが知られている：

定理 4.1 ([16, 5]). ピカール数 1 のファノ多様体 X に対し，X 上の一般の点における VMRT $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$ が長い単純ルートに対応する有理等質多様体 G/P の VMRT と射影同値であれば，X は G/P と同型である．

命題 3.13 により，長い単純ルートに対応する有理等質多様体の VMRT は再び有理等質多様体になることに注意する．このことが上記定理 4.1 の証明でも

用いられている．一方，命題2.12 により，長い単純ルートに対応しないピカール数 1 の有理等質多様体はシンプレクティックグラスマン多様体と 2 つの F_4 型の多様体のみである．これらの場合，VMRT は有理等質多様体でない．しかし，これらに対しても定理 4.1 と同じことが成り立つことが Mok, Hong, Hwang により予想されている：

予想 4.2. ピカール数 1 のファノ多様体 X に対し，X 上の一般の点における VMRT $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$ がピカール数 1 の有理等質多様体 G/P の VMRT と射影同値であれば，X は G/P と同型である．

また，定理 4.1 に関連して，G. Occhetta, L. E. Solá Conde, J. A. Wiśniewski による次の結果も知られている：

定理 4.3 ([22])**.** X をピカール数 1 のファノ多様体とする．X は非分裂極小有理成分 $p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ をもち，その評価写像 $\iota : \mathcal{U} \to X$ が非特異射であると仮定する．さらに，任意の $x \in X$ に対し，$\iota^{-1}(x)$ が（固定された）有理等質多様体 Z と同型ならば，X は有理等質多様体である．

注意 4.4. 定理4.1 と定理4.3 は似ているが，どちらか一方からもう一方が（直ちに）従うわけではない．定理 4.1 の利点は一般の点における VMRT の構造のみを仮定すれば良い点である．一方で，定理 4.3 は任意の点における $\iota^{-1}(x)$ の等質性を仮定しているが，接写像による埋め込み方を仮定する必要がない点が優れている．

定理 4.3 の証明において次の結果が本質的に重要である．

定理 4.5 ([21], [22, Theorem A.1])**.** 射影多様体 X に対し，以下は同値である．
- (i) X はピカール数 $\rho(X)$ と同じ数の $\mathbb{P}^1$ 束構造をもち，それらの張る端射線は $N_1(X)$ において線形独立である．
- (ii) X はあるディンキン図形 $\mathcal{D}$ に付随する完全旗多様体 $\mathcal{D}(\Delta) = G/B$ と同型である．

系 4.6. ファノ多様体 X が有理等質多様体であることと以下の条件を満たす射影多様体 Z が存在することは同値である*:*
- (i) Z から X へ収縮射が存在する．
- (ii) 射影多様体 Z は $\rho(Z)$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束構造をもち，それらの張る端射線は $N_1(Z)$ において線形独立である．

証明. X を有理等質多様体とする．定理 2.1 により，半単純線形代数群 G とその放物的部分群 P が存在し $X = G/P$ となる．このとき，P に含まれるボレル部分群 B を用いて $Z = G/B$ とすればよい．逆に，Z が条件 (i), (ii) を満たすならば，定理 4.5 により $Z = G/B$ となる．条件 (i) より X は有理等質多様体 G/B の収縮射の像であるが，それは有理等質多様体である． ■

この系を用いて定理 4.3 をどのように示すか，証明のアイデアのみ述べる：

定理 4.3 の証明のアイデア. 定理の仮定のもと，$\iota : \mathcal{U} \to X$ の任意のファイバーは有理等質多様体 Z と同型である．G を $\mathrm{Aut}(Z)$ の単位元を含む既約成分とすると，$Z = G/P$ とかける．ここで，G は半単純線形代数群，P はその放物的部分群である．このとき，解析的位相に関して $\iota : \mathcal{U} \to X$ は G/P をファイバー

としてもつファイバー束となる．ファイバー束 ι はコサイクル $\theta \in H^1(X,G)$ を定める．このコサイクルを用いて，X 上の主 G 束 $E_G \to X$ を構成することができる．さらに，任意の放物的部分群 $P' \subset G$ に対し，G/P' 束を考えることができる：

$$q_{P'} : E_{P'} := E_G \times_G G/P' := (E_G \times G/P')/\sim_G \to X.$$

ただし，任意の $h \in G$ に対し，$(x, gP') \sim_G (xh, h^{-1}gP')$ とする．このように定めると，任意の放物的部分群 $P_1 \subset P_2 \subset G$ に対し，$q_{P_2} \circ q_{P_1,P_2} = q_{P_1}$ を満たす自然な射 $q_{P_1,P_2} : E_{P_1} \to E_{P_2}$ が存在する．特に，P に含まれるボレル部分群 B をとり，$\bar{\iota} : \overline{\mathcal{U}} := E_B \to X$ とおくと，次の可換図式を満たす：

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{U}} \arrow[d] \arrow[dr, "\bar{\iota}"] & \\
\mathcal{U} \arrow[r, "\iota"'] & X
\end{tikzcd}$$

また，命題 2.13 により，B を真に含む最小の放物的部分群 P_i が $\rho(G/B)$ 個あり，$G/B \to G/P_i$ はそれぞれ $\mathbb{P}^1$ 束である．従って，$\overline{\mathcal{U}} := E_B$ は $\rho(G/B)$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束 $\overline{\mathcal{U}} \to E_{P_i}$ を持つ．

いま，$\rho(\overline{\mathcal{U}}) = \rho(G/B) + 1$ なので，系 4.6 を適用するにはさらにもう 1 つ独立な $\mathbb{P}^1$ 束構造が必要である．定理 3.7 により，$\mathcal{U}$ は $\mathbb{P}^1$ 束構造 $p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ をもつが，この $\mathbb{P}^1$ 束構造が $\overline{\mathcal{U}}$ 上に持ち上がることを示すことができる．その結果，$\overline{\mathcal{U}}$ は $\rho(G/B) + 1$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束構造を持つことが分かる．それらが定める端射線が $N_1(\overline{\mathcal{U}})$ において独立であることは簡単に確認できるので，系 4.6 により X の等質性が従う． ■

定理 4.3 の証明と同様のアイデアを用いると，予想 4.2 の弱型がシンプレクティックグラスマン多様体と $F_4(4)$ に対して成立することを示すことができる：

定理 4.7 ([19, 20])**.** X をピカール数 1 のファノ多様体とする．X は非分裂極小有理成分 $p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ をもち，グローバル接写像 $\tau : \mathcal{U} \to \mathbb{P}(\Omega_X)$ が閉埋め込みであると仮定する．任意の $x \in X$ に対し，$\iota^{-1}(x)$ がシンプレクティックグラスマン多様体または $F_4(4)$ の VMRT と射影同値であれば，X はそれぞれシンプレクティックグラスマン多様体または $F_4(4)$ と同型である．

注意 4.8. 先にも触れた通り，$C_\ell(k)$ $(1 < k < \ell)$ や $F_4(4)$ の VMRT は等質多様体ではない．しかし，それらの VMRT は有理等質多様体をある群の作用に関する閉軌道として含んでおり，その軌道を用いて X 上に G/P 束を構成することができる．しかし，この G/P 束を構成する箇所や，その後の議論において，しばしば定理 4.3 と同じ手法を適用することができないため，個別に扱う必要がある．詳細は [19, 20] を参照されたい．

参考文献

[1] Carolina Araujo. Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces. *Math. Ann.*, 335(4):937–951, 2006.

[2] Armand Borel and Reinhold Remmert. Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 145:429–439, 1961/1962.

[3] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[4] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[5] Jaehyun Hong and Jun-Muk Hwang. Characterization of the rational homogeneous space associated to a long simple root by its variety of minimal rational tangents. In *Algebraic geometry in East Asia—Hanoi 2005*, volume 50 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 217–236. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.

[6] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[7] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.

[8] Jun-Muk Hwang. Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds. In *School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000)*, volume 6 of *ICTP Lect. Notes*, pages 335–393. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001.

[9] Jun-Muk Hwang and Ngaiming Mok. Birationality of the tangent map for minimal rational curves. *Asian J. Math.*, 8(1):51–63, 2004.

[10] Jun-Muk Hwang and Ngaiming Mok. Deformation rigidity of the 20-dimensional F_4-homogeneous space associated to a short root. In *Algebraic transformation groups and algebraic varieties*, volume 132 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 37–58. Springer, Berlin, 2004.

[11] Stefan Kebekus. Families of singular rational curves. *J. Algebraic Geom.*, 11(2):245–256, 2002.

[12] Stefan Kebekus and Luis E. Solá Conde. Existence of rational curves on algebraic varieties, minimal rational tangents, and applications. In *Global aspects of complex geometry*, pages 359–416. Springer, Berlin, 2006.

[13] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[14] Joseph M. Landsberg and Laurent Manivel. On the projective geometry of rational homogeneous varieties. *Comment. Math. Helv.*, 78(1):65–100, 2003.

[15] Ngaiming Mok. Geometric structures on uniruled projective manifolds defined by their varieties of minimal rational tangents. *Astérisque*, (322):151–205, 2008. Géométrie différentielle, physique mathématique, mathématiques et société. II.

[16] Ngaiming Mok. Recognizing certain rational homogeneous manifolds of Picard number 1 from their varieties of minimal rational tangents. In *Third International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2*, volume 2 of *AMS/IP Stud. Adv. Math., 42, pt. 1*, pages 41–61. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[17] Ngaiming Mok. Geometric structures and substructures on uniruled projective manifolds. In *Foliation Theory in Algebraic Geometry*, Simons Symposia, pages 103–148. Springer International Publishing, 2016.

[18] Roberto Muñoz, Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, Kiwamu Watanabe, Jarosław A. Wiśniewski, A survey on the Campana-Peternell conjecture. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 47:127–185, 2015.

[19] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe. A characterization of Symplectic Grassmannians. *Math. Z.*, 286(3-4):1421–1433, 2017.

[20] Gianluca Occhetta, Luis E. Soĺa Conde, and Kiwamu Watanabe. Characterizing the homogeneous variety $F_4(4)$. *Preprint arXiv*:1706.01640, 2017.

[21] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe, Jarosław A. Wiśniewski. Fano manifolds whose elementary contractions are smooth $\mathbb{P}^1$-fibrations: A geometric characterization of flag varieties. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 17(2):573–607, 2017.

[22] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Jarosław A. Wiśniewski. Flag bundles on Fano manifolds. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 106(4):651–669, 2016.

[23] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler. Vector bundles on complex projective spaces. Progress in Mathematics, 3. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

[24] Dennis M. Snow. *Homogeneous vector bundles*, volume 10 of *CMS Conf.* Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[25] 西山享，太田琢也. 代数群と軌道. 数学の杜. 数学書房, 2015.

Course of Mathematics, Programs in Mathematics, Electronics and Informatics, Graduate School of Science and Engineering, Saitama University. Shimo-Okubo 255, Sakura-ku Saitama-shi, 338-8570, Japan.

E-mail address: kwatanab@rimath.saitama-u.ac.jp

エタール層とアイソクリスタル

志甫　淳*

1　序

位相幾何学，代数幾何学や数論幾何学においては，複素多様体あるいは様々な体上の代数多様体 X に対する様々なコホモロジー理論が研究の重要な道具であり，研究対象となるが，更に，X 上のある種の層がコホモロジー理論の係数層として考えられ，係数層自体も興味深い研究対象となる．そして，多様体が連結なとき，この係数層を分類する群 (あるいは副有限群，副代数群) として様々な基本群の概念が定義される．本稿では，以下の状況で多様体，その上の係数層および基本群を考える．

(A) X を連結射影的複素多様体とするとき，X 上の局所系 (X 上の局所定数層) が Betti コホモロジーの係数層として考えられる．$x \in X$ とするとき，x を基点とする X の位相的基本群 $\pi_1(X, x)$ が，次の圏同値を満たすような群として定義される．

$$\{X \text{ 上の局所系 }\} \xrightarrow{\cong} \{\pi_1(X, x)\text{-集合 }\}; \quad E \mapsto E_x.$$

但し E_x は E の x におけるファイバーであり，$\pi_1(X, x)$-集合とは $\pi_1(X, x)$ の作用を持つ集合のことである．

(B) X を体 k 上の連結射影的で滑らかな代数多様体とするとき，X のエタールサイト X_{et} 上の局所定数構成可能層がエタールコホモロジーの係数層として考えられる．x を X の幾何的点とするとき，x を基点とする X のエタール基本群 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x)$ が，次の圏同値を満たすような副有限群として定義される．

$$\{X_{\mathrm{et}} \text{ 上の局所定数構成可能層 }\} \xrightarrow{\cong} \{\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x)\text{-有限集合 }\}; \quad E \mapsto E_x.$$

但し，E_x は E の x におけるファイバーであり，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x)$-有限集合とは $\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x)$ の連続作用を持つ有限集合のことである．

---

*東京大学大学院数理科学研究科．科学研究費補助金 (基盤 (C)17K05162 および基盤 (A)15H02048) の援助を受けております．

(C) X を標数 0 の体 k 上の連結射影的で滑らかな代数多様体とするとき，X 上の $\mathcal{O}_X$ 連接 $\mathcal{D}_X$ 加群が de Rham コホモロジーの係数層として考えられる．なお，$\mathcal{D}_X$ は X 上の微分作用素環であり，局所的に X の座標系 $t := (t_1, \ldots, t_d)$ をとるとき，$\mathcal{D}_X = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^d} \mathcal{O}_X \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i$ と表せる．X が k 有理点 x を持つとき，x を基点とする X の de Rham 基本群 $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X, x)$ が，次の圏同値を満たすような k 上の副代数群として定義される．

$$\{X \text{ 上の } \mathcal{O}_X \text{ 連接 } \mathcal{D}_X \text{ 加群}\} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Rep}_k(\pi_1^{\mathrm{dR}}(X, x)); \quad E \mapsto E_x.$$

但し，E_x は E の x におけるファイバーであり，右辺は $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X, x)$ の k 上の (副代数群としての) 有限次元表現のなす圏である．

(D) X を標数 $p > 0$ の体 k 上の連結射影的で滑らかな代数多様体であるときも，X 上の $\mathcal{O}_X$ 連接 $\mathcal{D}_X$ 加群が de Rham コホモロジーの係数層として考えられる．なお，$\mathcal{D}_X$ は X 上の微分作用素環であり，局所的に X の座標系 $t := (t_1, \ldots, t_d)$ をとるとき，やはり $\mathcal{D}_X = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^d} \mathcal{O}_X \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i$ と表せるものである．X が k 有理点 x を持つとき，x を基点とする X のストラティファイド基本群 $\pi_1^{\mathrm{strat}}(X, x)$[1] が，次の圏同値を満たすような k 上の副代数群として定義される．

$$\{X \text{ 上の } \mathcal{O}_X \text{ 連接 } \mathcal{D}_X \text{ 加群}\} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Rep}_k(\pi_1^{\mathrm{strat}}(X, x)); \quad E \mapsto E_x.$$

但し，記号の意味は (C) と同様である．

(E) X を標数 $p > 0$ の完全体 k 上の連結射影的で滑らかな代数多様体とし，$W = W(k)$ を k の Witt 環，$K = \mathrm{Frac}(W)$ を W の商体とするとき，X/W の上のアイソクリスタルの圏 (定義は後ほど述べる) がクリスタリンコホモロジーの係数層として考えられる．X が k 有理点 x を持つとき，x を基点とする X のクリスタル基本群[2] $\pi_1^{\mathrm{crys}}(X, x)$ が，次の圏同値を満たすような K 上の副代数群として定義される．

$$\{X/W \text{ 上のアイソクリスタル}\} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Rep}_K(\pi_1^{\mathrm{crys}}(X, x)); \quad E \mapsto E_x.$$

但し，記号の意味は (C) と同様である．

(A)～(E) における基本群は，異なる状況において異なる方法で定義されたものであるが，適当な状況下では２つ以上の基本群が定義され，それらの間に関係がある．例えば，基本群の Abel 化の双対である１次コホモロジー群を考えたときは，(A), (B), (C), (E) の比較定理は (高次のコホモロジーの場合も含めて) 良く知られている

[1] この記法は Esnault-Mehta [EM10], Esnault-Srinivas [ESr16] 等による．

[2] これは [Sh00] におけるクリスタル基本群とは異なる：[Sh00] におけるクリスタル基本群は本稿のものの最大副冪単商である．

ものであるし，また，基本群の最大副冪単商を考えたときは，(A), (B), (C), (E) の比較定理は，例えば Hain [Ha87], Deligne [D89]，筆者 [Sh00], [Sh02]，Olsson[Ol11] 等により研究されたものである．以上に例示した比較定理はコホモロジーや基本群の最大副冪単商がモチーフ的なものであることの現れとみなせる．本稿の主目標は，X の形状が簡単な場合に，エタール層とアイソクリスタルを分類する基本群，つまり (B) と (E) における基本群のより細やかな関係を考えることであるが，そこにはモチーフ的な問題ではない難しさも含まれているように思われる．

本稿では，２節において，X が $\mathbb{C}$ 上の連結射影的で滑らかな代数多様体の場合に，(B), (C) の基本群のある関係について述べた Malcev-Grothendieck の定理を紹介する．次に，３節において，Malcev-Grothendieck の定理の正標数版である Gieseker 予想と，Esnault-Mehta による予想の解決について述べる．これは (B), (D) の基本群の関係についての結果である．４節では，アイソクリスタルの定義を述べたあと，Gieseker 予想の p 進版である de Jong 予想について述べる．これは (B), (E) の基本群の関係についての予想である．５節では，de Jong 予想に関する阿部-Esnault, Kedlaya や Esnault-筆者の結果について述べる．

最後に，代数的シンポジウムにおいて，本稿の内容に関する講演の機会を与えてくださった関係者の皆様，特にシンポジウム責任者の市川尚志先生，会場責任者の渡部隆夫先生と数論のプログラム責任者の中村健太郎先生，成田宏秋先生に感謝を申し上げる．

2 Malcev-Grothendieck の定理

X を $\mathbb{C}$ 上の連結射影的で滑らかな代数多様体とし，x を X の $\mathbb{C}$ 有理点とすると，X は連結射影的な複素多様体ともみなせる．従って，１節の (A), (B), (C) で述べた方法で位相的基本群 $\pi_1(X,x)$, エタール基本群 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X,x)$, de Rham 基本群 $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X,x)$ が定義されるが，自然な同型および圏同値

$$(2.1)\qquad \pi_1^{\mathrm{et}}(X,x) \cong \pi_1(X,x)^\wedge, \qquad \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1^{\mathrm{dR}}(X,x)) \cong \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1(X,x))$$

がある．ここで，$\pi_1(X,x)^\wedge$ は $\pi_1(X,x)$ の副有限完備化で，$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1(X,x))$ は $\pi_1(X,x)$ の $\mathbb{C}$ 上の (抽象群としての) 有限次元表現のなす圏である．(前者は [SGA1] で示されており，また後者は Riemann-Hilbert 対応の帰結である.) これらは，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X,x)$, $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X,x)$ が $\pi_1(X,x)$ に「最も近い」副有限群，副代数群であることを示している．位相的基本群 $\pi_1(X,x)$ は，その定義に X の複素多様体としての位相を用いるので代数的に定義されたものではないが，エタール基本群 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X,x)$ あるいは de Rham 基本群 $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X,x)$ の定義は代数的であり，従って，位相的基本群のある種の「近似」は代数的に定義されるということになる．

上の状況で，エタール基本群 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X,x)$ と de Rham 基本群 $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X,x)$ の関係はどうなっているだろうか？ X_{et} 上の局所定数構成可能層を与えることは，X の有限エ

タール被覆 $g : Y \longrightarrow X$ を与えることに他ならないが，このとき自明な $\mathcal{D}_Y$ 加群 $\mathcal{O}_Y$ の g による順像 $g_*\mathcal{O}_Y$ は $\mathcal{O}_X$ 連接 $\mathcal{D}_X$ 加群となる．g が自明な被覆 ($\coprod X \longrightarrow X$ の形の被覆) でない場合，$g_*\mathcal{O}_Y$ は定数 (ある r に対する $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ と同型なもの) にはならないので，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x)$ が非自明なとき $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X, x)$ も非自明になる，つまり $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X, x)$ が自明ならば $\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x)$ も自明になる．次の定理は，この事実の逆を主張するものである：

定理 2.1 (Malcev-Grothendieck [Ma40], [Gr70]). X を $\mathbb{C}$ 上の連結射影的で滑らかな代数多様体，x を X の $\mathbb{C}$ 有理点とし，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x)$ が自明であるとすると，$\pi_1^{\mathrm{dR}}(X, x)$ も自明である．つまり任意の $\mathcal{O}_X$ 連接 $\mathcal{D}_X$ 加群は定数 (ある r に対する $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ と同型) である．

定理 2.1 の証明の概略は次の通りである：もし定数でない $\mathcal{O}_X$ 連接 $\mathcal{D}_X$ 加群があったとすると，それは自明でない $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\pi_1^{\mathrm{dR}}(X, x))$ の対象を定めるので，圏同値 (2.1) により，自明でない表現 $\rho : \pi_1(X, x) \longrightarrow GL_r(\mathbb{C})$ を定める．$\pi_1(X, x)$ は有限生成なので，ある $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数 R に対して，ρ は $\rho : \pi_1(X, x) \longrightarrow GL_r(R) \hookrightarrow GL_r(\mathbb{C})$ と分解する．更に，R のある剰余環 $R \longrightarrow \overline{R}$ で，$|\overline{R}|$ が有限かつ合成

$$\overline{\rho} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\rho} GL_r(R) \longrightarrow GL_r(\overline{R})$$

が自明でないようなものがとれる．この $\overline{\rho}$ は自明でない有限エタール被覆 $Y \longrightarrow X$(従って X_{et} 上の自明でない局所定数構成可能層) を定めるので，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x)$ が自明であるという仮定に反する．

なお，定理 2.1 の主張には $\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x)$ と $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X, x)$ しか現れないので，これは代数的な主張である．一方，上に述べた証明は，$\pi_1(X, x)$ が現れているので，代数的ではない．定理 2.1 に純代数的な証明を与えることは興味深い課題である．

3 Gieseker 予想 (Esnault-Mehta の定理)

本節では，定理 2.1 の正標数版を考える．k を標数 $p > 0$ の完全体，$\overline{k}$ をその代数閉包とする．X を k 上の幾何的連結射影的で滑らかな代数多様体，x を X の k 有理点とし，$X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}}$ を X, x の $\overline{k}$ への基底変換とする．このとき，1 節の (B) の方法により，$x_{\overline{k}}$ を基点とする $X_{\overline{k}}$ のエタール基本群 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が定義される．一方，1 節の (C) の方法により，x を基点とする X のストラティファイド基本群 $\pi_1^{\mathrm{strat}}(X, x)$ が定義される．

自明でない $X_{\overline{k}}$ の有限エタール被覆 $g : Y \longrightarrow X_{\overline{k}}$ が与えられたとき，ある k の有限次拡大 k' が存在して g はある有限エタール被覆 $g' : Y' \longrightarrow X_{k'}$ の基底変換として得られ，このとき，合成 $h : Y' \longrightarrow X_{k'} \longrightarrow X$ による自明な $\mathcal{D}_{Y'}$ 加群 $\mathcal{O}_{Y'}$ の順像 $h_*\mathcal{O}_{Y'}$ は定数 (ある r に対する $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ と同型) でない $\mathcal{O}_X$ 連接 $\mathcal{D}_X$ 加群となるので，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が非自明なとき $\pi_1^{\mathrm{strat}}(X, x)$ も非自明になる，つまり，$\pi_1^{\mathrm{strat}}(X, x)$ が自明ならば $\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ も自明になる．

Gieseker は 1975 年の論文 [Gi75] で，この事実の逆，つまり次のような Malcev-Grothendieck の定理の正標数版が成り立つと予想した．

予想 3.1 (Gieseker 予想). k を標数 $p > 0$ の完全体，$\overline{k}$ をその代数閉包とする．X を k 上の幾何的連結射影的で滑らかな代数多様体，x を X の k 有理点とし，$X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}}$ を X, x の $\overline{k}$ への基底変換とする．このとき，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が自明であるとすると，$\pi_1^{\mathrm{strat}}(X, x)$ も自明である．つまり任意の $\mathcal{O}_X$ 連接 $\mathcal{D}_X$ 加群は定数 (ある r に対する $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ と同型) である．

注 3.2. なお，Gieseker 予想は $k = \overline{k}$ の場合に示せば充分である：実際，$k = \overline{k}$ のときの Gieseker 予想を仮定して，一般の場合に $\mathcal{O}_X$ 連接 $\mathcal{D}_X$ 加群 E をとると，自然な写像 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, E) \otimes_k \mathcal{O}_X \longrightarrow E$ は，$\otimes_k \overline{k}$ を施すと同型になるので，これ自身同型であり，従って E は定数になる．

正標数の代数多様体 X 上で考えている場合，位相的基本群 $\pi_1(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ は存在しないので，２節で述べた Malcev-Grothendieck の定理の証明をそのまま真似することはできない．Gieseker 予想が正しいことは Esnault-Mehta [EM10] により 2010 年に証明された：

定理 3.3 (Esnault-Mehta). Gieseker 予想は正しい．

以下，Esnault-Mehta の定理の証明の概略を説明する．注 3.2 より k は代数閉体と仮定してよいので，以下そう仮定する．$F : X \longrightarrow X$ を Frobenius 写像とし，次の圏を考える．

$$\mathrm{Strat}(X) := \{(E_n, \sigma_n)_{n=0}^{\infty} \,|\, E_n\text{: 連接 } \mathcal{O}_X \text{ 加群}, \sigma_n : F^* E_{n+1} \xrightarrow{\cong} E_n\}.$$

この圏 $\mathrm{Strat}(X)$ の対象をストラティファイド束と呼ぶ．このとき，圏同値

$$\{\mathcal{O}_X \text{ 連接 } \mathcal{D}_X \text{ 加群 }\} \cong \mathrm{Strat}(X)$$

がある [Gi75, Thm. 1.3]．従って，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が自明であるという仮定の下で，任意の $\mathrm{Strat}(X)$ の対象 $(E_n, \sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ が定数 (ある r に対する $(\mathcal{O}_X, \mathrm{id})^{\oplus r}$ と同型) であることを示せばよい．なお，$(E_n, \sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ を途中で切ったもの $(E_n, \sigma_n)_{n=n_0}^{\infty}$ が定数であることを示せば充分であることに注意しておく．

以下，X 上の豊富な直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ を固定し，X 上の 0 でない連接無捻 $\mathcal{O}_X$ 加群 E に対して E の勾配を $\mu(E) := \deg(E)/\mathrm{rk}(E) := (c_1(E) c_1(\mathcal{O}_X(1))^{\dim X - 1})/\mathrm{rk}(E) \in \frac{\mathbb{Z}}{\mathrm{rk}(E)}$ と定め，E の最大勾配を

$$\mu_{\max}(E) := \max\{\mu(E') \,|\, 0 \subsetneq E' \subseteq E : \text{部分連接 } \mathcal{O}_X \text{ 加群 }\}$$

と定める．(これは有限であることが知られている.) また $p_E(t)$ を E の被約 Hilbert 多項式 ($p_E(m)=\mathrm{rk}(E)^{-1}\chi(X,E(m))$ ($m\gg 0$) となる $\mathbb{Q}$ 係数多項式) とする．また，E の任意の部分連接 $\mathcal{O}_X$ 加群 $E'\neq E,0$ に対して

$$\mu(E')<\mu(E)\qquad (\text{resp.}\quad p_{E'}(m)<p_E(m)\ (m\gg 0))$$

が満たされているとき，E は μ 安定 (resp. χ 安定) であるという．E の任意の部分連接 $\mathcal{O}_X$ 加群 $E'\neq 0$ に対して

$$\mu(E')\leq\mu(E)\qquad (\text{resp.}\quad p_{E'}(m)\leq p_E(m)\ (m\gg 0))$$

が満たされているとき，E は μ 半安定 (resp. χ 半安定) であるという．これらの間には

$$\mu\text{ 安定}\implies\chi\text{ 安定}\implies\chi\text{ 半安定}\implies\mu\text{ 半安定}$$

という関係がある．

さて，$(E_n,\sigma_n)_{n=0}^{\infty}\in\mathrm{Strat}(X)$ を任意にとる．このとき，実は各 E_n は (階数が一定の) 局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群となることが知られている．階数を r とおく．

まず，E_n の Chern 類 $c_i(E_n)$(を代数的サイクルの数値的同値類として考えたもの) について，$(F^*)^mE_{n+m}\cong E_n$ であることより $p^mc_i(E_{n+m})=c_i(E_n)$ という関係がある．従って，$i>0$ のとき，$c_i(E_n)$ は p で何回でも割れることとなり，よって $c_i(E)=0$ となる．特に，$\mu(E_n)=0$, $p_{E_n}(t)=p_{\mathcal{O}_X}(t)$ となる．

更に，ある n_0 に対し，E_n ($n\geq n_0$) は全て μ 半安定になる：実際，$E'\subseteq E_n$, $\mu(E')>\mu(E_n)=0$ だとすると $(F^*)^nE'\subseteq E_0$ より $p^n\mu(E')=\mu((F^*)^nE')\leq\mu_{\max}(E_0)$ となるので，$0<\mu(E')\leq\mu_{\max}(E_0)/p^n$ となり，$\mu_{\max}(E_0)/p^n<1/r$ となるような n に対してこれは矛盾を与える．

更にやや複雑な議論により，n_0 を大きくとりかえると，$(E_n)_{n=n_0}^{\infty}$ は，$\mathrm{Strat}(X)$ の対象たち $\{(E'_{i,n})_{n=n_0}^{\infty}\}_i$ で各 $E'_{i,n}$ が μ 安定であるようなものの拡大として書けることが言える．従って，各 E_n が μ 安定である場合に定理が言えれば，一般の $\mathrm{Strat}(X)$ の対象は $(\mathcal{O}_X,\mathrm{id})_{n=0}^{\infty}$ の拡大の繰り返しとして書けることが言える．$(\mathcal{O}_X,\mathrm{id})_{n=0}^{\infty}$ の $(\mathcal{O}_X,\mathrm{id})_{n=0}^{\infty}$ による拡大類は $\varprojlim_{F^*}H^1(X,\mathcal{O}_X)$ の元となる．k が代数閉体であることから，

$$H^1(X,\mathcal{O}_X)=H^1(X,\mathcal{O}_X)_{\mathrm{ss}}\oplus H^1(X,\mathcal{O}_X)_{\mathrm{nilp}}$$

(但し $H^1(X,\mathcal{O}_X)_{\mathrm{ss}}=H^1(X,\mathcal{O}_X)^{F^*=1}\otimes_{\mathbb{F}_p}k$ で，$H^1(X,\mathcal{O}_X)_{\mathrm{nilp}}$ には F^* が冪零に作用) という分解を持つことが知られている．すると，仮定 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X,x)=\{1\}$ より

$$H^1(X,\mathcal{O}_X)^{F^*=1}=H^1_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{F}_p)=\mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{et}}(X,x),\mathbb{F}_p)=0$$

となるので，$H^1(X,\mathcal{O}_X)$ には F^* が冪零に作用することになる．従って $\varprojlim_{F^*}H^1(X,\mathcal{O}_X)=0$ となり，よって $(\mathcal{O}_X,\mathrm{id})_{n=0}^{\infty}$ の拡大の繰り返しとして書ける対象は $(\mathcal{O}_X,\mathrm{id})_{n=0}^{\infty}$

の直和となる．以上より，定理を示す際に，各 E_n が μ 安定であると仮定してよいことになるので，そう仮定する．

階数 r が 1 のときは，証明は次のようになる：p と異なる素数 ℓ に対する 1 次 ℓ 進エタールコホモロジーの消滅 $H^1_{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}}), \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ により，Picard スキームの単位成分の被約化 $\mathrm{Pic}_X^{0,\mathrm{red}}$ が 0 となるので，Picard スキームの数値的 0 部分 Pic_X^τ は有限となる．各 E_n は Pic_X^τ の点 $[E_n]$ を定めるので，無限個の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$[E_n] = [E_{n-m_n}]$ となる $0 < m_n \leq n$ が存在する．このとき同型 $\Phi : (F^*)^{m_n} E_n \xrightarrow{\cong} E_{n-m_n} \xrightarrow{\cong} E_n$ が存在する．すると $\mathcal{F} := \mathrm{Ker}(E_{n,\mathrm{et}} \xrightarrow{1-\Phi} E_{n,\mathrm{et}})$ は X_{et} 上の階数 1 の局所定数構成可能 $\mathbb{F}_p$ 加群を定めるので，定理の仮定より定数層 $\mathbb{F}_p$ となる．すると $E_n \cong \mathcal{O}_X$ となる．これより全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $E_n \cong \mathcal{O}_X$ となることが言え，さらに多少の議論により，$(E_n)_{n=0}^\infty$ が $\mathrm{Strat}(X)$ の対象として $(\mathcal{O}_X, \mathrm{id})_{n=0}^\infty$ と同型になることが言える．

$r \geq 2$ のときは，証明は次のようになる．$\mathcal{M}$ を階数が r で被約 Hilbert 多項式が $p_{\mathcal{O}_X}(t)$ と一致する χ 安定 $\mathcal{O}_X$ 加群のモジュライとする．(これは Adrian Langer [Lan04a], [Lan04b] により構成された.) このとき，$[E] \mapsto [F^*E]$ により有理写像 $F_* : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{M}$ が定まる．各 E_n が μ 安定であると仮定したので，μ 安定ならば χ 安定であることから，E_n たちは $\mathcal{M}$ の点 $[E_n]$ を定める．$\mathcal{A}_n$ を $\{[E_m] \mid m \geq n\} \subseteq \mathcal{M}$ の Zariski 閉包とし，$\mathcal{N} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ とする．このとき，F_* は支配的有理写像 $F_* : \mathcal{N} \dashrightarrow \mathcal{N}$ を誘導する．

k が有限体の代数閉包のときは，Hrushovski の結果 [Hr][3] により，ある $\mathcal{N}$ の閉点 u と $m > 0$ で $(F_*)^m(u) = u$ となるものの存在が言える．u に対応する μ 安定 $\mathcal{O}_X$ 加群を E とすると同型 $\Phi : (F^*)^m E \xrightarrow{\cong} E$ が存在する．すると $r = 1$ のときと同様の議論により E は定数層 $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ となるが，これは E の μ 安定性に矛盾し，定理の証明が終わる．

k が一般の体のときは，有限体上滑らかな多様体 S 上で $X, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ の適当なモデルをとって，S の適当な閉点上の幾何学的点 s でのファイバー $X_s, \mathcal{M}_s, \mathcal{N}_s$ をとり，特殊化写像の全射 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X, x) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{et}}(X_s, x_s)$ の存在より $\pi_1(X_s, x_s) = \{1\}$ であることに注意すると，前段落のような $u = [E] \in \mathcal{N}_s$ がとれ，やはり矛盾がおこり，定理の証明が終わる．

極めて大雑把にまとめると，Chern 類の消滅と μ 安定な場合への帰着により Noether なモジュライ $\mathcal{M}$ 上での議論ができ，Hrushovski の結果により矛盾を導出する，という感じである．

[3] Hrushovski の証明はモデル理論を用いるものであるが，純代数幾何的な証明が Varshavsky [V18] により与えられている．

4　de Jong 予想

この節では (アイソ) クリスタルの定義を説明し，Gieseker 予想の p 進版である de Jong 予想の主張を述べる．

k を標数 $p>0$ の完全体，$W=W(k)$ を k の Witt 環，$W_n := W/p^nW$ とする．まずクリスタリンサイトを定義する．(詳しくは [BO78, §5–§7] 参照.)

定義 4.1. k 上の代数多様体 X に対して，$(X/W)_{\mathrm{crys}}$ (resp. $(X/W_n)_{\mathrm{crys}}$) を X/W 上 (resp. X/W_n 上) のクリスタリンサイトとする：その対象は組 $(i : U \hookrightarrow T, \delta)$ である．但し，i は X の開部分スキーム U からある n に対する W_n スキーム T (resp. W_n スキーム T) への W_n 上の閉埋め込みで，δ は $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_T \to i_*\mathcal{O}_U)$ 上の PD 構造で $pW_n \subseteq W_n$ 上の自然な PD 構造と整合的なものである．(PD 構造については [BO78, §3] 参照.) 対象間の射の概念は自然に定まるものとする．また，対象 $(i : U \hookrightarrow T, \delta)$ の被覆はスキーム T の Zariski 位相から自然に定まるものとする．また，$(i : U \hookrightarrow T, \delta) \mapsto \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ により定まる $(X/W)_{\mathrm{crys}}$ (resp. $(X/W_n)_{\mathrm{crys}}$) 上の層を $\mathcal{O}_{X/W}$ (resp. $\mathcal{O}_{X/W_n}$) と書き，これを構造層と呼ぶ．なお，$W_1 = k$ なので，$(X/W_1)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{X/W_1}$ のことをそれぞれ $(X/k)_{\mathrm{crys}}, \mathcal{O}_{X/k}$ と書く．

詳細は省略したが，大事な点は，クリスタリンサイトの定義は X/W あるいは X/W_n のみにしかよらず，従って X/W あるいは X/W_n に関して関手的であるということである．

$(X/W)_{\mathrm{crys}}$ 上の $\mathcal{O}_{X/W}$ 加群の層 E を与えることは，各対象 $(i : U \hookrightarrow T, \delta)$ に対して $\mathcal{O}_T$ 加群 E_T を与え，射 $\varphi : (U' \hookrightarrow T', \delta') \to (U \hookrightarrow T, \delta)$ に対して層の射 $\varphi^*E_T \to E_{T'}$ を関手的に，かつ φ が開埋め込みのときは同型となるように定めることと同値である．$(X/W_n)_{\mathrm{crys}}$ 上の $\mathcal{O}_{X/W_n}$ 加群の層についても同様である．クリスタルの概念を次のように定める．

定義 4.2. $(X/W)_{\mathrm{crys}}$ 上の $\mathcal{O}_{X/W}$ 加群の層 (resp. $(X/W_n)_{\mathrm{crys}}$ 上の $\mathcal{O}_{X/W_n}$ 加群の層)E がクリスタルであるとは，上記の射 $\varphi^*E_T \to E_{T'}$ が常に同型となることである．クリスタル E が有限表示であるとは，任意の $(U \hookrightarrow T, \delta)$ に対して E_T が有限表示 $\mathcal{O}_T$ 加群となることである．$(X/W)_{\mathrm{crys}}$ 上の (resp. $(X/W_n)_{\mathrm{crys}}$ 上の) 有限表示クリスタルのなす圏を $\mathrm{Crys}(X/W)$(resp. $\mathrm{Crys}(X/W_n)$) と書く．また，$W_1 = k$ なので，$\mathrm{Crys}(X/W_1)$ のことを $\mathrm{Crys}(X/k)$ と書く．

X を k 上滑らかな代数多様体とし，$\mathrm{Spf}\, W$ 上滑らかな p 進形式スキーム $\mathcal{X}$ に持ち上げ可能であると仮定すると，$\mathcal{X}_n := \mathcal{X} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ とおくとき，$X \hookrightarrow \mathcal{X}_n$ は自然に $(X/W)_{\mathrm{crys}}$ の対象となる．従って，$E \in \mathrm{Crys}(X/W)$ が与えられると連接 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}$ 加群 $E_{\mathcal{X}_n}$ が定まり，従って連接 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 加群 $E_{\mathcal{X}}$ が $E_{\mathcal{X}} := \varprojlim_n E_{\mathcal{X}_n}$ により定まる．

更に，$\mathcal{X}$ が局所座標 $t = (t_1, \ldots, t_d)$ を持つとする．$\mathcal{X}_n$ の $\mathcal{X}_n \times_{W_n} \mathcal{X}_n$ 内の 1 次無限小近傍を $\mathcal{X}_n^1$ とおき，$\pi_i : \mathcal{X}_n^1 \longrightarrow \mathcal{X}_n\ (i = 1, 2)$ を射影とすると，クリスタルの定

義により，同型

$$\epsilon : \pi_2^* E_{\mathcal{X}_n} \xrightarrow{\cong} E_{\mathcal{X}_n^1} \xleftarrow{\cong} \pi_1^* E_{\mathcal{X}_n}$$

が定まる．θ_n を合成

$$E_{\mathcal{X}_n} \hookrightarrow \pi_2^* E_{\mathcal{X}_n} \xrightarrow{\epsilon} \pi_1^* E_{\mathcal{X}_n} \cong E_{\mathcal{X}_n} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{d} E_{\mathcal{X}_n} dt_i \right)$$

とすると，$E_{\mathcal{X}}$ への $\frac{\partial}{\partial x_i}$ の作用が合成

$$E_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\varprojlim_n \theta_n} E_{\mathcal{X}} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{d} E_{\mathcal{X}} dt_i \right) \twoheadrightarrow E_{\mathcal{X}} dt_i = E_{\mathcal{X}}$$

により定まる．$\mathcal{X}$ 上のレベル 0 の微分作用素環 $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ を

(4.1) $$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^d} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \text{ の } p \text{ 進完備化}$$

と定めると，上の $\frac{\partial}{\partial t_i}$ の作用により $E_{\mathcal{X}}$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 連接準冪零 $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ 加群の構造を持つ．そして，関手

$$\mathrm{Crys}(X/W) \longrightarrow \{\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \text{ 連接準冪零 } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} \text{ 加群}\}; \quad E \mapsto E_{\mathcal{X}}$$

は圏同値となる．(準冪零性の定義および上記の同値の証明については [BO78, §4] 参照.)

k 上滑らかな多様体 X は，局所的には，上記のような $\mathrm{Spf}\, W$ 上の p 進形式スキーム $\mathcal{X}$ への持ち上げを持つ．従って，圏 $\mathrm{Crys}(X/W)$ は局所的にはある種の $\mathcal{D}$ 加群の圏と同値である．しかしながら，X 上大域的に持ち上げ $\mathcal{X}$ があることは一般には期待できないので，大域的に $\mathcal{D}$ 加群で表されるわけではない．また，(4.1) における $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ の定義には，$\frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i$ ではなく $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i$ が使われている[4]ことにも注意する必要がある．

同様の議論は $\mathrm{Crys}(X/W_n)$ に対しても成り立つ．特に，$n = 1$ のときは (このときは X の $\mathrm{Spec}\, W_1 = \mathrm{Spec}\, k$ への持ち上げは X 自身である)，$\mathcal{D}_X^{(0)}$ を X 上のレベル 0 の微分作用素環 (局所的には $\mathcal{D}_X^{(0)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^d} \mathcal{O}_X \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i$ となる) とすると，圏同値

(4.2) $$\mathrm{Crys}(X/k) \longrightarrow \{\mathcal{O}_X \text{ 連接準冪零 } \mathcal{D}_X^{(0)} \text{ 加群}\}; \quad E \mapsto E_X$$

がある．$\mathcal{D}_X^{(0)}$ の定義には $\frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i$ ではなく $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i$ が使われているので，これは 1 節 (D) における $\mathcal{D}_X$ とは異なり，従って，4.2 の右辺の圏は 1 節 (D) の $\mathcal{O}_X$ 連接 $\mathcal{D}_X$ 加群の圏とは異なることに注意する必要がある．実際，ここで考えている圏の方が大きい．

アイソクリスタルの圏を次のように定義する．

[4] これが「レベル 0」という修飾語が意味することである．

定義 4.3. $\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ を $\mathrm{Crys}(X/W)$ の $\mathbb{Q}$ 線型化とする，すなわち，$\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ は $\mathrm{Crys}(X/W)$ の対象を対象とし，射の集合を

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}}(E, E') := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Crys}(X/W)}(E, E')$$

と定めてできる圏とする．そして，$\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ の対象を X/W 上のアイソクリスタルという．

以下，$\mathrm{Crys}(X/W)$ の対象 E を $\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ の対象とみなすときは，それを $\mathbb{Q}\otimes E$ と書くことにする．

以上の準備の下で，Gieseker 予想の p 進版である de Jong 予想の主張を述べる．k を標数 $p>0$ の完全体，$\overline{k}$ をその代数閉包とする．X を k 上の幾何的連結射影的で滑らかな代数多様体，x を X の k 有理点とし，$X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}}$ を X, x の $\overline{k}$ への基底変換とする．このとき，1 節の (B) の方法により，$x_{\overline{k}}$ を基点とする $X_{\overline{k}}$ のエタール基本群 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が定義される．一方，1 節の (E) の方法により，x を基点とする X のクリスタル基本群 $\pi_1^{\mathrm{crys}}(X, x)$ が定義される．

自明でない $X_{\overline{k}}$ の有限エタール被覆 $g : Y \longrightarrow X_{\overline{k}}$ が与えられたとき，ある k の有限次拡大 k' が存在して g はある有限エタール被覆 $g' : Y' \longrightarrow X_{k'}$ の基底変換として得られ，このとき，合成 $h : Y' \longrightarrow X_{k'} \longrightarrow X$ による自明なアイソクリスタル $\mathbb{Q}\otimes\mathcal{O}_{Y'/W}$ の順像 $\mathbb{Q}\otimes h_*\mathcal{O}_{Y'/W}$ は定数 (ある r に対する $\mathbb{Q}\otimes\mathcal{O}_{X/W}^{\oplus r}$ と同型) でないアイソクリスタルとなるので，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が非自明なとき $\pi_1^{\mathrm{crys}}(X, x)$ も非自明になる，つまり，$\pi_1^{\mathrm{crys}}(X, x)$ が自明ならば $\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ も自明になる．

de Jong 予想はこの事実の逆が成り立つことを主張するものである．

予想 4.4 (de Jong 予想)**.** k を標数 $p>0$ の完全体，$\overline{k}$ をその代数閉包とする．X を k 上の幾何的連結射影的で滑らかな代数多様体，x を X の k 有理点とし，$X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}}$ を X, x の $\overline{k}$ への基底変換とする．このとき，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が自明であるとすると，$\pi_1^{\mathrm{crys}}(X, x)$ も自明である．つまり任意の X/W 上のアイソクリスタルは定数 (ある r に対する $(\mathbb{Q}\otimes\mathcal{O}_{X/W})^{\oplus r}$ と同型) である．

注 4.5. (1)　de Jong 予想を de Jong 自身が述べた論文は (おそらく) 存在しない．[ESha] によると，2010 年秋に定式化されたようである．
(2)　de Jong 予想も $k=\overline{k}$ の場合に示せば充分である : 実際，$k=\overline{k}$ のときの de Jong 予想を仮定して，一般の場合に X/W 上のアイソクリスタル $\mathcal{E}$ をとり，$\mathcal{E}$ の $X_{\overline{k}}/W(\overline{k})$ への引き戻しを $\mathcal{E}_{\overline{k}}$ と書くと，クリスタリンコホモロジーの基底変換定理により同型

$$H^0_{\mathrm{crys}}(X/W, \mathcal{E}) \otimes_K (\mathbb{Q}\otimes W(\overline{k})) = H^0_{\mathrm{crys}}(X_{\overline{k}}/W(\overline{k}), \mathcal{E}_{\overline{k}})$$

がある．従って，自然な写像

$$H^0_{\mathrm{crys}}(X/W, \mathcal{E}) \otimes_K (\mathbb{Q}\otimes\mathcal{O}_{X/W}) \longrightarrow \mathcal{E}$$

は $X_{\overline{k}}/W(\overline{k})$ へ引き戻すと同型となるので，これ自身同型となり，従って $\mathcal{E}$ は定数になる．
(3) de Jong 予想の仮定の下で，任意の X/W 上のアイソクリスタルが定数の拡大の繰り返しで書けることが言えれば，de Jong 予想が示される：実際，$\ell \neq p$ なる素数 ℓ に対する1次 ℓ 進エタールコホモロジーの消滅 $H^1_{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}}), \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ により，Picard スキームの単位成分の被約化 $\mathrm{Pic}_X^{0,\mathrm{red}}$ が 0 となるので，$\mathrm{Pic}_X^{0,\mathrm{red}}$ に対応する Dieudonné 加群である1次クリスタリンコホモロジー $H^1_{\mathrm{crys}}(X/W, \mathcal{O}_{X/W})$ も 0 となる．これより定数であるアイソクリスタルの拡大も定数であることが言える．

5 de Jong 予想に関する諸結果

この節では，de Jong 予想に関する阿部-Esnault, Kedlaya や Esnault-筆者の結果について述べる．この節でも k は標数 $p > 0$ の完全体，W は k の Witt 環，K は W の商体であるとし，X は k 上幾何的連結射影的で滑らかな代数多様体とする．

まず，X/W 上のアイソクリスタルの圏 $\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ の部分圏を2つ定義する．まず，$\sigma : W \longrightarrow W$ を k 上の Frobenius 写像の持ち上げとし，$F : X \longrightarrow X$ を X 上の(絶対)Frobenius 写像とする．このとき，(F, σ) による引き戻しの関手

$$F^* : \mathrm{Crys}(X/W) \longrightarrow \mathrm{Crys}(X/W), \quad F^* : \mathrm{Crys}(X/W_n) \longrightarrow \mathrm{Crys}(X/W_n)$$

が定義され，前者は

$$F^* : \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$$

をひきおこす．これを用いて，X/K 上の収束アイソクリスタルの圏 $\mathrm{Conv}(X)$ を

$$\mathrm{Conv}(X) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}((F^*)^n : \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}})$$

と定める[5]．また，圏 $\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ を

$$\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F := \{\mathcal{E} \in \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}} \mid F^*\mathcal{E} \cong \mathcal{E}\}$$

とおく．定義より

$$\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F \subseteq \mathrm{Conv}(X) \subseteq \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}} \tag{5.1}$$

という包含関係がある．このとき，次が成り立つ．

[5]これは本来の定義とは異なる：本来の定義については [B], [LS07] (リジッド解析空間を用いた定義)，[Og84], [Og90](収束サイトを用いた定義) を参照．ここでの定義との同値性は Frobenius 降下 [B00] による．

定理 5.1 (阿部-Esnault [AE], Kedlaya [K]). k を有限体とする．$\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が自明ならば，任意の $\mathcal{E} \in \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ は定数である．(つまり，k が有限体ならば，$\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ の対象に対する de Jong 予想は正しい.)

この定理の証明の概略を述べる[6]．$f : X \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$ を構造射とし，また，$|k| = p^a$ とおく．$\mathcal{E} \in \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ をとると同型 $\Phi_{\mathcal{E}} : (F^*)^a\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}$ がある．このような同型 $\Phi_{\mathcal{E}}$ を $\mathcal{E}$ 上の Frobenius 構造といい，また，組 $(\mathcal{E}, \Phi_{\mathcal{E}})$ を X/W 上の F アイソクリスタルという．注 4.5(3) より $(\mathcal{E}, \Phi_{\mathcal{E}})$ が F アイソクリスタルとして既約な場合に，$\mathcal{E}$ が定数であることを示せばよい．階数 1 の $f^*(\mathcal{L}, \Phi_{\mathcal{L}})$ の形の F アイソクリスタルとテンソル積をとることにより，$(\det\mathcal{E}, \det\Phi_{\mathcal{E}})$ が有限位数である (何回かテンソルをとると自明になる) と仮定してよいので，以下そう仮定する．すると，Lafforgue による関数体の Langlands 対応 [Laf02] と阿部によるその p 進版 [A] を用いた議論により，$(\mathcal{E}, \Phi_{\mathcal{E}})$ と X の各閉点での Frobenius の固有多項式が等しいような既約で滑らかな $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 層 $\mathcal{F}$ が構成される ([AE], [K]). 仮定 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}}) = \{1\}$ より $\mathcal{F} = f^*\mathcal{F}_0$ となる $\mathrm{Spec}\, k$ 上の滑らかな $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 層 $\mathcal{F}_0$ が存在する．すると $(\mathcal{E}, \Phi_{\mathcal{E}})$ も $f^*(\mathcal{E}_0, \Phi_{\mathcal{E}_0})$ の形に書けることがわかり，$\mathcal{E}_0$ は定数なので $\mathcal{E}$ も定数となる．

k を一般の標数 $p > 0$ の完全体の場合に戻す．$g : Y \longrightarrow X$ を固有で滑らかな射とすると，相対クリスタルコホモロジー $\mathbb{Q} \otimes R^i g_* \mathcal{O}_{X/W}$ が X/W 上のアイソクリスタルとして定義され，$\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ に属する (Ogus [Og84], Morrow [Mo]). このとき，次が成り立つ．

定理 5.2 (Esnault-S. [EShb]). $\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が自明ならば，任意の固有で滑らかな射 $g : Y \longrightarrow X$ に対して $\mathbb{Q} \otimes R^i g_* \mathcal{O}_{X/W}$ は定数である．(つまり，相対クリスタルコホモロジーとして定まる $\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ の対象に対する de Jong 予想は正しい.)

この定理は，k が有限体のときは定理 5.1 から従い[7]，k が一般のときは，適当に有限体上の滑らかなスキーム上のモデルをとって，k が有限体の場合に帰着させることにより証明される．

以上の結果は，Frobenius 構造や Lafforgue/阿部の Langlands 対応などを用いているという意味で，数論幾何学的な手法による結果であると言える[8]．それに対して，以下に紹介する Esnault と筆者による 2 つの結果はより代数幾何学的であると言える．定理を述べる．

定理 5.3 (Esnault-S. [ESha], [EShb], S. [Sh]). $\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が自明で $\mu_{\max}(\Omega_X^1) \leq 0$ ならば，任意の $\mathcal{E} \in \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ は定数である．(つまり，$\mu_{\max}(\Omega_X^1) \leq 0$ ならば de Jong 予想は正しい.)

[6]以下の議論においては，必要に応じて F アイソクリスタルの「係数拡大」をしなければいけないが，そのあたりは省略して書くことにする.

[7][EShb] においては少し異なる議論により示されている

[8]もっとも，何をもって「数論幾何学的」と呼ぶかということについては，人により意見が分かれるかと思うが.

注 5.4. より正確には，$\pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}}, x_{\overline{k}})$ が自明で，かつ次のいずれかが成り立つ場合に $\mathcal{E}$ が定数であることが示されている．
(a) $\mathcal{E}$ の任意の既約成分の階数が 1 のとき．
(b) $\mu_{\max}(\Omega_X^1) < 2$ かつ $\mathcal{E}$ の任意の既約成分の階数が 2 以下のとき．
(c) $\mu_{\max}(\Omega_X^1) < 1$ かつ $\mathcal{E}$ の任意の既約成分の階数が 3 以下のとき．
(d) $r \geq 4$, $\mu_{\max}(\Omega_X^1) < N(r)^{-1}$ かつ $\mathcal{E}$ の任意の既約成分の階数が r 以下のとき．但し，$N(r) = \max_{a,b\geq 1, a+b\leq r} \mathrm{lcm}(a,b)$ とする．

なお，$p \geq 3$ のとき，(a) の場合の de Jong 予想のコホモロジーを用いた証明が Esnault-Ogus により知られている [ESha, Proposition 2.10].

定理 5.5 (Esnault-S. [EShc]). k を有限体とする．もし，任意の $\mathrm{Conv}(X)$ の対象が定数ならば，任意の $\mathcal{E} \in \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ は定数である．

k が有限体のとき，圏の包含関係 (5.1) において，一番左の圏 $\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ の対象に対しては定理 5.1 より de Jong 予想は正しく，また de Jong 予想 (これは一番右の圏 $\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ の対象に対する予想である) は定理 5.5 により真ん中の圏 $\mathrm{Conv}(X)$ の対象に対する de Jong 予想に帰着される．従って，$\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F \subseteq \mathrm{Conv}(X)$ の差が残された問題となる．$\mathrm{Conv}(X)$ には関手 F^* が作用し，$\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}^F$ はその固定点となるので，3 節の Esnault-Mehta の定理の証明における Hrushovski の定理の類似のようなものがあればよいと思われるが，そのようなものは知られていない．

定理 5.5 は次の系を持つ．

系 5.6. k が有限体のとき，曲面に対する de Jong 予想が正しければ，de Jong 予想は正しい．

$\dim X \geq 3$ として $Y \hookrightarrow X$ を滑らかな超平面切断とするときにエタール基本群の射 $\pi_1^{\mathrm{et}}(Y_{\overline{k}}) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{et}}(X_{\overline{k}})$ が同型であること (エタール基本群の Lefschetz 定理) と，引き戻し関手 $\mathrm{Conv}(X) \longrightarrow \mathrm{Conv}(Y)$ が忠実充満であること (Lazda-Pál [LP]) を用いれば，Y に対する de Jong 予想から X に対する de Jong 予想が従うことが定理 5.5 を用いて言えるので，系 5.6 が従う．

定理 5.3 と定理 5.5 の証明の概略を述べるための準備をする．まず，アイソクリスタル $\mathcal{E} \in \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ に対して $\mathcal{E} = \mathbb{Q} \otimes E$ となる W 上平坦な $E \in \mathrm{Crys}(X/W)$ のことを，$\mathcal{E}$ の格子とよぶことにする．(なお，$\mathcal{E}$ の格子はいつも存在する：$\mathcal{E} = \mathbb{Q} \otimes E'$ となる $E' \in \mathrm{Crys}(X/W)$ は常に存在し，$E := E'/\mathrm{Ker}(p^n : E' \to E')$ は $n \gg 0$ のとき W 上平坦になる．) また，$n \in \mathbb{N}$ (resp. $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$) に対して，自然な関手

$$\mathrm{Crys}(X/W) \longrightarrow \mathrm{Crys}(X/W_n) \quad (\text{resp. } \mathrm{Crys}(X/W_m) \longrightarrow \mathrm{Crys}(X/W_n))$$

があるが，これによる $E \in \mathrm{Crys}(X/W)$ (resp. $E \in \mathrm{Crys}(X/W_m)$) の像を E_n と書く．また，$\mathrm{Crys}(X/W)$ または $\mathrm{Crys}(X/W_n)$ の対象 E の $(X \hookrightarrow X) \in (X/W_n)_{\mathrm{crys}}$ での値を E_X と書く．(これは連接 $\mathcal{O}_X$ 加群になる.)

以下，定理 5.3 の証明の概略を述べる．まず，次の定理 (クリスタリン Chern 類の消滅) を示す．

定理 5.7 (Esnault-S. [ESha], [EShb], S. [Sh], Bhatt-Lurie [BL], クリスタリン Chern-Weil 定理). k を標数 $p>0$ の完全体，X を k 上の滑らかな代数多様体とする．このとき，W 上平坦な $E \in \mathrm{Crys}(X/W)$ に対して

$$c_i^{\mathrm{crys}}(E_X) = 0 \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{2i}_{\mathrm{crys}}(X/W)$$

が成り立つ．

この定理の標数 0 における類似は Chern-Weil 理論の帰結である．

定理 5.7 は $\mathbb{Q} \otimes E \in \mathrm{Conv}(X)$ のときには [ESha] において証明された．この場合は，圏 $\mathrm{Conv}(X)$ の定義より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(F^*)^n(\mathbb{Q} \otimes E^{(n)}) \cong \mathbb{Q} \otimes E$ を満たす $\mathbb{Q} \otimes E^{(n)} \in \mathrm{Conv}(X)$ が存在し，この事実を用いることにより，比較的容易に証明される．次に，$E \in \mathrm{Crys}(X/W)$ が局所自由なときには，定理 5.7 は [EShb] において 2 通りの方法により証明された：一つは [E88] に始まる modified splitting principle と呼ばれる手法を用いた証明で，もう一つは BGL_r のクリスタリンコホモロジー，普遍クリスタリン Chern 類を用い，クリスタリンコホモロジーの Poincaré の補題および Cech-Alexander 分解による計算を利用した証明である．なお，以上の場合にはクリスタリン Chern 類 $c_i^{\mathrm{crys}}(E_X)$ は $H^{2i}_{\mathrm{crys}}(X/W)$ において既に 0 になっている．[Sh] においては，[EShb] における 1 つ目の方法の一般化とみなせる手法で X が射影的な場合に定理 5.7 を証明している．(定理 5.3 の証明のためにはこれで充分である.) Bhatt-Lurie の証明は [EShb] の証明の 2 つ目の方法の一般化とみなせる手法であるらしい．

次に，$\mathcal{E} \in \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ の良い格子の存在を主張する次の定理を示す．

定理 5.8 (Esnault-S. [ESha], [EShc], クリスタリン Langton 定理). k を標数 $p>0$ の完全体，X を k 上の滑らかな代数多様体とする．このとき，$\mathcal{E} \in \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ に対して，ある $\mathcal{E}$ の格子 E で，$E_1 \in \mathrm{Crys}(X/k)$ が μ 半安定になるものが存在する．

但しここで，$E_1 \in \mathrm{Crys}(X/k)$ が μ 半安定であるとは，E_1 の $(X \hookrightarrow X) \in (X/k)_{\mathrm{crys}}$ における値 $E_{1,X}$ が無捻 $\mathcal{O}_X$ 加群であり，かつ，E_1 の任意の 0 でない $\mathrm{Crys}(X/k)$ における部分対象 E' に対して，それらの $(X \hookrightarrow X) \in (X/k)_{\mathrm{crys}}$ における値の勾配に関して $\mu(E'_X) \le \mu(E_{1,X})$ が成り立つこととする．この定理は Langton の定理 [Lang75] のクリスタルに対する類似である．

この定理を示すには，まず $\mathcal{E}$ の格子 E を任意にとり，それを変形して (ア) $E_{1,X}$ を無捻 $\mathcal{O}_X$ 加群にできること，更に (イ) $E_1 \in \mathrm{Crys}(X/k)$ を μ 半安定にできることを示せばよい．(ア)，(イ) を示す方法はほとんど同じなので以下，同時にその方法を述べる．$E_1 \in \mathrm{Crys}(X/k)$ が (ア) または (イ) に述べた通りになっていないときに，$E_1 \supsetneq B \in \mathrm{Crys}(X/k)$ を，(ア) を考えているときには最大捻れ部分対象，(イ) を考

えているときには最大不安定部分対象として，$\ell(E) := \mathrm{Ker}(E \to E_1 \to E_1/B)$ とおく．すると，$\ell(E)$ は再び $\mathcal{E}$ の格子となる．この操作を繰り返すとある $a \in \mathbb{N}$ に対して $\ell^a(E)$ が (ア) または (イ) の条件を満たすことが示される．なお，あとの説明で必要になるので，$E_{1,X}$ が無捻 $\mathcal{O}$ 加群であるような $E \in \mathrm{Crys}(X/W)$ に対して，$E \mapsto \ell(E)$ という操作を Langton 操作と呼ぶことにする．

定理 5.3 の証明の説明に戻る．注 4.5 より k は標数 $p > 0$ の代数閉体であると仮定してよいので，以下そう仮定する．X を k 上の射影的で滑らかな代数多様体として，$\mu_{\max}(\Omega^1_X) \leq 0$ であると仮定する．そして，$\mathcal{E} \in \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ とし，定理 5.8 を用いて，$\mathcal{E}$ の格子 E で $E_1 \in \mathrm{Crys}(X/k)$ が μ 半安定であるようなものをとる．すると，仮定 $\mu_{\max}(\Omega^1_X) \leq 0$ を用いて Mehta-Ramanathan [MR83] の議論をすることにより，$E_X = E_{1,X}$ が連接 $\mathcal{O}_X$ 加群として強 μ 半安定 ($(F^*)^n E_X$ ($n \in \mathbb{N}$) が全て μ 半安定) となることが言える．更に定理 5.7 の帰結 $c_i^{\mathrm{crys}}(E_X) = 0$ ($i > 0$) を用いて，Adrian Langer の結果 [Lan11, Thm. 4.1] を用いると，ある $b \in \mathbb{N}$ に対して，$(F^*)^b E_X$ が局所自由かつ強 μ 安定 ($(F^*)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) による引き戻しが全て μ 安定) で $c_i^{\mathrm{crys}} = 0$ ($i > 0$) であるような $\mathcal{O}_X$ 加群たち $\{G_j\}_j$ の拡大で書けることが言える．

ここで $\pi_1^{\mathrm{et}}(X) = \{1\}$ であると仮定する．j を一つ固定し，G_j の階数を r としよう．$\mathcal{M}$ を 3 節で定義したモジュライとし，$F_* : \mathcal{M} \dashrightarrow \mathcal{M}$ も 3 節で定めた有理写像とする．$\mathcal{M}_n$ を $(F_*)^n$ による (定義域の) 像とする．すると，Esnault-Mehta の定理 ($\mathrm{Strat}(X)$ の対象が定数しかないこと) と $\mathcal{M}$ の Noether 性を用いて，$r = 1$ ならば充分大きな n に対して $\mathcal{M}_n = \{[\mathcal{O}_X]\}$, $r > 1$ ならば充分大きな n に対して $\mathcal{M}_n = \emptyset$ であることが言える．一方，G_j の性質より $[(F^*)^n G_j] \in \mathcal{M}_n$ となるので，結局 $r = 1$ で，ある $c \in \mathbb{N}$ に対して $(F^*)^c G_j = \mathcal{O}_X$ となることが言える．この c は j に依らないようにとれるので，ある $c \in \mathbb{N}$ に対して $(F^*)^c E_X$ が $\mathcal{O}_X$ の拡大の繰り返しで書けることになる．3 節で見たように，F^* は拡大類が含まれる $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ に冪零に作用するので，c を大きく取り直せば $(F^*)^{c-1} E_X$ は $\mathcal{O}_X$ の直和となる．すると $(F^*)^c E_1$ は $\mathcal{O}_{X/k}$ の直和となる．

$(F^*)^c E_1 = \mathcal{O}_{X/k}^{\oplus s}$ とおく．また，$n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{D}_{n,m} := \{(G, \varphi) \mid G \in \mathrm{Crys}(X/W_{n+m}), \varphi : G_n \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{X/W_n}^{\oplus s}\}$$

とおく．変形理論により，$m \leq n$ のとき，Frobenius による引き戻し F^* と整合的な全単射

$$\mathcal{D}_{n,m} \xrightarrow{\cong} H^1_{\mathrm{crys}}(X/W_m)^{\oplus s^2} \tag{5.2}$$

が存在する．$m = 1$ のときは，$H^1_{\mathrm{crys}}(X/k)$ への F^* の作用が冪零であることが 3 節の $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の場合と同様に言えるので，(5.2) の両辺への F^* の作用は冪零である．従って，任意の $\mathcal{D}_{n,1}$ の元は，F^* を何回か施すと自明な変形 $(\mathcal{O}_{X/W_{n+1}}^{\oplus s}, \mathrm{id})$ となることがわかる．

$(F^*)^c E_2$ は $(F^*)^c E_1 = \mathcal{O}_{X/k}^{\oplus s}$ の変形なので $\mathcal{D}_{1,1}$ に属し，$(n,m) = (1,1)$ に対する上の事実から，c を大きくとりかえると $(F^*)^c E_2 \cong \mathcal{O}_{X/W_2}^{\oplus s}$ となることがわかる．すると $(F^*)^c E_3$ は $\mathcal{D}_{2,1}$ に属し，$(n,m) = (2,1)$ に対する上の事実から，c を更に大きくとりかえると $(F^*)^c E_3 \cong \mathcal{O}_{X/W_3}^{\oplus s}$ となることがわかる．これを繰り返していく．

注 4.5(3) で述べたように $H^1_{\mathrm{crys}}(X/W) = 0$ である．従って，

$$H^1_{\mathrm{crys}}(X/W) = \varprojlim_n H^1_{\mathrm{crys}}(X/W_n)$$

において，右辺の射影系における射 $H^1_{\mathrm{crys}}(X/W_N) \to H^1_{\mathrm{crys}}(X/k)$ が零射になるような $N \in \mathbb{N}$ が存在する．前段落の議論よりある $c \in \mathbb{N}$ に対して $(F^*)^c E_N \cong \mathcal{O}_{X/W_N}^{\oplus s}$ となる．すると，$(F^*)^c E_{2N} \in \mathrm{Crys}(X/W_{2N})$ の $\mathrm{Crys}(X/W_{N+1})$ への制限が $(F^*)^c E_{N+1}$ であるから，$(F^*)^c E_{N+1}$ は $\mathcal{D}_{N,N} \to \mathcal{D}_{N,1}$ の像の元を定める．$(n,m) = (N,1), (N,N)$ に対する全単射 (5.2) を通じて見ると，これは $H^1_{\mathrm{crys}}(X/W_N) \to H^1_{\mathrm{crys}}(X/k)$ の像の元であり，それは 0 である．従って，$(F^*)^c E_{N+1}$ は (c をこれ以上大きくしなくても) $\mathcal{O}_{X/W_{N+1}}^{\oplus s}$ と同型となる．この議論を繰り返すことにより $(F^*)^c E$ が $\mathcal{O}_{X/W}^{\oplus s}$ と同型，よって $(F^*)^c \mathcal{E}$ が $(\mathbb{Q} \otimes \mathcal{O}_{X/W})^{\oplus s}$ と同型であることが言える．$F^* : \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ は忠実充満なので，これより $\mathcal{E} \cong (\mathbb{Q} \otimes \mathcal{O}_{X/W})^{\oplus s}$ となり，定理 5.3 の証明が完了する．

次に定理 5.5 の証明の概略を述べる．k, X を定理の主張の通りとし，$r \in \mathbb{N}$ を任意に一つとって固定する．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathcal{S}_n$ を W_n 上平坦な階数 r の $E \in \mathrm{Crys}(X/W_n)$ で $E_1 \in \mathrm{Crys}(X/k)$ が μ 半安定かつ $c_i^{\mathrm{crys}}(E_{1,X}) = 0\,(\forall i > 0)$ を満たすものの同型類の集合とする．このとき $\mathcal{S}_n$ は有限集合になる：実際，$n = 1$ のときはこのような集合の有界性が Adrian Langer の結果 [Lan04a, Thm. 4.1, 4.2] (と Simpson による多少の議論 [Si94, Lem. 3.3, Cor. 3.4]) から従い，n が一般のときは自然な射 $\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_{n-1}$ のファイバーが有限であることが変形理論から従う．$\mathcal{S} := \varprojlim_n \mathcal{S}_n$ とおくとこれは階数 r の $E \in \mathrm{Crys}(X/W)$ で $E_1 \in \mathrm{Crys}(X/k)$ が μ 半安定なものの同型類の集合となる．

階数 r の $\mathcal{E} \in \mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}$ を任意にとると，定理 5.8 より，ある $E \in \mathcal{S}$ を用いて $\mathcal{E} = \mathbb{Q} \otimes E$ と書ける．このとき，$F^*E \in \mathrm{Crys}(X/W)$ は $\mathcal{S}$ に属するとは限らないが，Langton 操作 $F^*E \mapsto \ell(F^*E)$ を何回か繰り返した結果 $\ell^a(F^*E)$ は $\mathcal{S}$ に属する．そこで $\mathrm{LF}(E) := \ell^a(F^*E)$ とおき，これを E の Langton-Frobenius 引き戻しと呼ぶ．Langton-Frobenius 引き戻しは Fronbenius 引き戻しをアイソクリスタル $\mathbb{Q} \otimes F^*E$ とみたときの格子 F^*E を適切に変えるという操作である．

族 $(\mathrm{LF}^m(E))_{m \in \mathbb{N}}$ を考える．各 $\mathcal{S}_n$ が有限集合なので，対角線論法より，ある $\mathbb{N}$ の部分数列 $N = \{m_1, m_2, ...\}$ に対して，$\mathbf{E} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{LF}^{m_n}(E)_n \in \mathrm{Crys}(X/W)$ が well-defined となる．$e \in \mathbb{N}$ に対して，族 $(\mathrm{LF}^{m-e}(E))_{m \in N, m \geq e}$ から始めて同じ議論をすると，ある N の部分数列 $N' = \{m'_1, m'_2, ...\}$ に対して，$\mathbf{E}^{(b)} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{LF}^{m'_n}(E)_n \in \mathrm{Crys}(X/W)$ も well-defined となるが，構成から $\mathrm{LF}^e \mathbf{E}^{(e)} = \mathbf{E}$ となることを示すこと

ができる．従って

$$\mathbb{Q}\otimes\mathbf{E}=(F^*)^e(\mathbb{Q}\otimes\mathbf{E}^{(e)})\in\mathrm{Im}((F^*)^e:\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}}\longrightarrow\mathrm{Crys}(X/W)_{\mathbb{Q}})$$

となる．これが全ての $e\in\mathbb{N}$ に対して成り立つので $\mathbb{Q}\otimes\mathbf{E}\in\mathrm{Conv}(X)$ となる．

定理の仮定より $\mathbb{Q}\otimes\mathbf{E}$ は定数となる．これと $\mathbf{E}\in\mathcal{S}$ であることから $\mathbf{E}_1=\mathcal{O}_{X/k}^{\oplus s}$ であることを示すことができる．すると，構成より $\mathbf{E}_1=\mathrm{LF}^{m'_1}(E)_1$ であることから $\mathrm{LF}^{m'_1}(E)_1=\mathcal{O}_{X/k}^{\oplus r}$ となる．定理 5.3 の証明における変形理論を用いた議論を $\mathrm{LF}^{m'_1}(E)$ に適用すると，ある $c\in\mathbb{N}$ に対して $(F^*)^c(\mathbb{Q}\otimes\mathrm{LF}^{m'_1}(E))=(F^*)^{m'_1+c}(\mathbb{Q}\otimes E)=(F^*)^{m'_1+c}\mathcal{E}$ が定数であることが言え，従って $\mathcal{E}$ は定数となる．これで定理 5.5 の証明が完了する．

参考文献

[A] T. Abe, *Langlands correspondence for isocrystals and existence of crystalline companion for curves*, arXiv:1310.0528.

[AE] T. Abe and H. Esnault, *A Lefschetz theorem for overconvergent isocrystals with Frobenius structure*, arXiv:1607.07112.

[B] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres première partie,* prépublication de l'IRMAR 96-03.

[B00] P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques II: Descente par Frobenius,* Mém. Soc. Math France (N.S.) **81** (2000), 1–136.

[BO78] P. Berthelot and A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology,* Princeton University Press, 1978.

[BL] B. Bhatt and J. Lurie, in preparation.

[D89] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in Galois Groups over $\mathbb{Q}$, Springer Verlag, New York, 1989, pp. 79–297.

[E88] H. Esnault, *Characteristic classes of flat bundles*, Topology **27** 3 (1988), 323–352.

[EM10] H. Esnault and V. Mehta, *Simply connected projective manifolds in characteristic $p>0$ have no nontrivial stratified bundles,* Invent. Math. **181** (2010), 449–465. (Erratum available at `http://www.mi.fu-berlin.de/users/esnault/helene_publ.html`, `95b` (2013)).

[ESr16] H. Esnault and V. Srinivas, *Simply connected varieties in characteristic $p > 0$, with an appendix by Jean-Benoît Bost*, Compositio math. **152**(2016), 255–287.

[ESha] H. Esnault and A. Shiho, *Convergent isocrystals on simply connected varieties*, to appear in Ann. Inst. Fourier.

[EShb] H. Esnault and A. Shiho, *Chern classes of crystals*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[EShc] H. Esnault and A. Shiho, *A remark on de Jong conjecture*, in preparation.

[Gi75] D. Gieseker, *Flat vector bundles and the fundamental group in non-zero characteristics,* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, 4 Sér. **2** (1) (1975), 1–31.

[Gr70] A. Grothendieck, *Représentations linéaires et compactifications profinies des groupes discrets,* Manuscr. Math. **2** (1970), 375–396.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental,* Lecture Notes in Math. **224**, Springer Verlag 1971.

[Ha87] R. Hain, *The Geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group*, Proc. Sympos. Pure Math. **46**(1987) Part II, 247–282.

[Hr] E, Hrushovski, *The elementary theory of Frobenius automorphisms*, arXiv:math/0406514.

[K] K. S. Kedlaya, *Étale and crystalline companions*, preprint.

[Laf02] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. math. **147**(2002), 1–241.

[Lan04a] A. Langer, *Semistable sheaves in positive characteristic,* Ann. Math. **159** (2004), 251–276.

[Lan04b] A. Langer, *Moduli spaces of sheaves in mixed characteristics,* Duke Math. J. **124**(3) (2004), 571–586.

[Lan11] A. Langer, *On the S-fundamental group scheme,* Ann. Inst. Fourier **61** (2011), 2077–2119.

[Lan15] A. Langer, *Generic positivity and foliations in positive characteristic*, Adv. Math. **277** (2015), 1–23.

[Lang75] S. G. Langton, *Valuative criteria for families of vector bundles on algebraic varieties,* Ann. of Math., **101** (1975), 88–110.

[LP] C. Lazda and A. Pál, *A homotopy exact sequence for overconvergent isocrystals*, arXiv:1704.07574

[LS07] B. Le Stum, *Rigid cohomology,* Cambridge Tracts in Mathematics **172**, Cambridge University Press, 2007.

[Ma40] A. Malčev, *On isomorphic matrix representations of infinite groups,* Mat. Sb. N.S. **8**(50) (1940), 405–422.

[MR83] V. B. Mehta and A. Ramanathan, *Homogeneous bundles in characteristic p,* pp. 315–320 in Algebraic geometry—open problems (Ravello, 1982), Lecture Notes in Math. **997**, Springer Verlag 1983.

[Mo] M. Morrow, *A Variational Tate Conjecture in crystalline cohomology*, to appear in Journal of the European Mathematical Society.

[Og84] A. Ogus, *F-isocrystals and de Rham cohomology II — Convergent isocrystals,* Duke Math. J., **51** (1984), 765–850.

[Og90] A. Ogus, *The convergent topos in characteristic p*, pp. 133–162 in Grothendieck Festschrift, Progress in Math. **88**, Birkhäuser (1990).

[Ol11] M. Olsson, *Towards non-abelian p-adic Hodge theory in the good reduction case*, Memoirs of the AMS **210** (2011).

[Sh00] A. Shiho, *Crystalline fundamental groups I — Isocrystals on log crystalline site and log convergent site*, **7**(2000), 509–656.

[Sh02] A. Shiho, *Crystalline fundamental groups II — Log convergent cohomology and rigid cohomology*, **9**(2002), 1–163.

[Sh] A. Shiho, *Chern classes of crystals II*, in preparation.

[Si94] C. T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I*, Publ. Math. IHES **79**(1994), 47–129.

[V18] Y. Varshavsky, *Intersection of a correspondence with a graph of Frobenius*, J. Algebraic Geom. **27**(2018), 1–20.

保型 L 函数の特殊値の代数性について
-極私的総括-

古澤 昌秋[*]
大阪市立大学大学院理学研究科

第 62 回 代数学シンポジウム 2017 年 9 月 6 日

Contents

はじめに

「極私的総括」という若干おどろおどろしい副題を付けた理由：

- 従来の正則保型形式の枠組みではない，新しい枠組みでの発展（cohomological な保型表現, ...）が最近著しいように思われる．しかし残念ながら，これらについては，講演者の力量不足で余り言及できず，総括としては物足りないものになることをご容赦頂きたい．

- 正則保型形式の枠組みにおいても広く深く結果があるわけだが，これもあまりに広大・深遠な分野であり，それを総括することも私の力に余る．これまでの講演者の本研究課題との関わりに基づいた，あくまで個人的な視点からの総括しか出来ないことを，あらかじめ御寛恕頂きたい．

---

[*]これは，当日の発表資料をほぼそのまま原稿におこしたものです．そのためにあいまいな点，説明の不十分な点が多々あると思いますが，何卒御寛恕くださいますよう御願い致します．なお、本研究は JSPS 科研費 JP16K05069 の助成を受けたものです．

1　原型：Riemann のゼータ函数

Riemann のゼータ函数 $\zeta(s)$ は，$\mathrm{Re}(s) > 1$ において絶対収束する級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

によって定義され，次の解析的性質を持つ：

- $\zeta(s)$ は，複素平面全体 $\mathbb{C}$ で定義された $s = 1$ のみを極に持つ有理型函数に解析接続される．
- さらに，$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\,\zeta(s)$ とすると，

  $$\text{函数等式：}\quad \xi(s) = \xi(1-s)$$

  が成立する．

$\zeta(s)$ の特殊値

整数 $k \geq 1$ に対して，**Bernoulli 数** B_k を

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, B_k\, \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

によって定める．明らかに，$B_k \in \mathbb{Q}$ である．最初の幾つかを計算してみると，

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730},\ B_7 = \frac{7}{6},\ \ldots$$

となっている．

定理 1 (Euler, 1742) 整数 $k \geq 1$ に対して，

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\, B_k\, \pi^{2k}, \qquad \text{特に，}\ \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \in \mathbb{Q}.$$

函数等式を用いれば，次が言える．

系 1 負の整数 m に対して，$\zeta(s)$ は $s = m$ において，$\mathbb{Q}$ に値をとる．
　より詳しく言うと，整数 $k \geq 1$ に対して，

$$\zeta(1-2k) = \frac{(-1)^k\, B_k}{2k}, \qquad\qquad \zeta(-2k) = 0\ (\text{自明な零点}).$$

負の奇数での値について，Lichtenbaum [8] は次の予想を提出した．

予想 1 (Lichtenbaum, 1973) 整数 $k \geq 1$ に対して，2 の冪を除いて，$\zeta(1-2k)$ は，$(-1)^k \cdot \dfrac{\# K_{4k-2}(\mathbb{Z})}{\# K_{4k-1}(\mathbb{Z})}$ に等しい．ここで，$K_n(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}$ の *higher* K 群を表す．

この予想は次のように解決された．

定理 2 (Borel, Voevodsky, Rost, ... ，最終的には，Rognes-Weibel [9])

$$\zeta(1-2k) = 2 \cdot (-1)^k \cdot \frac{\# K_{4k-2}(\mathbb{Z})}{\# K_{4k-1}(\mathbb{Z})}.$$

実際に，例えば，

$$\# K_{22}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/691\mathbb{Z}, \qquad \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$$

となっている．

2 Critical Value

まず，

加藤和也：「数論の現在」（数学セミナー 1992 年 4 月号）

に述べられている，「ゼータ函数の値の理解の 3 段階」を思い起こす．

ゼータ函数の値の理解の３段階

- ゼータ函数の値の理解　第１段階：有理性・代数性

  $L(s)$ の $s = n \in \mathbb{Z}$ での値を適当な **period** または **regulator** で割ったときに適切な数体（$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体）に属することを示す．ただし，$L(s)$ が $s = n$ で零点や極を持つときは，leading term を考える．

- ゼータ函数の値の理解　第２段階：p 進性質

  適切な合同関係式を示し，p 進 L 函数を導入・構成する．

- ゼータ函数の値の理解　第３段階：数論的意味

  period または regulator で割って正規化された $L(s)$ の特殊値及び第 2 段階で得られた p 進 L 函数の特殊値は大変重要であり，Diophantine data と結び付けられるであろう．

Tate, Birch, Swinnerton-Dyer, 志村, Deligne, Beilinson, 岩澤, Bloch, 加藤, 肥田, Fontaine, Perrin-Riou, ... といった方々が特殊値の研究に大きな足跡を残してきた．

とはいうものの，まだ，ほとんどのゼータ函数について，理解は第３段階まで進んでいないのではないだろうか．それどころか実際のところは，第１段階にも達していない場合がほとんどではないだろうか．

Critical Value

以下においては，regulator が現れてくるような特殊値は除いて，**critical value** を考えることにする．

Motive

M を（簡単のため）$\mathbb{Q}$ 上定義された motive とする．

$$M \text{ の } L \text{ 函数：} \quad L(M,s) := \prod_{p<\infty} L_p(M,s) \qquad \text{（Euler 積）}$$

を考える．ただし，

$$L_p(M,s) = \det\left(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob}_p \,|_{M_\ell^{I_p}}\right)^{-1}, \quad \ell \neq p$$

で，これは素数 ℓ のとり方によらないと予想されている．ここで，

- M_ℓ は M の ℓ 進 realization
- I_p は p における惰性群

である．

さらに，無限因子 $L_\infty(M,s)$ が，M の Hodge realization によって定まり，それは本質的に Γ 函数の積である．

いま，$\Lambda(M,s) := L_\infty(M,s) \cdot L(M,s)$ が $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に解析接続され，

$$\text{函数等式：} \quad \Lambda(M,s) = \epsilon(M,s) \cdot \Lambda\left(\check{M}, 1-s\right)$$

を満たすとする．ただし，

- $\check{M}$: M の dual motive
- $\epsilon(M,s)$ は定数と s の指数函数の積

とする．

定義 1 (Critical value) このとき，$k \in \mathbb{Z}$ が M について *critical* であるとは，$L_\infty(M,s)$ と $L_\infty\left(\check{M}, 1-s\right)$ がどちらも $s = k$ を極に持たないことをいう．

$k \in \mathbb{Z}$ が M について *critical* であるとき，$L(M,k)$ を *critical value* という．

Critical value に関する，次の Deligne の予想 [2] は有名である．

予想 2 (Deligne, 1979) *Motive* M についてある幾何学的 *invariant* $c^{\pm}(M)$ が存在して，$k \in \mathbb{Z}$ が *critical* ならば,

$$\frac{L(M,k)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^{d(k)} \cdot c^{\pm}(M)} \in \mathbb{Q}$$

となる $d(k) \in \mathbb{Z}$ が存在する．ただし，$\pm = (-1)^{k}$.

Remark

- **Deligne period** $c^{\pm}(M)$ は，M の de Rham realization と Betti realization の比較から定義される．
- Deligne 予想は幾つかの特別な場合を除いて，いまだに wide open であると思われる．
- 適当な不変量で critical value を割った比の有理性が示されたとしても，その不変量が Deligne period と等しいことを示すのは，一般には highly non-trivial な問題である．

3 保型 L 函数の critical value

大まかに言えば:

- Langlands 予想によれば，motivic L 函数 $L(M,s)$ は保型 L 函数によって表すことができる．

よって，予想を信じるならば，保型 L 函数の特殊値を調べることが，すなわち，motivic L 函数の特殊値を調べること，ということになる．実際のところ，

- 対応する（または，そう予想される）保型 L 函数の特殊値を調べるのが，現在のところ特殊値を調べるための唯一の方法であるように思われる．

Motive 理論の非専門家としての素朴な疑問：

- Motive 理論の方で大きな進展があれば，motivic L 函数の特殊値の研究に，保型形式を経由しないか，もしくは保型形式の利用が軽減される，といったことになる可能性はあるのだろうか？

原型

Ramanujan's Δ: $z \in \mathfrak{H} = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(w) > 0\}$ に対して，

$$\Delta\,(z) := q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, q^n, \quad q = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\, z\right)$$

とすると，Δ は重さ 12 の $\mathrm{SL}_2\,(\mathbb{Z})$ に関する cusp form である．

$$L\,(s, \Delta) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-s}$$

とする．

定理 3 (志村 [10])

$$\exists \text{\textit{“periods”}}\ c^{\pm}\,(\Delta)\ \textit{such that}\ \frac{L\,(n, \Delta)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^n c^{\pm}\,(\Delta)} \in \mathbb{Q},\ 1 \le n \le 11,\ \pm = (-1)^n\,.$$

志村は，Eichler-Shimura cohomology 理論の応用としてこれを示した．志村の方法は，後に Manin によって modular symbol の理論として一般化された．

次の定理は，その後の数論の発展に極めて大きな影響を与えた．説明の簡単のため full modular の場合に限定して述べる．

定理 4 (志村 [11], Rankin-Selberg method を用いて)

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(f)\ q^n \in S_k\,(\mathrm{SL}_2\,(\mathbb{Z}))$$

が *Hecke* 固有形式で $a_1\,(f) = 1$ であるとする．このとき，$\sigma \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{C})$ (= 体 $\mathbb{C}$ の自己同群) に対して，

$$\left(\frac{L\,(n, f)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^n c^{\pm}\,(f)}\right)^{\sigma} = \frac{L\,(n, f^{\sigma})}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^n c^{\pm}\,(f^{\sigma})},\ 1 \le n \le k-1,\ \pm = (-1)^n\,.$$

ただし，

$$L\,(s, f) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(f)\ n^{-s}, \quad f^{\sigma}\,(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(f)^{\sigma}\ q^n \in S_k\,(\mathrm{SL}_2\,(\mathbb{Z}))\,.$$

特に，

$$\frac{L\,(n, f)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^n c^{\pm}\,(f)} \in \mathbb{Q}\,(f) := \mathbb{Q}\,(\{a_n\,(f) \mid n \ge 1\})\,.$$

基本原理

講演者の知る限り，正則保型形式の保型 L 函数の特殊値の代数性の証明は，以下の原理（またはその変種）に基づくものが殆どである．

まず，

- $\mathcal{A}_\Lambda(\mathfrak{H})$ (resp. $\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{H})$) で領域 $\mathfrak{H}$ 上の type Λ の保型形式 (resp. cusp form) の空間を表す．

次のような状況を考える：

- 領域 $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$ について，$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}'$ とする．
- $\mathcal{A}_{\Lambda'}(\mathfrak{H}')$, $\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{H})$ は $\bar{\mathbb{Q}}$-structure を持つ，すなわち $\bar{\mathbb{Q}}$ 部分空間 $\mathcal{A}_{\Lambda'}\left(\mathfrak{H}', \bar{\mathbb{Q}}\right)$, $\mathcal{S}_\Lambda\left(\mathfrak{H}, \bar{\mathbb{Q}}\right)$ で，
$$\mathcal{A}_{\Lambda'}(\mathfrak{H}') = \mathcal{A}_{\Lambda'}\left(\mathfrak{H}', \bar{\mathbb{Q}}\right) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}, \quad \mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{H}) = \mathcal{S}_\Lambda\left(\mathfrak{H}, \bar{\mathbb{Q}}\right) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$$
となるものが存在する．ただし，$\bar{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ の代数閉包．
- $\Phi \in \mathcal{A}_{\Lambda'}(\mathfrak{H}')$ の $\mathfrak{H}$ への制限 $\Phi\,|_{\mathfrak{H}}$ の cuspidal component が $\mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{H})$ に属し，特に $\Phi \in \mathcal{A}_{\Lambda'}\left(\mathfrak{H}', \bar{\mathbb{Q}}\right)$ ならば，それが $\mathcal{S}_\Lambda\left(\mathfrak{H}, \bar{\mathbb{Q}}\right)$ に属する．
- $\mathcal{S}_\Lambda\left(\mathfrak{H}, \bar{\mathbb{Q}}\right)$ は Hecke 固有形式からなる直交基底を持つ．

さらに，

- L 函数の積分表示の理論により，Eisenstein 級数 $E \in \mathcal{A}_{\Lambda'}(\mathfrak{H}')$ は，Hecke 固有形式 $\phi \in \mathcal{S}_\Lambda(\mathfrak{H})$ に対して，Petersson 内積 $\langle \phi, E\,|_{\mathfrak{H}} \rangle_{\mathfrak{H}}$ が ϕ の L 函数の特殊値 $L(n, \phi)$ を与える．
- 上記の Eisenstein 級数 E について，$E \in \mathcal{A}_{\Lambda'}\left(\mathfrak{H}', \bar{\mathbb{Q}}\right)$ である．

以上のような状況にあるとせよ．このとき，$\{\phi_i\}$ を $\mathcal{S}_\Lambda\left(\mathfrak{H}, \bar{\mathbb{Q}}\right)$ の Hecke 固有形式からなる直交基底とし，$\phi_1 = \phi$ とするならば，
$$E\,|_{\mathfrak{H}} \text{ の cuspidal part} = \sum_i a_i\,\phi_i,\ a_i \in \bar{\mathbb{Q}}$$
と表せるから，
$$L(n, \phi) = \langle \phi, E\,|_{\mathfrak{H}} \rangle_{\mathfrak{H}} = \bar{a}_1 \cdot \langle \phi, \phi \rangle$$
となり，$L(n, \phi)$ の代数性：
$$\frac{L(n, \phi)}{\langle \phi, \phi \rangle} \in \bar{\mathbb{Q}}$$
が成り立つ．

以上の議論からうかがえるように，保型 L 函数の特殊値の代数性を示すための重要な構成要素として:

- 保型形式の空間の $\bar{\mathbb{Q}}$**-structure**，もしくは，保型形式の算術性の概念
- 対象となる保型 L 函数の積分表示
- 積分表示に現れる **Eisenstein** 級数の算術性

が表出している．そして，これらがうまく絡み合うと特殊値の代数性を示すことができる．

Hermitian tube domain 上の正則保型形式に関しては，志村多様体の canonical model の理論により，**Fourier** 係数（すなわち q 展開）を用いて $\bar{\mathbb{Q}}$-structure を保型形式の空間に導入することができる．しかし，この Fourier 係数による $\bar{\mathbb{Q}}$-structure と compatible な L 函数の積分表示で，知られているものは限られている．

新しい流れ (Mahnkopf, Ash, Ginzburg, Raghuram, Shahidi, Harder, Grobner, Harris, Lin, ...)

上記のような正則保型形式の枠組みに入らない，Whittaker model 等を使った保型 L 函数の積分表示が色々と知られている．

Langlands functoriality を考えると，基本になるのは GL_n の保型 L 函数なのだから，GL_n の algebraic automorphic representation の保型 L 函数の特殊値に真正面から取り組むことこそ本筋である，という考え方もあり得る．

- 正則保型形式の場合は Fourier 係数を使ったが，かわりに Whittaker model や Shalika model を使って rational structure を導入することができる．
- 保型 L 函数の積分表示の無限素点上の局所積分 $p\,(m, \Pi_\infty)$ が消えてしまうと，$0 = 0$ となり全てが無に帰してしまうおそれがあったが，Sun [12] によって，広いクラスに対して，$p\,(m, \Pi_\infty) \neq 0$ が示された．
- $L\,(m, \Pi)\,/p\,(m, \Pi) \in \bar{\mathbb{Q}}$ の形の定理が証明されているが，$p\,(m, \Pi)$ を Deligne period と関係付けるのは大変難しい問題であると思われる．

この新しい流れの研究は注視すべき方向ではあるが，残念ながら，講演者は極めて浅くしか理解できていない．興味のある方は，例えば，Grobner-Lin [7] や，それの引用論文たちを参照されたい．

4　森本和輝（神戸大学）との結果の紹介

最後に，講演者と森本和輝氏（神戸大学）との共同研究によって得られた結果を簡単に紹介する．

$\mathrm{SO}(V) \times \mathrm{GL}(2)$ の L 函数の特殊値について [3, 4]

定理 5 (古澤-森本 [3]) • *$h \in S_k(\Gamma_0(N), \varepsilon)$, newform*

- *π: h* に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約 *cuspidal* 表現
- *V:* $\mathbb{R}$ 上定符号な 2 次形式が定義された $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間
- *τ:* $\mathrm{SO}(V, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約保型表現で τ_∞ は自明な 1 次元表現
- $n = \dim_{\mathbb{Q}} V \geq 4$ かつ $k > 2n$

このとき，

$$P(\pi, \tau) = \left(\pi^{2k-n} \langle h, h \rangle\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad t_{n,k} = \frac{k-n+1}{2}$$

とおくと，$\mathbb{Q}$ の素点の有限集合 S で ∞ を含み，*partial L* 函数

$$L_S(s, \pi \otimes \tau) = \prod_{p \notin S} L_p(s, \pi \otimes \tau)$$

が次をみたすものが存在する：

$$L_S(t_{n,k}, \pi \otimes \tau) \cdot P(\pi, \tau)^{-1} \in \bar{\mathbb{Q}}.$$

Remark

- $L(s, \pi \otimes \tau)$ は $\mathrm{SO}(V) \times \mathrm{GL}(2)$ の L 函数である．
- $L(s, \pi \otimes \tau)$ は $s \mapsto 1-s$ に関して函数等式を持つように s を normalize してある．(automorphic normalization であり motivic normalization ではないので，$t_{n,k} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ になっている．)

この論文の続編 [4] において：

- 基礎体を $\mathbb{Q}$ から総実代数体に，
- $\mathrm{SO}(V, \mathbb{A})$ の保型表現 τ について，τ_∞ を一般の有限次元表現に，
- 右端（すなわち最大）の critical point だけではなく他の critical point に（残念ながら，いくつかの critical point は除外），

それぞれ拡張した．

また，上記論文 [4] にある森本による Appendix では，示された代数性が Deligne の予想と compatible であることが示されている．

$n=\dim_{\mathbb{Q}} V=4$ のとき

D は $\mathbb{Q}$ 上の 4 元数環で definite, i.e. $D\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\simeq\mathbb{H}$ (Hamilton quaternion) とする．
Accidental isomorphism:

$$\mathrm{SO}(D)\simeq\left\{(d_1,d_2)\in D^\times\times D^\times \mid \mathrm{N}(d_1)=\mathrm{N}(d_2)\right\}/\mathrm{diag}\,\mathbb{Q}^\times$$

を思い起こす．これに注意することによって，次の Rankin triple L 函数のいわゆる unbalanced case の非中心特殊値に関する代数性が上記の定理から得られる．

系 2 (古澤-森本 [3])

- $f_i\in S_k(\Gamma_0(N),\varepsilon_i)$, *newform, i=1,2,3.*
- π_i: f_i に付随した $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約 *cuspidal* 表現．

いま，

- $k_1>8$, $k_2=k_3=2$, $\varepsilon_2\varepsilon_3=1$,
- $\exists D$: *definite* な $\mathbb{Q}$ 上の 4 元数環で π_2, π_3 は $D^\times(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ への *Jacquet-Langalands transfer* を持つ

と仮定すると，次が成り立つ：

$$L(k_1-1,f_1\otimes f_2\otimes f_3)\cdot\pi^{8-4k_1}\langle f_1,f_1\rangle^{-2}\in\bar{\mathbb{Q}}.$$

定理の証明の大筋

- $\mathrm{SO}(V,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約保型表現 τ に対して，V の codimension 1 の部分空間 W と $\mathrm{SO}(W,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約保型表現 σ で，$\tau\mid_{\mathrm{SO}(W,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})}$ に現れるものをとる．
- この σ と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約 cuspidal 表現 π から，$\mathbb{G}\simeq\mathrm{SO}(n+1,2)$ の Eisenstein series を構成する．$\mathbb{G}$ の maximal parabolic subgroup P で，その Levi component が $\mathrm{GL}_2\times\mathrm{SO}(W)$ になるものを Eisenstein series の構成に使う．
- $\mathbb{G}$ のもう一つの maximal parabolic subgroup Q の unipotent radical (abelian) に関して，その stabilizer が $\mathrm{SO}(V)$ になるような Fourier 係数をとり，さらに τ に属する保型形式の値を重みとする有限和をとる．それは，積分表示の理論により，L 函数の特殊値で表される．
- 本質的には，Eisenstein series の Fourier 係数の代数性と compact 群上の保型形式が有限個の値をとる函数であることから，L 函数の特殊値の代数性が従う．

Böcherer 予想 [5, 6]

$$\mathfrak{H}_2 := \left\{ Z = X + \sqrt{-1}\, Y \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid Z = {}^tZ,\, \mathrm{Im}(Y) > 0 \right\}$$

とする．このとき，正則函数 $\Phi : \mathfrak{H}_2 \to \mathbb{C}$ が重さ k の $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$ に関する Siegel cusp form であるとは，

$$\Phi(\gamma\langle Z\rangle) = \det(CZ+D)^k \cdot \Phi(Z)$$

が，$Z \in \mathfrak{H}_2$, $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$, $\gamma\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$, に対して成り立ち，その Fourier 展開が

$$\Phi(Z) = \sum_{T>0} a(T,\Phi)\, \exp\left[2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}(TZ)\right],$$

$T = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ となることをいう．

E は虚 2 次体で，$-D_E$ をその判別式とする．このとき，Hecke 固有形式 Φ に対して，$B(\Phi; E)$ を次の様に定義する：

$$B(\Phi; E) = \frac{1}{w(E)} \sum_{\{T \mid \det T = D_E/4\}/\sim} a(T,\Phi).$$

ここで，

$$T_1 \sim T_2 \Longleftrightarrow \exists\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ such that } T_1 = {}^t\gamma T_2 \gamma,$$

$w(E)$ は E に含まれる 1 の冪根の個数を表す．

Böcherer は 1986 年に次の予想を提出した．

予想 3 (Böcherer, 1986) Φ のみに依存する定数 C_Φ が存在して，全ての虚 2 次体 E に対して，

$$L\left(\frac{1}{2}, \pi(\Phi) \times \chi_E\right) = C_\Phi \cdot D_E^{-k+1} \cdot |B(\Phi; E)|^2$$

が成り立つ．ただし，$\pi(\Phi)$ は Φ に付随する $\mathrm{GSp}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現，$L(s, \pi(\Phi))$ は $\pi(\Phi)$ のスピノル L 函数，χ_E は E に対応する 2 次指標である．

これに関係して，論文 [5] では次の定理が証明されている．

定理 6 (古澤-森本 [5])

$$L\left(\frac{1}{2}, \pi(\Phi)\right) L\left(\frac{1}{2}, \pi(\Phi) \times \chi_E\right) \neq 0 \Longleftrightarrow B(\Phi; E) \neq 0.$$

Explicit refinement of Böcherer's conjecture

さらに，preprint [6] においては，Böcherer 予想が次の精密化された形で証明されている．

定理 7 (古澤-森本 [6]) いま，$\varPhi$ は齋藤-黒川リフトではないとする．このとき，

$$\frac{|B(\varPhi;E)|^2}{\langle\varPhi,\varPhi\rangle}=D_E^{k-1}\cdot 2^{2k-5}\cdot\frac{L\left(\frac{1}{2},\pi(\varPhi)\right)\,L\left(\frac{1}{2},\pi(\varPhi)\times\chi_E\right)}{L\left(1,\pi(\varPhi),\mathrm{Ad}\right)}.$$

この定理の系として，次の結果が従う．

系 3 (スピノル L 函数の中心特殊値の代数性) $\varPhi$ を，全ての *Fourier* 係数 $a(T,\varPhi)$ が代数的整数のなす環 $\bar{\mathbb{Z}}$ に含まれるように *normzlize* する．このとき，全ての虚 2 次体 E に対して，

$$w(E)^2\cdot D_E^{k-1}\cdot 2^{2k-5}\cdot\frac{L\left(\frac{1}{2},\pi(\varPhi)\right)\,L\left(\frac{1}{2},\pi(\varPhi)\times\chi_E\right)}{L\left(1,\pi(\varPhi),\mathrm{Ad}\right)}\cdot\langle\varPhi,\varPhi\rangle\in\bar{\mathbb{Z}}$$

が成り立つ．

References

[1] S. Böcherer. *Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß*, Preprint Math. Bottingensis Hefr 68, 1986.

[2] P. Deligne. *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales.* With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus. Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 313–346, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[3] M. Furusawa and K. Morimoto. *On special values of certain L-functions.* Amer. J. Math. 136 (2014), no. 5, 1385–1407.

[4] M. Furusawa and K. Morimoto. *On special values of certain L-functions, II.* Amer. J. Math. 138 (2016), no. 4, 1117–1166.

[5] M. Furusawa and K. Morimoto. *On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for* $\mathrm{SO}(2n+1)\times\mathrm{SO}(2)$. Math. Ann. 368 (2017), no. 1-2, 561–586.

[6] M. Furusawa and K. Morimoto. *Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Böcherer's conjecture.* arXiv:1611.05567 (preprint).

[7] H. Grobner and J. Lin. *Special values of L-functions and the refined Gan-Gross-Prasad conjecture.* arXiv:1705.07701 (preprint).

[8] S. Lichtenbaum. *Values of zeta-functions, étale cohomology, and algebraic K-theory.* Algebraic K-theory, II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 489–501. Lecture Notes in Math., Vol. 342, Springer, Berlin, 1973.

[9] J. Rognes and C. Weibel. *Two-primary algebraic K-theory of rings of integers in number fields.* Appendix A by Manfred Kolster. J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 1, 1–54.

[10] G. Shimura. *Sur les intgérales attachées aux formes automorphes.* J. Math. Soc. Japan 11 (1959), 291–311.

[11] G. Shimura. *On the periods of modular forms.* Math. Ann. 229 (1977), no. 3, 211–221.

[12] B. Sun. *The nonvanishing hypothesis at infinity for Rankin-Selberg convolutions.* J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), no. 1, 1–25.

Euler 系の理論の最近の発展について

佐野昂迪
大阪市立大学

目次

1 はじめに

Euler 系の理論は「高階（higher rank)」の場合に一般化されるべきだ，という考え方は，90 年代後半に Perrin-Riou [Per98] によって提唱されていたが，その後あまり進展はなかった．最近になって筆者は，David Burns と坂本龍太郎との共同研究 [BSS] で，高階 Euler 系の理論をかなり満足のいく形で作り上げることができたので報告する．

1.1 古典的な Euler 系

まず，古典的な「Euler 系の議論（Euler system argument）」の概略について説明する（[Rub00] 参照）．K を代数体とし，p を素数とする．T を有限階数自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群で，K の絶対ガロア群 $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の連続作用が入っているものとする（いわゆる「p 進表現」）．

Euler 系とは，ガロア・コホモロジーの元の集まり

$$c = (c_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}} \in \prod_{\mathfrak{n}} H^1(K(\mathfrak{n}), T)$$

であって，適切な「ノルム関係式」を満たすものである（ここで $\mathfrak{n}$ は K の square-free なイデアルを走り，$K(\mathfrak{n})$ は mod $\mathfrak{n}$ の射類体である*1）．

Euler 系の議論の流れは以下の通りである．

Step 1. Euler 系 c の「Kolyvagin 導分（derivative）」を作る：p べき M を固定し，各 $\mathfrak{n}$ に対して，「Kolyvagin 作用素*2」$D_{\mathfrak{n}}$ を $c_{\mathfrak{n}}$ に施して mod M をする．

$$(D_{\mathfrak{n}} \cdot c_{\mathfrak{n}} \bmod M) \in H^1(K(\mathfrak{n}), A)^{G_{\mathfrak{n}}} = H^1(K, A)$$

（ここで $A := T/MT$, $G_{\mathfrak{n}} := \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{n})/K)$）*3．このようにして $c_{\mathfrak{n}}$ の Kolyvagin 導分

$$\kappa(c)_{\mathfrak{n}} := (D_{\mathfrak{n}} \cdot c_{\mathfrak{n}} \bmod M) \in H^1(K, A)$$

ができた*4．

Step 2. Kolyvagin 導分の集まり $\kappa(c) := (\kappa(c)_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}}$ が「finite-singular 関係」

$$\forall \mathfrak{n} : \text{square-free},\ \forall \mathfrak{q} \mid \mathfrak{n} : \text{prime},\ v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}})$$

を満たすことを示す．定義はしないが，$v_{\mathfrak{q}}$ と $\varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}$ は $H^1(K, A)$ から $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ への準同型である（$\varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}$ は「finite-singular 比較写像」と呼ばれる）．finite-singular 関係を満たす元の集まりは「Kolyvagin 系」と呼ばれる*5．つまり，$\kappa(c)$ は Kolyvagin 系である．

---

*1 正確には少し違うが，$K = \mathbb{Q}$ のときの円分体にあたるものとイメージしてもらえばよい．

*2 定義はしないが，$D_{\mathfrak{n}}$ は $\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]$ の元である．

*3 制限写像 $H^1(K, A) \to H^1(K(\mathfrak{n}), A)^{G_{\mathfrak{n}}}$ が同型になるような状況を考えている．

*4 “$K(\mathfrak{n})$ 上”にある $c_{\mathfrak{n}}$ から “K 上”の元 $\kappa(c)_{\mathfrak{n}}$ を作った，ということがポイントである．この操作は「Kolyvagin 降下（descent）」と呼ばれることもある．

*5 本当は少し違う．

Step 3. finite-singular 関係と Tchebotarev 密度定理を巧みに用いることで，$\kappa(c)$ により T の Selmer 群の上からの評価（あるいは構造決定）を与える．

以上の議論により，Euler 系 c と Selmer 群を結びつけるのである．

ここで重要なのは，L 関数の値と関係する Euler 系がしばしば存在することである．そのような Euler 系に対して以上の議論を行えば，

L 関数の値と Selmer 群の間の関係

という，数論において非常に興味深い結果が得られることになる．Euler 系が重要と言われる所以はここにある．

しかしながら，L 関数の値と関係する元は，いつでも "H^1" の中に存在することは期待できない．一般には，外積 "$\bigwedge^r H^1$" の中に存在する[*6]と期待されている（r は適切な（T に依存する）非負整数で，しばしば「階数（rank）」と呼ばれる）．（このことの根拠は Rubin-Stark 予想 [Rub96] や（同変）玉河数予想 [BuFl01] にある．）したがって，上の Step 1〜3 は「$r = 1$ の場合の理論」と解釈し，それを $r > 1$ の場合に一般化することが期待されるのである[*7]．

このことを整理するために，「階数 r の Euler 系」を "$\bigwedge^r H^1$" の元の集まりとして定義し，古典的な Euler 系を「階数 1 の Euler 系」と解釈するのが自然である．このように一般化された Euler 系を「高階 Euler 系」と呼ぶ．

1.2 高階 Euler 系

L 関数の値と関係する元が「住んでいる所」についてより詳しく説明する．p 進表現 T に対して，$r = r_T := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\left(\bigoplus_{v|\infty} H^0(K_v, T^*(1))\right)$ とおく（ここで $T^*(1) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T, \mathbb{Z}_p(1))$）．このとき，玉河数予想からの簡単な帰結として，$T$ の L 関数の値[*8]に対応する元（いわゆる「ゼータ元」）が

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{Z}_p[G_\mathfrak{n}]} H^1(K(\mathfrak{n}), T) \tag{1}$$

[*6] より正確には，後で説明するように，"$\bigcap^r H^1$" の中に存在する．

[*7] ちなみに，$r = 0$ の場合も起こりえる．「階数 0 の Euler 系」は考えることができるが，「階数 0 の Kolyvagin 系」なるものは（少なくとも現在では）考えることはできない．この場合はまた別個に扱うべきかと思われる．

[*8] より正確には，$T^*(1)$ の L 関数の $s = 0$ における先頭項（leading term）．

の中に存在すると予想される[*9]（[Kat93, Remark 4.14] 参照）．ゼータ元が単純に

$$\bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}^r H^1(K(\mathfrak{n}), T) \tag{2}$$

の中に住んでいると予想するのは（少なくとも $T = \mathbb{Z}_p(1)$ の場合には）間違いである（[Rub96, §4] 参照）．Rubin はこの微妙な「整性（integrality）」を $T = \mathbb{Z}_p(1)$ の場合にきちんと考察し，彼は

$$\left\{ a \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}^r H^1(K(\mathfrak{n}), T) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \Phi \in \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}^r \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}(H^1(K(\mathfrak{n}), T), \mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]), \\ \Phi(a) \in \mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}] \end{array} \right\} \tag{3}$$

の中にゼータ元が住んでいると予想した[*10]（[Rub96, Conjecture B′] 参照）．これは (1) の lattice になっていて，(2) より大きい[*11]（[Rub96, Proposition 1.2] 参照）．$T = \mathbb{Z}_p(1)$ の場合の L 関数は古典的な Artin L 関数で，ゼータ元は「Stark 元」と呼ばれる[*12]．Rubin の予想 [Rub96, Conjecture B′] は Stark 予想の精密化であり，「Rubin-Stark 予想」と呼ばれる．

一般の T に対しても，ゼータ元が (3) の中に住んでいると予想することは正しいと思われる．実際，玉河数予想を仮定して，ゼータ元が (3) に入っていることは自然に証明することができる（[BuSa, Remark 2.9 と Theorem 2.17] 参照）．(3) は一見奇妙だが，実は色々なよい性質を持っていて，自然な対象なのである．

以上より，高階 Euler 系は (3) の元の集まり（で適切なノルム関係式を満たすもの）として定義すべきだろう．(3) を

$$\bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}^r H^1(K(\mathfrak{n}), T)$$

と表すことにする．高階 Euler 系

$$c = (c_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}} \in \prod_{\mathfrak{n}} \bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}^r H^1(K(\mathfrak{n}), T)$$

が与えられたとき，これに対して §1.1 の Step 1〜3 を行いたい．それを実際に自然な形でやったというのが今回の研究結果である．

---

*9 より正確には，$H^1(K(\mathfrak{n}), T)$ ではなく $H^1(\mathcal{O}_{K(\mathfrak{n}),S}, T)$ である（S は悪い素点（bad places）を含む有限集合をとり，S の Euler 因子を除いた L 関数を考える）．

*10 "$\Phi(a)$" の定義は，$a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_r$, $\Phi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r$ の形のときは

$$\Phi(a) := \det(\varphi_i(a_j))$$

であり，一般の場合にはこの定義を線形に延長する（§2 参照）．

*11 $r = 0, 1$ のときは (2) と同じ．

*12 「Rubin-Stark 元」とも．

1.3 Mazur-Rubin の高階 Kolyvagin 系の理論

先行結果として，§1.1 の Step 3 の「高階版」は最近 Mazur と Rubin [MaRu16a] によってなされていた（が，問題点があった）．彼らは「高階 Kolyvagin 系」の定義を与え，それによって Selmer 群の構造決定を行う一般論を作り上げた．しかし，彼らの理論は「stub Kolyvagin 系」という特殊な高階 Kolyvagin 系にしか適用できないもので，高階 Euler 系からどう高階 Kolyvagin 系を作るか（Step 1 と 2 の「高階版」)，また作れたとしてもそれが stub Kolyvagin 系であることをどうやって確かめるのか，という点が全く考察されていなかったので，理論としてはかなり不十分と言えるものであった．

彼らの「失敗」の要因は，高階 Kolyvagin 系を “$\bigwedge^r H^1$” の元の集まりとして定義したことにある．一方で我々は “$\bigcap^r H^1$” の元の集まりとして高階 Kolyvagin 系を定義した．すると, 高階 Euler 系から高階 Kolyvagin 系が自然に作れ, Mazur-Rubin の stub Kolyvagin 系に相当するものは高階 Kolyvagin 系そのものに他ならないことも示せるなど，非常にうまく事が運んだのである．その意味で，我々の “$\bigcap^r H^1$” による高階 Kolyvagin 系の定義は「正しい」と言ってよいと思う．

本稿では，“$\bigwedge^r H^1$” ではなく “$\bigcap^r H^1$” を考えることでどのような点でうまくいったのか，その代数的な鍵を中心に解説したい．

2 外積代数

本節では，§1.2 で述べた重要な lattice (3) の代数的な一般化を与え，その性質についての一般論を展開する．

R を可換環とし，X を R 加群とする．

準同型 $\varphi : X \to R$ が与えられているとする．このとき，φ が誘導する準同型

$$\begin{aligned} \bigwedge\nolimits_R^r X &\to \bigwedge\nolimits_R^{r-1} X \\ x_1 \wedge \cdots \wedge x_r &\mapsto \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} \varphi(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_r \end{aligned}$$

も記号 φ で表すことにする（ここで r は正の整数)．

次に，s 個の準同型 $\varphi_1, \ldots, \varphi_s : X \to R$ が与えられているとする（ただし $s \leq r$)．このとき，準同型

$$\varphi_s \circ \cdots \circ \varphi_1 : \bigwedge\nolimits_R^r X \to \bigwedge\nolimits_R^{r-s} X$$

を記号 $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_s$ で表すことにする．この構成は準同型

$$\begin{aligned}\bigwedge\nolimits_R^s \operatorname{Hom}_R(X,R) &\to \operatorname{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r X, \bigwedge\nolimits_R^{r-s} X\right) \\ \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_s &\mapsto \varphi_s \circ \cdots \circ \varphi_1\end{aligned}$$

を定めていることに他ならない（この準同型による Φ の像も Φ で表す，ということである）．

次が成り立つことに注意する：

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \det(\varphi_i(x_j)).$$

このことは帰納法と余因子展開を用いてすぐに確かめられる．

2.1 余外積の定義

以下，関手 $\operatorname{Hom}_R(-,R)$ を $(-)^*$ と略記することにする．

定義 2.1 ([BKS, Definition 3.1])**.** r を非負整数とする．R 加群 X の r 次余外積（r-th coexterior power）[*13]を

$$\bigcap\nolimits_R^r X := \left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*)\right)^*$$

と定義する．

注意 2.2. (i) R がネーター環で，X が有限生成射影 R 加群のとき，自然な射

$$\begin{aligned}\delta_r : \bigwedge\nolimits_R^r X &\to \bigcap\nolimits_R^r X \\ x &\mapsto (\Phi \mapsto \Phi(x))\end{aligned}$$

は同型である[*14]．

(ii) 余外積は §1.2 で述べた lattice (3) の自然な一般化である．実際，$R = \mathbb{Z}_p[G]$（G は有限アーベル群）[*15]で X が有限生成のとき，δ_r が誘導する射

$$\delta_r : \left\{ x \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_R^r X \;\middle|\; \forall \Phi \in \bigwedge\nolimits_R^r (X^*),\ \Phi(x) \in R \right\} \to \bigcap\nolimits_R^r X \tag{4}$$

---

*13 この名前は仮のものである．Burns は「外二重双対（exterior bidual)」と呼ぶことを提案している．本稿で「余外積」という名前をつけた理由については後で述べる（注意 2.6 参照）．

*14 証明：局所化することで自由加群の場合に帰着でき，自由加群の場合は容易に示せる．

*15 $R = \mathbb{Z}[G]$ などでもよい．

は同型である[*16]（[BuSa, Proposition A.7] 参照）．(4) の左辺を初めて考えたのは Rubin [Rub96, §1.2] で，彼は

$$\left\{x \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_R^r X \,\middle|\, \forall\Phi \in \bigwedge\nolimits_R^r (X^*),\ \Phi(x) \in R\right\} \simeq \left(\iota\left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*)\right)\right)^*$$

であることを指摘している（ここで ι は

$$\begin{aligned} \iota : \bigwedge\nolimits_R^r (X^*) &\to \left(\bigwedge\nolimits_R^r X\right)^* \\ \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r &\mapsto (x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \mapsto \det(\varphi_i(x_j))) \end{aligned}$$

である）．よって我々の余外積 $\bigcap_R^r X$ に近いものを考えていたが，ι による像をとっているところが微妙な違いであり[*17]，また，彼は一般の可換環上で考えることをしなかった．一般の可換環上で考えることの利点は，例えば，$R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ のような環上でも $\bigcap_R^r X$ を考えることができることである．このような環上では $\mathbb{Q}_p$ をテンソルすると消えてしまうので，(4) の左辺によって定義すると意味をなさない．Kolyvagin 系を考える際は $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ のような環上の加群を扱うので，「$\mathbb{Q}_p$ をテンソルしなくても通用する定義」に拡張したことが，我々の高階 Kolyvagin 系の定義の代数的な鍵である．

[*16] 証明：$Q := \mathbb{Q}_p[G]$ とおくことにすると，

$$\begin{aligned} &\left\{x \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_R^r X \,\middle|\, \forall\Phi \in \bigwedge\nolimits_R^r (X^*),\ \Phi(x) \in R\right\} \\ &= \ker\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_R^r X \to \mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*), Q/R\right)\right) \\ &\simeq \ker\left(\mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*), Q\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*), Q/R\right)\right) \\ &= \bigcap\nolimits_R^r X, \end{aligned}$$

ここで同型

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_R^r X &= \bigwedge\nolimits_Q^r (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X) \\ &\overset{\delta_r}{\simeq} \mathrm{Hom}_Q\left(\bigwedge\nolimits_Q^r \mathrm{Hom}_Q(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X, Q), Q\right) \\ &= \mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r (X^*), Q\right) \end{aligned}$$

を使った（Q は半単純環であり，$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} X$ は有限生成射影 Q 加群になることに注意）．

[*17] 実際には ι の像をとらなくてもよい，というのが我々の観察である（$\ker \iota$ は torsion であり，よって $(\mathrm{im}\,\iota)^* \simeq \left(\left(\bigwedge_R^r (X^*)\right) / \ker\iota\right)^* \simeq \left(\bigwedge_R^r (X^*)\right)^*$）．

2.2　余外積の性質

以下の命題 2.3 と 2.5 で，余外積の重要な性質を見る．

命題 2.3 ([BuSa, Proposition A.2(i)])**.** $\iota : X \to Y$ を R 加群の単射とし，

$$\mathrm{Ext}^1_R(\operatorname{coker}\iota, R) = 0$$

と仮定する．このとき，任意の非負整数 r に対して，ι が誘導する準同型

$$\bigcap\nolimits_R^r X \to \bigcap\nolimits_R^r Y$$

は単射である．

証明. 仮定 $\mathrm{Ext}^1_R(\operatorname{coker}\iota, R) = 0$ より，ι の双対

$$\iota^* : Y^* \to X^*$$

は全射である．よって，ι^* から誘導される準同型

$$\bigwedge\nolimits_R^r (Y^*) \to \bigwedge\nolimits_R^r (X^*)$$

も全射である．よってこれの双対

$$\bigcap\nolimits_R^r X \to \bigcap\nolimits_R^r Y$$

は単射である． □

注意 2.4. 命題 2.3 の仮定 $\mathrm{Ext}^1_R(\operatorname{coker}\iota, R) = 0$ は，例えば次のいずれかの場合に満たされる：G を有限アーベル群とするとき，

(i) $R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[G]$,
(ii) $R = \mathbb{Z}_p[G]$ で，$\operatorname{coker}\iota$ が torsion-free（$\mathbb{Z}_p$ 加群として自由）.

これらは応用上自然に考える設定である（G として代数体のアーベル拡大のガロア群をとる）．もっと一般に

(i)$'$ R は 0 次元 Gorenstein 環,
(ii)$'$ R は Gorenstein $\mathbb{Z}_p$-order で，$\operatorname{coker}\iota$ が torsion-free（$\mathbb{Z}_p$ 加群として自由）.

でも満たされる（[BuSa, §A.3] 参照）．応用上想定しているものは Hecke 環である．

このような設定は，双対関手 $(-)^* := \mathrm{Hom}_R(-, R)$ が「2 回やったら元に戻る」という（いかにも双対らしい）性質が成り立つような設定である．つまり，「R が 0 次元 Gorenstein 環」または「R が Gorenstein $\mathbb{Z}_p$-order で X が torsion-free」のとき，

$$X \to X^{**};\ x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$$

は同型になる[*18]．余外積は双対関手 $(-)^*$ を用いて定義されるので，このような設定は余外積を考える上で自然なのである．

命題 2.5 ([BuSa, Proposition A.4])**.** R を 0 次元 Gorenstein 環とし，G を有限アーベル群とする．このとき，任意の $R[G]$ 加群 X と非負整数 r に対し，自然な同型

$$\left(\bigcap\nolimits_{R[G]}^{r} X\right)^{G} \simeq \bigcap\nolimits_{R}^{r}(X^{G})$$

がある．

証明. まず，関手 $\mathrm{Hom}_{R[G]}(-, R[G])$ は関手 $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ と同一視できることに注意する[*19]．よって，これらの関手の略記 $(-)^*$ は誤解の恐れがない．また，任意の $R[G]$ 加群 Y に対して

$$(Y^*)^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, Y^*) \simeq \mathrm{Hom}_{R[G]}(Y \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}, R[G]) = (Y_G)^*$$

が成り立つことに注意をしておく．

R が 0 次元 Gorenstein 環のとき，$R[G]$ もそうである．注意 2.4 で述べたように，0 次元 Gorenstein 環上の加群は反射的である．よって，

$$(X^G)^* \simeq ((X^{**})^G)^* \simeq ((X^*)_G)^{**} \simeq (X^*)_G$$

*18 つまり，X が反射的（reflexive）ということ．これは $\bigcap_R^1 X \simeq X$ ということでもある．

*19 $\mathrm{Hom}_R(X, R) \to \mathrm{Hom}_{R[G]}(X, R[G]);\ \varphi \mapsto \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma(-))\sigma^{-1}$ は全単射.

が成り立つ．これを用いると，

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap\nolimits_{R[G]}^{r} X\right)^{G} &= \left(\left(\bigwedge\nolimits_{R[G]}^{r}(X^*)\right)^{*}\right)^{G} \\
&\simeq \left(\left(\bigwedge\nolimits_{R[G]}^{r}(X^*)\right)_{G}\right)^{*} \\
&\simeq \left(\bigwedge\nolimits_{R}^{r}(X^*)_{G}\right)^{*} \\
&\simeq \left(\bigwedge\nolimits_{R}^{r}(X^{G})^{*}\right)^{*} \\
&= \bigcap\nolimits_{R}^{r}(X^{G}).
\end{aligned}$$

□

注意 2.6. 命題 2.3 と 2.5 が言っていることはそれぞれ

(i) 余外積は単射を保つ，
(ii) 余外積は G 不変部分（invariant）をとる操作と可換

ということである．これらの証明の本質はそれぞれ

(i)′ 外積は全射を保つ，
(ii)′ 外積は G 不変商（coinvariant）をとる操作と可換

という事実である．余外積は，外積と双対な概念になるように定義されているのである（このことから「余外積」という名前は自然であると思う）．

我々は余外積を

$$\bigcap\nolimits_{R}^{r} X := \left(\bigwedge\nolimits_{R}^{r}(X^*)\right)^{*}$$

と定義したが，本当は，$\bigcap_{R}^{r} X$ の「別の定義」があって，「双対性」によって同型

$$\bigcap\nolimits_{R}^{r} X \simeq \left(\bigwedge\nolimits_{R}^{r}(X^*)\right)^{*}$$

が得られる，という理論の展開の仕方の方が自然である[*20]．$R = \mathbb{Z}_p[G]$ のときには，この「別の定義」として Rubin の lattice

$$\left\{x \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge\nolimits_{R}^{r} X \;\middle|\; \forall \Phi \in \bigwedge\nolimits_{R}^{r}(X^*),\ \Phi(x) \in R\right\}$$

[*20] 我々の余外積の定義は，例えるなら，G 不変部分 X^G を $((X^*)_G)^*$ で定義するようなものである．

がとれるが（注意 2.2(ii) 参照），やや ad hoc な印象を受ける．一般に「別の定義」が存在するのか今のところわかっていないが，もっと考えれば色々理論的な整備ができそうである．

個人的に，外積は「ホモロジー的なもの」，余外積は「コホモロジー的なもの」という印象を受ける[*21]．§1.2 で述べたように，ゼータ元は（外積ではなく）余外積の中に住んでいると予想するのが正しいと思われるが，これはやはり「数論においてホモロジーよりもコホモロジーの方が大事」という哲学の現れと見ることができるのではないかと思う．

本節の最後に，本節の冒頭で構成した自然な準同型

$$\begin{aligned} \bigwedge\nolimits_R^s(X^*) &\to \mathrm{Hom}_R\left(\bigwedge\nolimits_R^r X, \bigwedge\nolimits_R^{r-s} X\right) \\ \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_s &\mapsto \varphi_s \circ \cdots \circ \varphi_1 \end{aligned}$$

の「余外積版」の定義を与えておく．次のように自然に定めることができる：

$$\begin{aligned} \bigwedge\nolimits_R^s(X^*) &\to \mathrm{Hom}_R\left(\bigcap\nolimits_R^r X, \bigcap\nolimits_R^{r-s} X\right) \\ \Phi &\mapsto (f \mapsto (\Psi \mapsto f(\Phi \wedge \Psi))) \end{aligned}$$

（ここで $f : \bigwedge_R^r(X^*) \to R$, $\Psi \in \bigwedge_R^{r-s}(X^*)$, $\Phi \wedge \Psi \in \bigwedge_R^r(X^*)$ である）．この準同型による $\Phi \in \bigwedge_R^s(X^*)$ の像も，記号 Φ で表す．すると，次の図式が可換であることが定義より確かめられる：

$$\begin{tikzcd} \bigwedge_R^r X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\delta_r"'] & \bigwedge_R^{r-s} X \arrow[d, "\delta_{r-s}"] \\ \bigcap_R^r X \arrow[r, "\Phi"'] & \bigcap_R^{r-s} X. \end{tikzcd}$$

注意 2.7. 本稿では詳しく述べないが，余外積の次の性質も大事である（[BuSa, Proposition A.3] 参照）．

---

*21 外積と余外積の関係は，（命題 2.3 と 2.5 を考慮すると）G 不変商と G 不変部分の関係に似ていると思う（$\otimes$ と Hom の関係とも言える）．この類似の下で，注意 2.2(i) の準同型

$$\delta_r : \bigwedge\nolimits_R^r X \to \bigcap\nolimits_R^r X;\ x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \mapsto (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_r \mapsto \det(\varphi_i(x_j)))$$

は，ノルム写像

$$X_G \to X^G;\ \overline{x} \mapsto \sum_{\sigma \in G} \sigma x$$

に相当すると思う．

「R を 0 次元 Gorenstein 環とし，R 加群の完全系列

$$0 \to X \to Y \xrightarrow{\varphi} R$$

があるとする．このとき，任意の非負整数 r に対して

$$\mathrm{im}\left(\varphi : \bigcap\nolimits_R^{r+1} Y \to \bigcap\nolimits_R^{r} Y\right) \subset \bigcap\nolimits_R^{r} X$$

が成り立つ（ここで $\bigcap_R^r X$ は $\bigcap_R^r Y$ の部分とみなしている（命題 2.3 参照））．特に，$\varphi : Y \to R$ は準同型

$$\varphi : \bigcap\nolimits_R^{r+1} Y \to \bigcap\nolimits_R^{r} X$$

を誘導する．」

これに相当するものを Mazur-Rubin は [MaRu16a, Proposition A.1] で考えていたが，彼らは（余外積ではない通常の）外積で考えたため証明が苦しく*22，「R が単項イデアル環」というかなり強い仮定をおいていた．

このような性質は「Stark 系」の定義をする際に必要になる．Stark 系は §1.1 の Step 3 で重要な役割を果たすものである．

上の性質は Burns と筆者 [BuSa] とは独立に坂本 [Sak] によっても発見されていたことに注意しておく．

3 高階 Euler 系の理論

本節では §1.1 で述べた Euler 系の議論 Step 1〜3 の「高階版」について解説し，最後に応用について少し述べる．まず記号の復習をする．K を代数体とし，p を素数，T を $\mathbb{Z}_p$ 係数の G_K の p 進表現とする．$\mathfrak{n}$ で K の square-free なイデアルを表し，$K(\mathfrak{n})$ で mod $\mathfrak{n}$ の射類体，$G_\mathfrak{n}$ で $K(\mathfrak{n})/K$ のガロア群を表すのであった．また，p べき M を固定し，$A := T/MT$ とおく．簡単のため，$H^1(K(\mathfrak{n}), A)^{G_\mathfrak{n}} = H^1(K, A)$ が成り立っているとする．「階数」r は，Step 1 と 2 の高階版においては任意の正の整数でもよい（もちろん，応用上は r として r_T をとる（§1.2 参照））．

本稿ではアイデアを中心に説明することとし，厳密には多少の間違いを含む説明をするということに注意をしておく（講演における説明の仕方に近いものと思っていただきた

*22 外積は単射を保たないという事実に困難がある．余外積は単射を保つので（命題 2.3 参照），その点簡単である．

い）．また，ここでは簡単のため，設定を最も簡単なものにしているが，T の係数環はもっと一般に Gorenstein $\mathbb{Z}_p$-order でもよい[*23]．その場合，A の係数環は 0 次元 Gorenstein 環になる．係数環が群環や Hecke 環でも以下の議論は通用するということである．

3.1 Step 1 の高階版

Step 1 の内容は，「Kolyvagin 作用素 $D_{\mathfrak{n}}$ を Euler 系（の $\mathfrak{n}$ 成分）$c_{\mathfrak{n}}$ に施してから mod M をすることで，Kolyvagin 導分 $\kappa(c)_{\mathfrak{n}}$ を $H^1(K,A)$ の中に作る」ということであった（[Rub00, Definition 4.4.10] 参照）．

これの高階版は命題 2.5 を用いると簡単にできる．高階 Euler 系

$$c=(c_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}}\in\prod_{\mathfrak{n}}\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),T)$$

が与えられているとし[*24]，

$$(D_{\mathfrak{n}}\cdot c_{\mathfrak{n}}\ \mathrm{mod}\ M)\in\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),A)$$

を考える[*25]．すると，$G_{\mathfrak{n}}$ 不変部分に入ること

$$(D_{\mathfrak{n}}\cdot c_{\mathfrak{n}}\ \mathrm{mod}\ M)\in\left(\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),A)\right)^{G_{\mathfrak{n}}}$$

はすぐにわかる（[Rub00, Lemma 4.4.2(i)] 参照）．命題 2.5 より

$$\left(\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),A)\right)^{G_{\mathfrak{n}}}\simeq\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}(H^1(K(\mathfrak{n}),A)^{G_{\mathfrak{n}}})=\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}H^1(K,A)$$

が成り立つので，$\bigcap^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}H^1(K,A)$ の中の元

$$\kappa(c)_{\mathfrak{n}}:=(D_{\mathfrak{n}}\cdot c_{\mathfrak{n}}\ \mathrm{mod}\ M)\in\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}H^1(K,A)$$

ができたことになる．これが「高階 Kolyvagin 導分」と呼ぶべきものである．通常の外積は「G 不変部分をとる操作と可換」という性質を持たないためこのような議論はできない．余外積を考えることが鍵となっているのである．

[*23] さらに $\mathbb{Z}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環にとりかえてもよい．

[*24] 正確な定義は [BuSa, Definition 2.3] 参照．

[*25] 「mod M」とは，「自然な射 $T\to A$ が誘導する射 $\bigcap^r_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),T)\to\bigcap^r_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}[G_{\mathfrak{n}}]}H^1(K(\mathfrak{n}),A)$ による像をとる」という意味である．$T\to A$ が余外積に射を誘導することは自明ではなく，$H^1(K(\mathfrak{n}),T)$ が torsion-free という仮定が必要である（この仮定は注意 2.4 で述べたように自然である）．

3.2 Step 2 の高階版

Step 2 の内容は，「Kolyvagin 導分の集まり $\kappa(c) := (\kappa(c)_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}}$ が「finite-singular 関係」

$$\forall \mathfrak{n} : \text{square-free},\ \forall \mathfrak{q} \mid \mathfrak{n} : \text{prime},\ v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}})$$

を満たすことを示す」ということであった（[Rub00, Theorem 4.5.4] 参照）．ここで，定義はしないが，$v_{\mathfrak{q}}$ と $\varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}$ は $H^1(K,A)$ から $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ への準同型である（[BuSa, §§3.1 と 4.1] 参照）．これの高階版を示すことは，実は，階数 1 の場合に帰着される．その「トリック」について以下で説明する．

まず，「finite-singular 関係」の高階版とは何かということを明らかにしておく．Step 1 の高階版で見たように，$\kappa(c)_{\mathfrak{n}}$ は

$$\bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r} H^1(K,A)$$

の元である．§2 の終わりに構成した準同型

$$\begin{aligned} \bigwedge\nolimits_{R}^{s}(X^*) &\to \mathrm{Hom}_R\left(\bigcap\nolimits_{R}^{r} X, \bigcap\nolimits_{R}^{r-s} X\right) \\ \Phi &\mapsto (f \mapsto (\Psi \mapsto f(\Phi \wedge \Psi))). \end{aligned}$$

を思い出すと，（$R = \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$, $X = H^1(K,A)$, $s = 1$ として）$v_{\mathfrak{q}}, \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}} \in H^1(K,A)^*$ はそれぞれ準同型

$$\bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r} H^1(K,A) \to \bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1} H^1(K,A) \tag{5}$$

を誘導する（この準同型もそれぞれ $v_{\mathfrak{q}}, \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}$ と表す）．このことから，「finite-singular 関係」の高階版は

$$\forall \mathfrak{n} : \text{square-free},\ \forall \mathfrak{q} \mid \mathfrak{n} : \text{prime},\ v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}}) \text{ in } \bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1} H^1(K,A) \tag{6}$$

と述べられる（これを満たす元の集まりが「高階 Kolyvagin 系」である（[BuSa, Definition 4.1] 参照））．

(6) は次のようにして示すことができる．まず，$\bigcap_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1} H^1(K,A)$ の元とは，定義から，写像 $\bigwedge_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1}(H^1(K,A)^*) \to \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ であることに注意する．よって，等式

$$v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}}) \text{ in } \bigcap\nolimits_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1} H^1(K,A)$$

が成り立つことは，任意の $\Phi \in \bigwedge_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1}(H^1(K,A)^*)$ に対して

$$v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}})(\Phi) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}})(\Phi) \text{ in } \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$$

が成り立つことと同値である．これの左辺は，$v_{\mathfrak{q}}$ が誘導する準同型 (5) の定義から，

$$v_{\mathfrak{q}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}})(\Phi) = \kappa(c)_{\mathfrak{n}}(v_{\mathfrak{q}} \wedge \Phi) = (-1)^{r-1}\kappa(c)_{\mathfrak{n}}(\Phi \wedge v_{\mathfrak{q}}) = (-1)^{r-1}v_{\mathfrak{q}}(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}))$$

であり，同様に右辺は

$$\varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}})(\Phi) = (-1)^{r-1}\varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}}))$$

である．以上より，

$$v_{\mathfrak{q}}(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}})) = \varphi_{\mathfrak{q}}^{\mathrm{fs}}(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}})) \tag{7}$$

を示せば十分であることがわかった．

ここで，実は，$(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}))_{\mathfrak{n}}$ は階数 1 の Kolyvagin 系なのである*26（！）．よって，(7) は（古典的な）階数 1 の場合の Step 2 によって示される，というわけである．これが，高階の場合が階数 1 の場合に帰着されるトリックである．

3.3 Step 3 の高階版

Step 3 の内容は，「Kolyvagin 系 $\kappa(c)$ を用いて T の Selmer 群の構造決定をする」ということであった．本稿ではこれの高階版の概略だけを述べる．

古典的な Kolyvagin と Rubin の方法では，Kolyvagin 導分の finite-singular 関係と Tchebotarev 密度定理を駆使して巧みに Selmer 群の上からの評価を与える，というかなり技術的な方法がとられていた（[Rub00, Chapter 5] 参照）．Mazur-Rubin はこの方法を洗練させて，Kolyvagin 系の理論を作ったが（[MaRu04] 参照），そこには「Stark 系」の考え方の萌芽が見られた*27．Stark 系とは，次の性質を持つものである：

*26 証明の概略：$\Phi \in \bigwedge_{\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}}^{r-1}(H^1(K,A)^*)$ の $\varprojlim_{\mathfrak{n}} \bigwedge_{\mathbb{Z}_p[G_{\mathfrak{n}}]}^{r-1}(H^1(K(\mathfrak{n}),T)^*)$ における持ち上げ $\widetilde{\Phi} = (\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}}$ をとると，$\widetilde{\Phi}$ を用いて階数 1 の Euler 系 $\widetilde{\Phi}(c) := (\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{n}}(c_{\mathfrak{n}}))_{\mathfrak{n}}$ が作れる（このような「階数 r の Euler 系から階数 1 の Euler 系を作る方法」はよく知られている（[Rub96, Corollary 6.3], [Per98, §1.2.3 の Lemme], [Rub00, Proposition 8.5.2] 参照））．この Euler 系 $\widetilde{\Phi}(c)$ の Kolyvagin 導分 $\kappa(\widetilde{\Phi}(c))$ は $(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}))_{\mathfrak{n}}$ に一致することがわかる．よって特に，$(\Phi(\kappa(c)_{\mathfrak{n}}))_{\mathfrak{n}}$ は階数 1 の Kolyvagin 系になるとわかる．

*27 Stark 系の考え方は Howard の方法 [MaRu04, Appendix B] に端を発する．このアイデアは Mazur と Rubin が「Darmon 予想」を大幅に解決する際にも用いられた（[MaRu11, §8] 参照）．筆者はこ

(i) Stark 系から（自然に）Kolyvagin 系が作れる（[MaRu16a, Proposition 12.3], [BuSa, Proposition 4.3] 参照），

(ii) Stark 系を用いて（自然に）Selmer 群の構造決定（Fitting イデアルの決定）ができる（[MaRu16a, §8], [BuSa, Theorem 3.19], [Sak, Theorem 4.10] 参照）．

この Stark 系を導入することで，Step 3 は次のように整理できる：

Step 3-1. Stark 系を用いて（自然に）Selmer 群の Fitting イデアルを決定する，

Step 3-2. Stark 系と Kolyvagin 系の間に自然に一対一対応があることを示す，

Step 3-3. Step 3-1 と 3-2 を合わせて，Kolyvagin 系を用いて Selmer 群の Fitting イデアルを決定する．

このうち最も難しいのは Step 3-2 である（ここで Tchebotarev 密度定理も用いる）．この Step の内容は，階数 r の Stark 系のなす加群 $\mathrm{SS}_r(A)$ から階数 r の Kolyvagin 系のなす加群 $\mathrm{KS}_r(A)$ への自然な準同型（上の性質 (i)）

$$\mathrm{SS}_r(A) \to \mathrm{KS}_r(A) \tag{8}$$

が同型であることを示すことである．Step 1 と 2 の高階版では r は任意の正の整数でよかったが，ここでは r として $r_T := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\left(\bigoplus_{v|\infty} H^0(K_v, T^*(1))\right)$ をとる必要がある (§1.2 参照)．

Mazur-Rubin の高階 Kolyvagin 系の理論では，通常の外積を用いて高階 Kolyvagin 系が定義され（[MaRu16a, Definition 10.3] 参照），その定義では (8) が同型であることを示せなかった*28．一方で我々は余外積を用いた定義を採用した（[BuSa, Definition 4.1] 参照）．すると，(8) が同型であることが示せたのである．

3.4 応用

高階 Euler 系の興味深い具体例は現時点で一つも構成されていない．しかし，Rubin-Stark 予想を仮定すれば，L 関数の値と関係する高階 Euler 系が構成できることが知られ

の方法を整理するために「unit 系」というものを [San14, Definition 5.3] において導入したが，これが Stark 系の原型と言える．より整理された形で Stark 系を導入したのは Mazur-Rubin [MaRu16a, Definition 6.5] である．（「Stark 系」という名前も彼らによってつけられた．名前の由来は，Stark 系の具体例が Stark 元を用いて構成できるから，ということのようである（[MaRu16b, Proposition 9.10] 参照）．）

*28 彼らは単射性を示し（[MaRu16a, Theorem 12.4] 参照），全射性については $r = 1$ の場合にのみ示した（[MaRu16a, Remark 11.5] 参照）．全射性は $r > 1$ の場合には一般に期待できないことにも注意をしている（[MaRu16a, Remark 11.9] 参照）．

ている（この高階 Euler 系は Rubin-Stark 元からなるものである）.

我々の理論の応用として，次の式が示せる：

$$|A_L^\chi| \leq \left(\bigcap\nolimits^r_{\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(L/K)]} (\mathcal{O}_L^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p)^\chi : \langle \varepsilon^\chi_{L/K} \rangle \right), \tag{9}$$

ここで

- p: 奇素数,
- L/K: 代数体の有限次アーベル拡大で，K のすべての無限素点が L で完全分解するもの,
- r: K の無限素点の個数,
- $\chi : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathbb{Z}_p^\times$: 自明でない指標,
- $(-)^\chi$: χ 部分をとる関手,
- $\varepsilon^\chi_{L/K} \in \bigcap^r_{\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(L/K)]} (\mathcal{O}_L^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p)^\chi$: L/K に対する Rubin-Stark 元の (p, χ) 部分 (Rubin-Stark 予想を仮定),
- A_L: L のイデアル類群の p 部分.

Büyükboduk [Büy09, Theorem A] は (9) を，L が Leopoldt 予想を満たす総実代数体の場合に証明していた．彼の方法は，Rubin-Stark 元から階数 1 の Euler 系を作り，階数 1 の Kolyvagin 系の理論を利用する技術的なものであった．我々は高階 Euler-Kolyvagin 系の理論を構築して，その直接的な系としてより一般の場合に（Leopoldt 予想も仮定せず）証明したというわけである．

(9) の「岩澤理論版」も証明されることが期待される．高階 Euler 系の理論の岩澤理論版についても今後研究を進めていく予定である．

謝辞

第 62 回代数学シンポジウムでの講演の機会を下さったプログラム責任者の中村健太郎さん，成田宏秋さん，またシンポジウム責任者の市川尚志さんに感謝いたします．

参考文献

[BuFl01] D. Burns, M. Flach, Tamagawa numbers for motives with (non-commutative) coefficients, Doc. Math. **6** (2001) 501-570.

[BKS] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On Stark elements of arbitrary weight and their p-adic families, preprint. arXiv:1607.06607

[BSS] D. Burns, R. Sakamoto, T. Sano, On the theory of higher rank Euler, Kolyvagin and Stark systems, II, in preparation.

[BuSa] D. Burns, T. Sano, On the theory of higher rank Euler, Kolyvagin and Stark systems, preprint. arXiv:1612.06187

[Büy09] K. Büyükboduk, Kolyvagin systems of Stark units, J. reine angew. Math. **631** (2009) 85-107.

[Kat93] K. Kato, Iwasawa theory and p-adic Hodge theory, Kodai Math. J. **16** no. 1 (1993) 1-31.

[MaRu04] B. Mazur, K. Rubin, Kolyvagin systems, Mem. Amer. Math. Soc. **799** (2004).

[MaRu11] B. Mazur, K. Rubin, Refined class number formulas and Kolyvagin systems, Compos. Math. **147** (2011) 56-74.

[MaRu16a] B. Mazur, K. Rubin, Controlling Selmer groups in the higher core rank case, J. Th. Nombres Bordeaux **28** (2016) 145-183.

[MaRu16b] B. Mazur, K. Rubin, Refined class number formulas for $\mathbb{G}_m$, J. Th. Nombres Bordeaux **28** (2016) 185-211.

[Per98] B. Perrin-Riou, Systèmes d'Euler p-adiques et théorie d'Iwasawa, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998) 1231-1307.

[Rub96] K. Rubin, A Stark Conjecture 'over $\mathbb{Z}$' for abelian L-functions with multiple zeros, Ann. Inst. Fourier **46** (1996) 33-62.

[Rub00] K. Rubin, Euler systems, Annals of Math. Studies **147**, Princeton Univ. Press, 2000.

[Sak] R. Sakamoto, Stark systems over Gorenstein local rings, preprint. arXiv:1612.06531

[San14] T. Sano, A generalization of Darmon's conjecture for Euler systems for general p-adic representations, J. Number Theory **144** (2014) 281-324.

Artin 表現に付随する保型表現の特徴付け*

山内 卓也 (東北大学)

1 序論

保型形式と数論との関わりの歴史は深くこれまでに蓄積された研究は膨大ではあるが一度, 正則楕円保型形式の範疇を超えるとまだまだ分かっていないことが多い. 正則楕円保型形式の良い所はそれらは一変数の「正則」関数であるという点そして重さ $k(\in \mathbb{Z}_{>0})$ が $k>1$ のときはモジュラー曲線と呼ばれる代数曲線の係数付き Weil コホモロジーの中に様々な形で実現できる点にあり, 代数曲線特有の利点を生かした解析により保型形式の数論的性質をある程度満足いく形で捉えられる. ここで重さ $k>1$ という条件は保型表現の regularity condition に対応する. 楕円保型形式の場合は $k=1$ のときは対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ のユニタリ表現が limit of discrete series と呼ばれ discrete series の limit に実際になっている. このことが背景にもあって重さ $k=1$ の場合の解析に $k>1$ の研究が使えることが多々ある. この場合 $(k=1)$ は Weil コホモロジーには実現できないがあるモジュラー曲線上の正則ベクトル束のコホモロジーの元として (実際には大域切断として) 実現されるため代数幾何が援用できる. 一度関数としての「正則」という性質 (regularity のことではない) を外すと問題は劇的に難しくなる. 問題は (有限次の) コホモロジーに実現できなかったり, また実現できたとしてもフーリエ展開の応用上有用な具体的公式があまり整備されていないなど整数論との相性が悪く純解析的手法にのみ頼らざるを得ないというのが現状である.

より一般に代数体 K 上定義された簡約連結代数群 G を考えるとき $G(\mathbb{A}_K)$ の代数的尖点保型表現 π に対してその無限素点におけるユニタリ表現 π_∞ は Langlands によって完全に分類されている [21]. 一般に保型形式 F とは表現 $\pi=\otimes'_v\pi_v$ の表現空間のベクトル v_F のことである. ここから関数を取り出すには $G(K_\infty)$ の表現 $\pi_\infty=\otimes_{v|\infty}\pi_v$ の具体的な実現が必要となる. ベクトル v_F がどのような性質を持つ関数として実現できるかは π_∞ の情報に集約され, その実現に応じてフーリエ展開, Hecke 作用素, 佐竹固有値等の情報を絡めた数論

*第 62 回 代数学シンポジウムにおける講演 (2017 年 9 月 6 日 (水)). 講演タイトルと題目が異なるが本稿の内容は講演の前半部分に相当する. 後半の内容については [18],[17],[19] とその文献を参照されたい.

的性質を導く事が容易かどうかをある程度理解することができる．この周辺の話は [28] が参考になるので興味ある方は是非とも一読されたい．

本稿における我々の興味は保型 L 関数 $L(s,\pi)$ が (有限個を除くすべての素点で) 定義されているとき, これがある Artin 表現の L 関数と有限個を除く局所因子の差を除いて一致するとき, π_∞ の性質を解析することである． とくに G の対称領域が複素構造を持つとき, π_∞ を実現する関数として正則なものが取れるかどうかも議論する． より具体的に $G = GSp_4/\mathbb{Q}, GL_n/\mathbb{Q}$ および $GL_2/K(K/\mathbb{Q}$ 虚 2 次体) のとき, Artin 表現に対応する π_∞ の性質について Henry H. Kim (トロント大) との共著で議論された結果について述べる [15],[16].

まず，我々の研究の動機となった楕円保型形式の場合の簡単にまとめ，次に我々の扱った問題を紹介する．最後に今後の課題・展望などを述べる．

2 Artin 表現

この節に関する一般論は [7] を参照されたい．有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の複素係数有限次元連続表現

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

のことを Artin 表現という[1]．絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ は Krull 位相に関してコンパクトな位相群であり, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ には $\mathbb{C}$ から定まる通常の位相を入れる．このとき, $G_{\mathbb{Q}}$ のコンパクト性から ρ は有限商を経由する即ちある有限次ガロア拡大 $L/\mathbb{Q}$ があって,

$$\begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{res}_L"'] & & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \arrow[ur, hook, "\rho_L"'] & \end{tikzcd}$$

のように ρ は L への制限を経由する．以下では簡単のため ρ_L も ρ で表すことにする．

L の整数環を $\mathcal{O}_L$ とし素数 p を割る素イデアル v に対して, $D_{p,v} := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \mid {}^{\sigma}v = v\}$ を p での分解群という．別の v' を取ると, $\tau \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ であって $v' = {}^{\tau}v$ 成るものが存在するので $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 内で $\tau^{-1}D_{p,v}\tau = D_{p,v'}$ が成立する．さて, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は v の剰余体 $\mathbb{F}_v := \mathcal{O}_L/v$ の間の体準同型 $\sigma : \mathbb{F}_v \longrightarrow \mathbb{F}_v$ を引き起こすので準同型 $D_{v,p} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_v/\mathbb{F}_p)$ を誘導するがこれは全射となることが知られている．そこでこの射の核を $I_{p,v}$ と表す:

$$1 \longrightarrow I_{p,v} \longrightarrow D_{p,v} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_v/\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1.$$

群 $I_{p,v}$ を p での惰性群という．この群も v に依存しているが $D_{p,v}$ 同様その差は共役である．フロベニウス射 $\mathbb{F}_v \longrightarrow \mathbb{F}_v,\ x \mapsto x^p$ の $D_{p,v}$ への持ち上げを一つ固定し Frob_p で表す．Artin

[1] 代数体 K の絶対ガロア群 G_K でも同様に定式化できるが主に今回は $K = \mathbb{Q}$ のみ扱う．

表現 ρ が $\rho(I_{p,v}) = \{1\}$ を満たすとき p で不分岐であるという．これは v の取り方によらない．$L/\mathbb{Q}$ は有限次拡大であるので, ρ は有限個を除く素数 p に対して ρ は不分岐である．Artin 表現 ρ を考えることは $G_{\mathbb{Q}}$ の $V := \mathbb{C}^n$ への $\mathbb{C}$ 線形連続作用が与えられていると見ることができる．惰性群 $I_{p,v}$ は ρ を通して V に作用し, その固定部分を

$$V^{I_{p,v}} := \{x \in V \mid \rho(\sigma)x = x \text{ for all } \sigma \in I_{p,v}\}$$

とする．ここには Frob_p が作用し, その固有多項式は v の選択によらないことが確認できる．このとき ρ に付随する L 関数を次で定義する:

Definition 2.1. 上記 *Artin* 表現 ρ に対して,

$$L(s,\rho) := \prod_p L_p(s,\rho),\ \ L_p(s,\rho) := \det(\mathrm{id}_{V^{I_{p,v}}} - p^{-s}\rho(\mathrm{Frob}_p)|_{V^{I_{p,v}}})^{-1}$$

を ρ の *Artin* L 関数という．ただし, s は複素変数.

Artin L 関数 $L(s,\rho)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ の範囲で絶対収束することが容易に証明でき, さらに, Brauer によって全平面に有理型に解析接続されることが証明されている [2].

Example 2.1. 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の *3* 次多項式 $f(x) := x^3 - x - 1$ の分解体を $L = \mathbb{Q}_f$ とする．S_3 の生成元 $\sigma = (123)$, $\tau = (12)$ を用いて群準同型 *(*S_3 の表現*)* $\iota : S_3 \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を $\iota(\sigma) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^{-1} \end{pmatrix}$, $\iota(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって定義する．ただし, $\zeta_3 = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$．このとき,

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \overset{L\text{ への制限}}{\longrightarrow} \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathfrak{S}_3 \overset{\iota}{\longrightarrow} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

は *odd* かつ既約 *2* 次元 *Artin* 表現となる．ここで *odd* とは複素共役 c の作用の判別式が -1 となるときをいう (つまり, $\det(\rho(c)) = -1$)．体 $L/\mathbb{Q}$ は $p = 23$ 以外では不分岐であり, $p \neq 23$ のときは $f_p(x) := f(x) \bmod p$ は分離多項式で $\rho(I_{p,v}) = \{1\}$ となる．また, $f_p(x)$ の既約因子の数 $1, 2, 3$ に応じてそれぞれ $D_{p.v} \sim \langle\sigma\rangle$, $\langle\tau\rangle$ および 1 となる．従って, 前述の状況に応じて $a_p := \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Frob}_p)) = -1, 0, 2$ となる．また, $\det(\rho(\mathrm{Frob}_p)) = \left(\dfrac{p}{23}\right)$ が分かる．よって, $p \neq 23$ のときは

$$L_p(s,\rho) = \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + \left(\dfrac{p}{23}\right)p^{-2s}}$$

となる．分岐する素数 $p = 23$ のときは $D_{p,v} = I_{p,v} \sim \langle\tau\rangle$ となり, $a_{23} := \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_p|_{V^{I_{p,v}}}) = 1$ を確認することができる．よって,

$$L_{23}(s,\rho) = \frac{1}{1 - 23^{-s}}$$

Definition 2.2. (*Artin* 予想) 自明でない既約 *Artin* 表現 ρ は全平面に正則に解析接続される.

Definition 2.3. (強 *Artin* 予想) 自明でない既約 *Artin* 表現 ρ は保型的, 即ち, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ のある尖点的保型表現 $\pi = \otimes'_p \pi_p$ が存在して有限個を除く p に対して $L(s,\pi_p) = L_p(s,\rho)$ が成り立つ. ただし, $L(s,\pi_p)$ は局所表現 π_p の L 関数である *(cf. [12])*. また,

Example 2.2. 上半空間 $\mathbb{H}$ 上の正則関数 $f_{23}(\tau) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)(1-q^{23n}),\ q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ を考える. これは重さ *1,* レベル 23, 指標 $\left(\dfrac{*}{23}\right)$ の尖点的楕円保型形式と呼ばれている. $f_{23}(\tau) = \sum_{n\geq 1} b_n q^n$ とおくと, *Example 2.1* の a_p に対して $a_p = b_p$ がすべての素数 p に対して成り立つ. これは $L(s,\rho)$ が保型的であることを導く. 後で説明するように保型性と尖点性より $L(s,\rho)$ は全平面に解析接続される.

π の尖点性から保型 L 関数 $L(s,\pi) := \prod_p L(s,\pi_p)$ が全平面に正則に解析接続されることが従うので (cf. [12]) 強 Artin 予想は Artin 予想を導く. Artin 予想を証明する方針として保型性を証明することが今の所有力な手段であるが, ρ の像が小さい群からの誘導になっているような良い状況 (例えば像が可解であるなど) になければ保型性を証明することは難しいと思われる. そこで状況を逆手にとって, もし保型表現であってそれが Artin 表現に対応するならばその表現の何等かの性質が反映されていると推測するのは至極当然のことと思われる。

そのような動機の下, 本稿における我々の興味はほとんどすべての素数 p で $L(s,\pi_p) = L_p(s,\rho)$ となっているような π の無限素点 π_∞ を調べることにある. $GL_n, n \geq 3$ の場合は対称空間が複素構造を持たないので冒頭で説明したように π_∞ を実現する関数の正則性自体を論じることはできないが $G = GL_2/\mathbb{Q}$ または $GSp_4/\mathbb{Q}$ の場合は対称空間が複素構造を持つのでその余地がある. 結果的には $GL_2/\mathbb{Q}$ の場合とは違い $GSp_4/\mathbb{Q}$ の場合には正則形式は Artin 表現に対応し得ないことを説明する.

3 $GL_2/\mathbb{Q}$ の場合

この節の内容は専門家には well-known であるが文献は [6] や [10] 等が挙げられる. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の尖点的保型表現を $\pi = \otimes'_p \pi_p$ とする. このとき, ある既約 Artin 表現 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が存在して, π, ρ が不分岐となる素数 p に対して $L_p(s,\rho) = L(s,\pi_p)$ が成り立っているとする[2]. $n^{\pm} = \dfrac{2 \pm \mathrm{tr}(\rho(c))}{2}$ とおくとき, 無限素点における ρ の局所 L 因子を

$$L_\infty(s,\rho) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{n^+}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{n^-},\ \Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(s)$$

[2] より正確には「π, ρ が不分岐となる有限個を除くすべての素数 p」に対して $L_p(s,\rho) = L(s,\pi_p)$ なる π を考える.

と定義すると (Artin motive に対するガンマ因子の定義に従う [9]), 標準的な L 関数を用いた議論により (cf. Appendix of [24]),

$$L(s,\pi_\infty) = L_\infty(s,\rho)$$

が分かる. 一方で $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現の局所 L 因子は良く知られており (cf [22] の 3.3 節), ここから, パラメーターを比べることで

$$\pi_\infty \simeq \begin{cases} \pi(1,\mathrm{sgn}) & \text{if } (n^+,n^-)=(1,1) \\ \pi(1,1) & \text{if } (n^+,n^-)=(2,0) \\ \pi(\mathrm{sgn},\mathrm{sgn}) & \text{if } (n^+,n^-)=(0,2) \end{cases}$$

が分かる. ここで, 連続指標 $\chi_i : \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times, i=1,2$ に対して, $\pi(\chi_1,\chi_2) := \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}\chi_1\otimes\chi_2$ は上半ボレル $B(\mathbb{R})$ 上の指標 $\chi_1\otimes\chi_2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \chi_1(a)\chi_2(d)$ の正規化された誘導表現である. また, sgn は 0 でない実数に対してその符号を与える関数である. 表現 $\pi(1,\mathrm{sgn})$ は離散系列表現の極限と呼ばれ, 重さ 1 の正則保型形式を実現する. その一方で, $\pi(1,1)$ や $\pi(\mathrm{sgn},\mathrm{sgn})$ は正則でも反正則でもなく緩増加する C^∞ 級関数の成す空間にしか実現できない. どの表現も Casimir 作用素の固有値は $\dfrac{1}{4}$ であり, これだけでは表現を実現する関数の性質は決まらない. これと指標 sgn が表現のパラメータに現れる数 ($n^\pm$ のこと) をみることで正則性が導かれる. 以上の事は代数体 K 上の GL_2/K に対しても容易に考察できる.

無限素点での表現が $\pi(1,\mathrm{sgn})$ となる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現には odd な既約 2 次元 Artin 表現 $\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が対応する [8]. 逆に odd な既約 2 次元 Artin 表現は保型的であることが Khare-Wintenberger によるセール予想の解決 ([14]) の帰結として証明されている (cf. [20]). その一方で, 既約 2 次元 Artin 表現 $\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ で even なもの (*odd* でない場合) は予想として無限素点での表現が $\pi(1,1)$ や $\pi(\mathrm{sgn},\mathrm{sgn})$ となる尖点的保型表現が対応すると予想されているが解決には至ってない. またそのような保型表現から Artin 表現を構成する手段も今の所ない. このような表現は代数幾何と関連付けることができないため何らかの抜本的なアイデアが必要である. $\pi(1,1)$ や $\pi(\mathrm{sgn},\mathrm{sgn})$ となる尖点的保型表現は重さ 0 の Maass wave form と呼ばれている. このような Maass wave form に対して Blasius-Ramakrishnan は [1] においてガロア表現が構成できたと主張したが途中の議論で致命的なミス ([1] の Proposition 6.6) を犯していることに気付き主張を撤回している. ここの部分は $GSp_4/\mathbb{Q}$ の節で再び論じる.

even な既約 Artin 表現 ρ の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ への射影像が二面体群のとき, これに対応する Maass wave form は具体的に構成できる (cf. [3] の Theorem 19.1, p.112). より一般に Artin 表現の像が可解である場合は底変換 (base chnage) を用いて対応する保型表現を構成することができるが具体的に form を構成できるかどうかは表現の具体的実現と関連しており容易な問題ではない.

4 $GL_n/\mathbb{Q}, n \geq 3$ の場合

この場合も $GL_2/\mathbb{Q}$ の場合と同様であるが対称空間が自然な複素構造 (エルミート構造) を持たない．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現を $\pi = \otimes'_p \pi_p$ とする．前節と同様にして, ある既約 Artin 表現 $\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して, π, ρ が不分岐となる素数 p に対して $L(s,\rho)_p = L(s,\pi_p)$ が成り立っているとする．$n^{\pm} = \dfrac{n \pm \mathrm{tr}(\rho(c))}{2}$ とおく．このとき, $L(s,\pi_\infty) = L_\infty(s,\rho)$ であり,

$$\pi_\infty \simeq \pi(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) := \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \epsilon_1 \otimes \cdots \otimes \epsilon_n,\ \epsilon_i \in \{1, \mathrm{sgn}\}.$$

ただし, $\epsilon_i = 1$ となる数は n^+, $\epsilon_i = \mathrm{sgn}$ となる数は n^- と一致する．$GL_2/\mathbb{Q}$ のときと同じように $GL_3/\mathbb{Q}$ の場合に Artin 表現に対応する保型形式を具体的に構成する方法はあるのか興味深い所である．

5 $GSp_4/\mathbb{Q}$ の場合

この節が論文 [15] の 5 節と命題 9.4 に関連する．

5.1 正則形式と Artin 表現

$G = GSp_4/\mathbb{Q}$ とする (記号は [15],[29] を参照)．G の導来群 $G' = [G,G] = Sp_4$ の対称空間は次数 2 のジーゲル上半空間 $\mathbb{H}_2 = \{Z \in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z) > 0\}$ となり複素構造を備える．正則なジーゲル形式には重さという概念があり, それは整数の組 $(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2,\ k_1 \geq k_2 \geq 1$ に対応している[3]．重さ (k_1,k_2) の正則尖点ジーゲル形式 F に保型表現 π が対応していると仮定する．このとき, π に既約な Artin 表現 $\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ が対応し得るかどうか考察する．先ず, CAP 表現と endoscopic 表現の分類より, このような表現は既約 Artin 表現に対応しえないことが分かる．よって, π は CAP でも endoscopic でもないとしてよい．このとき Arthur の分類から GSp_4 の globally generic 表現 π^g が存在して, π と π^g は有限個を除くすべての素点で同値かつ $\{\pi_\infty, \pi^g_\infty\}$ は L-packet となる ([15] の 5 節または [30] の 2 節)．もちろん $\pi_\infty = \pi^g_\infty$ の場合もある．この場合 L-packet は singleton である．π^g は generic transfer により GL_4 へ尖点的保型表現 Π として lift されるから GL_4 の時の議論が使えて, π_∞, π^g_∞ のラングランズパラメーター $\tau : W_\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ と自然な包含関係 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ との合成は Π_∞ のラングランズパラメーターと一致する ($\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ のラングランズパラメーターについては例えば [26] を参照)．Π は Artin 表現に対応するという仮定なので, 前節の結果より, $\Pi_\infty = \pi(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4), \epsilon_i \in \{1,\mathrm{sgn}\}$．この内,

[3] $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の代数的表現 $\mathrm{Sym}^{k_1-k_2} \otimes \det^{k_2} \mathrm{St}_2$ と対応.

共役で $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ に値をとるものと同値になる場合は $(n^+, n^-) = (4,0), (2,2), (0,4)$ のときであり,

$$\pi_\infty \simeq \begin{cases} \pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}), \pi(1,1,\mathrm{sgn}), \text{ or } \pi(\mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}) & \text{if } (n^+, n^-) = (2,2) \\ \pi(1,1,1) & \text{if } (n^+, n^-) = (4,0) \\ \pi(\mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}, 1) & \text{if } (n^+, n^-) = (0,4) \end{cases}$$

が分かる. ただし, 右辺は GSp_4 の上半ボレル部分群 B 上の指標

$$\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3 : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \ \begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & a^{-1}c & * \\ 0 & 0 & 0 & b^{-1}c \end{pmatrix} \mapsto \chi_1(a)\chi_2(b)\chi_3(c)$$

に関する (正規化された) 誘導表現 $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})} \chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3$ である. 右辺に現れる誘導表現はすべて既約であることは R 群の計算からわかる. 一方 [29] の結果 (Corollary 3.2.3) より π_∞ は上記のいずれとも一致しないことが分かるので正則ジーゲル形式は Artin 表現に対応し得ないことが分かる. 以上纏めると,

Theorem 5.1. (*[15] の 9 節*) *如何なる次数 2 の正則ジーゲル形式にも Artin 表現は対応しない.*

表現 $\pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$, $\pi(1,1,\epsilon)$, $\pi(\mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}, \epsilon)$, $\epsilon \in \{1, \mathrm{sgn}\}$ の極小 K タイプの最高ウェイトはそれぞれ $(1,0), (0,0), (-1,-1)$ である. 古典的な重さ ($K_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の代数的表現) としてはそれぞれ $\mathrm{Sym}^1 \mathrm{St}_2$, $\mathbf{1}$, $\det^{-1} \mathrm{St}_2$ である.

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie} Sp_4(\mathbb{R})$ とし, $Z(\mathfrak{g})$ を複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の中心とする. $Z(\mathfrak{g})$ は $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式でありその生成元を Δ_1, Δ_2 とする ([15] の 4 節参照). 整数 $k_1 \geq k_2$ に対して $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の代数的表現を $W_{(k_1,k_2)} := (\rho_{(k_1,k_2)}, \mathrm{Sym}^{k_1-k_2} \otimes \det^{k_2} \mathbb{C}^2)$ と定める.

複素数 c_1, c_2 および $Sp_4(\mathbb{Z})$ の合同部分群 Γ に対して, $S_{(k_1,k_2)}(\Gamma, c_1, c_2)$ を C^∞ 級緩増加ベクトル値関数 $F : \mathbb{H}_2 \longrightarrow W_{(k_1,k_2)}$ であって, $F(\gamma Z) = \rho_{(k_1,k_2)}(CZ+D)F(Z)$ かつ $\Delta_i F = c_i F$ を満たしかつ尖点的であるもの全体の成す集合とする. Harish-Chandra の結果よりこれは有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間となる. 表現 $\pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$, $\pi(1,1,\epsilon)$, $\pi(\mathrm{sgn}, \mathrm{sgn}, \epsilon)$, $\epsilon \in \{1, \mathrm{sgn}\}$ はそれぞれ

$$S_{(1,0)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0),\ S_{(0,0)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0),\ S_{(-1,-1)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0)$$

に関連する. 微分作用素を用いると, Hecke 作用素と可換な同型

$$S_{(1,0)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0) \simeq S_{(2,1)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0)$$

が得られ別の K-type への実現が構成できる．$S_{(2,1)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0)$ を考えるメリットは L 関数が (adelic form と classical form の間に生じる) 正規化をすること (Hecke 作用素を正規化すること) なしに Artin L 関数と対応するという点がある ([15] の Remark 4.3 と Section 6 を参照)．$S_{(0,0)}(\Gamma, -\frac{5}{12}, 0)$ の元は [11], [27], [23] で研究されている．

6 GL_2/K, $K/\mathbb{Q}$ 虚 2 次体の場合 ([16] の 9 節参照)

$K/\mathbb{Q}$ を虚 2 次体とし, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{1, \theta\}$ とする．K の $\mathbb{C}$ への埋め込みを ∞_1, ∞_2 とする．π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ の尖点的保型表現とし, ある既約 Artin 表現 $\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ があって, ほとんどすべての K の有限素点 v に対して, $L(s, \pi_v) = L_v(s, \rho)$ となっているとする．このとき前の議論と同様にして,

$$L(s, \pi_{\infty_1}) = L(s, \pi_{\infty_2}) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$$

が分かる．これは $\pi_{\infty_i} = \pi(1,1),\ i = 1, 2$ を導く．

π の中心指標がノルム写像 $N_{K/\mathbb{Q}}$ を経由するとき, π は $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現に transfer されそれを Asai lift といい $\mathrm{Asai}(\pi)$ で表す．さらに, $\pi \not\simeq \pi \circ \theta$ でないとき, $\mathrm{Asai}(\pi)$ は尖点的であることが分かり, 中心指標の条件から $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現に descend する．それを Π と記すと, ラングランズパラメーターの計算により,

$$\Pi_\infty \simeq \pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$$

が分かる．特に, Π には正則ジーゲル形式は対応しない．

[1] の著者らが採った方針は次の通りである．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現 π で重さ 0 の Maass wave form に対応するものをとる．ここから even Artin 表現 $\rho : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を作りたい訳である．先ず, 虚 2 次体 K を適切に選び, 底変換で $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ の尖点的保型表現 $\mathrm{BC}(\pi)$ を作る．これを上記方法で $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ に decend し, それを Π とすると, 上述したようにやはり $\Pi_\infty \simeq \pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$ となり正則形式はどうがんばっても対応し得ないことがわかる．特に [1] の命題 6.6 は誤りである．

7 今後の課題

$GSp_4/\mathbb{Q}$ の場合に Artin 表現に対応する保型形式の type を分類したが結局それらには正則ジーゲル形式は対応し得ないことが分かった．このことが引き起こす問題点は代数幾何が援用できないということにある．しかし [4] [13] の著者らはこのような代数幾何が直接使えないような状況において, ペンローズ変換という複素解析的な対応を用いて, 上記の

Artin 表現に対応すべき保型形式が正則な保型形式のある種のペアリングとして記述できることを証明した ([4] では $U(2,1)/\mathbb{Q}$ が扱われている).

$G = GSp_4/\mathbb{Q}$ の場合, $D = Sp_4(\mathbb{R})/H,\ H := U(1) \times U(1)$ とおくとこれは 4 次元複素多様体の構造が入ることが分かる. $\mathrm{Lie}(H)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}H_1^* \oplus \mathbb{C}H_2^*$ とおく. ただし,

$$H_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ H_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mu = (\mu_1, \mu_2) \in X^*(\mathrm{Lie}H_{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}H_1 \oplus \mathbb{Z}H_2 \simeq \mathbb{Z}^2$ に対して,

$$\mathcal{L}_\mu := Sp_4(\mathbb{R}) \times_H \mathbb{C}_\mu/(ge^h, z) \sim (g, e^{\langle \mu, h\rangle} z)$$

の様に D 上の直線束を定める. ただし, ペアリング $\langle *, * \rangle$ は $\langle H_i, H_i^* \rangle = 2\pi\sqrt{-1},\ i = 1, 2$ となるように定められる. また $\mathbb{C}_\mu$ は H の 1 次元表現 $\mathbb{C}$ で $h' = \exp(h) \in H, h \in \mathrm{Lie}(H)_{\mathbb{C}}$ の作用が $e^{\langle \mu, h\rangle}$ で与えられるものである. Section 5 で論じた $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現 $\pi(1, \mathrm{sgn}, \mathrm{sgn})$ を $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ に制限したものは (完全) 可約でありその既約因子の minimal K-type が $(1, 0)$ のものを $V_{(0,C_{II})}$ とする. 一方, $\pi(1, 1, 1)$ を $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ に制限したものは既約であり, それを $V_{(0,C_I)}$ とする. この場合の minimal K-type は前に見た通り $(0, 0)$ である (記号の意味は [13] の命題 3.11 等参照). このとき次が知られている:

Theorem 7.1. (*[13] の定理 5.4,p.224*) Γ を $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ の *cocompact lattice,* すなわち $\Gamma\backslash\mathbb{H}_2$ がコンパクトとなる *arithmetic subgroup* とする. このとき次が成り立つ*:*

1. $H^3(\Gamma\backslash D, \mathcal{L}_{(-2,-1)})$ に $V_{(0,C_I)}, V_{(0,C_{II})}$ が寄与する.
2. $k \geq 5$ に対して $(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ 双線形な同型

$$S_{(k,k)}(\Gamma) \otimes S_{(k+1,k)}(\Gamma) \simeq H^3(\Gamma\backslash D, \mathcal{L}_{(-2,-1)})$$

が存在する.

ただし, 右辺は層係数のコホモロジーであり左辺は正則ジーゲル形式である.

このように, 解析的な対応を通して Artin 表現に対応すると期待される保型形式を正則ジーゲル形式で記述することができる. 問題をここから以下にして代数的な量を抽出するかである. Carayol は $U(2,1)$ の場合に CM 点を用いてこれを試みている. ジーゲルの場合にも様々な部分志村多様体が存在するのでそこの値での評価で関数の代数性を調べる方法が考えられるであろう. 何にせよ関数の実現とそのなんらかのフーリエ展開 (実解析的な

ので Whittaker function の明示公式) が必要で $V_{(0,C_I)}$ の場合に [11], [27] 等により確立された理論を [25] を用いて $V_{(0,C_{II})}$ の場合 (この場合は 2 次元ベクトル値関数) に拡張しそれを用いてフーリエ展開や L 関数の理論を確立することが取り敢えずやるべきことであるというのが私見である (cf. [28] の spilit も参照されたい).

Remark 7.2. *Section 5* で論じた $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ のユニタリ表現は *Totally degenerate limit of discrete series* (略して *TDLDS*) と呼ばれている *[5].*

8 Artin 表現構成に必要な条件

この節の内容は [15],[16] の主な内容と関連する. Artin 表現に対応する保型表現の無限素点のタイプは理解できたので, そのような無限素点をもつ保型表現 π からスタートして実際に Artin 表現を作るには今の所, 次の (厳しい) 条件が必要となる;

1. Hecke 固有値の代数的整数性
2. 保型表現のガロア捻りの存在
3. 有限個を除く ℓ に対して mod ℓ ガロア表現の存在

いずれの条件も $GL_2/\mathbb{Q}$, $\pi_\infty \simeq \pi(1, \mathrm{sgn})$ の場合を除いて証明することが現在の技術では非常に難しいというのが私見である. これらの条件を仮定すれば Rankin-Selberg L 関数と有限群の部分群の構造に関する一般論から Artin 表現の存在が従う (cf. [15],[16]).

9 謝辞

講演の機会を与えてくださいました成田 宏秋さん, 中村 健太郎さん, 市川 尚志先生, およびプログラム責任者の方々に感謝を申し上げます. また講演後いろいろと有益な質問をしてくださいました成田 宏秋さん, 田口雄一郎先生, および, Carayol, Kerr 等の仕事の重要性を指摘し研究を励ましてくださいました足利正先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] D. Blasius and D. Ramakrishnan, Maass forms and Galois representations in Galois Groups over $\mathbb{Q}$, ed. by Y. Ihara, K. Ribet, an d J.-P. Serre, Math. S.Res. Inst. Pub .116, Springer-Verlag, New York, 1989, 33-77.

[2] R. Brauer, On Artin's L-series with general group characters, Ann. Math. 48 (1947), 502-514.

[3] D. Bump, Automorphic forms and representations, Cambridge University Press.

[4] H. Carayol, Limites dégénérées de séries discrètes, formes automorphes et variétés de Griffiths-Schmid:le cas du groupe $U(2, 1)$, Compositio Mathematica 111: 51-88, 1998.

[5] H. Carayol and A. W. Knapp, *Limits of discrete series with infinitesimal character zero*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 5611-5651.

[6] W. Casselman, GL_n, Algebraic number fields: L-functions and Galois properties. In: Algebraic number fields: L-functions and Galois properties. In: Proceedings of Symposium, University of Durham, Durham, 1975), pp. 663-704, Academic Press, London (1977).

[7] J-W. Cogdell, L-functions and non-abelian class fiels theory, from Artin to Langlands, Emil Artin and Beyond – Class Field Theory and L-functions (D. Dumbaugh and J. Schwermer, Eds.), EMS.

[8] P. Deligne and J-P. Serre, *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **7** (1974), 507–530.

[9] C. Deninger, L-functions of mixed motives, Proceedings of Symposia in Pure math Volume 55 (1994), Part 1, 517-525.

[10] S. Gelbart, three lectures on the modularity of $\overline{\rho}_{E,3}$ and the Langlands reciprocity conjecture, Modular Forms and Fermat ' s Last Theorem pp 155-207.

[11] A. Hori, Andrianov's L -functions associated to Siegel wave forms of degree two. Math. Ann. **303** (1995), 195–226.

[12] H. Jacquet, *Automorphic forms and automorphic representations*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, 1977, Part 1, 189–207.

[13] M. Kerr, *Cup products in automorphic cohomology: the case of* Sp_4, in Hodge Theory, Complex Geometry, and Representation Theory (Doran, Friedman, Nollet, Eds.), Contemp. Math. 608, AMS, Providence, 2014, 199-234.

[14] C. Khare and J-P. Wintenberger, *Serre's modularity conjecture I, II*, Invent. Math. **178** (2009), 485–504; 505–586.

[15] H. Kim and T. Yamauchi, A conditional construction of Artin representations for real analytic Siegel cusp forms of weight $(2, 1)$, Contemporary Mathematics Volume 664, 2016, http://dx.doi.org/10.1090/conm/664/13061

[16] H. Kim and T. Yamauchi, A uniform structure on subgroups of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ and its application to a conditional construction of Artin representations of GL_n,Journal of the Ramanujan Mathematical Society Volume 32, Issue 1, March 2017 pp. 75-99.

[17] H. Kim and T. Yamauchi, Cusp forms on the exceptional group of type E_7, Compositio math, Volume 152, Issue 2 February 2016 , pp. 223-254.

[18] H. Kim and T. Yamauchi, Ikeda type construction of cusp forms, 数理解析研究所講究録数理解析研究所講究録 1973, 162-178, 2015-11.

[19] H. Kim and T. Yamauchi, Higher level cusp forms on the exceptional group of type E_7, arXiv:1711.03785.

[20] M. Kisin, *Modularity of 2-adic Barsotti-Tate representations*, Invent. Math. **178** (2009), 587–634.

[21] R. Langlands, On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, mimeographed notes, Institute for Advanced Study, 1973; in P. J. Sally and D. A. Vogan (eds.), Representation Theory and Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups, Math. Surveys and Monographs, 31, American Mathematical Society, Providence, 1989, pp. 101-170.

[22] 今野拓也, GL_2 の保型形式と L 関数, 第 16 回整数論サマースクール報告集.

[23] N. Kurokawa, Siegel wave forms and Kronecker limit formula without absolute value, 数理解析研究所講究録 792 巻 1992 年 64-133.

[24] K. Martin, Four-dimensional Galois representations of solvable type and automorphic forms, thesis.

[25] T. Miyazaki and T. Oda, *Principal series Whittaker functions on $Sp(2, \mathbb{R})$. Explicit formulae of differential equations*, Automorphic forms and related topics (Seoul, 1993), 59–92.

[26] T. Moriyama, *L-functions for $GSp(2) \times GL(2)$; Archimedean Theory and Applications*, Can. J. Math. **61** (2009), 395–426.

[27] S. Niwa, On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2, Nagoya math. J, vol. 121 (1991), 171-184.

[28] 織田孝幸, 保型形式の数論のための実解析, 雑誌数学, 50 巻 (1998) 4 号 p. 350-357.

[29] R. Schmidt, *Lowest weight vectors in induced representations of* $GSp(4, \mathbb{R})$, Preprint.

[30] R. Schmidt, Packet structure and paramodular forms, Transactions of the American mathematical society, http://dx.doi.org/10.1090/tran/7028 Article electronically published on October 24, 2017

山内卓也
東北大学大学院 理学研究科
e-mail: yamauchi@math.tohoku.ac.jp

休眠乍の l 進コホモロジー的場の理論

若林泰央[1]（東京大学数理科学研究科）

Yasuhiro Wakabayashi (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概 要

休眠乍（dormant oper, do'per）とは, 正標数体上定義された代数曲線上の然るべき接続付き主束であり, 特別な場合は（代数的）解を最大限に多く持つ然るべき線型常微分方程式に対応するものである．本稿では, 論文 [23] にて展開された「休眠乍の数え上げ幾何学」に関連する話題を取り上げる．半単純代数群 G に対して, 点付き捻れ安定曲線上の「休眠忠実捻れ G 乍」なる概念を導入し, これらを分類することにより休眠 G 乍のモジュライをコンパクト化する．これは G が随伴型の場合を扱った先行研究の拡張といえる．このコンパクトモジュライ上の仮想基本類を用いたコホモロジー的場の理論（CohFT）の構成およびその帰結として得られる Witten 予想の類似を紹介する．

1　はじめに: 素敵♪な微分方程式

本稿は第 62 回 代数学シンポジウムで行った筆者自身による講演内容に基づき,「休眠乍の数え上げ幾何学」に関連する話題と諸結果について紹介したい．主には論文 [23] で論じた次の結果を紹介する:

1. 休眠乍を分類する（仮想基本類をもつ）コンパクトモジュライの構成;
2. 休眠乍によるコホモロジー的場の理論の構成;
3. Witten 予想の「休眠乍」類似.

ところで休眠乍とはいったい何だろうか. 休眠乍の定義に触れる前に, まずは関連する素朴な数学的対象について議論することから始めよう．X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された連結, 非特異, そして固有な代数曲線（あるいは連結かつコンパクトな Riemann 面）とし, K をその関数体とする．いま, 高々有限個の点で確定特異点を持つ X 上のモニックな n (> 1) 階斉次線型常微分方程式について考えよう:

$$Dy = 0, \qquad D := \frac{d^n}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + q_{n-1}\frac{d}{dx} + q_n. \tag{1}$$

ただし, 上記の D において $q_1, \cdots, q_n \in K$ であり, x は X の局所座標とする．常微分方程式の基礎理論が私たちに教えてくれることを思い出そう．それは, このような微分方程式 $Dy = 0$ の解は解析的位相に関して局所的に $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間をなす, ということである．「$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間をなす」ことだけなら確かめるのは容易い．実際, 解空間が加法で閉じていることは斉次性から従い, そして $\mathbb{C}$ によるスカラー乗法で閉じていることは微分作用素 $\frac{d}{dx}$ の核（あるいは普遍導分 d の核）が定数 $\mathbb{C}$ と一致することから従う．局所的に与えられる解たちは（もちろん）一般には解析的な関数によって表されるものであるから, 解が（然るべき意味で）代数的になるような事態は非常に特別である[2]．このような微分方程式は, 言い方を変えるならば, 代数解からなる部分ベクトル空間の次元が, とり得る最大の値, すなわち n となるようなものである．このように解が全て代数的な線型微分方程式に関する研究は 1870 年代に始まり, 多くの数学者達（H. A. Schwarz, L. I. Fuchs, P. Gordan, C. F. Klein, C. Jordan, et al.）によって進められてきた．この話題についてはここでは詳しく説明しない．私たちが本稿の導入にて本当に取り上げたい対象とは, このような微分方程式ではなく, その「**正標数類似物**」である.

ということで, まずは k を標数 $p > n$ の代数閉体とし, 前出の X を（$\mathbb{C}$ 上ではなく）k 上定義された連結, 非特異, そして固有な代数曲線に置き換えて再び (1) のような微分方程式 $Dy = 0$ を考えよう．X の種数を g (≥ 0) とし, $Dy = 0$ の確定特異点は $\sigma_1, \cdots, \sigma_r \in X(k)$ $(r \geq 0)$ の上にあるとす

[1]wkbysh@ms.u-tokyo.ac.jp

[2]代数学シンポジウムに集まるような私たちにとっては, もはやこのような微分方程式は「良い」,「素敵な」方程式であると言い切ってしまいたい!

る．このとき, $X^\star := (X, \{\sigma_i\}_{i=1}^r)$ を (g, r) 型の点付き代数曲線とみなし, この状況のもとで微分方程式 $Dy = 0$ は「$X^\star$ 上定義された微分方程式」と呼ぶことにする．ところで, $\mathbb{C}$ 上で考える微分方程式 $Dy = 0$ と正標数体上でのそれとの基本的な違いは何だろうか．それは, 正標数の場合の解空間は, 関数体 K の元の p 冪全体のなす部分体 K^p (結構デカい！) を係数とするベクトル空間として見るべきものである, ということであろう．というのも, $\frac{dx^p}{dx} = px^{p-1} = 0$ からも分かるように, K における普遍導分 $d : K \to \Omega_{K/k}$ の核は K^p であるために, 解空間は（k のみならず）K^p によるスカラー乗法で閉じているのである．解空間の次元は（K^p 上のベクトル空間として）やはり高々n 次元である．そこで, $X^\star$ 上定義された (1) のような n 階線型微分方程式のうち, 解空間の次元が n となるものを（簡単のため）「**素敵♪な微分方程式**」と呼ぶことにしよう（もちろんこれは本稿に限った不真面目な呼び方であることに注意されたい）．そう, 「素敵♪な微分方程式」とはまさに先ほどの話で触れた「代数解を最大限にもつ微分方程式」の正標数類似物である．このような微分方程式は滅多に存在しないことが想像されるが, （少なくとも筆者には）D がどのようなルックスをしているときに素敵♪なのか, そしてどれくらい素敵♪な微分方程式が存在するのか簡単には分からない．$\mathbb{C}$ 上の話しに比べるとこのような微分方程式に関する研究はあまり（というか全然）進展していないようである．ということで私たちの当座の目標として 「**（各代数曲線上の）素敵♪な微分方程式がどれくらいあるのかを明示的なかたちで答える**」ことを掲げることにしよう．以下では, $2g \quad 2 + r > 0$（かつ $n > 1$）の場合について考える．

2　超幾何微分方程式の場合

先行研究のなかで素敵♪な微分方程式の個数が明示的に計算されているケースは多くない．明示的に個数が求められている超幾何微分方程式の場合で得られている結果について紹介しよう．$\mathbb{P} := \mathrm{Proj}(k[s, t])$ を k 上の射影直線とする．k の 3 元 a, b, c によって定まる超幾何微分方程式とは次のような微分方程式であった:

$$D_{a,b,c}y = 0, \qquad D_{a,b,c} := \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{c}{x} + \frac{1 \quad c + a + b}{x \quad 1}\right)\frac{d}{dx} + \frac{ab}{x(x \quad 1)} \tag{2}$$

（ただし, $x := s/t$）．これは 3 点 $0, 1, \infty$ において確定特異点を持つので, $(0, 3)$ 型の点付き代数曲線 $\mathbb{P}^\star := (\mathbb{P}, \{0, 1, \infty\})$ 上の微分方程式と呼ぶべきものである．では, a, b, c がどのような組み合わせのときに $D_{a,b,c}y = 0$ が素敵♪になるだろうか．この問いに対する答えは Y. Ihara によって次のように与えられている（cf. [5], § 1.6）：

$$D_{a,b,c}y = 0 \text{ が素敵♪} \iff 「a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}」\text{かつ}「\widetilde{b} > \widetilde{c} > \widetilde{a} \text{ または } \widetilde{a} > \widetilde{c} > \widetilde{b}」. \tag{3}$$

ここで, $\widetilde{(\ )}$ は自然な商 $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を制限して得られる全単射 $\{1, \quad , p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の逆写像とする．もし $D_{a,b,c}y = 0$ が素敵♪ならば, 関数

$$y_{a,b,c}(x) := 1 + \frac{a \ \ b}{1 \ \ c}x + \frac{a \ \ (a+1) \ \ b \ \ (b+1)}{1 \ \ 2 \ \ c \ \ (c+1)}x^2 + \tag{4}$$

（ただし, 和は分子が 0 となる時点までとるものとする）および $x^{1-\widetilde{c}}y_{a-c+1,b-c+1,2-c}(x)$ からなる 2 元は解空間の基底となる．そして (3) から, **素敵♪な超幾何微分方程式はちょうど $\frac{p^3-p}{3}$ 個ある**ことが簡単に計算される．$(0, 3)$ 型の点付き代数曲線上の (1) で与えられるような微分方程式は（適切な変数変換により） 超幾何微分方程式で表されるため, $(g, r, n) = (0, 3, 2)$ の場合はこれにより既に理解されたといってよいだろう．

その他に知られている例として $(g, r, 2) = (2, 0, 2)$ の場合があるが, これは本質的に上の結果の言い換えにすぎない．古典的には（筆者の知る限りでは）この程度しか分かっていないのである[3]．はたして一般的な場合における素敵♪な微分方程式はいったいどれくらいあるのだろうか．

[3] 他にもまだ計算されていたら申し訳ありません m(_ _)m

3　素敵♪な微分方程式から休眠乍へ

より一般的な場合を扱うことために, ひとまず (1) のような微分方程式を接続付きの主束として書き換えよう. (1) で与えられるかたちの微分作用素 D は然るべきベクトル束上の

$$\nabla = \frac{d}{dx} \quad A, \qquad A = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & & q_{n-1} & q_n \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

と表される接続と対応する. 今しがた「対応する」と言ったが, これは次のような意味である: もし y が微分方程式 $Dy = 0$ の解であるとき ${}^t(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \quad , \frac{dy}{dx}, y)$ によって与えられるベクトル束の切断は ∇ に関して水平になり, 逆に任意の水平切断はこのようにして $Dy = 0$ の解から得られる. 特に, 私たちが今考えているような解を最大限に多く持つ（=「素敵♪な」）微分方程式は, 水平切断を最大限に多く持つ（つまり, 水平切断全体のなす部分層の階数が n になる）接続と対応する. 一方, ベクトル束上の接続の水平切断の多さは, その接続の「p **曲率**」によって測ることができる. p 曲率なる不変量についてはここでは詳しく述べない（正確な定義は [15], Proposition 1.2.1 などを参照されたい）が, 一言で言うと「接続 （=接束から下部ベクトル束（あるいは主束）に付随する随伴ベクトル束への射）に関する, p 冪構造の可換性への障害」として定義されるものである. 接続において, 「p 冪構造が可換」という非凡な対称性をもつ（=「p 曲率が零になる」）ことと, 水平切断を最大限にもつことが同値であることが（一見すると全く非自明な事実だが）よく知られている. 以上より, 微分方程式 $Dy = 0$ が素敵♪かどうかは, 対応する接続 ∇ の p 曲率によって判別できることが分かった:

$$\begin{aligned} Dy = 0 \text{ が素敵♪である（解を最大限に持つ）} &\iff \nabla \text{ が最大限に多くの水平切断を持つ} \\ &\iff \nabla \text{ の } p \text{ 曲率が零.} \end{aligned} \tag{6}$$

ちなみに上記の ∇ のように或る種の Gri ths 横断性をみたす接続を伴ったベクトル束（GL_n 主束）のことを「GL_n **乍**」と呼ぶ. より具体的に言うと, 接続の表現行列（つまり (5) における A）の対角成分より一段下のラインが全て可逆であり, そこから左下にある三角形内の成分は全て零となる（残りの成分は任意）ような接続を伴った GL_n 主束を GL_n 乍と呼んでいる. しかし実際は, 上三角行列によるゲージ変換により, 任意の GL_n 乍は (5) のかたち（つまり上三角においても一番上の行を除いて零となる）をした GL_n 乍として表される. 結局のところ, GL_n 乍とはまさに (1) のかたちをした微分方程式と対応する接続付き GL_n 主束に他ならない. 技術的な理由により, 以下では GL_n 乍ではなく, GL_n 乍から誘導される接続付き PGL_n 主束 $\mathcal{E}^{\spadesuit} := (\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}})$ として定義される「PGL_n **乍**」を扱うことにする[4].

休眠乍とはいったい何だろうか, と冒頭に問いかけた. 構造群が PGL_n となる場合の定義には（一応）辿り着いたことになる. **休眠 PGL_n 乍とは, PGL_n 乍 $\mathcal{E}^{\spadesuit} := (\mathcal{E}, \nabla_{\mathcal{E}})$ であり, 接続 $\nabla_{\mathcal{E}}$ の p 曲率が零になるものとして定義される正標数固有の対象である**. 素敵♪な微分方程式なる素朴かつ素敵な対象について理解することは休眠 PGL_n 乍について理解することであると言ってしまっても（今までの議論から）差し支えないだろう. 特に私たちが掲げた目標は次のように（より広範な射程をもって）言い換えられる:

（各代数曲線上の）休眠乍がどれくらいあるのかを明示的なかたちで答える.　(7)

[4] GL_n 乍ではなく PGL_n 乍を扱う理由は主に次の二つからなる: 1.（休眠）GL_n 乍は自己同型を多くもつため, そのような対象を分類するモジュライを「扱いやすい空間」として表現することが出来ない. 2. 各 $X^{\star}$ 上の休眠 GL_n 乍は無限個存在してしまうため, 数え上げ問題を考えるうえで適切な対象ではない. 「休眠 PGL_n 乍の数え上げ」はまさに「休眠 GL_n 乍のモジュライの連結成分の数え上げ」に対応しており, 各連結成分の素性は簡単に把握できるものである. したがって「休眠 PGL_n 乍の数え上げ」のほうを考えるだけでも, 素敵♪な微分方程式を知りたいという動機を見失うことは無い.

例えば先ほどの超幾何微分方程式の場合について振り返ってみよう．(2) のような素敵♪な超幾何微分方程式 $D_{a,b,c}y = 0$ から誘導される $\mathbb{P}^\star$ 上の休眠 PGL_2 乍を $\mathcal{E}^\spadesuit_{a,b,c}$ と表記することにする．超幾何微分方程式の特性指数を比較することにより，2 つの休眠 PGL_n 乍 $\mathcal{E}^\spadesuit_{a,b,c}$, $\mathcal{E}^\spadesuit_{a',b',c'}$ が同型であるためには，次の条件をみたすことが必要十分であることが簡単に確かめられる:

$$(1 \quad c)^2 = (1 \quad c')^2, \qquad (c \quad a \quad b)^2 = (c' \quad a' \quad b')^2, \qquad (b \quad a)^2 = (b' \quad a')^2. \tag{8}$$

特に，$D_{a,b,c} \mapsto \mathcal{E}^\spadesuit_{a,b,c}$ は素敵♪な超幾何微分方程式の集合から $\mathbb{P}^\star$ 上の休眠 PGL_2 乍の（同型類全体のなす）集合への 2^3 対 1 対応を与える．したがって前述の計算から，$(0,3)$ **型の点付き代数曲線上の休眠 PGL_2 乍の同型類集合はちょうど** $\frac{1}{2^3}\ \frac{p^3-p}{3} = \frac{p^3-p}{24}$ **個ある**ことが分かる．実はこの $(g,r,n) = (0,3,2)$（同値なことだが $(g,r,n) = (2,0,2)$ の場合も）に対する明示的計算は数学者達により様々な視点と方法によって与えられている (cf. [14], Chap. V, § 3.2, Corollary 3.7; [11], Theorem 2; [17], Theorem 1.2)．様々な視点と方法が可能なこと自体が休眠乍に多様な側面が備わっていることへの傍証であり，関連する他の対象の研究とともに相互的発展を期待せずにはいられない．兎にも角にも特別な場合の「休眠乍の数え上げ」が分かった以上，もっと一般的な状況はどうなっているのか知りたくてたまらなくなるだろう[5].

補足 1. この和文記事において「乍（き）」と呼んでいるものは，*A. Beilinson-V. Drinfeld*（*cf. [1], Definition 3.1.3*）により *"oper"* との呼び名で導入された概念を指している[6]．$\mathbb{C}$ 上定義された代数曲線上の乍は，可積分系やループ群の表現論において中心的な対象として登場する．それらは一般化 *KdV* 階層の状態空間を構成するものとして *[2]* で扱われた接続であり，*[1]* においては幾何的ラングランズ問題の文脈において（座標に依存しない記述のもと）導入された．先に議論したように，乍は（G が然るべき場合においては）或る種の直線束間の微分作用素と対応することがその名 *"oper"* の由来となっているようである．とはいえ，例えば PGL_2 乍などは *R. C. Gunning* より *[3]* において扱われた（*Riemann* 面上の）「射影構造」もしくは「固有束」なる概念に他ならない．このように乍はその名が与えられるより以前から既に常に存在していた基本的実存であり，歴史の長さゆえに多面的な表情を持っている．

一方，正標数の乍を扱う私たちの議論は，*S. Mochizuki* により基礎付けられた p 進 *Teichmüller* 理論に端を発する文脈に沿っているといえるだろう．誤解を恐れず述べるならば，p 進 *Teichmüller* 理論とは正標数体上定義された双曲的代数曲線の「然るべき PGL_2 乍（＝固有束）を用いた」p 進持ち上げに関する理論である．他の文脈においても近年注目されつつあるが，それらの眼目はいずれにせよ，「（乍を定義する）接続の p 曲率の研究」に集約される．後ほど紹介するが，点付き安定曲線上の休眠 PGL_2 乍（＝休眠固有束）やそのコンパクトモジュライの構成は p 進 *Teichmüller* 理論の研究なかで行われた．

補足 2. 上の補足 *1* で一言触れたので，少しだけ「射影構造」について説明しておこう．Σ を向き付け可能で連結な種数 $g > 1$ の位相的閉曲面とする．Σ の射影構造とは，Σ の座標近傍系 $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha \subseteq \Sigma, \varphi_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow \mathbb{C})\}_\alpha$ であり，その座標変換が「一次分数変換」で表されるものの（然るべき自然な同値関係による）同値類 $[\mathfrak{U}]$ である．Σ 上の射影構造 $[\mathfrak{U}]$ のうち誘導する複素構造が種数 g のコンパクト *Riemann* 面 X と同型になるとき，$[\mathfrak{U}]$ は X **上の射影構造**であると呼ぶことにしよう．X 上の射影構造 $[\mathfrak{U}]$ が一つ与えられたとき，$\mathfrak{U}$ を構成している座標変換関数は X の基本群の PGL_2 表現を定める．（*Riemann-Hilbert* 対応を介して）この表現に対応する X 上の接続付き PGL_2 主束がまさに PGL_2 乍となる．この構成により，X 上の射影構造全体の集合と X 上の PGL_2 乍の同型類全体の集合との間の一対一対応が得られる．

[5] あくまで個人的な感想です．

[6] "oper" は "operator（＝作用素）" に因んでいる（operator の語根）ため，対応する漢字「作」の初文としての「乍」を oper の和名とすることにした．

4　コンパクトモジュライの構成

以上の流れから,（代数的）解を多く持つ微分方程式に対する興味から休眠乍の数え上げ問題へと議論が繋がった（繋げたつもりである）.「休眠乍の数え上げ幾何学」を展開するうえで欠かせない登場人物こそ「休眠乍のモジュライ」に他ならない. 固定した代数曲線上の休眠乍を分類するモジュライを考える（一般的な）文脈と異なり, p 進 Teichmüller 理論（補足 1 を参照のこと）のそれにおいては「代数曲線とその上の休眠乍の組を分類するモジュライ」を取り扱う. 下部代数曲線の変形や退化にしたがって休眠乍がどのように振る舞うのかを理解することが重要だからである. 特にその観点（および後ほど紹介するコホモロジー的場の理論を構成する点においても）から, 休眠乍を分類するモジュライを適切かつ自然にコンパクト化する必要に私たちは迫られる. 半単純代数群 G が随伴型の場合については, 既に [21] のなかでコンパクトモジュライの構成およびそのモジュライに関する様々な研究がなされた. $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ を (g,r) 型の点付き安定曲線を分類するモジュライスタックとする（良く知られているように, $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ は連結, 非特異, そして固有な k 上の Deligne-Mumford スタックにより表現される）と, 当該モジュライは $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上の有限スタックとして表現される. これは点付き安定曲線が自然に備えている対数構造 (これにより下部代数曲線が非特異な場合においても対数的な意味で非特異 (log smooth) な対象と見做すことができる) を用いて乍の概念を対数幾何的対象へと一般化し, それらを分類することにより構成される. ところが G が随伴型でない場合は, そのような構成ではモジュライは適切にコンパクト化されない. このような困難を解消するために [23] のなかで「**点付き捻れ安定曲線上の休眠忠実捻れ G 乍**」なる対象を導入し, それらを分類するモジュライを考えた. まずはじめに「点付き捻れ安定曲線」について復習したい（正確な定義および関連する議論については [23] を参照されたい）.

定義 3. （k 上の）**（平衡）捻れ曲線**（**(balanced) twisted curve**）とは, 高々結節点のみを特異点として持つ連結, 従順（*tame*）, そして k 上固有な 1 次元 *Deligne-Mumford* スタック $\mathfrak{X}$ であり, 次の条件をみたすものである*:*

- $|\mathfrak{X}|^{\mathrm{sm}}$ を $\mathfrak{X}$ の粗モジュライ $|\mathfrak{X}|$ のなかの非特異部分からなる開部分概型とするとき, $\mathfrak{X} \quad _{|\mathfrak{X}|} |\mathfrak{X}|^{\mathrm{sm}}$ *(*$\subseteq \mathfrak{X}$*)* は $\mathfrak{X}$ の非特異部分と一致する*.*
- 自然な射影 $coa_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \to |\mathfrak{X}|$ は $|\mathfrak{X}|$ の或る稠密な開部分スタック上で同型となる*.*
- $\overline{x}$ を $|\mathfrak{X}|$ にある結節点の一つとする. このとき, $\overline{x}$ の任意のエタール近傍 $\mathrm{Spec}(A) \to |\mathfrak{X}|$ と任意のエタール射

$$\eta : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k[s_0, t_0]/(s_0t_0 \quad u_0)) \tag{9}$$

（ただし, $u_0 \in k$）に対して[7], 引き戻し $\mathfrak{X} \quad _{|\mathfrak{X}|} \mathrm{Spec}(A)$ は以下のような商スタックと同型となる*:*

$$[\mathrm{Spec}(A[s_1, t_1]/(s_1t_1 \quad u_1, s_1^l \quad \eta^*(s_0), t_1^l \quad \eta^*(t_0)))/\mu_l], \tag{10}$$

ただし, u_1 は k の元, l は k において可逆な正整数, μ_l は 1 の l 冪根からなる群であり, μ_l の作用は $(s_1, t_1) \mapsto (\zeta s_1, \zeta^{-1} t_1)$ *(*$\forall \zeta \in \mu_l$*)* によって与えられる*.*

定義 4. （k 上の）(g,r) **型の点付き捻れ安定曲線**とは次のようなデータである：

$$\mathfrak{X}^{\bigstar} := (\mathfrak{X}, \{\sigma_{\mathfrak{X},i} : \mathfrak{S}_i \to \mathfrak{X}\}_{i=1}^{r}), \tag{11}$$

ただし,

- $\mathfrak{X}$ は（k 上の）捻れ曲線であり, 粗モジュライ $|\mathfrak{X}|$ によって与えられる固有代数曲線の種数が g となるもの,

[7] このようなエタール近傍とエタール射の組は各 $\overline{x}$ に対して少なくとも一つ（したがって沢山）存在する.

- $\sigma_{\mathfrak{X},i} : \mathfrak{S}_i \to \mathfrak{X}$ $(i \in I)$ は互いに交わらない $\mathfrak{X}$ の閉部分スタック,

であり, 次の条件をみたす:

- 各 $\mathrm{Im}(\sigma_{\mathfrak{X},i})$ は $\mathfrak{X}$ の非特異部分に含まれる;
- 各 $\mathfrak{S}_i$ は k 上エタールなジャーブ（*gerbe*）;
- $\mathfrak{X}^{\mathrm{gen}}$ を $\mathfrak{X}$ の非特異部分から $\mathrm{Im}(\sigma_{\mathfrak{X},i})$ $(i = 1, \quad , r)$ の和を取り除いて得られる $\mathfrak{X}$ の開部分スタックとすると, この $\mathfrak{X}^{\mathrm{gen}}$ は概型により表現される.

点付き捻れ安定曲線 $\mathfrak{X}^\bigstar := (\mathfrak{X}, \{\sigma_{\mathfrak{X},i}\}_i)$ が与えられたとき, X およびその下にある $\mathrm{Spec}(k)$ には（捻れてない場合と同様に）自然な対数構造が入り, 結果として得られる対数スタック $X^{\log}$ は対数的な意味で $\mathrm{Spec}(k)^{\log}$ 上非特異なスタック的曲線となる.

次にこのように導入した点付き捻れ安定曲線の上で定義される（忠実）捻れ乍を定義しよう. そのためにいくつか準備をしなければならない. G を k 上定義された連結な半単純代数群とし, T を G の極大トーラス, B を T を含む G の Borel 部分群とする. $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$ をそれぞれ T, B, G の Lie 環とし, T の各指標 $\beta : T \to \mathbb{G}_m$ に対して

$$\mathfrak{g}^\beta := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; {}^\forall t \in T,\, \mathrm{ad}(t)(x) = \beta(t) \quad x \right\} \tag{12}$$

とおこう. Γ を B 内の T に対する単純ルート全てからなる集合とすると, $\mathfrak{g}$ には次の 2 条件を満たすような一意的な降下フィルトレーション $\{\mathfrak{g}^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が定まる：

- $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{g}^0/\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{g}^{-1}/\mathfrak{g}^0 = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathfrak{g}^{-\alpha}$;
- 任意の $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ に対して $[\mathfrak{g}^{j_1}, \mathfrak{g}^{j_2}] \subseteq \mathfrak{g}^{j_1+j_2}$.

G の階数が p に対して十分大きいときには様々な不都合に直面してしまう. そのような事態を避けるためにも, 以下のような条件 $(*)_{G,p}$, $(**)_{G,p}$ を考え, それらを適宜課す必要がある.

$(*)_{G,p}$: h を G の Coxeter 数とするとき, 不等式 $p > 2h$ が成り立つ;

$(**)_{G,p}$: G は A_n $(2n < p \quad 2)$, B_l $(4l < p)$, もしくは C_m $(4m < p)$ 型古典群と同型.

($(**)_{G,p}$ は $(*)_{G,p}$ より強い条件であることに注意されたい.) 差し当たって以下の議論では, 条件 $(*)_{G,p}$ を仮定しよう.

さて, $\mathfrak{X}^\bigstar := (\mathfrak{X}, \{\sigma_{\mathfrak{X},i}\}_{i=1}^r)$ を (g, r) 型の点付き捻れ安定曲線とし, $\pi_B : \mathcal{E}_B \to \mathfrak{X}$ を $\mathfrak{X}$ 上の B 主束とする. 自然な埋め込み $B \to G$ による構造群の変換を施すことにより, $\mathcal{E}_B$ から G 主束 $\pi_G : \mathcal{E}_G \ (:= \mathcal{E}_B \quad {}^B G) \to \mathfrak{X}$ を得る. $\mathfrak{X}^{\log}$ 上の対数構造を π_B, π_G を通して引き戻すことにより $\mathcal{E}_B$, $\mathcal{E}_G$ にそれぞれ対数構造を入れる（結果として得られる対数スタックをそれぞれ $\mathcal{E}_B^{\log}$, $\mathcal{E}_G^{\log}$ とおく）. 順像 $\pi_{G*}(\mathcal{T}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}})$ の G 不変な切断からなる $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 加群 $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} := \pi_{G*}(\mathcal{T}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}})^G$ にはフィルトレーション $\{\mathfrak{g}^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ から誘導される降下フィルトレーション $\{\widetilde{\mathcal{T}}^j_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}\}_{j\leq -1}$ が自然に定まるが. このとき $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 商加群 $\widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}/\widetilde{\mathcal{T}}^{0}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}$ は $\mathfrak{g}^{-1}/\mathfrak{g}^0 = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ にしたがって直線束の有限直和へと分解する:

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}/\widetilde{\mathcal{T}}^{0}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathfrak{g}_{\mathcal{E}}^{-\alpha}. \tag{13}$$

また, $\nabla_{\mathcal{E}}$ を $\mathcal{E}_G$ 上の対数的接続とする. つまり $\nabla_{\mathcal{E}}$ は, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 線型射 $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\log}/k^{\log}} \to \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}$ のうち, π_G を微分して得られる射影 $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} \twoheadrightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\log}/k^{\log}}$ との合成が $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\log}/k^{\log}}$ 上の恒等写像になるものである.

定義 5. *(i)* $\mathfrak{X}^\bigstar$ 上の**捻れ** G **乍**は上のような組 $\mathcal{E}^\spadesuit = (\mathcal{E}_B, \nabla_{\mathcal{E}})$ のうち, 次の条件をみたすものである:

- $\nabla_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\log}/k^{\log}}) \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}}$,
- 各 $\alpha \in \Gamma$ に対して, 次の合成射は同型である:

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\log}/S^{\log}} \xrightarrow{\nabla_{\mathcal{E}}} \widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_G^{\log}/k^{\log}} / \widetilde{\mathcal{T}}^{0}_{\mathcal{E}_G^{\log}/S^{\log}} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{E}}^{-\alpha}, \tag{14}$$

ただし, 最後の射は直和分解 *(13)* により得られる射影である.

(ii) 捻れ G ㄔ $\mathcal{E}^{\spadesuit} := (\mathcal{E}_B, \nabla_{\mathcal{E}})$ が**忠実**であるとは, T 主束 $\mathcal{E}_B \quad {}^B T$ の分類射 $X \to \mathcal{B}T$（ただし, $\mathcal{B}T$ は T の分類スタックとする）が表現可能であるときをいう.

(iii) **休眠忠実捻れ** G **ㄔ**とは忠実捻れ G ㄔ $\mathcal{E}^{\spadesuit} := (\mathcal{E}_B, \nabla_{\mathcal{E}})$ であり, $\nabla_{\mathcal{E}}$ の p 曲率が零となるものである.

上によって定義した点付き捻れ安定曲線上の休眠忠実捻れ G ㄔこそが私たちが扱いたい基本的対象である. 簡単に確かめられるように, G が随伴型のときは忠実捻れ G ㄔの下に敷かれた点付き捻れ安定曲線は（忠実性により）実際は（捻れてない）点付き安定曲線であり, つまるところ忠実捻れ G ㄔなる概念は古典的な G ㄔと変わるところがない.

さてここで,

$$\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r} \tag{15}$$

を (g, r) 型の点付き捻れ安定曲線 $\mathfrak{X}^{\star} := (\mathfrak{X}, \{\sigma_{\mathfrak{X},i}\}_{i=1}^{r})$ とその上の休眠忠実捻れ G ㄔ $\mathcal{E}^{\spadesuit}$ の組 $(\mathfrak{X}^{\star}, \mathcal{E}^{\spadesuit})$ を分類する 2 圏[8]とする. 各 $(\mathfrak{X}^{\star}, \mathcal{E}^{\spadesuit})$ に対して $\mathfrak{X}^{\star}$ の粗モジュライを割り当てることにより射 $\pi_{g,r} : \mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ が定まる. [23] で証明した主定理のひとつは次の主張である:

定理 6 (cf. [23], Theorem A)**.** *(i)* $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ は仮想次元 $3g \quad 3 + r$ の完全障害理論を持つ（特に, 仮想基本類 $[\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}]^{\mathrm{vir}}$ を持つ）空でない k 上固有な *Deligne-Mumford* スタックで表現される. また, 射影 $\pi_{g,r} : \mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ は有限射となり, この射のそれへの制限が支配的になるような $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ の既約成分が少なくとも一つ存在する.

(ii) さらに条件 $(**)_{G,p}$ を仮定する. このとき, $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ は $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上生成的エタールとなる（つまり, $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ への射影が支配的になる $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ の任意の既約成分は, その上で $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上エタールになるような稠密な開部分スタックが存在する）.

したがってこの結果により, 休眠 G ㄔのモジュライの標準的といえるコンパクト化を得た. 繰り返すが, G が随伴型の場合はこのコンパクトモジュライは既に先行研究で得られているものと一致する (cf. [21], Theorem C). 特に $G = \mathrm{PGL}_2$ の場合はさらに強い結果として, $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ が非特異（かつ連結）であることが S. Mochizuki によって示されている. 一般の場合にそのような強い結果が成り立つのかまだ分かっていないが, 個人的にはあまり期待していない. しかし, （その替わりというべきものとして）$\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ の仮想基本類 $[\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}]^{\mathrm{vir}}$ によって或る程度は適切に $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ 上で交叉理論を展開できる. 仮想基本類は Gromov-Witten 不変量や Donaldson-Thomas 不変量といった変形不変量の構成において重要な役割を持ち, このような数え上げ幾何においては重要な役割を担っていることは言うまでもないだろう. 以下では, この仮想基本類 $[\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}]^{\mathrm{vir}}$ を用いてコホモロジー的場の理論を構成しよう.

5　コホモロジー的場の理論と休眠ㄔの数え上げ

コホモロジー的場の理論（以下, CohFT）は M. Kontsevich と Y. Manin によって導入された概念 (cf. [9]) であり, 与えられたターゲット空間の Gromov-Witten 類がみたす分解性質を公理化したもの

[8]実際は, この 2 圏は圏と同値になる.

である. 実際は Gromov-Witten 理論に由来するものだけではなく, Witten r スピン類や Fan-Jarvis-Ruan-Witten (FJRW) 理論に由来するものなどがある. いずれの場合も $\mathbb{C}$ 上定義された代数曲線のモジュライに対する $\mathbb{C}$ 係数コホモロジー群によって与えられるが, ここでは $\overline{\mathbb{Q}}_l$ (=$\mathbb{Q}_l$ の代数閉包, l は p とは異なる素数) を係数とする（k 上の）$\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ に対する l 進エタールコホモロジー群

$$\widetilde{H}^*_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l(\lfloor \tfrac{i}{2} \rfloor)) \tag{16}$$

に値を持つコホモロジー的場の理論を導入しよう. Φ_{tree}, Φ_{loop}, Φ_{tail} はそれぞれ以下のような, 点付き代数曲線を標点に沿って張り合わせる操作によって定まる（いわゆる “clutching morphism” と呼ばれる）射とする:

$$\Phi_{\text{tree}} : \overline{\mathfrak{M}}_{g_1,r_1+1} \quad {}_k\, \overline{\mathfrak{M}}_{g_2,r_2+1} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g_1+g_2,r_1+r_2}, \tag{17}$$

$$\Phi_{\text{loop}} : \overline{\mathfrak{M}}_{g_3,r_3+2} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g_3+1,r_3}, \tag{18}$$

$$\Phi_{\text{tail}} : \overline{\mathfrak{M}}_{g_4,r_4+1} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g_4,r_4} \tag{19}$$

（ただし, $g_1, \quad , g_4, r_1, \quad , r_4$ はそれぞれ非負整数であり, $2g_i \quad 1 + r_i > 0$ $(i = 1, 2)$, $2g_3 + r_3 > 0$, および $2g_4 \quad 2 + r_4 > 0$ をみたす）.

定義 7. **（l 進）コホモロジー的場の理論（CohFT）**とは, 次のようなデータのこととする*:*

$$\Lambda := (\mathcal{H}, \eta, \mathbf{1}, \{\Lambda_{g,r}\}_{g,r\geq 0, 2g-2+r>0}), \tag{20}$$

ただし,

- $\mathcal{H}$ は $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 上の有限次元ベクトル空間（$\mathfrak{e} := \{e_1, \quad , e_{\dim(\mathcal{H})}\}$ を基底とする）*;*
- η は非退化対称ペアリング $\mathcal{H} \quad \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$（$\eta$ を基底 $\mathfrak{e}$ に関して行列表示したものの逆行列を $(\eta^{e_a e_b})_{a,b}$ とする）*;*
- $\mathbf{1}$ は $\mathcal{H}$ の元*,*
- 各 g, r に対して $\Lambda_{g,r}$ は $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 線型射 $\mathcal{H}^{\otimes r} \to \widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$（$\mathcal{H}^{\otimes 0} := \overline{\mathbb{Q}}_l$）*,*

であり, 次の性質を満たす[9]*:*

- 各 $\Lambda_{g,r}$ は $\mathcal{H}^{\otimes r}$ および $\widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ 上にそれぞれ与えられる r 次対称群 $\mathfrak{S}_r$ の自然な作用[10]と可換である*;*
- 任意の v_1, $v_2 \in \mathcal{H}$ に対して, 次の等式が成り立つ*:*

$$\eta(v_1, v_2) = \int_{[\overline{\mathfrak{M}}_{0,3}]} \Lambda_{0,3}(v_1 \otimes v_2 \otimes \mathbf{1}). \tag{21}$$

- 任意の $v_1, \quad , v_{r_1+r_2} \in \mathcal{H}$ に対して次の等式が成り立つ*:*

$$\begin{aligned} &\Phi^*_{\text{tree}}(\Lambda_{g_1+g_2,r_1+r_2}(v_1 \otimes \quad \otimes v_{r_1+r_2})) \\ &= \sum_{e_1,e_2\in\mathfrak{e}} \Lambda_{g_1,r_1+1}(v_1 \otimes \quad \otimes v_{r_1} \otimes e_1)\eta^{e_1 e_2} \otimes \Lambda_{g_2,r_2+1}(e_2 \otimes v_{r_1+1} \otimes \quad \otimes v_{r_1+r_2}), \end{aligned} \tag{22}$$

ただし, Φ^*_{tree} は Φ_{tree} から誘導される以下のような射

$$\widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_1+g_2,r_1+r_2}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to \widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_1,r_1+1}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_2,r_2+1}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \tag{23}$$

とする.

[9] これらの性質は実際は基底 $\mathfrak{e}$ の取り方に依らない.

[10] $\mathcal{H}^{\otimes r}$ への作用は各テンソル積成分の置換, $\widetilde{H}^*_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ に関しては $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上の普遍代数曲線が持つ r 個の標点の置換により誘導される作用のことを指している.

- 任意の $v_1, \quad , v_{r_3} \in \mathcal{H}$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\Phi^*_{\mathrm{loop}}(\Lambda_{g_3+1,r_3}(v_1 \otimes \quad \otimes v_{r_3})) = \sum_{e_1,e_2 \in \mathfrak{e}} \Lambda_{g_3,r_3+1}(v_1 \otimes \quad \otimes v_{r_3} \otimes e_1 \otimes e_2)\eta^{e_1e_2}, \tag{24}$$

ただし, Φ^*_{loop} は Φ_{loop} から誘導される射 $\widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_3+1,r_3}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to \widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_3,r_3+2}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ とする.

- 任意の $v_1, \quad , v_{r_4} \in \mathcal{H}$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\Phi^*_{\mathrm{tail}}(\Lambda_{g_4,r_4}(v_1 \otimes \quad \otimes v_{r_4})) = \Lambda_{g_4,r_4+1}(v_1 \otimes \quad \otimes v_{r_4} \otimes \mathbf{1}), \tag{25}$$

ただし, Φ^*_{tail} は Φ_{tail} から誘導される射 $\widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_4,r_4}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to \widetilde{H}^*_{\acute{e}t}(\overline{\mathfrak{M}}_{g_4,r_4+1}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ とする.

それでは次に休眠乍の CohFT を定義しよう. $\mathfrak{t}$ のなかの Frobenius 不変な正則元からなる有限閉部分スキームを $\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}$ とする. W を (G,T) の Weyl 群とすると, $\mathfrak{t}$ の自然な W 作用を制限することにより $\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}$ への W 作用が定まる. 結果として得られる商スキーム $\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W$ を G の中心 Z による自明作用で割った商スタックを $[(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z]$ としよう. さらに, $\overline{\mathcal{I}}_\mu([(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z])$ を $[(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z]$ における円分ジャーブのスタック (stack of cyclotomic gerbes) とする. これは Z の分類スタック $\mathcal{B}Z$ の有限直和であることが分かる. つまり, 直和の添え字集合を Δ_G として, 次のように表される:

$$\overline{\mathcal{I}}_\mu([(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z]) = \coprod_{\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G} \mathcal{B}Z_{\boldsymbol{\rho}} \tag{26}$$

(ただし, $\mathcal{B}Z_{\boldsymbol{\rho}} := \mathcal{B}Z$). この添え字集合 Δ_G には特別な元があり, これを $\boldsymbol{\varepsilon}$ と書くことにする. 各休眠忠実捻れ G 乍 $\mathcal{E}^\spadesuit := (\mathcal{E}_B, \nabla_{\mathcal{E}})$ と下部捻れ安定曲線の標点 σ_i ($i \in \{1, \quad , r\}$) に対して, $\mathcal{E}^\spadesuit$ の σ_i 上のファイバーから（然るべき方法により）決まる境界不変量 $\boldsymbol{\rho}_i \in \Delta_G$ を, $\mathcal{E}^\spadesuit$ の σ_i での**半径**として定義する. これは例えば $\mathbb{C}$ 上の $G = \mathrm{PGL}_2$（つまり古典的な Teichmüller 理論に対応する）の場合, 今しがた定義した半径とはまさに（PGL_2 乍から誘導される Riemann 面上の距離構造による）標点の周りの（通常の意味での）半径と対応すべきものになっている. 半径を与える割り当て $\mathcal{E}^\spadesuit \mapsto \rho_i^{\mathcal{E}^\spadesuit}$ は, より精密には以下の図式にあるような（つまり幾何的なレベルで与えられる）射 ev_i から誘導されるものである:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r} & \xrightarrow{\pi_{g,r}} & \overline{\mathfrak{M}}_{g,r} \\ {\scriptstyle ev_i}\downarrow & & \\ \overline{\mathcal{I}}_\mu([(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z]). & & \end{array} \tag{27}$$

次に, $\overline{\mathcal{I}}_\mu([(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z])$ の l 進エタールコホモロジー群を考えよう:

$$\mathcal{V} := \widetilde{H}^*_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{\mathcal{I}}_\mu([(\mathfrak{t}^F_{\mathrm{reg}}/W)/Z]), \overline{\mathbb{Q}}_l). \tag{28}$$

$\mathcal{V}$ は直和分解 (26) にしたがって直和分解する: $\mathcal{V} = \bigoplus_{\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G} \overline{\mathbb{Q}}_l e_{\boldsymbol{\rho}}$. ここで, 各 $\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G$ に対する $e_{\boldsymbol{\rho}}$ は直和因子における $1 \in \widetilde{H}^*_{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathcal{B}Z_{\boldsymbol{\rho}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ とする. また, $2g \quad 2 + r > 0$ をみたす非負整数の組 (g, r) に対して, $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 線型射 $\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}$ を次のように定義する:

$$\begin{array}{rccl} \Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}: & \mathcal{V}^{\otimes r} & \to & \widetilde{H}^*_{\mathrm{\acute{e}t}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \\ & \cup & & \cup \\ & \displaystyle\bigotimes_{i=1}^r v_i & \mapsto & \left(\pi^{\mathrm{hom}}_{g,r*}\left(\left(\displaystyle\prod_{i=1}^r ev_i^*(v_i)\right) \cap cl([\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}]^{\mathrm{vir}})\right)\right)^\blacklozenge \end{array} \tag{29}$$

ただし,

- $\pi^{\mathrm{hom}}_{g,r*}$ は射影 $\pi_{g,r}$ に誘導される順像射 $\widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_*(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \to \widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_*(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ を表す ($\widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_*(\quad, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ は Borel-Moore ホモロジー群 $\bigoplus_{i=0}^\infty \widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_i(\quad, \overline{\mathbb{Q}}_l)(\quad \lceil \frac{i}{2} \rceil)$ を表す) ;

- cl はサイクル射 $A_*(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz}\ldots}_{G,g,r})_{\mathbb{Q}} \to \widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_{2*}(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz}\ldots}_{G,g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$（$A_*(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz}\ldots}_{G,g,r})_{\mathbb{Q}}$ は $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz}\ldots}_{G,g,r}$ の有理 Chow 群）を表す;
- $(\quad)^{\blacklozenge}$ は Poincaré 双対同型 $\widetilde{H}^{\mathrm{BM}}_{*}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^{6g-6+2r-*}_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ を表す.

また, $\eta : \mathcal{V} \quad \mathcal{V} \to \overline{\mathbb{Q}}_l$ を「$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2^{\vee} \in \Delta_G$ のとき $\eta(e_{\boldsymbol{\rho}_1}, e_{\boldsymbol{\rho}_2}) = \frac{1}{\sharp(Z)}$, $\boldsymbol{\rho}_1 \neq \boldsymbol{\rho}_2^{\vee}$ のとき $\eta(e_{\boldsymbol{\rho}_1}, e_{\boldsymbol{\rho}_2}) = 0$」によって定まる $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 双線型ペアリングとする. このとき, 次の定理が成り立つ:

定理 8 (cf. [23], Theorem B)**.** 条件 $(**)_{G,p}$ を仮定する. このとき, 次のデータはコホモロジー的場の理論となる*:*

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G} := (\mathcal{V}, \eta, e_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \{\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}\}_{g,r \geq 0, 2g-2+r>0}) \tag{30}$$

また, 付随して得られる *Frobenius* 代数 $(\mathcal{V}, \eta)$ は半単純になる.

このように（本質的に）正標数固有の対象による CohFT の例は, 少なくとも筆者が知る限りではこれが初めてである. しかしながら, 下記の定理 9 (i), (ii) からも分かるように, $\mathbb{C}$ 上の対象に由来する他の CohFT との関連性が見出されるのも興味深い. 他の CohFT と比較することにより様々な G における休眠 G $\Game$の CohFT や付随する Frobenius 代数の構造などの理解が期待される. 例えば, SL_2 Wess-Zumino-Witten 模型のフージョン環の結合係数と比較することにより, 休眠 PGL_2 $\Game$における Frobenius 代数の環構造を具体的に理解することが出来る（補足 10 を参照のこと）.

ところで, この CohFT が指し示す量 $\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\boldsymbol{\rho}_i})$ にははたしてどんな意味があるのだろうか. 実はこれらの値は全て $\widetilde{H}^0_{\text{ét}}(\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ に収まることが分かる（このようなデータは「2 次元位相的量子場の理論」と見做すことができる）. さらに, $X^{\bigstar}$ を (g,r) 型の一般的な点付き（非特異）代数曲線とするとき, 各 $(\boldsymbol{\rho}_i)_{i=1}^r \in \Delta_G^{\times r}$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\boldsymbol{\rho}_i}) = \frac{1}{\sharp(Z)} \quad \sharp\big\{X^{\bigstar} \text{ 上の半径 } (\boldsymbol{\rho}_i)_{i=1}^r \text{ の休眠 } G \text{ $\Game$の同型類}\big\}. \tag{31}$$

したがって, 目標として掲げた (7) を達成するため, つまり休眠$\Game$の個数を具体的に求めるためには, この左辺の（一見するとよくわからないような）不変量を求めればよいことになる. そしてこれは CohFT のもつ分解性質を適用することにより, 小さい (g,r)（特に $(g,r) = (0,3)$）に対する休眠$\Game$の個数（あるいは量 $\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\boldsymbol{\rho}_i})$）を調べることに帰着される. CohFT とはまさにこのような数え上げ不変量を小さい (g,r) から大きいそれへと思い出す（復元する）ためのレシピのようなものといえる. では実際に私たちが今までに示すことが出来た「休眠$\Game$の数え上げ」に関する明示的な結果を紹介しよう[11].

定理 9 (cf. [23], Corollary 6.3.1; [21], Theorem H; [22], Theorems A and B ; [4], Theorem 2.1)**.**

(i) （休眠 PGL_2 $\Game$の数え上げ明示公式）自然な同一視 $\Delta_{\mathrm{PGL}_2} = \{0, 1, \quad, \frac{p-3}{2}\}$ のもとで, 各 $(n_i)_{i=1}^r \in \Delta^{\times r}$ に対して次の等式が成り立つ*:*

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{\mathrm{PGL}_2,g,r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{n_i}) = \frac{p^{g-1}}{2^{2g-1}} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\prod_{i=1}^r \sin\left(\frac{(2n_i+1)j\pi}{p}\right)}{\sin^{2g-2+r}\left(\frac{j\pi}{p}\right)}. \tag{32}$$

(ii) （休眠 PGL_n $\Game$の数え上げ明示公式）$p > n \quad \max\{g \quad 1, 2\}$ とする. このとき, 次の等式が成り立つ*:*

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{\mathrm{PGL}_n,g,0}(1) = \frac{p^{(n-1)(g-1)-1}}{n!} \sum_{\substack{(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^{\times n} \\ \zeta_i^p = 1,\ \zeta_i \neq \zeta_j (i \neq j)}} \frac{(\prod_{i=1}^n \zeta_i)^{(n-1)(g-1)}}{\prod_{i \neq j}(\zeta_i \quad \zeta_j)^{g-1}}. \tag{33}$$

[11] 定理 9 (iii), (iv) においては条件 $(\quad)_{G,p}$ を満たしていないが, [21], §4 における議論からこの場合にもコンパクトモジュライや CohFT を同様に構成することができる.

(iii) （休眠 PGL_n ょと休眠 $\mathrm{PGL}_{(p-n)}$ ょの間の双対性）$1 < n < p \quad 1$ とする．このとき, 自然な全単射 $\iota : \Delta_{\mathrm{PGL}_n} \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mathrm{PGL}_{(p-n)}}$ が存在し，このもとで各 $(\boldsymbol{\rho}_i)_{i=1}^r \in \Delta_{\mathrm{PGL}_n}^{\times r}$ に対して次の等式が成り立つ:

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{\mathrm{PGL}_n, g, r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\boldsymbol{\rho}_i}) = \Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{\mathrm{PGL}_{(p-n)}, g, r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\iota(\boldsymbol{\rho}_i)}). \tag{34}$$

(iv) （休眠 $\mathrm{PGL}_{(p-1)}$ ょの場合）$\Delta_{\mathrm{PGL}_{(p-1)}} = \{\bullet\}$ （一点集合）であり, 次の等式が成り立つ:

$$\Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{\mathrm{PGL}_{(p-1)}, g, r}(e_\bullet^{\otimes r}) = 1. \tag{35}$$

補足 10. 上の定理で述べた各結果について少し補足したい．

まず *(i)* については，（前に触れたように）休眠 PGL_2 ょの *CohFT* に付随する *Frobenius* 代数の環構造と SL_2 *Wess-Zumino-Witten* 模型のフージョン環の結合係数とを比較することにより示される．（しかし, 幾何学的なレベルでの休眠 PGL_2 ょと *WZW* 模型の共形ブロックとの対応は依然として分かっていない.）そして少し面倒くさい計算を実行したのち, 前述の超幾何微分方程式を介した数え上げの結果と整合することが確かめられる．

また *(ii)* については, 先ほど構成した休眠ょの *CohFT* を適用した結果ではないことに注意されたい．この明示公式を示すための鍵となっているのは、定理 *6 (ii)* で主張した $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathrm{PGL}_n, g, 0}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,0}$ の生成的エタール性である．実際, 固定された非特異代数曲線 X 上の休眠 PGL_n ょを分類するモジュライは（X の *Frobenius* 捻り $X^{(1)}$ 上の）然るべき相対 *Grassmann* 多様体と同型であることが示される．生成的エタール性によりそれは, $W(k)$ *(:=k の Witt 環)* 上定義された代数曲線（つまり $X^{(1)}$ の $W(k)$ 上への変形）上の然るべき「$W(k)$ 上平坦な」相対 *Grassmann* 多様体へと変形される．従って $\mathbb{C}$ 上の相対 *Grassmann* 多様体の *Gromov-Witten* 不変量に関する既知の計算結果（*Vafa-Intriligator* 公式*)* を適用することで所望の明示的公式を得る．

(iii) で与えた等式は二つの *CohFT* が等価であることを主張するものである．より強い主張として,「休眠 PGL_n ょのモジュライ」と「休眠 $\mathrm{PGL}_{(p-n)}$ ょのモジュライ」の間の（幾何的なレベルでの）双対性が示される．つまり, それらのモジュライの間の（$ev_1, \quad , ev_r$ と可換な）標準的な同型 $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathrm{PGL}_n, g, r} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathrm{PGL}_{(p-n)}, g, r}$ が構成される．この結果と *(i), (ii)* を組み合わせることにより, 階数が大きい場合における休眠 PGL_n ょの個数を明示的に数え上げることが出来る．

(iv) で主張していることは, 各代数曲線上に存在する休眠 $\mathrm{PGL}_{(p-1)}$ ょは（同型類の違いを除いて）唯一つである, ことである．言い換えるならば, 休眠 $\mathrm{PGL}_{(p-1)}$ ょの *CohFT* は自明な *CohFT* と同型である．

6　Witten 予想の類似

休眠ょの CohFT を適用して Witten 予想（Witten-Kontsevich の定理）の類似について考えよう．Witten 予想 (cf. [25], [8], [6], [7], [12], and [16]) は近年において発展目覚ましい代数曲線（またはリーマン面）のモジュライの交叉理論における一つの標柱であり, 然るべき位相的重力理論と行列模型が等価であることを主張するものである．このことから, 自明な CohFT の分配関数は KdV 階層のタウ関数となることが導かれ, モジュライ上の ψ 類の交点数たちが無限個の連立方程式によって結ばれることが分かる．ここで私たちが考えたい休眠 G ょの分配関数は次のようにして定義される関数である:

$$Z^{\mathrm{Zz.}}_G := \exp\left(\sum_{g,r\geq 0} \frac{\hbar^{2g-2}}{r!} \sum_{\substack{d_1,\cdots,d_r \geq 0, \\ \boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_r \in \Delta_G}} \left(\int_{[\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}]^{\mathrm{vir}}} \prod_{i=1}^r ev_i^*(e_{\boldsymbol{\rho}_i}) \widehat{\psi}_i^{d_i}\right) \prod_{i=1}^n t_{d_i, \boldsymbol{\rho}_i}\right) \tag{36}$$

$$\left(= \exp\left(\sum_{g,r\geq 0} \frac{\hbar^{2g-2}}{r!} \sum_{\substack{d_1,\cdots,d_r \geq 0, \\ \boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_r \in \Delta_G}} \left(\int_{[\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}]} \Lambda^{\mathrm{Zz.}}_{G,g,r}(\bigotimes_{i=1}^r e_{\boldsymbol{\rho}_i}) \prod_{i=1}^r \psi_i^{d_i}\right) \prod_{i=1}^n t_{d_i, \boldsymbol{\rho}_i}\right)\right), \tag{37}$$

ただし, $\widehat{\psi}_i$ 及び ψ_i $(i = 1, \quad , r)$ はそれぞれ $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{G,g,r}$ および $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ の第 i 番目の ψ 類を表す. [23] の最後の主定理は以下のような Witten 予想の「休眠乍」類似である:

定理 11 (cf. [23], Theorem C)**.** 条件 $(**)_{G,p}$ を仮定し, l は g, r, p に関して十分大きいとする[12]. 各 $n \quad 1$ に対し, 次のような微分作用素を考えよう*:*

$$\begin{aligned} L_n := \quad & \frac{(2n+3)!!}{2^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t_{n+1,\boldsymbol{\varepsilon}}} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+2n+1)!!}{(2i \quad 1)!!2^{n+1}} \left(\sum_{\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G} t_{i,\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial}{\partial t_{i+n,\boldsymbol{\rho}}} \right) \\ & + \frac{\sharp(Z)\hbar^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i+1)!!(2n \quad 2i \quad 1)!!}{2^{n+1}} \left(\sum_{\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G} \frac{\partial^2}{\partial t_{i,\boldsymbol{\rho}} \partial t_{n-1-i,\boldsymbol{\rho}^\vee}} \right) \\ & + \quad {}_{n,-1} \frac{\hbar^{-2}}{2\sharp(Z)} \left(\sum_{\boldsymbol{\rho} \in \Delta_G} t_{0,\boldsymbol{\rho}} t_{0,\boldsymbol{\rho}^\vee} \right) + \quad {}_{n,0} \frac{\sharp(\Delta_G)}{16}. \end{aligned} \tag{38}$$

このとき, 任意の $n \quad 1$ に対して次の等式が成り立つ*:*

$$L_n Z_G^{\mathrm{Zz.}} = 0. \tag{39}$$

7 終わりに

本稿では半単純代数群 G に対する休眠 G 乍の数え上げ幾何学に関する結果をいくつか紹介した. 最後の Witten 予想の類似に関しては, 結果の意義や今後どのように話しが展開されるか（位相的漸化式など）について少しは説明したほうが良かったかもしれない. しかし, そもそも筆者自身がその周辺分野について十分に理解していないこともあり, あまり（間違ったことを書くよりかは）余計なことを書かないでおこうと遠慮させていただいた. また, 定理を主張する際に条件 $(**)_{G,p}$ を仮定した箇所がいくつかあるが, これは $(**)_{G,p}$ が成り立たない G において反例があったり, 本質的にうまくいかない事態なのではなく, 現時点ではこのように条件を狭めた状況でしか示すことが出来ていない, という事情による. 今後, このように余計（?）な条件を取り除いて定理を示すことが必要だろう.

代数学シンポジウムでの講演で紹介したにもかかわらず本稿では扱わなかった話題について少しだけ触れたい. 然るべき特別な乍として Miura 乍なる概念がある[13]. 例えば Riemann 面上の PGL_2 乍は（補足 2 で言及したように）射影構造に対応する一方, Miura PGL_2 乍はいわゆるアフィン構造と呼ばれるものと対応する (cf. [3]). [24] では, Miura PGL_2 乍と代数曲線上の丹後構造と呼ばれる直線束とが一対一対応することを示し, これにより（小平消滅定理の反例となるような）正標数の病理的な代数多様体の高次元変形族を構成した.

この他にも, 完全退化曲線上の休眠 PGL_2 乍は組み合わせ論的対象（スピンネットワーク, 有理凸多面体内にある格子点）と対応付けられることが知られており (cf. [10], [14], [19]), また, [19] では休眠 PGL_2 乍のモジュライに関する（$\mathbb{C}$ 上の類似としての）シンプレクティック幾何的性質について調べている. 定理 9 (i) の明示的公式も含めて, 休眠 PGL_2 乍の理論やその他分野との関連性については, かなり視界が開けてきたといえるだろう. しかし一般の G に対する休眠 G 乍のモジュライはまだ（どのような観点においても）多くのことが分かっていないといえる. 今後こうした一般化を含め, 「休眠 G 乍の数え上げ幾何学」のさらなる発展を目指していく予定である.

最後に, 第 62 回 代数学シンポジウムにて講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの皆様に, この場を借りてお礼申し上げたい. そして, 時間があまり割けないなかで本稿を書いたこともあり, 誤字・脱字や数学的間違いなどが散見されるかもしれないことを予めお詫び申し上げたい.

[12] cf. [23], Remark 6.2.3

[13] 例えば Miura GL_n 乍を $\nabla = \frac{d}{dx} \quad A$ （ただし A は $n \times n$ 行列）として表すならば, A は「対角成分より一段下のラインが全て可逆であり, それ以外は対角成分を除いて全て零である」ものによって定まるものである.

参考文献

[1] A. Beilinson, V. Drinfeld, "Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves." Available at: http://math.uchicago.edu/ mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf

[2] V. G. Drinfeld, V. Sokolov, Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries types. *Journal of Soviet Mathematics* **30** (1985), pp. 1975-2035.

[3] R. C. Gunning, Special coordinate covering of Riemann surfaces. *Math. Ann.* **170** (1967), pp. 67-86.

[4] Y. Hoshi, A note on dormant opers of rank p 1 in characteristic p. *RIMS Preprint* **1822** (2015).

[5] Y. Ihara, Schwarzian equations. *Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo* Sect IA Math. **21** (1974), pp. 97-118.

[6] M. Kazarian, S. Lando An algebro-geometric proof of Witten's conjecture. *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), pp. 1079-1089.

[7] Y.-S. Kim, K. Liu, A simple proof of Witten conjecture through localization. *arXiv: math. AG/0508384*, (2005).

[8] M. Kontsevich, Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. *Comm. Math. Phys.* **147** (1992), pp. 1-23.

[9] M. Kontsevich, Y. Manin, Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. *Comm. Math. Phys.* **164** (1994), pp. 525-562.

[10] F. Liu, B. Osserman, Mochizuki's indigenous bundles and Ehrhart polynomials. *J. Algebraic Combin.* **26** (2006), pp. 125-136.

[11] Y. Laszlo, C. Pauly, On the Hitchin morphism in positive characteristic. *Int. Math. Res. Not.* (2001), pp. 129-143.

[12] M. Mirzakhani, Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves. *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), pp. 1-23.

[13] S. Mochizuki, A theory of ordinary p-adic curves. *Publ. RIMS* **32** (1996), pp. 957-1151.

[14] S. Mochizuki, *Foundations of p-adic Teichmüller theory.* American Mathematical Society, (1999).

[15] A. Ogus, *F-Crystals, Griffiths Transversality, and the Hodge Decomposition.* Astérisque **221**, Soc. Math. de France, (1994).

[16] A. Okounkov, R. Pandharipande Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and Matrix models, I. *arXiv: math. AG/0101147*, (2001).

[17] B. Osserman, Frobenius-unstable bundles and p-curvature. *Transactions of the Amer. Math. Soc.* **360** (2008), pp. 273-305.

[18] Y. Wakabayashi, An explicit formula for the generic number of dormant indigenous bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **50** (2014), pp. 383-409.

[19] Y. Wakabayashi, Spin networks, Ehrhart quasi-polynomials, and combinatorics of dormant indigenous bundles. *Kyoto J. Math.* 掲載決定済み

[20] Y. Wakabayashi, The symplectic nature of the space of dormant indigenous bundles on algebraic curves. *arXiv: math. AG/1411.1197*, (2014).

[21] Y. Wakabayashi, A theory of dormant opers on pointed stable curves —a proof of Joshi's conjecture—. *arXiv: math. AG/1411.1208v3*, (2016).

[22] Y. Wakabayashi, Duality for dormant opers. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **24** (2017), pp. 271-320.

[23] Y. Wakabayashi, l-adic cohomological eld theories of dormant opers. *arXiv: math. AG/1709.04235*, (2017).

[24] Y. Wakabayashi, Moduli of Tango structures and dormant Miura opers. *arXiv: math. AG/1709.04241*, (2017).

[25] E. Witten, Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. *Surveys in Diff. Geom.* **1** (1991), pp. 243-310.

p 進簡約群の既約法 p 表現の分類定理

阿部 紀行 *

1　はじめに

G を群，C を代数閉体とする．

定義 1.1　G の C ベクトル空間への線型な作用を**表現**という．つまり，G の C 上の表現とは，C ベクトル空間 V と準同型写像 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ の組 (π, V) である．ただし，$\mathrm{GL}(V)$ は V の自己線型同型からなる群である．

与えられた群 G と C に対してその表現を理解するのが表現論の目的であり，特に**既約表現**を理解することが表現論における中心的な問題となる．この問題は（当然ながら）群 G と体 C（特にその標数）に強く依存する．本稿では，G が p 進簡約群，C の標数が p である場合（この場合の表現を**法 p 表現**と呼ぶ）に既約表現の分類に関して知られている結果について述べる．

p 進簡約群の表現論は，主に整数論，特に Langlands 対応をその動機とする．大域 Langlands 対応は代数体の絶対 Galois 群の n 次元表現と GL_n の保型表現との間に自然な対応が存在することを主張する．また，その局所版である局所 Langlands 対応は，p 進体 F の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の n 次元表現と $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約表現との間に自然な対応が存在することを主張する．この局所 Langlands 対応は様々な進展の上，最終的に Harris-Taylor [HT01] により解決がなされた．（Henniart [Hen00] や Scholze [Sch13] による別証明も存在する．）

以上の，特に局所 Langlands 対応で考えている表現は，$\mathbb{C}$ 上または $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$（$\ell$ は p と異なる素数）上のものである．今世紀に入ってしばらくしてから，これらの係数を $\overline{\mathbb{F}}_p$ または $\overline{\mathbb{Q}}_p$[*1] にしようという考え方が，p 進保型形式の理論などを動機として起こってきた．これにより $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の Langlands 対応（法 p Langlands 対応）や $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の Langlands 対応（p 進 Langlands 対応）の考え方が生み出され，$n = 2$，$F = \mathbb{Q}_p$ においては満足のいく理論が存在する [Col10, Paš13, CDP14]．一般の n や F に対する p 進/法 p Langlands 対応を考えることは自然でありやはり重要な意味を持つと考えられるが，様々な障害が存在することがわかっており，完成までは時間がかかりそうである [Bre10]．

* 北海道大学 大学院理学研究院，abenori@math.sci.hokudai.ac.jp

*1 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の標数は $\mathbb{C}$ や $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ と同様 0 であるため，代数的なものを考えている限り表現論は似たような振る舞いをする．しかし $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ や $\mathrm{GL}_n(F)$ は自然な位相を持つ位相群であり，また Langlands 対応などで考える表現は連続な表現である．このように連続な表現を考える場合，係数が $\mathbb{C}$ や $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の場合と，$\overline{\mathbb{Q}}_p$ の場合では大きく表現論が異なる．例えば，$\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の表現は，$\mathbb{C}$ や $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の表現よりも遙かに多い．

いずれにせよ，そのような一般化を目指す上で，本稿で述べるような法 p 表現論は重要な役割を果たすはずである．

一方で，Langlands 対応は GL_n のみならず一般の連結簡約群に対しても考えることができる．また異なる群の間の Langlands 対応の関係（Langlands 関手性）を考えることもでき，この考え方は GL_n の Langlands 対応を示す際にも有効活用される．このように一般の連結簡約群に対する Langlands 対応は，単なる一般化以上の意味を持つ．そのような事情に基づき，法 p 表現論でも GL_n のみでなく一般の連結簡約群を考えることにする．

注意

表現は定義 1.1 にあるように正しくは組 (π, V) であるが，しばしば π や V のどちらかは略される．つまり $v \in V$ の代わりに $v \in \pi$ と書いたり，$\pi(g)v$ の代わりに gv（$g \in G$，$v \in V$）と書いたりする．本稿でもこのような省略を断らずに使う．

2　放物型誘導表現

以下 F を剰余標数が p の非アルキメデス的局所体，つまり $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大か $\mathbb{F}_q((t))$（q は p の冪で，$\mathbb{F}_q$ は位数 q の有限体）とし，G を F 上の連結簡約代数群とする．例えば $G = \mathrm{GL}_n$ がその例である．G の F 有理点のなす群 $G(F)$ も同じ記号 G で書く．これは位相群になる．また C を標数 p の代数閉体とする．

定義 2.1　π を G の表現とする．

(1) 任意の $v \in \pi$ に対して v の固定部分群 $\mathrm{Stab}_G(v) = \{g \in G \mid \pi(g)v = v\}$ が G 内で開となるとき π は**スムーズ**であるという．これは π に離散位相を入れたとき $G \times \pi \to \pi$ が連続になることと同値である．

(2) スムーズ表現 π が**許容表現**であるとは，任意の開部分群 $H \subset G$ に対してその固定部分 $\pi^H = \{v \in \pi \mid \pi(h)v = v\ (h \in H)\}$ が有限次元となることである．

スムーズであることはこの場合における自然な連続の概念である．許容表現は有限性に関する条件が課された表現であり，この有限性を使うことで様々な議論が可能になる．応用上出てくる表現は許容表現であるので，この表現に限定しても障害にはならない．以下では許容表現に関する分類について述べる．

一般に G の表現 π に対して，

$$\pi^{\mathrm{sm}} = \{v \in \pi \mid \mathrm{Stab}_G(v) \text{ は開 }\}$$

とおくと π^{sm} は π の部分表現となり，定義から G のスムーズ表現を与える．π がスムーズであることは，$\pi = \pi^{\mathrm{sm}}$ と同値である．以下，単に表現と言えばスムーズ表現を指すこととする．

さて，既約表現の分類を試みるならばまずは表現を構成する必要がある．多くの場合と同様，この場合も**誘導**により部分群の表現から G の表現を構成することができる．$H \subset G$ を閉部分群と

し，σ を H の表現としたとき，誘導表現 $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ を

$$\mathrm{Ind}_H^G(\sigma) = \{f\colon G \to \sigma \mid f(hx) = \sigma(h)f(x)\ (x \in G, h \in H)\}^{\mathrm{sm}}$$

と定める．ただし $g \in G$ の作用は $(gf)(x) = f(xg)$ で与えられる．この表現は次の **Frobenius 相互律**を満たす．

命題 2.2（Frobenius 相互律） σ を H の表現，π を G の表現とすると，

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)) \simeq \mathrm{Hom}_H(\pi, \sigma)$$

が成り立つ．同型写像は $\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)) \ni \varphi \mapsto (v \mapsto \varphi(v)(1)) \in \mathrm{Hom}_H(\pi, \sigma)$ により与えられる．

注意 2.3 相互律から Ind は制限関手 $\pi \mapsto \pi|_H$ の右随伴関手である．制限関手の右随伴関手は有限群の表現論の文脈では coinduction と呼ばれることがある．有限群の表現論の文脈における誘導とは制限関手の左随伴関手のことである．なお，p 進群の表現に対しても H や C が特別な条件を満たすときは左随伴関手が存在し，その構成法からコンパクト誘導と呼ばれ，しばしば c-Ind と書かれる（節 4 を参照）．ここでの c は Compact の c であり，Coinduction の c ではない．

例えば $\sigma = \mathbf{1} = \mathbf{1}_H$ が自明表現の時を考えよう．つまり $\sigma = C$ かつ $\sigma(h) = \mathrm{id}\ (h \in H)$ とする．このとき $f \in \mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1}_H)$ は $f(hx) = f(x)\ (x \in G, h \in H)$ を満たす G 上の関数であり，従って $H\backslash G$ 上の関数と見なすことができる．つまり，この場合 $\mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1}_H)$ は $H\backslash G$ 上のスムーズな関数[*2]のなすベクトル空間である．一般の場合も $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ は $H\backslash G$ 上のある G 不変ベクトル束のスムーズな切断のなすベクトル空間であると見なせる．特に H が大きくなると（$H\backslash G$ が小さくなるため）$\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ も小さくなる．

さて，H をうまく選び G のよい表現を構成したい．この H の選び方には次のようなジレンマがある．

- H を小さくとると $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ が大きくなり既約表現から離れた表現ができてしまう．
- H を大きくとると H の表現論の解析が難しくなり，σ をとるのが難しくなる．

簡約群に対しては**放物型部分群**がこのジレンマを解決する．

例 2.4 $G = \mathrm{GL}_n$ の放物型部分群とは，次のような形の部分群 P と共役な部分群のことである．

[*2] sm に属する関数．

ただし $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

$$P = \begin{array}{c} \\ n_1\{ \\ n_2\{ \\ \vdots \\ n_r\{ \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{n_1} \ \overbrace{\quad}^{n_2} \ \cdots \ \overbrace{\quad}^{n_r} \\ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \end{array}.$$

P の部分群 M, N を

$$M = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

と定めると $N \subset P$ は正規部分群であり，$P \simeq M \ltimes N$ となる．

一般の簡約群に対しても，放物型部分群 P の概念が定義され，$P = M \ltimes N$ と部分群の積に分解され，M はより小さな簡約群となる．M を P の Levi 部分群，N を P の冪端根基といい，$P = M \ltimes N$ を Levi 分解という．この部分群は以下のようにして先ほどのジレンマを解決する．

- P は「大きい」．例えば G/P はコンパクトである．
- M は G より小さい簡約群である．従って $\dim G$ に関する帰納法により，M の表現論はすべてわかっていると仮定して良い．一方，P の表現の中で N 上自明なものを考えると，$P/N \simeq M$ よりこれは簡約群 M の表現を考えることと同等である．

このことを踏まえて，次のように定義する．

定義 2.5　M の表現 σ に対して，P の表現を $P \to P/N \simeq M \xrightarrow{\sigma} \mathrm{GL}(\sigma)$ と定め，同じ記号 σ で書く．これに対する誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ を**放物型誘導表現**という．

注意 2.6　σ が許容表現ならば $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ も許容表現になることが示される．

この構成によりすべての表現が得られれば事情は簡単であるのだが，残念ながらそうは行かない．得られない表現に名前をつけておくことにする．

定義 2.7　G の既約許容表現 π が**超尖点**であるとは，任意の放物型部分群 $P = M \ltimes N \subsetneq G$ と任意の M の既約許容表現 σ に対して，π が $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ の部分商に現れないことである．

これらの概念に基づき，既約表現の分類を次の二段階に分割できる．

(1) 既約超尖点表現を分類する．

(2) G の放物型部分群 $P = M \ltimes N$ と M の超尖点表現 σ に対して，$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ の既約部分商を分類することで，既約表現の分類を既約超尖点表現の分類に帰着させる．

現在のところ (2) はほぼ完全に解決されているが，(1) は殆ど理解されていない．本稿の残りでは，この現状についてより詳しく解説を行う．

3 放物型誘導表現の構造

放物型誘導表現の構造を記述するという問題は，様々な場合における研究を経て [AHHV17] において完全解決された．この節ではその主定理を述べよう．$P = M \ltimes N$ を放物型部分群とし，σ を M の既約超尖点表現とする．次の例を念頭においていただきたい．

例 3.1 $\sigma = \mathbf{1}_M$ が自明表現の時を考える．このとき $\mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{1}_M) = \mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{1}_P)$ は $P\backslash G$ 上のスムーズな関数全体であり，{ 定数関数 } はその部分表現を定めるため，$P \neq G$ ならば既約ではない．より一般に，P を含む部分群 Q（これは自動的に放物型部分群になる）に対して，

$$\mathrm{Ind}_Q^G(\mathbf{1}_Q) \subset \mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{1}_P)$$

となる．これを踏まえて，

$$\mathrm{St}_P = \mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{1}_P) / \left(\sum_{P \subsetneq Q} \mathrm{Ind}_Q^G(\mathbf{1}_Q) \right)$$

と定める．St_P を **Steinberg 表現**という．Große-Klönne [GK14] および Ly [Ly15] により，St_P は既約であることが知られている．このことから，$\{\mathrm{St}_Q \mid Q \supset P\}$ が $\mathrm{Ind}_P^G(\mathbf{1})$ の既約成分を与えることがわかる．

同様のことを一般の σ に対して考えるために，$P(\sigma)$ を P を含む σ が $P(\sigma)$ まで伸びるような最大の放物型部分群とする．このような $P(\sigma)$ は存在し，また σ の $P(\sigma)$ への拡張は一意であることが示される [AHHV17, II.7. Corollary 1]．σ の $P(\sigma)$ への拡張を $e_{P(\sigma)}(\sigma)$ と書く．Q を $P \subset Q \subset P(\sigma)$ を満たす部分群とし，$e_Q(\sigma) = e_{P(\sigma)}(\sigma)|_Q$ とおく．これは P の表現 σ の Q への拡張であり，そのような拡張はやはり一意的である．$P \subset Q \subset Q_1 \subset P(\sigma)$ なるとき Ind の定義から $\mathrm{Ind}_{Q_1}^G(e_{Q_1}(\sigma)) \subset \mathrm{Ind}_Q^G(e_Q(\sigma))$ が成り立つことがわかる．これを踏まえて，

$$I(P, \sigma, Q) = \mathrm{Ind}_Q^G(e_Q(\sigma)) / \left(\sum_{Q \subsetneq Q_1 \subset P(\sigma)} \mathrm{Ind}_{Q_1}^G(e_{Q_1}(\sigma)) \right)$$

とおく．$\sigma = \mathbf{1}$ の時は $I(P, \mathbf{1}, Q) = \mathrm{St}_Q$ となる．以下の定理が既約表現の分類におけるステップ (2) の答えを与える．

定理 3.2 ([AHHV17]) $I(P,\sigma,Q)$ は既約であり，$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ の既約成分は $\{I(P,\sigma,Q) \mid P \subset Q \subset P(\sigma)\}$ で与えられ，その重複度はすべて 1 である．また $(P,\sigma,Q) \mapsto I(P,\sigma,Q)$ は全単射

$$\{(P,\sigma,Q) \mid (P,\sigma,Q) \text{ は上の通り }\}/\sim \,\simeq \{G \text{ の既約許容表現の同型類 }\}$$

を与える．ただしここで同値関係 $\sim$ は次のように定義される：

- $P' = gPg^{-1}$，$Q' = gQg^{-1}$.
- P' の二つの表現 σ' と $p \mapsto \sigma(g^{-1}pg)$ $(p \in P')$ は同型.

の二つを満たす $g \in G$ が存在する時に $(P,\sigma,Q) \sim (P',\sigma',Q')$ である．

このように，例 3.1 のような単純な理由によってのみ放物型誘導表現は既約でなくなる．この定理は，$G = \mathrm{GL}_2$ の場合に Barthel-Livné [BL95, BL94] により初めて示された．その後 [Her11a]（GL_n），[Abe13]（分裂型），[Ly]（$\mathrm{GL}_n(D)$ $(n \le 3)$，D は F 上の中心斜体）などの研究を経て [AHHV17] にて上記の形で完全解決された．

注意 3.3 $C = \mathbb{C}$ ではこの定理は成立しない．たとえば，$G = \mathrm{GL}_2$，P を上三角元からなる部分群（例 2.4 において $n = 2, n_1 = n_2 = 1$ の場合），M を対角行列からなる部分群とする．$t \in F^\times$ に対してその正規化された付値を v とし，$|t| = q^{-v}$ とおく．$\sigma\colon M \to \mathbb{C}^\times$ を $\sigma(\mathrm{diag}(t_1,t_2)) = |t_1||t_2|^{-1}$ と定めると，$\omega \in \mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ に対してその積分値 $\int \omega \in \mathbb{C}$ が定義され，$\int\colon \mathrm{Ind}_p^G(\sigma) \to \mathbb{C}$ は G 準同型写像を与える．従って $\mathrm{Ker}(\int)$ は $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ の非自明な部分表現となるため，$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ は既約ではない．一方 $P(\sigma) = P$ である．

定理 3.2 の系として以下を得る．

系 3.4 $P = M \ltimes N$ を放物型部分群，σ を M の既約許容表現とする．このとき $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ は長さ有限である．

$P(\sigma)$ は次のようにルート系によって具体的に記述することができる．$S \subset G$ を極大分裂トーラスとし，Σ を (G,S) に関するルート系とする．正ルート系 $\Sigma^+ \subset \Sigma$ を一つ固定し，単純ルートからなる集合を Δ とする．Σ^+ から定まる極小放物型部分群を B，その冪単部分群を U とし，また Z を S の G における中心化群とする．Z は B の Levi 部分群である．B を含む放物型部分群は Δ の部分集合と一対一に対応する．放物型部分群 P に対応する Δ の部分集合を Δ_P と書く．各 $\alpha \in \Delta$ に対して，$\{\alpha\}$ に対応する放物型部分群を $P_\alpha = M_\alpha \ltimes N_\alpha$ とし，M'_α を $U \cap M_\alpha$ を含む最小の M_α の正規部分群とする．このとき，$P(\sigma)$ に対応する Δ の部分集合 $\Delta_{P(\sigma)}$ は

$$\Delta_{P(\sigma)} = \{\alpha \in \Delta \mid M'_\alpha \cap Z \text{ は } \sigma \text{ に自明に作用する }\} \cup \Delta_P$$

により与えられる．

4　超特異表現

すでに述べた通り，簡約群の表現論において放物型部分群が重要な役割を果たす．もう一つ重要な役割を果たす部分群がコンパクト部分群である．一般にコンパクト群の表現論は比較的調べやすく，G の表現 π をコンパクト群に制限することで π を調べることができる．

K を G のコンパクトかつ開な部分群とする[*3]．もし C の標数が 0 ならば，コンパクト群の表現は完全可約となり，従って π の K への制限は既約表現への分解 $\pi \simeq \bigoplus_V V^{m_V}$ を持つ．(V は K の既約表現全体を走る．) また Schur の補題から $m_V = \dim \mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ であり，従って $\pi|_K$ は $\mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ から決まる．つまり，$\pi|_K$ を調べることは，各 V に対して $\mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ を調べることと等価となる．

これをまねて，C の標数が p である場合にも，K の既約表現 V に対して $\mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ を考えよう．この空間は次のようにして，Hecke 環と呼ばれる環上の加群となる．V を K の既約表現とする．G 上の関数 f に対して $\mathrm{supp}(f)$ を f の台とし，

$$\text{c-Ind}_K^G(V) = \{f \in \mathrm{Ind}_K^G(V) \mid \mathrm{supp}(f) \text{ はコンパクト }\}$$

とおく．これは $\mathrm{Ind}_K^G(V)$ の部分表現であり，**コンパクト誘導表現**と呼ばれる．

注意 4.1　$\mathrm{Ind}_K^G(V)$ の定義から，$\mathrm{supp}(f)$ は左 K 不変であることがわかる．また，K が開なことから，$\mathrm{supp}(f)$ がコンパクトならば $K\backslash \mathrm{supp}(f)$ は有限集合となる．逆に $K\backslash \mathrm{supp}(f)$ が有限ならば K のコンパクト性から $\mathrm{supp}(f)$ はコンパクトとなる．よって $\text{c-Ind}_K^G(V)$ における $\mathrm{supp}(f)$ の条件は「$K\backslash \mathrm{supp}(f)$ が有限である」と書き換えても良い．

次の命題も **Frobenius 相互律**と呼ばれる．

命題 4.2　V を K の表現，π を G の表現とすると，

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_K(V, \pi)$$

が成り立つ．

同型写像は次のように与えられる．$v \in V$ に対して，$f_v \in \text{c-Ind}_K^G(V)$ を

$$f_v(x) = \begin{cases} xv & (x \in K), \\ 0 & (x \notin K) \end{cases}$$

と定めると，$v \mapsto f_v$ は K 準同型 $V \to \text{c-Ind}_K^G(V)$ を与える．このとき，$\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V), \pi) \ni \varphi \mapsto (v \mapsto \varphi(f_v)) \in \mathrm{Hom}_K(V, \pi)$ が命題 4.2 の同型写像を与える．

[*3] G はこのような部分群を豊富に持つ．例えば，その単位元の基本近傍系としてコンパクトかつ開な部分群をとることができる．

ここで，$\mathcal{H}_K(G,V)=\mathrm{End}_G(\text{c-Ind}_K^G(V))$ とおこう．すると G の表現 π に対して $\mathrm{Hom}_K(V,\pi)\simeq\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\pi)$ は右 $\mathcal{H}_K(G,V)$ 加群となる．環 $\mathcal{H}_K(G,V)$ を **Hecke 環**という．この Hecke 環を通じて空間 $\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ を調べる．

特に重要な場合が，K が**スペシャルコンパクト群**と呼ばれる場合である．例えば $G=\mathrm{GL}_n$ の場合は，$\mathcal{O}$ を F の整数環（$F=\mathbb{Q}_p$ の場合は $\mathcal{O}=\mathbb{Z}_p$，$F=\mathbb{F}_q((t))$ の場合は $\mathcal{O}=\mathbb{F}_q[[t]]$）とすると，$K=\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ ととれる．さらに，放物型部分群 $P=M\ltimes N$ に対して K を「良い位置」にとっておけば，

- $G=PK$（岩澤分解）
- $P\cap K=(M\cap K)\ltimes(N\cap K)$

が成り立つ．このことから，σ を M の表現とすると，制限写像 $f\mapsto f|_K$ により

$$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)|_K\simeq\mathrm{Ind}_{P\cap K}^K(\sigma|_{M\cap K})$$

が成り立つことが容易にわかる．このことと Frobenius 相互律を使うと，次の同型の連鎖を得る：

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\mathrm{Ind}_P^G(\sigma))\simeq\mathrm{Hom}_K(V,\mathrm{Ind}_P^G(\sigma))\simeq\mathrm{Hom}_K(V,\mathrm{Ind}_{P\cap K}^K(\sigma))\simeq\mathrm{Hom}_{P\cap K}(V,\sigma).$$

さらに $P\cap K=(M\cap K)\ltimes(N\cap K)$ であり，また $N\cap K$ は σ に自明に作用することから，$P\cap K$ 準同型 $V\to\sigma$ は常に $(N\cap K)$ 余不変部分[*4]への射影 $V\to V_{N\cap K}$ を経由する．つまり同型 $\mathrm{Hom}_{P\cap K}(V,\sigma)\simeq\mathrm{Hom}_{M\cap K}(V_{N\cap K},\sigma)$ を得る．さらに同型を続けて

$$\mathrm{Hom}_{P\cap K}(V,\sigma)\simeq\mathrm{Hom}_{M\cap K}(V_{N\cap K},\sigma)\simeq\mathrm{Hom}_M(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}),\sigma)$$

を得る．まとめると，

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\mathrm{Ind}_P^G(\sigma))\simeq\mathrm{Hom}_M(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}),\sigma)$$

となる．

ところで米田の補題により，

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Functor}}(\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\,\cdot\,))\simeq\mathrm{End}_G(\text{c-Ind}_K^G(V))=\mathcal{H}_K(G,V)$$

である．この引数に $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ という特別な形の表現を入れることを考えれば，準同型写像

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Functor}}(\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\,\cdot\,))\to\mathrm{End}_{\mathrm{Functor}}(\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\mathrm{Ind}_P^G(\,\cdot\,)))$$

を得るが，上で得た同型とまた米田の補題を使うことで

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\mathrm{Functor}}(\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\mathrm{Ind}_P^G(\,\cdot\,)))&\simeq\mathrm{End}_{\mathrm{Functor}}(\mathrm{Hom}_M(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}),\,\cdot\,))\\&\simeq\mathrm{End}_M(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))=\mathcal{H}_{M\cap K}(M,V_{N\cap K})\end{aligned}$$

[*4] V を $\{nv-v\mid n\in N\cap K,v\in V\}$ の生成する部分空間で割ったもの．$N\cap K$ が自明に作用する最大の商である．

であるので，まとめて準同型写像

$$\mathcal{S}_M^G\colon \mathcal{H}_K(G,V)\to\mathcal{H}_{M\cap K}(M,V_{N\cap K})$$

を得る[*5]．これを（法 p）**佐武変換**と呼ぶ．$Q=L\ltimes U$ を P を含む放物型部分群であって，$M\subset L$ となるものとすると，推移律 $\mathcal{S}_M^G=\mathcal{S}_M^L\circ\mathcal{S}_L^G$ が成り立つ．P が極小なとき，$\mathcal{H}_{M\cap K}(M,V_{N\cap K})$ は可換にかなり近い環となる．これと上の佐武変換を使うことにより，$\mathcal{H}_K(G,V)$ の構造を特定することができる．

注意 4.3 古典的な理論により $V_{N\cap K}$ は $M\cap K$ の既約表現となることが知られている．

一般に $\mathcal{H}_K(G,V)$ の中心を $\mathcal{Z}_K(G,V)$ と書く．以下の定理が $\mathcal{H}_K(G,V)$ の構造を明らかにする．

定理 4.4（法 p 佐武同型 [Her11b, HV15]） 次が成り立つ．

- $\mathcal{S}_M^G$ は単射であり，その像を具体的に記述できる．
- $\mathcal{S}_M^G(\mathcal{Z}_K(G,V))\subset\mathcal{Z}_{M\cap K}(M,V_{N\cap K})$.
- ある $\tau=\tau_M\in\mathcal{Z}_K(G,V)$ が存在し，$\mathcal{S}_M^G$ は同型 $\mathcal{H}_K(G,V)[\tau^{-1}]\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}_{M\cap K}(M,V_{N\cap K})$ および $\mathcal{Z}_K(G,V)[\tau^{-1}]\xrightarrow{\sim}\mathcal{Z}_{M\cap K}(M,V_{N\cap K})$ を導く．

例 4.5 $G=\mathrm{GL}_n$ とし，P を極小放物型部分群，つまり上半三角行列全体のなす部分群とする．$P=M\ltimes N$ と分解すると，M は対角行列全体のなす群（特に可換群）である．また $V_{N\cap K}$ は $M\cap K$ の既約表現であるので，一次元表現である．簡単のため，$V_{N\cap K}$ が自明であると仮定しよう．このとき $\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})$ は $M/(M\cap K)\simeq(F^\times/\mathcal{O}^\times)^n$ 上の有限台を持つ関数のなす空間となる（注意 4.1）．$t\in(F^\times/\mathcal{O}^\times)^n$ を $f\in\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})$ に作用させよう．f は $(F^\times/\mathcal{O}^\times)^n$ 上の関数と見なせるため，$x\in(F^\times/\mathcal{O}^\times)^n$ に対して $(tf)(x)=f(tx)$ と定めることができる．これにより群環 $C[(F^\times/\mathcal{O}^\times)^n]$ から $\mathrm{End}_M(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))=\mathcal{H}_{M\cap K}(M,V_{N\cap K})$ への準同型写像が定まるが，これが同型となる．$(F^\times/\mathcal{O}^\times)^n\simeq\mathbb{Z}^n$ であるから，

$$\mathcal{H}_{M\cap K}(M,V_{N\cap K})\simeq C[\mathbb{Z}^n]\simeq C[S_1^{\pm1},\dots,S_n^{\pm1}]$$

を得る．ただし，S_i は不定元であり，i 番目のみが 1 で他が 0 である $\mathbb{Z}^n$ の元に対応する．（このような簡単な記述が得られるのは，$M/(M\cap K)$ が群構造を持っていること，つまり $M\cap K$ が M の正規部分群であることによる．）$T_i=S_1\cdots S_i$ とおくと，$C[S_1^{\pm1},\dots,S_n^{\pm1}]=C[T_1^{\pm1},\dots,T_n^{\pm1}]$ が容易にわかる．この記述において，$\mathcal{S}_M^G$ の像は $C[T_1,\dots,T_{n-1},T_n^{\pm1}]$ で与えられる．この場合は Hecke 環 $\mathcal{H}_K(G,V)$ は可換であり，従って $\mathcal{Z}_K(G,V)=\mathcal{H}_K(G,V)$ である．定理 4.4 の τ としては $T_1\cdots T_{n-1}$ がとれる．

さて，G の表現 π に戻ろう．V を K の既約表現とすると，$\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ は右 $\mathcal{H}_K(G,V)$ 加群になる．さらに π が許容であると仮定すると，$\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ は有限次元となる[*6]．従って，

[*5] $\mathcal{S}_M^G$ は M だけでなく P の取り方に依存する．
[*6] K の開部分群 K_0 で V に自明に作用するものが存在することを使えば，許容表現の定義から従う．

$\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ は $\mathcal{Z}_K(G,V)$ の一般固有空間へと分解される．ここに現れる固有値を**佐武パラメータ**または **Hecke 固有値**という．K に関して良い位置にある極小放物型部分群 B を固定し，$B = Z \ltimes U$ と分解する．ただし $Z \subset B$ は Levi 部分群，$U \subset B$ は冪端根基である．

定義 4.6 π を G の許容表現とする．

(1) C 代数の準同型 $\chi\colon \mathcal{Z}_K(G,V) \to C$ が**超特異**であるとは，任意の $B \subset P = M \ltimes N \subsetneq G$, $Z \subset M$ なる放物型部分群 P に対して，χ が $\mathcal{S}_M^G$ を経由しないことである．
(2) π が**超特異**[*7]であるとは，任意の K の既約表現 V に対して，$\mathcal{Z}_K(G,V)$ の $\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ における固有値 χ（つまり，ある $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ が存在して任意の $T \in \mathcal{Z}_K(G,V)$ に対して $\varphi T = \chi(T)\varphi$ となるような $\chi\colon \mathcal{Z}_K(G,V) \to C$）が常に超特異となることである．

例 4.7 例 4.5 において，$\chi\colon \mathcal{Z}_K(G,V) \to C$ は $(\chi(T_1),\ldots,\chi(T_{n-1}),\chi(T_n)) \in C^{n-1} \times C^{\times}$ により定まる．このとき，χ が $\mathcal{S}_M^G$（M は例 4.5 と同様）を経由するための必要十分条件は $\chi(T_1),\ldots,\chi(T_{n-1})$ がすべて 0 でないことである．また χ が超特異であるための必要十分条件は $\chi(T_1),\ldots,\chi(T_{n-1})$ がすべて 0 となることである．

次が成り立つ．

定理 4.8（[AHHV17, I.5. Theorem 5]） 既約許容表現 π が超特異であることと超尖点であることは同値である．

注意 4.9 実際には，定理 3.2 および 4.8 は次の手順で示される．

(1) まず定理 3.2 内の「超尖点」をすべて「超特異」に変えた定理を示す．
(2) その結果（特に既約表現の分類定理）により定理 4.8 が従う．
(3) よって定理 3.2 が成立する．

分類定理の帰結として，次も従う．

定理 4.10 既約許容表現 π に対して，次は同値である．

(1) π は超特異．
(2) ある K の既約表現 V に対して，$\mathcal{Z}_G(K,V)$ の $\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ における超特異な固有値が存在する．

[*7] より正確には，(K,B,Z) に関して超特異であると言うべきである．後述の定理 4.8 から，この概念は (K,B,Z) によらない．

5　既約超特異表現の分類

定理 3.2 により，既約許容表現の分類は既約超尖点表現，または定理 4.8 から既約超特異表現の分類に帰着される．しかし，現段階では既約超特異表現は殆ど理解されていない．それに関する現状を本節で述べる．

超特異表現に関する一つの注意から始める．π を既約超特異表現とし，$V \subset \pi$ を π の部分既約 K 表現とする．また $\varphi\colon V \hookrightarrow \pi$ は $\mathcal{Z}_K(G,V)$ に関する固有ベクトルであると仮定し，その固有値を χ とする．超特異表現の定義から χ は超特異となる．φ に Frobenius 相互律を適用すると，$\text{c-Ind}_K^G(V) \to \pi$ を得るが，φ が固有値 χ の固有ベクトルであることから，この準同型写像は

$$\chi \otimes_{\mathcal{Z}_K(G,V)} \text{c-Ind}_K^G(V) \to \pi$$

を引き起こし，π の既約性から全射になる．($\mathcal{Z}_K(G,V)$ の定義から $\text{c-Ind}_K^G(V)$ は左 $\mathcal{Z}_K(G,V)$ 加群であることに注意する.) 逆にこのような全射があれば，$\text{c-Ind}_K^G(V) \to \chi \otimes_{\mathcal{Z}_K(G,V)} \text{c-Ind}_K^G(V) \to \pi$ に Frobenius 相互律で対応する $V \to \pi$ は固有値 χ の固有ベクトルとなる．以上から，既約許容表現 π が超特異であることは，ある K の既約表現 V と超特異指標 χ に対して $\chi \otimes_{\mathcal{Z}_K(G,V)} \text{c-Ind}_K^G(V)$ の商となることと同値である．

さて，既約超特異表現の分類に関する現状について述べる．以下 $G = \mathrm{GL}_2(F)$ とする．いくつか記号を用意しよう．$K = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$（$\mathcal{O}$ は F の整数環）とし，

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, c \in F^\times,\ b \in F \right\},\ M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, c \in F^\times \right\},\ N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in F \right\}$$

とおく．$P = M \ltimes N$ は G の極小放物型部分群である．κ を F の剰余体とし，$q = \#\kappa r \in \mathbb{Z}$ とおく．$0 \le r \le q-1$ なる整数 r に対して，$\mathrm{GL}_2(C)$ は C^2 の r 次対称積 $\mathrm{Sym}^r(C^2)$ に自然に作用し，唯一の部分既約表現 V_r を持つ．具体的には，r の p 進表示を $r = \sum_{i=0}^{f-1} r_i p^i$（$q = p^f$）とし，また変数をとって $\mathrm{Sym}^r(C^2) = CX^r \oplus CX^{r-1}Y \oplus \cdots \oplus CY^r$ と書いておくと，

$$V_r = \left\{ \sum_{k_i \le r_i} a_k X^k Y^{r-k} \mid a_k \in C \right\}$$

となる．(ただし $k_i \ge 0$，$k = \sum_{i=0}^{f-1} k_i p^i$.) $\kappa \hookrightarrow C$ を固定すると，$K = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}) \to \mathrm{GL}_2(\kappa) \to \mathrm{GL}_2(C)$ を得る．これにより V_r は K の既約表現となる．さらに $0 \le a-b \le q-1$ を満たす整数の組 (a,b) に対して $V_{a,b} = V_{a-b} \otimes \det^b$ とおく．すると $V_{a,b}$ は K の既約表現を与え，また K の既約表現はこれで尽くされることが知られている．$V_{a,b}$ と $V_{a',b'}$ が同型であるための必要十分条件は，$(a-a', b-b') \in (q-1)\mathbb{Z}(1,1)$ となることである．

$\mathcal{O}$ の極大イデアルの生成元 ϖ を固定すると，例 4.5 と同様に，Hecke 環 $\mathcal{H}_K(G, V_{a,b})$ は $C[T_1, T_2^{\pm 1}]$ と同型になる．(一般には同型は ϖ の取り方に依存する.) $\lambda \in C^\times$ に対して $\chi_\lambda\colon \mathcal{H}_K(G,V) \to C$ を $\chi_\lambda(T_1) = 0$，$\chi_\lambda(T_2) = \lambda$ で定める．$\mathcal{H}_K(G, V_{a,b})$ の超特異指標はこれらで尽くされる．

$F=\mathbb{Q}_p$ の場合には Breuil により既約超特異表現は分類されている．

定理 5.1（Breuil [Bre03]） $F=\mathbb{Q}_p$ とする．このとき $\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \mathrm{c\text{-}Ind}_K^G(V_{a,b})$ は既約許容表現であり，よって全ての既約許容超特異表現を尽くす．また $\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \mathrm{c\text{-}Ind}_K^G(V_{a,b}) \simeq \chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{p-1+b,ac})} \mathrm{c\text{-}Ind}_K^G(V_{p-1+b,a})$ であり，同型はこれのみである．

注意 5.2 $\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \mathrm{c\text{-}Ind}_K^G(V_{a,b})$ には $\mathrm{diag}(\varpi,\varpi)$ が λ 倍で作用する．

なお Barthel-Livné および Breuil は許容表現とは限らない表現も対象に扱っている．分類結果およびそれを用いた Berger [Ber12] の議論から，次が成立する．（$C=\mathbb{C}$ の場合には任意の G に対してこの事実が成立する．C の標数が p である場合にこの事実が一般に成立することを期待してよいかは筆者にはわからない．）

系 5.3 $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約法 p 表現はすべて許容表現である．

以上（またはこの場合と本質的に同等な場合）が理解されている全ての場合である．$F\neq\mathbb{Q}_p$ の場合の現状を述べよう．まず Breuil の分類が壊滅的に破壊されることを述べる．

命題 5.4（[Mor12, Theorem 1.3]） F が $\mathbb{Q}_p$ の不分岐拡大であるとする[*8]．$a-b\neq 0, q-1$ とすると，ある K の既約表現 V と埋め込み $\mathrm{c\text{-}Ind}_K^G(V) \hookrightarrow \chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \mathrm{c\text{-}Ind}_K(V_{a,b})$ が存在する．特に（$\mathrm{c\text{-}Ind}_K^G(V)$ がそうであるので）$\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \mathrm{c\text{-}Ind}_K^G(V_{a,b})$ は許容表現ではなく，また無限の長さを持つ．

つまり，$F=\mathbb{Q}_p$ の場合と異なり $\chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \mathrm{c\text{-}Ind}_K^G(V_{a,b})$ は既約許容表現からかけ離れたものになっている．次の定理は，そもそも $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合よりも多くの既約超特異表現が存在することを示している．定理 5.1 とその後の注意から，$\mathrm{diag}(\varpi,\varpi)$ の作用を固定すると $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約超特異表現は有限個であることに注意しよう．

命題 5.5（[BP12, Proposition 10.2]） F を $\mathbb{Q}_p$ の二次拡大とする．このとき，$\mathrm{diag}(\varpi,\varpi)$ が自明に作用する G の既約超特異表現が無限個存在する．より詳しく，任意の $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$\dim\mathrm{Hom}_K(V_{p^2-p,p-1},\pi)=n$ となる既約超特異表現 π が存在する．

なお，$F=\mathbb{Q}_p$ の場合には，$0\leq a'-b'\leq p-1$ に対して

$$\dim\mathrm{Hom}_K(V_{a',b'}, \chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G,V_{a,b})} \mathrm{c\text{-}Ind}_K^G(V_{a,b})) = \begin{cases} 1 & (V_{a',b'}\simeq V_{a,b} \text{ または } V_{a',b'}\simeq V_{p-1-a,b}), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となることが定理 5.1 の証明よりわかる．

命題 5.5 の証明における既約超特異許容表現の構成には，Paškūnas [Paš04] により考えられた G 同変 coefficient system（または diagram）による議論と，コンパクト誘導表現 $\mathrm{c\text{-}Ind}_K^G(V)$ の精密な解析を用いる．関連して Hu による canonical diagram の理論 [Hu12] などもあるが，より詳

[*8] 以下 F にしばしば仮定が着くが，おそらく本質的な仮定ではなく，$F\neq\mathbb{Q}_p$ ならば起きる現象であると思われる．

細な情報を得ることはできていないようである．

また，次も成立する．

命題 5.6（[Sch15]） F を $\mathbb{Q}_p$ の二次拡大とすると，G の既約超特異表現は有限表示ではない．

$\text{c-Ind}_K^G(V_{a,b})$ が $V_{a,b}$ で生成され，従って有限生成であることに注意しよう．同型 $\mathcal{H}_K(G, V_{a,b}) \simeq C[T_1, T_2^{\pm 1}]$ を思い出す．完全系列

$$\text{c-Ind}_K^G(V_{a,b})^{\oplus 2} \xrightarrow{(T_1, T_2 - \lambda)} \text{c-Ind}_K^G(V_{a,b}) \to \chi_\lambda \otimes_{\mathcal{H}_K(G, V_{a,b})} \text{c-Ind}_K^G(V_{a,b}) \to 0$$

と定理 5.1 から $F = \mathbb{Q}_p$ の場合には G の既約超特異表現は有限表示となる．

以上のように，$G = \mathrm{GL}_2(F)$ の場合に限ってすら既約超特異表現はその「悪そうな様相」がいくつか判明しているのみであり，分類はおろかその具体的な例すらほぼない状況である．今後の研究が待たれる．

参考文献

[Abe13] N. Abe, *On a classification of irreducible admissible modulo p representations of a p-adic split reductive group*, Compos. Math. **149** (2013), no. 12, 2139–2168.

[AHHV17] N. Abe, G. Henniart, F. Herzig, and M.-F. Vignéras, *A classification of irreducible admissible mod p representations of p-adic reductive groups*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 2, 495–559.

[Ber12] L. Berger, *Central characters for smooth irreducible modular representations of* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **128** (2012), 1–6 (2013).

[BL94] L. Barthel and R. Livné, *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 2, 261–292.

[BL95] L. Barthel and R. Livné, *Modular representations of* GL_2 *of a local field: the ordinary, unramified case*, J. Number Theory **55** (1995), no. 1, 1–27.

[BP12] C. Breuil and V. Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for* GL_2, Mem. Amer. Math. Soc. **216** (2012), no. 1016, vi+114.

[Bre03] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*. I*, Compositio Math. **138** (2003), no. 2, 165–188.

[Bre10] C. Breuil, *The emerging p-adic Langlands programme*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II (New Delhi), Hindustan Book Agency, 2010, pp. 203–230.

[CDP14] P. Colmez, G. Dospinescu, and V. Paškūnas, *The p-adic local Langlands correspondence for* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Camb. J. Math. **2** (2014), no. 1, 1–47.

[Col10] P. Colmez, *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *et* (ϕ, Γ)*-modules*, Astérisque (2010), no. 330, 281–509.

[GK14] E. Grosse-Klönne, *On special representations of p-adic reductive groups*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 12, 2179–2216.

[Hen00] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), no. 2, 439–455.

[Her11a] F. Herzig, *The classification of irreducible admissible mod p representations of a p-adic* GL_n, Invent. Math. **186** (2011), no. 2, 373–434.

[Her11b] F. Herzig, *A Satake isomorphism in characteristic p*, Compos. Math. **147** (2011), no. 1, 263–283.

[HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[Hu12] Y. Hu, *Diagrammes canoniques et représentations modulo p de* $\mathrm{GL}_2(F)$, J. Inst. Math. Jussieu **11** (2012), no. 1, 67–118.

[HV15] G. Henniart and M.-F. Vignéras, *A Satake isomorphism for representations modulo p of reductive groups over local fields*, J. Reine Angew. Math. **701** (2015), 33–75.

[Ly] T. Ly, *Représentations modulo p de* $\mathrm{GL}(m, D)$*, D algèbre à division sur un corps local*, Thesis, Institut de mathématiques de Jussieu, arXiv:1409.4686.

[Ly15] T. Ly, *Représentations de Steinberg modulo p pour un groupe réductif sur un corps local*, Pacific J. Math. **277** (2015), no. 2, 425–462.

[Mor12] S. Morra, *On some representations of the Iwahori subgroup*, J. Number Theory **132** (2012), no. 5, 1074–1150.

[Paš04] V. Paškūnas, *Coefficient systems and supersingular representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2004), no. 99, vi+84.

[Paš13] V. Paškūnas, *The image of Colmez's Montreal functor*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **118** (2013), 1–191.

[Sch13] P. Scholze, *The local Langlands correspondence for* GL_n *over p-adic fields*, Invent. Math. **192** (2013), no. 3, 663–715.

[Sch15] B. Schraen, *Sur la présentation des représentations supersingulières de* $\mathrm{GL}_2(F)$, J. Reine Angew. Math. **704** (2015), 187–208.

有限群の表現論における局所大域予想 – 最近5年間の大きな進展

越谷 重夫 (こしたに)　千葉大学 先進科学センター

1. 序文

今回の話題は、有限群のモジュラー表現論についてである。「有限群の表現論」とただ言ったら、一般的にまず思い浮かべることとは、複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限群 G の表現論であろう。これは群代数 $\mathbb{C}G$ 上の加群を考えることと、同値である。ふつうは、はっきり記述されないが、いわゆる 随伴 (adjoint, adjunction)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-algebara}}(\mathbb{C}G,\ \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{groups}}(G,\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$$

により、どちら側から出発しても同じである[1]。以下ここでは、有限次数の表現のみを扱うので、考える加群たちは皆、有限生成（基礎体上ベクトル空間と考えると有限次元）であるもののみを考える、ということになる。今回の話は（もちろん $\mathbb{C}$ 上表現も考えるが）ポイントは、正標数 p （したがって、p はある素数）の体 k 上の表現論を考える、ということである。もちろん、上の随伴性は $\mathbb{C}$ を k に置き換えても成立する。G の位数が p で割り切れれば、Maschke の定理 (1898) より、kG は半単純代数ではないので、直既約性と既約性は異なる。一番易しい例は、

$$\mathbb{C}(\mathbb{Z}/2) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix} \quad \mathbb{C}\text{-代数として},\quad k(\mathbb{Z}/2) \cong k[x]/(x^2) \quad k\text{-代数として。ただし } p=2$$

ここで、$\mathbb{Z}/2$ は位数 2 の巡回群、$k[x]$ は 1 変数多項式代数である。このような表現論は、「有限群のモジュラー表現論」と呼ばれている。以下、有限群の表現論と言ったら、このモジュラー表現論を意味することにする。この理論は I. Schur (1875–1941) の弟子であった Richard Brauer(1901–77) がそのほとんどの基礎理論を作り上げた。1920 − 50 年代頃の話である [7, Chapters VI, VII], [8] 。彼は、総括的報告講演でいくつかの、非常に興味ある問題、そして予想を多く発表した [3]。そこでの問題/予想のうち、幾つかは肯定的に解かれ、そして否定的に解かれたものもある。だが大きな問題は、部分的な肯定的解答は得られていても、完全に解かれた、というものが多くなく、ある意味、問題の言い換え

e-mail address: koshitan@math.s.chiba-u.ac.jp.

[1] [34, p.234]

（別の解釈を与えること）が多かったように思う[2]。そして、2012 年ころの「Brauer の高さゼロ予想の一方向の解決」 [18]、2015 年の「$p = 2$ のときのマッカイ予想解決」 [25] [3] あたりから、「有限単純群の分類定理」を用いて、ある意味力づくで、すべての場合を虱潰しに調べる、という方法で、いろいろな問題/予想を解いてしまう、というスタイルの論文が表れ始めた。もっとも正確に言うと Gerhard Michler などは 1980 年代からすでにその方向で定理を証明してはいたが [27]。この 2 つに、Gunter Malle の名前が出て来る。これはある意味自然である。もしもある予想/問題がほぼ単純群（準単純群）をチェックすれば十分、という風に帰着されたとする。すると、5 次以上の交代群に関してチェックすることは大体できる。26 個の散在型単純群についても何とか頑張る。リー型有限群で定義標数が p のものは、結構いろいろなことがわかっている。すると残りはリー型単純群で定義標数 ℓ が p とは異なる場合である。この群の表現論に関しては、G. Malle は非常に詳しい。これが上記で 2 回も彼の名前が出て来る理由だと私は推察している。いずれにしても、重要な未解決予想のうちマッカイ予想、およびアルペリンの重み予想の 2 つに関してはここ 10 年くらいの大発展のきっかけになった、一番の重要な結果は I.M. Isaace, G. Malle, G. Navarro の論文 [17] だと思う。これは有り体に言って、「マッカイ予想を解くには単純群の場合に帰着される」を正確に記述した最初の正式に公開された論文である[4]。

前置きが長くなってしまったが、今回の講演のポイントは

有限単純群の分類を十二分に使って、場合ごとのチェックで、とにかく力ずくで
有限群の表現論での未解決問題を解いてしまう

である。ということは、最終的に解いた人たちは疑いもなくすごいが、単純群の場合に帰着できる、を証明した人たちの貢献度も非常に高いと思う[5]。

2. 局所大域予想　その 1

以下、素数 p は止めておく。G は常に有限群である。ここで大域理論とは有限群 G の表現論を意味する。一方、局所理論とは G の部分群 $N_G(P)$ (ここで P は G の非自明な p-部分群）の表現論を意味することにする。

---

[2] 手前味噌ではあるが [19] に 7 年前くらい前までの情報が書いてある

[3] 2015 年 4 月ドイツ・オーバーヴォルファッハでの研究集会で初めて発表された。Malle はその瞬間の写真を自分のホームページに置いている。私もたまたまその場にいたが、結構感動した。ちなみにこの論文の共著者 Britta Späth は彼の元学生で、私も彼女と共著論文を 3 つ書いた。[22, 23, 24].

[4] 彼らも本文の中で言っているが「マッカイ予想よりずっと強いデイド予想を解くには、単純群の場合に帰着することができる、とデイド E.C.Dade 自身が幾つかの論文の中で述べているが ([10, 11, 12, 13])、彼ら 3 人の言い分は、その帰着定理の Dade による証明は未だに発表されていないじゃないか」と

[5] これで思い出すのは、例のフェルマーの定理は Andrew Wiles によって証明されたが、Gerhard Frey (フライ曲線) の貢献度も大きいはず

$$\begin{array}{lcl} \text{大域} & \cdots\cdots & \text{mod-}kG \\ & & \updownarrow \\ \text{局所} & \cdots\cdots & \text{mod-}kN_G(P) \end{array}$$

ここで、mod-kG は有限生成右 kG-加群たちからなるアーベル圏のことである。以下 $\mathrm{Irr}(G)$ で G の通常 ($\mathbb{C}$ 上）既約指標全体の集合（指標を表す時の数字は、次数)、$\mathrm{Irr}_{p'}(G)$ で、次数が p と素である既約指標たちの集合、$|X|$ で集合 X の元の個数を意味する。

(2.1) McKay 予想.[26] P を G の Sylow p-部分群とする。

$$|\mathrm{Irr}_{p'}(G)| = |\mathrm{Irr}_{p'}(N_G(P))| \quad \text{は本当だろうか？}$$

実例を考えてみる。

(2.2) 例.　まずは、$G \gneqq N_G(P)$ となる世の中で一番小さい例から。

(1) $G := \mathfrak{S}_3$（3 次対称群), $p := 2$, $P := \langle(12)\rangle$ とする。P は G の位数 2 の Sylow 2-部分群。すると $N := N_G(P) = P$ だから $\mathrm{Irr}(G) = \{1_G, 1' := \text{sign character},\ 2\}$, したがって、$|\mathrm{Irr}_{2'}(G)| = |\{1_G, \mathrm{sign}\}| = 2 = |\mathrm{Irr}_{2'}(N)| = |\mathrm{Irr}(N)|$. 確かに、**(2.1)** は成立している。

(2) （もう少し群を大きくして） $G := \mathbf{M}$ (モンスター群), $p = 11$ とする[6] 。このとき、G の Sylow 11-部分群を P とすると、$P \cong \mathbb{Z}/11 \times \mathbb{Z}/11$, そして $N := N_G(P)$ $= P \rtimes (\mathbb{Z}/5 \times \mathrm{SL}(2,5))$（半直積）がわかる。そして Atlas[6] などから $|\mathrm{Irr}_{11'}(G)| = 50 = |\mathrm{Irr}_{11'}(N)|$ が出て来る。このように大きな群でも **(2.1)** は成立している。

(2.3) 定理. Isaacs-Malle-Navarro [17]　G に対しての McKay 予想を確かめるには、G が　帰納的マッカイ条件 inductive McKay condition (以後 iMc と略記) を満たしているかをチェックすれば十分である。

この条件は複雑すぎで、ここでは到底述べられない。大雑把に言って、G の外部自己同型 $\mathrm{Out}(G)$, そして $\mathrm{Out}(G)$ を含む G より大きい群への G の通常既約指標の拡張などの言葉で、述べられている。ただ特別に、G が準単純 (quasi-simple) で、$\mathrm{Out}(G)$ が巡回群であれば

G は iMc を満たしている

$\Leftrightarrow$　次の二つの条件を満たす全単射 $\Omega : \mathrm{Irr}_{p'}(G) \to \mathrm{Irr}_{p'}(N_G(P))$ が存在する。

(1) Ω は $\mathrm{Out}(G)$ の作用と可換 ($\mathrm{Out}(G)$-equivariant)

[6] ちなみに、$|G| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \fallingdotseq 8 \times 10^{53}$. [15].

(2) Ω は、$Z(G)$ (G の中心) への制限と可換. ただし、Ω に出て来る 2 つの集合の係数を $\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ で拡大しておかねばならないが。

がわかる。さて、我々、モジュラー表現論に関心がある者は、上の様に群 G 全体での表現論があると、それを直ぐにブロック版に拡張したくなる習性がある。そこで、ブロックの復習をする。

kG は有限次元 k 上代数であるから有限個の（両側加群としての）直既約成分に一意的に分解される。

$$kG = B_0 \times B_1 \times \cdots \times B_n$$

つまり、各 B_i は両側加群 (両側イデアル) として直既約で、kG のブロックと呼ばれる。自明な単純加群 k_G は必ずどこか一つのブロック B_i に含まれている（言い換えると $k_G \cdot B_i \neq 0$ となる B_i がただ一つだけある）が、これを kG の主ブロックと呼び上の記号で、$B_0 =: B_0(kG)$ がそれだとする。以後単に B で kG のブロックを意味することとする。すると、B の不足群 (defect group) D が G-共役を除いて一意的に存在する。不足群とは、Sylow p-部分群の一般化で、いろいろ同値な定義、特徴づけがあるが、そのうちの一つは

D は自然な両側 B 代数としての全射 $B \otimes_{kH} B \twoheadrightarrow B$,
$\beta_1 \otimes \beta_2 \mapsto \beta_1\beta_2$ が分裂全射となる G の部分群 H のうちで極小のもの

で定義される。ここには D が p-群　という条件は入っていないがマシュケの定理より自動的に p-群となる。この D は G-共役を除いて一意的に定まる。全ての直既約 B-加群 X（つまり、X は直既約 kG-加群で、$XB \neq \{0\}$ となるもの）は、ある直既約 kD-加群を kG まで誘導した加群の直和因子になっている因みに、主ブロック B_0 の不足群とは G の Sylow p-部分群に他ならない。不足群 D の表現論が B の表現論を大きく統制（支配）していると言える。（不足群は、有限群と素数で決まる Sylow p 部分群の一般化である）。(このあたりのことは [29] 参照)。

B はもちろん k 上有限次元代数であるが、更に強い性質として対称代数になっている。以下、簡単のために、k は代数的閉体とする。マシュケの定理のブロック版（一般化）として

B は半単純（したがって単純）代数 $\Leftrightarrow$ B の不足群 (defect group) は自明

次に、ブロック理論での Brauer 対応の話が必要。G の p-ブロック B (kG のブロック・イデアルのこと）が不足群 D を持つとする。$N := N_G(D)$ とする。Brauer の第一主定理から、kN のブロック b が唯一つ決まる。この b を B のブラウアー対応子 (Brauer correspondent) と呼ぶ。その定義は、

b は、制限両側加群 $B{\downarrow}^{G\times G}_{N\times N}$ の直和因子として重複度 1 で現れる kN のブロック (b の不足群も D になる)。

今回の主題「局所大域」の観点で言えば、

$$\begin{array}{ll} \text{大域} \cdots\cdots & \text{mod-}B \\ & \quad\updownarrow \\ \text{局所} \cdots\cdots & \text{mod-}b \end{array}$$

さて、これで漸く McKay 予想のブロック版が定義できる。すなわち、

(2.4) Alperin-McKay 予想. [1] B, D, b を上の通りとする。また $N := N_G(D)$ とする。この時、

$$|\mathrm{Irr}_0(B)| = |\mathrm{Irr}_0(b)| \text{ は成立するであろうか?}$$

ここで $\mathrm{Irr}(B) := \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \,|\, \chi \text{は } B \text{ に属する } \}$（正確な定義を与えていない。[29, p.231] を参照）。また、$\mathrm{Irr}_0(B) := \{\chi \in \mathrm{Irr}(B) \,\big|\, p^{a-d}|\chi(1), p^{a-d+1} \nmid \chi(1)\}$. ここで、$G$ の Sylow p-部分群の位数を p^a, $|D| = p^d$ で、a, d は定義されている。$\mathrm{Irr}_0(B)$ に属する指標 χ は B に属する高さ height ゼロの指標、と呼ばれる。唐突ではあるが、D が G の Sylow p-部分群のときは $a = d$ なので、χ の高さゼロ $\Leftrightarrow p \nmid \chi(1)$ となり、したがって、Alperin-McKay 予想は、McKay 予想の一般化になっている。そしてこれに関しても「帰納的 Alperin-McKay アルペリン・マッカイ条件」 iAMc が定義される。すなわち

(2.5) 定理. iAMc. Späth [32] G のブロック B が iAMc を満たせば、B に関して **(2.4)** は成立する[7]。

3. 局所大域予想　その 2

以下記号は前節でのものを踏襲する。G, p, B, D, b, $N := N_G(D)$ などである。ここではまず最初に（前節でも名前が出てきた同じ）アルペリンによる重み予想、を扱う。更なる記号が必要。$\ell(G)$ で kG の非同型な既約（単純）加群の個数、そして G の重み weight とは、対 (Q, S) のことである。ここで Q は G の p-部分群をすべて動く。S は単純かつ射影的 $k(N_G(Q)/Q)$-加群。S は非同型なもののみを取っておく。また、(Q, S) に対して、G

[7] 余談をもうひとつ。私のこの結果の貢献 (?) は、Britta Späth に 2012 年 Oberwolfach で会った時、何度も「アルペリン・マッカイ予想だって、帰納的条件があるはずだ!」とけしかけたことである。実際彼女はこの時の講演で、Shigeo に何度も言われた、と発言している。

は共役で自然に作用しているが、G-共役である重みたちは同じもの、とみなすことにする。以上の下で、以下の予想が述べられた。

(3.1) 予想　Alperin の重み予想 (Alperin's Weight =AW conjecture) [2]

$$\ell(G) = |G \text{ の重み } (Q,S) \text{ たち }| \quad \text{は正しいだろうか?}$$

iMc の類似である、この予想の帰納的条件は Gabriel Navarro と Tiep によって与えられた。すなわち

(3.2) 定理. Navarro-Tiep [31]　G に対しての Alperin の重み予想を確かめるには、G に対して　帰納的アルペリン重み条件 inductive Alperin Weight condition iAWc をチェックすれば十分である。

この 2 つのことに対しても、当然のことながら、そのブロック版がある。予想自体は Alperin によって同時に既に提唱されている。記号と言葉の準備が必要。$\ell(B)$ は B に属する非同型単純 kG-加群の個数、そして「重み (Q,S) が B に属する」とは、「S を $kN_G(Q)$-加群と思った時、S は $N_G(Q)$ のあるブロック β に属するが、この β の G へのブラウアー誘導 β^G が B になっている」ということである（本当は言葉足らず。[29] を参照）。

(3.3) 予想.　ブロック版 Alperin の重み予想 (Block-wise Alperin's Weight =BAW 予想) [2]

$$\ell(B) = |B \text{ の重み } (Q,S) \text{ たち }| \quad \text{は正しいだろうか?}$$

そしてこれに対しても、やはり「帰納的ブロック版アルペリンの重み予想の条件」iBAWc が定義できる。またまた、Britta Späth の登場である[8]。

(3.4) 定理. iBAWc　Späth　[33]　G のブロック B が iBAWc を満たせば、B に関して **(3.3)** は成立する。

あと最後に、Brauer の高さゼロ予想を述べる。

(3.4) Brauer の高さゼロ予想. Height Zero Conjecture=HZC　[3]　B を G のブロック、D を B の不足群とする。この時、次は正しいだろうか？

$$\mathrm{Irr}_0(B) = \mathrm{Irr}(B) \iff D \text{ は可換.}$$

[8]彼女はこれら一連の素晴らしい仕事で、2015 年 10 月からドイツ・Wuppertal 大学で教授のである

次に、Brauer の高さゼロ予想と iAMc が不思議に結びついていることが次でわかる。後程もう一度述べるが、この事実には、実は**村井正文**による非常に大きな貢献がある[9]。さて、下記の定理で必要な言葉使いの定義。ここで、「群 S が有限群 G に involve されている」とは、「G の部分群 H とそれの正規部分群 N が存在して $H/N \cong S$ となっていること」の意味だとする。

(3.5) 定理. (Brauer の高さゼロ予想と iAMc). Navarro-Späth [30] 素数 p と有限群 G を考える。ここで、G に involve されているすべての非可換単純群 S に対して iAMc が成立しているとする。すると Brauer の高さゼロ予想 **(3.4)**$\Rightarrow$ は正しい。

4. 局所大域予想に関する結果

(4.1) 定理. (Kessar-Malle [18]) ブラウアーの高さゼロ予想 **(3.4)** において、$\Leftarrow$ は正しい。

これも、有限単純群の分類を十二分に使って力業でねじ伏せた、といった感じの証明である。

(4.2) 定理. (Malle-Späth [25]) $p = 2$ の場合のマッカイ予想 **(2.1)** は正しい[10]。

証明は、もちろん iMc を使って、そして有限単純群の分類定理を十二分に使って解いている（ようだ)。

筆者が関わった定理についても紹介したい[11]。

[9] 下記の Navarro-Späth の定理、そして Späth による 2 つのブロック版（準）単純群への帰着定理**定理 (2.5), (3.4)** は実は、元々のアイデアは 村井正文による。村井氏は不幸な事故で、2012 年 7 月に亡くなった。[37] 参照。2011 年ころからずっと Navarro, Späth は "I/We admire Murai's results!" と筆者に向かって、何度も言っていたことを思い出す。

[10] マッカイ予想 **(2.1)** において、マッカイ自身の論文での原型は $p = 2$ かつ G は有限単純群に限られていた。もちろん、Malle と Späth によるこの場合は、$p = 2$ という条件が付くものの、G は任意の有限群である。

[11] 裏話をすれば、この一連の 3 つの論文のきっかけは、これも「村井正文さんの論文 [28] を使えば Dade が考え出した群 $G[b]$ [9, Corollary 12.8] を上手く使うことができる！」と Britta Späth が見抜いたことが、始まりであった。

(4.3) 定理. (Späth-越谷). [22, 23, 24]

(1) G をある有限非可換単純群 S の普遍被覆 (universal covering) であって、B を不足群 D を持つ G のブロックとする。もしも D が巡回群であれば、B に対して iAMc は成立する。

(2) B は、準単純群 G のブロックとする。更にもしも B がベキ零 (nilpotent) ブロックであれば、iBAWc は成立する。

(3) S をある非可換単純群、G を S の普遍被覆とする。更に G の Sylow p-部分群は巡回群で、なおかつ $\mathrm{Out}(S)$ は非巡回群だとする。すると、G のすべてのブロック B に対して、iAMc, iBAWc の両方が成立する。

上記の定理は、ベキ零とか、不足群は巡回群、などの条件が付くわけだが、実はいろいろな一般的な条件の下でのの定理の証明の際には、実はいろいろなステップで必要となるので、結構使い勝手は悪くはない（と自負している)。

5. 局所大域予想　その 3—より構造的なもの

過去 5 年ではなくて、既に 20 年くらい続けてきている仕事はもちろん、局所大域予想の一つではあるのだが、今まで出て来たもののように、「指標の数を数える」に留まらず、より構造的な（したがって、より難しい？）予想に関係している。つまり、「ブルエの可換不足群予想 Broué's Abelian Defect Group Conjecture ADGC」である（ [4, 5] 参照)。ここでは ADGC に関してあまり詳しくは述べない。次の定理のみを紹介しておくにとどめる。

(5.1) 定理. 功刀-越谷 (2002) [21, 20] G を勝手な有限群で Sylow 3-部分群 D は可換だとする。そして、B, b をそれぞれ $G, N_G(D)$ の主ブロックとする。すると、次の 2 つの三角圏は同値である。

$$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\text{mod-}B) \ \cong \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\text{mod-}b).$$

ここで $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ はアーベル圏 $\mathcal{A}$ の有界 (bounded) 導来圏 (derived category) を意味している。見てお分かりの通り、これだってまさしく「大域、局所」の関係になっている。ちなみに上の　B, b は、互いにブラウアー対応子になっている。

謝辞 千葉大学 澤辺正人さん、および会場関連で御世話になった大阪大学の関係の方々に深く感謝の意を表します。

References

[1] , J.L. Alperin, The main problem of block theory, In: Proceedings of the Conference on Finite Groups, Univ. Utah, Park City, Utah (1975), Academic Press, New York, 1976, pp.341–356.

[2] J.L. Alperin, Weights for finite groups, in "The Arcata Conference on Representations of Finite Groups", edited by P.Fong, Proc.Symposia in Pure Math. Vol.47, Amer. Math. Soc., 1987, pp.369–379.

[3] R. Brauer (河田敬義 訳), 有限群の表現, in "現代の数学 I" (T.L. サーティー編), 岩波書店, 1965, 197–257.

[4] M. Broué Isométries de caractères et équivalences de Morita ou dérivées, Publ. Math. I.H.E.S. **71** (1990), 45–63.

[5] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras. In: Finite Dimensional Algebras and Related Topics, edited by V. Dlab, L.L. Scott, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1994. pp.1–26.

[6] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, Atlas of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[7] C.W. Curtis, Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer, History of Mathematics, Vol.15, Amer. Math. Soc. and London Math. Soc., 1999.

[8] チャールズ・W・カーティス, 有限群の表現–フロベニウスからブラウアーまで, in 数学を語ろう **2** 代数・数論 数学史篇, R. ウイルソン/J. グレイ編, 三宅克哉 訳, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2006, pp.163–185.

[9] E.C. Dade, Block extensions, Ill. J. Math. **17** (1973), 198–272.

[10] E.C. Dade, Counting characters in blocks I, Inv. Math. **109** (1992), 187–210.

[11] E.C. Dade, Counting characters in blocks II, J. reine angew. Math. **448** (1994), 97–190.

[12] E.C. Dade, Counting characters in blocks with cyclic defect groups I, J. Algebra **186** (1996), 934–969.

[13] E.C. Dade, Counting characters in blocks 2.9, in "Representation Theory of Finite Groups", edited by R. Solomon, de Gruyter, 1997, pp.45–60.

[14] E.C. Dade, Another way to count characters, J. reine angew. Math. **510** (1999), 1–55.

[15] 原田 耕一郎, モンスター – 群のひろがり, 岩波書店, 1999.

[16] M. Holloway, S. Koshitani, N. Kunugi, Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of index p, Archiv der Mathematik **94** (2010), 101–116.

[17] I.M. Isaacs, G. Malle, G. Navarro, A reduction theorem for the McKay conjecture, Invent. math. **170** (2007), 33–101.

[18] R. Kessar, G. Malle, Quasi-isolated blocks and Brauer's height zero conjecture, Ann. of Math. **178** (2013), 321–384.

[19] 越谷重夫, 群を表現するとは–モジュラー表現論, 現在過去未来, 2010 年度日本数学会年会, 企画特別講演, 慶應義塾大学, 2010 年 3 月 27 日.

[20] S. Koshitani, N. Kunugi, The principal 3-blocks of the 3-dimensional projective special unitary groups in non-defining characteristic, J. reine angew. Math. **539** (2001), 1–27.

[21] S. Koshitani, N. Kunugi, Broué's conjecture holds for principal 3-blocks with elementary abelian defect group of order 9, J. Algebra **248** (2002), 575–604.

[22] S. Koshitani, B. Späth, Clifford theory of characters in induced blocks, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), 3687–3702.

[23] S. Koshitani, B. Späth, The inductive Alperin-McKay condition for 2-blocks with cyclic defect groups, Arch. Math. **106** (2016), 107–116.

[24] S. Koshitani, B. Späth, The inductive Alperin-McKay and blockwise Alperin weight conditions for blocks with cyclic defect group and odd primes, J. Group Theory **19** (2016), 777–813.

[25] G. Malle, B. Späth, Characters of odd degree, Ann. of Math. **184** (2016), 869–908.

[26] J. McKay, Irreducible representations of odd degree, J. Algebra **20** (1972), 416–418.

[27] G.O. Michler, Contributions to modular representation theory of finite groups, In: 'Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras', Birkhäuser, Basel, 1991, 99–140.

[28] M. Murai, On blocks of normal subgroups of finite groups, Osaka J. Math. **50** (2013), 1007–1020.

[29] 永尾 汎, 津島行男, 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[30] G. Navarro, B. Späth, On Brauer's height zero conjecture, J. European Math. Soc. **16** (2014), 695–747.

[31] G. Navarro, P.H. Tiep, A reduction theorem for the Alperin weight conjecture, Inv. Math. **184** (2011), 529–565.

[32] B. Späth, A resuction theorem for the Alperin-McKay conjecture, J. Reine Angew. Math. **680** (2013), 153–189.

[33] B. Späth, A resuction theorem for the blockwise Alperin weight conjecture, J. Group Theory **16** (2013), 159–220.

[34] 土岡俊介, 表現論と圏論化, 「圏論の歩き方」 圏論の歩き方委員会 編, 日本評論社, 第 14 章, 2015.

[35] 宇野勝博, 功刀直子, 有限群のモジュラー表現論における予想について, (論説) 雑誌「数学」 日本数学会編集, 岩波書店, 第 65 巻 第 1 号, 2013 年 1 月, pp.1–23.

[36] 渡辺アツミ, 有限群のモジュラー表現論, 数理科学 7 月号 (1996), pp.66-71.

[37] 渡辺アツミ, 村井正文 氏の業績 (On the work of Masafumi Murai), 数理解析研究所講究録 **1967** 巻 (2015), pp.138–152.

Schurの分割定理の一般化について

東京大学大学院数理科学研究科　土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*

1　イントロダクション

I.Schur(1875–1941) は 1926 年に次の分割定理を証明した．

定理 1.1 (Schur 分割定理，Schur partition theorem, **SPT**)．$n \geq 0$ について，以下の条件を満たす n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ は，それぞれ同数存在する．

(a) 任意の $1 \leq i \leq \ell$ について $\lambda_i \equiv \pm 1 \pmod 6$

(b) 任意の $1 \leq i < \ell$ について $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 3$ が成り立ち，$\lambda_i \in 3\mathbb{Z}$ のとき $\geq$ は $>$.

分割についての記法を確認する．$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ が分割 (partition) であるとは，各 λ_i たち（λ のパートと呼ぶ）は整数であって，さらに $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \geq 1$ が成り立つことである．また $\ell(\lambda) := \ell$, $|\lambda| := \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$, $m_j(\lambda) := |\{1 \leq i \leq \ell \mid \lambda_i = j\}|$（$|S|$ によって有限集合 S の元の個数を表す）と設定して，それぞれ λ の長さ，λ のサイズ，λ 中の j の重複度と呼ぶ．

λ が自然数 $n \geq 0$ の分割であるとは，$|\lambda| = n$ となることをいう．n の分割の集合を $\mathsf{Par}(n)$ と表し，分割の集合を Par と書く．

▍ **分割定理のテンプレート**　$\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathsf{Par}$ について，$\forall n \geq 0, |\mathcal{C} \cap \mathsf{Par}(n)| = |\mathcal{D} \cap \mathsf{Par}(n)|$.

本稿で分割定理 (partition theorem, **PT**) とは，上の形の命題「うまく分割のクラス $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ を設定すれば,「$\mathcal{C}$ な」n の分割と「$\mathcal{D}$ な」n の分割は同数ある」という主張を意味し，$\mathcal{C} \overset{\text{PT}}{\sim} \mathcal{D}$ と書く．

2　Euler 分割定理

古い分割定理に，Euler によるとされる $\text{Strict} \overset{\text{PT}}{\sim} \text{Odd}$ がある．ここで，ストリクト分割 (strict partitions)，奇数分割 (odd partitions) と呼ばれる分割の集合 Strict と Odd は

$$\text{Strict} := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \geq 1,\ m_i(\lambda) \leq 1\}, \quad \text{Odd} := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \geq 1,\ m_{2i}(\lambda) = 0\}$$

と定義される．証明として，ここでは母関数によるものを思い出そう．つまり，$\mathcal{C} \subseteq \mathsf{Par}$ について

$$g_{\mathcal{C}}(q) := \sum_{n \geq 0} |\mathcal{C} \cap \mathsf{Par}(n)| q^n \ (= \sum_{\lambda \in \mathcal{C}} q^{|\lambda|}) \tag{1}$$

としたとき，形式的べき級数の等式 $g_{\text{Strict}} = g_{\text{Odd}}$ を示せばよい．積展開の意味を考えると

$$g_{\text{Strict}}(q) = \prod_{i \geq 1} (1 + q^i), \quad g_{\text{Odd}}(q) = \prod_{i \geq 1 : \text{奇数}} \frac{1}{1 - q^i}$$

が分かり，この表示から $g_{\text{Strict}} = g_{\text{Odd}}$ が示される．

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, The research was supported by JSPS Kakenhi Grants 17K14154.

3 Rogers-Ramanujan 連分数・恒等式・分割定理

SPT は，より有名な Rogers-Ramanujan 分割定理（RRPT）の mod 6 版である．Ramanujan が Hardy に送った手紙中の以下の公式が，話の発端である（Hardy の回想は印象的だ [Har]）．

定理 3.1 (Rogers-Ramanujan 連分数)**.**

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{\ddots}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/5}.$$

唐突だが，(2) を満たす形式的べき級数 $F(x,q)$ を考える：

$$F(x,q) = F(xq,q) + xqF(xq^2,q). \tag{2}$$

(2) より，$c(x,q) := \frac{F(x,q)}{F(xq,q)}$ は入れ子構造

$$c(x,q) = 1 + \frac{xq}{c(xq,q)} = 1 + \frac{xq}{1+\frac{xq^2}{c(xq^2,q)}} = \cdots$$

を持ち，RR 連分数の左辺は $1/c(1,e^{-2\pi})$ となる．特に，$F(1,q)$ と $F(q,q)$ を理解すればよい．

定理 3.2 (Rogers-Ramanujan 恒等式)**.**

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n\geq 0} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$
$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n\geq 0} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}.$$

ここで左辺の無限和は，$F(1,q), F(q,q)$ の一種である．これは $F(x,q) = \sum_{n\geq 0} A_n(q)x^n$ とすると

$$A_n(q) = q^n A_n(q) + q^{2n-1} A_{n-1}(q)$$

が (2) よりえられるので，$A_0(q) = 1$ であれば

$$A_n(q) = \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

であるからだ．RR 恒等式は初等的な見かけをしているが，Hardy 周辺の数学者は証明できなかった．実際，1915 年に出版された MacMahon の *Combinatory Analysis* には，「Ramanujan の等式」という章があるが，そこでは予想として紹介されている．Ramanujan は 1917 年に Proc.LMS をめくっていて，1894 年に Rogers が RR 恒等式をえていたことを再発見した [Rog]．さて MacMahon と Schur は，RR 恒等式と，以下の RRPT との同値性を独立に観察した（[An2, §8] も参照）．

定理 3.3 (Rogers-Ramanujan 分割定理，**RRPT**)**.** $R \overset{PT}{\sim} T_{5,1}$ と $R' \overset{PT}{\sim} T_{5,2}$ が成り立つ．ここで

$$R = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid 1 \leq \forall i < \ell(\lambda),\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 2\}$$
$$R' = \{\lambda \in R \mid \ell(\lambda) \geq 1 \Longrightarrow \lambda_{\ell(\lambda)} \geq 2\}$$
$$T_{a,b} = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid m_i(\lambda) \geq 1 \Longrightarrow i \equiv \pm b \pmod{a}\}.$$

SPT は $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{5,1}$ の mod 6 版である．そのまま 5 を 6 にすれば，$T_{5,1}$ は $T_{6,1}$ になる．R は

$$S_3' := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid 1 \leq \forall i < \ell(\lambda),\ \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 3\}$$

となりそうだが，$n = 9$ のとき $(6,3) \in S_3'$ を排除すれば数勘定があうという観察から

$$S_3 := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \lambda \text{ は冒頭の条件 (b) を満たす }\}$$

と条件を足したものを R の mod 6 版とすると，$S_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{6,1}$ が成り立つ，というのが SPT である．「差条件」（$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 3$）に加えて，「部分パターンの禁止」（$(6,3),(9,6),\cdots$ を含まない）が RRPT にはなかった特徴である．

4　Andrews のレシピ 1·2·3 による RRPT と SPT の証明

RRPT や SPT などの，いわゆる「RR 型分割定理」の古典的な証明の定石を復習し，SPT の証明を与えよう．要点は，(1) の精密化になっているような

$$G_{\mathcal{C}}(x,q) := \sum_{\lambda \in \mathcal{C}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} \tag{3}$$

を考えることである．$G_{\mathcal{C}}(1,q) = g_{\mathcal{C}}(q)$ となっていればよいので，(3) の x の肩は柔軟に設定してよい．G.E.Andrews によると，$\mathcal{C} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathcal{D}$ を証明する古典的な定石は

(R1) $G_{\mathcal{C}}(x,q)$ についての q 差分方程式を立てる

(R2) q 差分方程式を解き $G_{\mathcal{C}}$ の「表示」をえる

(R3) q 級数恒等式を援用して $\mathcal{C} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathcal{D}$ を演繹する

と要約される [An4]．これは大雑把な方針というべきものだ．現在でも分割定理の研究が続いているのは，分割定理を証明するアルゴリズムが存在しないからだと思われる．

(R1) については，$\mathcal{C} \subseteq \mathsf{Par}$ が [An1, §8] の意味の「リンク分割イデアル (linked partiton ideal)」（本稿では定義を説明しない）であれば，$G_{\mathcal{C}}(x,q)$ の q 差分方程式が存在し，かつそれを求めるアルゴリズムがある．R と S_3 はリンク分割イデアルになっていて

$$G_R(x,q) = G_R(xq,q) + xqG_R(xq^2,q) \tag{4}$$

$$G_{S_3}(x,q) = (1 + xq + xq^2)G_{S_3}(xq^3,q) + xq^3(1 - xq^3)G_{S_3}(xq^6,q) \tag{5}$$

が自動的にえられる（直接導出も難しくない）．また (4) は (2) と同一であることにも注意しよう．

まずは RRPT を証明する．唐突だが，べき級数

$$f_i := \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n} q^{\frac{n(5n+3)}{2} - in}(1 - x^{i+1}q^{(2n+1)(i+1)})}{(1-q)\cdots(1-q^n)\prod_{j \geq n+1}(1 - xq^j)}$$

を考える（$i \geq 0$）．f_i を思いつくのは至難の業だが，

$$f_i(x,q) = f_{i-1}(x,q) + x^i q^i f_{1-i}(xq,q) \tag{6}$$

が成り立つ（ここで $f_{-1} = 0$），といわれたら，確認は high school algebra で可能である．

詳細は省略するが，(6) と (4) と初期条件から $G_R = f_1$ が証明される．これが (R2) の実行例である．(R3) に移る．$g_R(q) = G_R(1,q) = f_1(1,q)$ は

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n(5n+1)/2}(1-q^{4n+2})/\Delta \tag{7}$$

と展開されるが（$\Delta := \prod_{n\geq 1}(1-q^n)$），不思議なことに分子は $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n(5n+1)/2}$ と等しい．これは $q^{n(5n+1)/2}q^{4n+2} = q^{(5n+4)(n+1)/2} = q^{(5n'+1)n'/2}$ だからである（$n' := -1-n$）．(7) と

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n(5n+1)/2} = \Delta\cdot\prod_{n\geq 0}(1-q^{5n+1})^{-1}(1-q^{5n+4})^{-1}$$

（Jacobi 三重積）をあわせると

$$g_R(q) = \prod_{n\geq 0}(1-q^{5n+1})^{-1}(1-q^{5n+4})^{-1}$$

がえられるが，右辺はまさに $g_{T_{5,1}}(q)$ である．これで RRPT $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{5,1}$ が証明された．

SPT についても (R2), (R3) を完遂し，証明を完成させよう．SPT は RRPT の条件に加えてさらに「部分パターンの禁止」があるので，RRPT よりも難しいと考えられる．しかし少なくとも (R2) については，そうではない．漸化式 (5) を解くために，

$$G_{S_3}\Big/\prod_{n\geq 0}(1-xq^{3n}) = \sum_{n\geq 0}B_n(q)x^n \tag{8}$$

によってべき級数 $B_n(q)$ を定義すると，(5) より

$$B_n = \frac{(1+q^{3n-1})(1+q^{3n-2})}{1-q^{3n}}B_{n-1}$$

がえられる．$B_0 = 1$ より G_{S_3} を解くことができた．(R3) に移る．安直に $x=1$ としてしまうと，(8) の分母が 0 になるので注意が必要である．そこで

$$G_{S_3} = \prod_{n\geq 1}(1-xq^{3n})\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}x^n(B_n - B_{n-1})$$

として（ここで $B_{-1} = 0$），$x=1$ とすれば

$$g_{S_3} = B_\infty\prod_{n\geq 1}(1-q^{3n}) = \prod_{n\geq 0}(1+q^{3n+1})(1+q^{3n+2})$$

をえる．右辺が $g_{T_{6,1}} = \displaystyle\prod_{n\geq 0}(1-q^{6n+1})^{-1}(1-q^{6n+5})^{-1}$ であることは易しく，SPT $S_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{6,1}$ が示された．その他，Bessenrodt や Bressoud による，全単射を用いた SPT の証明も知られている [Be1, Bre]（[An2, §4.4] も参照）．

なお，たったいま証明した SPT と等価な形式的べき級数の等式

$$\sum_{\lambda\in S_3}q^{|\lambda|} = \prod_{n\geq 0}(1+q^{3n+1})(1+q^{3n+2})$$

の左辺を，印象的な無限和に書いて「Schur 恒等式」をえるのは難しいようである（Hardy は「RR 恒等式より美しい公式を発見するのは難しい」と述べている [HW]）．

5　Andrewsの3パラメータRRPTとSPTの$p=5$版（5SPT）

1970年代，Andrewsはレシピ1·2·3を推し進め，RRPTの3パラメータ一般化に成功した [An3].

定理 5.1 (3パラメータRRPT，Andrews). 自然数$\ell, k, a \geq 1$が$0 \leq \ell/2 < a \leq k \geq \ell$を満たすとき$A_{\ell,k,a} \overset{PT}{\sim} B_{\ell,k,a}$が成り立つ．ここで，必要な定義は以下のとおりである：

$$A_{\ell,k,a} = \begin{cases} \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \textit{(A1)}_{\ell+1}, \textit{(A2)}\} & (\ell \text{ が偶数}) \\ \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \textit{(A1)}_{(\ell+1)/2}, \textit{(A2)}, \textit{(A3)}\} & (\ell \text{ が奇数}) \end{cases}$$

$$B_{\ell,k,a} = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \textit{(A1)}_{\ell+1}, \textit{(B1)}, \textit{(B2)}, \textit{(B3)}\}.$$

(A1)$_b$　$m_i(\lambda) > 1 \Longrightarrow i \in b\mathbb{Z}$

(A2)　$m_i(\lambda) = 0 \Longleftarrow i \equiv 0, \pm(2a-\ell)(\ell+1)/2 \pmod{(2k-\ell+1)(\ell+1)}$

(A3)　$m_i(\lambda) = 0 \Longleftarrow i \equiv \ell+1 \pmod{2(\ell+1)}$

(B1)　$1 \leq \forall i \leq \ell(\lambda) - k + 1, \lambda_i - \lambda_{i+k-1} \geq \ell + 1$，かつ$\lambda_i \in (\ell+1)\mathbb{Z}$ならば$\geq$は$>$

(B2)　$1 \leq \forall j \leq (\ell+1)/2, \sum_{i=j}^{\ell-j+1} m_i(\lambda) \leq a - j.$

(B3)　$\sum_{i=1}^{\ell+1} m_i(\lambda) \leq a - 1.$

$\ell = 0,\ k = a = 2$がRRPT $R \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{5,1}$を，$\ell = 0,\ k = 2,\ a = 1$がRRPT $R' \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{5,2}$を，$\ell = k = a = 2$がSPT $S_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} T_{6,1}$を，それぞれ復元する．今，$\ell = 4,\ k = a = 3$とすると

$$A_{4,3,3} = C_2 \cap C_5, \quad B_{4,3,3} = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \text{(S1)},\text{(S2)},\text{(S3)}_0\}$$

だが，定理の前提$0 \leq \ell/2 < a \leq k \geq \ell$が破られているため，本当に$A_{4,3,3} \overset{\mathrm{PT}}{\not\sim} B_{4,3,3}$となっている．しかしSPTの$S_3$を定義したときのように，条件を足した$S_5 = B^{\circ}_{4,3,3} \subsetneq B_{4,3,3}$を定義すると「3パラメータRRPT $A_{4,3,3} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} B^{\circ}_{4,3,3}$が成り立つ」とAndrewsは予想し [An3] を締めくくった．

定義 5.2. $C_a := \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid m_i(\lambda) > 0 \Longrightarrow i \notin a\mathbb{Z}\}$を*a-class regular*分割の集合とする．

Andrewsの予想＝定理（Andrews-Bessenrodt-Olsson [ABO], 5SPT）　$S_5 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2 \cap C_5$が成り立つ．ここで$S_5 = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \text{(S1)}_2, \text{(S2)}_2, \forall j \geq 0, \text{(S3)}_j, \text{(S4)}_j, \text{(S5)}_j\}$.

(S1)$_h$　$m_i(\lambda) > 1 \Longrightarrow i \in (2h+1)\mathbb{Z}$

(S2)$_h$　$1 \leq \forall i \leq \ell(\lambda) - h,\ \lambda_i - \lambda_{i+h} \geq 2h+1$，かつ$\lambda_i \in (2h+1)\mathbb{Z}$ならば$\geq$は$>$

(S3)$_j$　$m_{5j+3}(\lambda) + m_{5j+2}(\lambda) \leq 1$

(S4)$_j$　$m_{5j+6}(\lambda) + m_{5j+4}(\lambda) \leq 1$

(S5)$_j$　$m_{5j+11}(\lambda) + m_{5j+10}(\lambda) + m_{5j+5}(\lambda) + m_{5j+4}(\lambda) \leq 3$

本稿でSPTの$p = 2h+1$版とは，次のような命題を想定している（$T_{6,1} = C_2 \cap C_3$に注意する）．(S1)$_h$,(S2)$_h$も($\diamondsuit$)の一種である．(S3)$_j$,(S4)$_j$,(S5)$_j$は，(S1)$_2$,(S2)$_2$もあわせると

$$\lambda \text{ は，} \mathrm{shift}_5^j((3,2)), \mathrm{shift}_5^j((6,4)), \mathrm{shift}_5^j((11,10,5,4)) \text{ を部分に含まない}（j \geq 0）$$

のように「部分パターンの禁止」でいいかえられる．

一般 SPT のテンプレート　奇数 $p=2h+1\geq 3$ について $S_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2\cap C_p$ が成り立つ．ここで S_p とは，ある有限集合 $\Omega_p\subseteq \mathsf{Par}$ を用いて,「$\lambda\in S_p$ であることが

$$\forall k\geq 0, \forall \mu\in\Omega_p, \lambda \text{ は } \mathrm{shift}_p^k(\mu) \text{ を部分に含まない} \tag{$\Diamond$}$$

ことと同値」と定義される（仮想的な）「Schur 正則分割」の集合である．また $\mathrm{shift}_p^k(\mu)$ は，μ のすべてのパート μ_i に kp を足してえられる分割である．

5SPT は，20 年後，Andrews-Bessenrodt-Olsson によって証明された [ABO]．その手法は (3) の多項式近似に基づくもので，詳細を [Ts1] に書いたので，参照されたい．この 5SPT の証明には

- 証明の遂行に計算機が不可欠である
- 5SPT が成り立つ本質が明らかにならない

などの不満が残る．特に「人間が手で紙に書き下せる」証明は知られていなかった．

6　主定理：SPT の $p=2h+1$ 版（pSPT）

2016 年 2 月下旬に，筆者は当時，東大数理の院生だった渡部正樹さんとの共同研究において，SPT の一般の奇数 $p=2h+1$ 版と考えられる定理を発見・証明した [TW]．

定義 6.1. 奇数 $p=2h+1$ について，有限集合 Ω_p を

$$\left\{\begin{array}{ccc} (p+1,p-1), & (h+1,h), & (2p+1,*^h,p-1) \\ (p+2,*,p-2), & (h+2,*,h-1), & (2p+2,*^{h+1},p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (3h,*^{h-2},h+2), & (p-2,*^{h-2},2), & (5h+1,*^{p-3},h+2) \end{array}\right\}$$

と定義する．$*$ はワイルドカードで，そこに数を入れると分割になるような任意の数を表している．また $*^a$ は $*$ の a 個の並びを表す略記法である．

定理 6.2 (Watanabe-T, pSPT)**.** 任意の奇数 $p=2h+1\geq 3$ について，$S_p \overset{PT}{\sim} C_2\cap C_p$ が成り立つ．ここで $S_p := \{\lambda\in\mathsf{Par} \mid \textit{(S1)}_h,\textit{(S2)}_h,(\Diamond)\}$.

これは $p=3,5$ で Schur の SPT, Andrews らの 5SPT にそれぞれ一致する．$p=3$ の場合は $\Omega_3=\emptyset$ となって易しいので，$p=5$ のとき $X:=\{\lambda\in\mathsf{Par}\mid (\mathrm{S1})_2,(\mathrm{S2})_2,(\Diamond)\}$ を考える．ここで，$\Omega_5=\{(6,4),(3,2),(11,*_1,*_2,4)\mid 11\geq *_1\geq *_2\geq 4\}$ である．$\lambda\in X$ は，すべての $j\geq 0$ について

- $\mathrm{shift}_5^j((6,4))$ を含まないので，$*_1\neq 9$, $*_2\neq 6$
- $\mathrm{shift}_5^j((3,2))$ を含まないので，$(*_1,*_2)\neq(8,7)$

としても X は変わらない．$(\mathrm{S1})_2$ もあわせると，$\Omega_5=\{(6,4),(3,2),(11,10,5,4)\}$ としても X は変わらず，望み通り $X=S_5$ をえる．

pSPT のような「記憶できる」初等的な PT が未発見だったのは意外だが，Bessenrodt らによる 7SPT の発見の試みがあった以上，事実である．「（RR 恒等式の）真に簡単な証明を期待するのが不合理なことは疑いない」という Hardy による見解 [Har] によれば，RRPT の mod 6 版である SPT=3SPT も証明は簡単でないといってよいだろう．さらに 5SPT の歴史的経緯も考えると，pSPT の「真に簡単な」証明を望むのは野心的であるといえる．

7　pSPT の（対称群・量子群の）表現論的背景（S_p の定義について）

われわれは，対称群の p モジュラースピン表現論の研究から，pSPT に導かれた．証明は間接的で，京都スクール流の量子群の表現論，特に柏原正樹さん (RIMS) による結晶基底 (crystal base) の理論の応用としてえられる．$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を対称化可能 GCM（generalized Cartan matrix）[Kac, §2.1]，$(P, P^\vee, \Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}, \Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\})$ を A の Cartan データとする [Ka1, §2.1].

定義 7.1 ([Ka1, §7.2])**.** 柏原クリスタルとは，以下の公理 *(K1)–(K5)* を満たす *6* つ組 $(B, \mathsf{wt}, (\tilde{e}_i)_{i\in I}, (\tilde{f}_i)_{i\in I}, (\varepsilon_i)_{i\in I}, (\varphi_i)_{i\in I})$ である（ここで B は集合，$\mathsf{wt} : B \to P, \varepsilon_i, \varphi_i : B \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \to B \sqcup \{\mathbf{0}\}$ は関数）．

(K1) $\forall i \in I, \forall b \in B, \varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \mathsf{wt}(b)\rangle$

(K2) $\forall i \in I, \forall b \in B, \tilde{e}_i b \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathsf{wt}(\tilde{e}_i b) = \mathsf{wt}(b) + \alpha_i, \varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1, \varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$

(K3) $\forall i \in I, \forall b \in B, \tilde{f}_i b \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathsf{wt}(\tilde{f}_i b) = \mathsf{wt}(b) - \alpha_i, \varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1, \varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$

(K4) $\forall i \in I, \forall b \in B, \forall b' \in B, \tilde{e}_i b = b' \Leftrightarrow b = \tilde{f}_i b'$

(K5) $\forall i \in I, \forall b \in B, \varphi_i(b) = -\infty \Rightarrow \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = \mathbf{0}$

支配的整ウェイト $\lambda \in P^+$ について，柏原は量子群 $U_q(A)$ の可積分表現 $V(\lambda)$ の結晶基底 $B(\lambda)$ の存在と一意性を証明した [Ka2, Theorem 2]．柏原クリスタルのうち，$B(\lambda)$ の disjoint union になっている regular クリスタルは特に重要である．これらはテンソル積中の組成重複度や parabolic 部分代数に関する分岐則を与え，さらに Young 図形や Littlewood-Richardson 規則といった有名だがアドホックに思われた対象の統一的な理解（例えば [Ka1, §5] を参照）や類似物の構成（例えば [KN, GJK^3] を参照）をもたらす．対称群の表現論と柏原クリスタルの関係をみてみよう．

定理 7.1 (Kleshchev モジュラー分岐則 [Kle])**.** 素数 $p \geq 2$ について，既約表現の集合 $\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n))$ は，$A^{(1)}_{p-1}$ 型 $B(\Lambda_0)$ で分岐則こみで *parameterize* できる：$\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_\ell\mathfrak{S}_n)) \cong B(\Lambda_0)$.

定義 7.2. R を可換整域とする．R 上の対称群の捻じれ群環 $R\mathfrak{S}^-_n$ とは，*odd* な $\{t_i \mid 1 \leq i < n\}$ で生成され，以下を定義関係式に持つ R 超代数である（$1 \leq a \leq n-2$ かつ $1 \leq b, c < n$ で $|b-c| > 1$）．

$$t_b^2 = 1, \quad t_a t_{a+1} t_a = t_{a+1} t_a t_{a+1}, \quad t_b t_c = -t_c t_b.$$

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の体 $\mathbf{k}$ 上のスピン表現論は，$\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\mathbf{k}\mathfrak{S}^-_n)$ の考察とほぼ同義である（ここで，super の圏や既約表現の同型類の定義は行わない．[Kle, KKT] などを参照されたい）．本稿では

(a) $\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{Q}}\mathfrak{S}^-_n)$ の考察を「対称群の通常スピン表現論」

(b) 奇素数 $p \geq 3$ について $\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}^-_n)$ の考察を「対称群の p モジュラースピン表現論」

と呼ぶ．[BK1, Theorem 8.11] で対称群のスピン表現論におけるモジュラー分岐則がえられた．

定理 7.2 (Brundan-Kleshchev)**.** 奇素数 $p \geq 3$ について，既約表現の集合 $\mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}^-_n))$ は，$A^{(2)}_{p-1}$ 型 $B(\Lambda_0)$ で分岐則こみで *parameterize* できる：$\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}^-_n)) \cong B(\Lambda_0)$.

ここで定理 7.1 と定理 7.2 のクリスタル同型は，それぞれ既約表現の具体的な構成を知らずに証明できる「抽象的な」ものであることに注意する（[OV] に触発された [Gro] の論法である．[KS] のクリスタル $B(\infty)$ の特徴づけ定理を用いる）.「Perfect crystal による京都パス模型 [KMN$^2_1$, KMN$^2_2$]」によると，$A^{(2)}_{p-1}$ 型クリスタル $B(\Lambda_0)$ の $B(\Lambda_0) \subseteq \mathsf{Par}$ なる実現は p-strict p-restricted な分割 RP_p によるものが知られている [Kan] [Kle, §22].

定義 7.3. $\lambda \in \mathsf{RP}_p$ とは，以下の条件が成り立つことと定義される．

- $m_i(\lambda) > 1 \Rightarrow i \in p\mathbb{Z}$（注：これは $\lambda \in \mathsf{Par}$ が p-strict であるということである）
- $1 \leq \forall r \leq \ell(\lambda), \lambda_r - \lambda_{r+1} \leq p$（ただし $\lambda_r \in p\mathbb{Z}$ のとき $\leq$ は $<$）．

まとめると，$\mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^-))$ が RP_p で parameterize されたことになる（この可能性は LLTA 理論に触発されて [LT] で初めて提案された．Sergeev duality を用いた導出もある [BK2]）．

定義 7.4. $p \geq 2$ について，$R_p = \{\lambda \in \mathsf{Par} \mid \forall i \geq 1, m_i(\lambda) < p\}$ と定義する（p 正則分割）．

さて下左が成り立つことはよく知られている [Jam] ので，スピン類似を考えると，上右を満たす「うまい」分割のクラス $R_p^{??}$ の存在を期待したくなる（上右の 1 行目の全単射は Schur による [Sch]）．モジュラー表現論の一般論（Brauer-Nesbitt の定理）より，$R_p^{??} \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2 \cap C_p$ でなければならない．

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{Par}(n) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n)) \\
\uparrow & & \\
R_p \cap \mathsf{Par}(n) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Strict} \cap \mathsf{Par}(n) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{Q}}\mathfrak{S}_n^-)) \\
\uparrow & & \\
R_p^{??} \cap \mathsf{Par}(n) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^-))
\end{array}$$

$\mathsf{RP}_3 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} S_3$ はやさしいが，RP_3 は S_3 と「不等号の向きが逆転している」ことに注意しよう．$R_3^{??} = S_3$ とする parameterization は「対称群の 3 スピン分解行列を三角化する」[BMO]．対称群の 5 モジュラースピン表現論の研究から，Bessenrodt-Morris-Olsson は，次の PT を予想した（さらに 5 スピン分解行列についての予想も述べている．この辺の話題については [Be2, §3] が優れた解説である）．この予想が 5SPT と等価であることは，命題 7.3 の通りである（証明は略）．

定理 7.5 ([BMO, §3, Conjecture]=[ABO, Theorem 3.1])**.** *Schur*$_5$ を，以下の条件を満たす Par の部分集合として定義する．このとき $C_2 \cap C_5 \overset{PT}{\sim}$ *Schur*$_5$ が成り立つ．

- $1 \leq \forall i \leq \ell(\lambda) - 2, \lambda_i - \lambda_{i+2} \geq 5$（ただし $\lambda_i \in 5\mathbb{Z}$ または $\lambda_i + \lambda_{i+1} \in 5\mathbb{Z}$ のとき $\geq$ は $>$），
- $\forall j \geq 0, m_{5j+3}(\lambda) + m_{5j+2}(\lambda) \leq 1,$
- $\forall j \geq 0, m_{5j+11}(\lambda) + m_{5j+9}(\lambda) + m_{5j+5}(\lambda) \leq 2,$
- $\forall j \geq 0, m_{5j+10}(\lambda) + m_{5j+6}(\lambda) + m_{5j+4}(\lambda) \leq 2,$
- $\forall j \geq 0, m_{5j+11}(\lambda) + m_{5j+10}(\lambda) + m_{5j+5}(\lambda) + m_{5j+4}(\lambda) \leq 3.$

命題 7.3 ([BMO, §3])**.** 単射 $\varphi_5 : S_5 \hookrightarrow \mathsf{Par}$ を「$(5j, 5j)$ の現われを $(5j+1, 5j-1)$ に置き換える」によって定義すると，$\mathsf{Image}\,\varphi_5 =$ *Schur*$_5$ が成り立つ．特に $S_5 \overset{PT}{\sim}$ *Schur*$_5$ である．

われわれの研究は，$\mathrm{Schur}_3, \mathrm{Schur}_5 \subseteq \mathrm{Strict}$ と同じ性質が期待できる $\mathrm{Schur}_7 \subseteq \mathrm{Strict}$ をみつけ，[ABO] の方法で計算機を用いて $\mathrm{Schur}_7 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2 \cap C_7$ を示したところから始まった．Schur_7 は複数あるのだが，とりあえず 1 つの明示的な定義は [Ts1] にある．最終的に達した Schur_p の定義は [TW, Definition 5.2] にある．Schur_7 をみつけるには [KOR, LT] などに触発されたヒューリスティックによる試行錯誤が必要だったが，これについては割愛する．$\mathrm{Schur}_7 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2 \cap C_7$ を示すには，命題 7.3 のように p-strict な $S_7 \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathrm{Schur}_7$ を見つける必要がある．$\mathrm{Schur}_5, \mathrm{Schur}_7$ には規則性がみられなかった（そもそも Schur_7 は記憶するのが困難である）が，S_3, S_5, S_7 からは S_p の定義に到達することができた．

8　pSPT の（対称群・量子群の）表現論的背景（証明について）

われわれの主定理の証明には「解釈による非負性の証明」のような圏論化の精神がみられる．とくにその証明は（命題のみかけに反して）完全に初等的というわけではない（[Ste, Ts2] を用いれば，perfect crystal 理論 [KMN$^2_1$, KMN$^2_2$] による regularity の証明を回避できるかもしれない）．

証明の概略を述べる．一般に $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{Par}$ と $i \leq j$ について

$$\mathcal{C}^{i,j} = \{\lambda \in \mathcal{C} \mid m_k(\lambda) > 0 \Rightarrow i \leq k \leq j\}$$

とおく．S_p の組合せ論的性質として，全単射

$$S_p^{jp-h,jp+h} \xrightarrow{\sim} S_p^{jp+1,jp+h} \times S_p^{jp-h,jp-1}, \lambda \mapsto (\lambda^+, \lambda^-)$$

であって（ここで $j \geq 1$），次の性質をもつものを構成できる [TW, §2].

- $\mu \in S_p^{(j+1)p-h,(j+1)p+h}, \lambda \in S_p^{jp-h,jp+h}$ について，$(\mu, \lambda) \in S_p \Leftrightarrow (\mu, \lambda^+) \in S_p$
- $\nu \in S_p^{(j-1)p-h,(j-1)p+h}, \lambda \in S_p^{jp-h,jp+h}$ について，$(\lambda, \nu) \in S_p \Leftrightarrow (\lambda^-, \nu) \in S_p$

ここで例えば (μ, λ) とは，μ と λ をそのまま並べてえられる分割を意味している．

この全単射を用いると，全単射 $S_p \xrightarrow{\sim} \cdots \times S_p^{2p+1,3p-1} \times S_p^{p+1,2p-1} \times S_p^{1,p-1}$ を構成できる [TW, §3]．$S_p^{(j-1)p+1,jp-1}$ は $(A_{p-1}^{(2)})^\dagger$ 型の Kirillov-Reshetikhin perfect crystal $B^{h,2}$（これは [JMO] で構成された．KR クリスタルについては [HKOTY, HKOTT] を参照されたい）と等濃度なので，$B^{h,2}$ から引き戻してクリスタル構造を与えることができ [TW, Corollary 3.10]，これによって S_p は $(A_{p-1}^{(2)})^\dagger$ 型クリスタルになる．ここで根源的な理由は不明だか，S_p 上の柏原作用素 $\tilde{f}_i$ が S_p の「箱を 1 つ増やす」ことが証明できる [TW, Theorem 3.16]（証明を読んでいただければ，不思議な cancellation の結果，成り立っていることはわかる）．一方，$S_p \cong (B^{h,2})^{\otimes\infty}$ は perfect crystal の一般論 [KMN$^2_1$, KMN$^2_2$] によって $B(\Lambda_h)$ と同型なので，クリスタル構造を忘れると $S_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} \mathsf{RP}_p$ がえられ，$\mathsf{RP}_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_2 \cap C_p$ はやさしいので（例えば [TW, §5.2] を参照），主定理がえられる．

このように主定理は，perfect crystal 理論による京都パス模型の応用なのだが，これまで知られているような Par の部分集合によるレベル 1 クリスタルの実現とは異なることを注意する（典型的なものに [MM] による，$A_{p-1}^{(1)}$ 型クリスタル同型 $R_p \cong B(\Lambda_0)$ がある．これから $R_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} C_p$ もえられる．前述した $A_{p-1}^{(2)}$ 型クリスタル同型 $\mathsf{RP}_p \cong B(\Lambda_0)$ もこの一例である）．これまでのいわゆる Young wall 的な実現では， [Ts3, §1] の意味で「分岐点をもたない」perfect crystal が用いられる．「perfect crystal は KR crystal のテンソル積に限る」という予想（これはたとえば [KNO] のイントロに書かれている）のもと，このような perfect crystal を分類した [Ts3, §1]（これが [Ts3] の動機であった）．そして，このリスト以外の perfect crystal を用いて「Par の部分集合によるレベル 1 クリスタル実現」（およびその帰結としての PT）をえることは，できないだろうと考えていた．

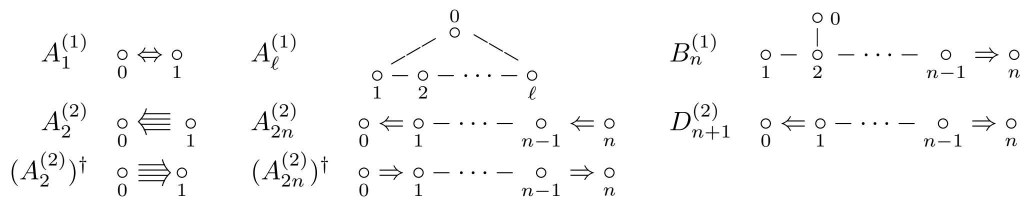
しかし $(A_{p-1}^{(2)})^\dagger$ 型 $B^{h,2}$ はたくさんの分岐点をもち，従来の「Par の部分集合によるレベル 1 クリスタルの実現」の枠組みにない．主定理の証明の本質がどこにあるのかよく理解し，他のリー型（あるいは perfect crystal）について類似の PT がえられると望ましい．例えば筆者は $B_n^{(1)}$ 型の頂点 n について，主定理と同様の PT がえられるかもしれないと考えているが，現状ではほぼ妄想にすぎない状態である．また [BK1, Theorem 8.11] の類似である [Ts3, Corollary 6.11] や， [Ts3, §1] や [TW, §3] で説明されている $A_{2n}^{(2)}$ 型と $D_{n+1}^{(2)}$ 型の類似を考えると，主定理の $D_{n+1}^{(2)}$ 版が期待できると想像される．この場合，自然な命題は「Strict に “自然な” $D_{n+1}^{(2)}$ 型クリスタル構造が入り $B(\Lambda_0)$ と同型になる」だと考えられる．これは別の文脈で，Oh によって予想されていた [Oh, Conjecture 0.1] が，適切な定式化のもとで正しくないことが知られている．

PT のリー理論・表現論的証明は [ASW, LW] など多数知られている．われわれの証明とこれらのアイデアとの関係を明らかにすることも，今後の課題である．例えば，われわれの主定理は「$A_{2n}^{(2)}$ 型 Schur PT」と思えるものだから， [GKW, Theorem 1.1] の「$A_{2n}^{(2)}$ 型 RR 恒等式」との関連を考察することはよい出発点になるかもしれない．

最後に，われわれの動機は，かつて存在が期待され，$p = 3, 5$ では定義されていた（さらに $p = 3$ では表現論的正当化 [BMO] も知られていた）が， [BK1, BK2] による RP_p を用いた $\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^-))$ の parameterization でいったんは忘れられたように思われる，$R_p^{??} \subseteq$ Strict を一般の奇数（あるいは奇素数）$p \geq 3$ でみつけることであった．われわれは $\mathrm{Schur}_3, \mathrm{Schur}_5$ を一般化した $\mathrm{Schur}_p \subseteq$ Strict も定義し [TW, Definition 5.2]，これが $R_p^{??}$ だろうと考えている．$\mathrm{Schur}_p \overset{\mathrm{PT}}{\sim} S_p$ だが，残念ながら S_p のような「簡単な」定義を与えることはできなかった．また Schur_p は S_p を用いて定義される，という意味で S_p はより根源的だろうと考えている．「Schur_p を用いた parameterization で，対称群の p スピン分解行列が三角化される」といった正当化も今後の課題である（R_p による $\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n))$ の parameterization でこの性質が成り立つことは [FMP] で示されたが，現在では [Jam] の Specht 加群の存在の影と理解できる）．

9　最後に

この度，講演の機会を与えてくださった加藤周さんをはじめとする organizer のみなさんに感謝いたします．ありがとうございました．



参考文献

[ABO] G.E. Andrews, C. Bessenrodt and J.B. Olsson, *Partition identities and labels for some modular characters*, Trans.Amer.Math.Soc. **344** (1994), 597–615.

[An1] G.E. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2. Addison-Wesley Publishing Co., 1976.

[An2] 佐藤文広訳『整数の分割』（数学書房，2006 年）

[An3] G.E. Andrews, *On the general Rogers-Ramanujan theorem*, Memiors of the American Mathematical Society, **152**, 1974.

[An4] G.E. Andrews, *A general theory of identities of the Rogers-Ramanujan type*, Bull.Amer.Math.Soc. **80** (1974), 1033–1052.

[ASW] G.E. Andrews, A. Schilling and S.O. Warnaar, *An A_2 Bailey lemma and Rogers-Ramanujan-type identities*, J.Amer.Math.Soc. **12** (1999), 677–702.

[Be1] C. Bessenrodt, *A combinatorial proof of a refinement of the Andrews-Olsson partition identity*, European J.Combin. **12** (1991), 271–276.

[Be2] C. Bessenrodt, *Representations of the covering groups of the symmetric groups and their combinatorics*, Sem.Lothar.Combin. **33** (1994) (electronic).

[BK1] J. Brundan and A. Kleshchev, *Hecke-Clifford superalgebras, crystals of type $A_{2\ell}^{(2)}$ and modular branching rules for $\widehat{S}_n$*, Represent.Theory **5** (2001), 317–403.

[BK2] J. Brundan and A. Kleshchev, *Projective representations of symmetric groups via Sergeev duality*, Math.Z. **239** (2002), 27–68.

[BMO] C. Bessenrodt, A.O. Morris and J.B. Olsson, *Decomposition matrices for spin characters of symmetric groups at characteristic 3*, J.Algebra **164** (1994), 146–172.

[Bre] D.M. Bressoud, *A combinatorial proof of Schur's 1926 partition theorem*, Proc.Amer.Math.Soc. **79** (1980), 338–340.

[FMP] H.K. Farahat, W. Müller and M.H. Peel, *The modular characters of the symmetric groups*, J.Algebra **40** (1976), 354–363.

[GJK^3] D. Grantcharov, J.H. Jung, S-J. Kang, M. Kashiwara and M. Kim *Crystal bases for the quantum queer superalgebra and semistandard decomposition tableaux*, Trans.Amer.Math.Soc. **366** (2014), 457–489.

[GKW] M.J. Griffin, K. Ono and S.O. Warnaar, *A framework of Rogers-Ramanujan identities and their arithmetic properties*, Duke Math.J. **165** (2016), 1475–1527.

[Gro] I. Grojnowski, *Affine $\hat{sl}_p$ controls the modular representation theory of the symmetric group and related Hecke algebras*, math.RT/9907129.

[Har] 高瀬幸一訳『ラマヌジャン その生涯と業績に想起された主題による十二の講義』（丸善出版，2016 年）

[HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, Contemp. Math., **248** (1999), 243–291.

[HKOTT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, *Paths, crystals and fermionic formulae*, in "MathPhys Odyssey 2001-Integrable Models and Beyond In Honor of Barry M.McCoy", edited by M. Kashiwara and T. Miwa, Birkh"auser (2002) 205–272.

[HW] 示野信一訳『数論入門 I, II』（丸善出版，2012 年）

[Jam] G.D. James, *The irreducible representations of the symmetric groups*, Bull.London Math.Soc. **8** (1976), 229–232.

[JMO] N. Jing, K.C. Misra and M. Okado, *q-wedge modules for quantized enveloping algebras of classical type*, J.Algebra **230** (2000), 518–539.

[Kac] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.

[Kan] S-J. Kang, *Crystal bases for quantum affine algebras and combinatorics of Young walls*, Proc. London Math. Soc. **86** (2003), 29–69.

[Ka1] M. Kashiwara, *On crystal bases*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), 155–197, CMS Conf.Proc., **16**, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 1995.

[Ka2] M. Kashiwara, *On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math.J. **63** (1991), 465–516.

[KKT] S-J. Kang, M. Kashiwara and S. Tsuchioka, *Quiver Hecke superalgebras*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **711** (2016) 1–54

[Kle] A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, 163. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[KMN$^2_1$] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, Internat. J. Modern Phys. A **7**, Suppl. 1A (1992), 449–484.

[KMN$^2_2$] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Perfect crystals of quantum affine Lie algebras*, Duke Math.J. **68** (1992), 499–607.

[KN] M. Kashiwara and T. Nakashima, *Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebras*, J.Algebra **165** (1994), 295–345.

[KNO] M. Kashiwara, T. Nakashima and M. Okado, *Affine geometric crystals and limit of perfect crystals*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 3645–3686.

[KOR] B. Külshammer, J. Olsson and G. Robinson, *Generalized blocks for symmetric groups*, Invent.Math. **151** (2003), 513–552.

[KS] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math. J. **89** (1997), 9–36.

[LT] B. Leclerc and J-Y. Thibon, *q-deformed Fock spaces and modular representations of spin symmetric groups*, J. Phys. A **30** (1997), 6163–6176.

[LW] J. Lepowsky and R.L. Wilson, *The structure of standard modules. I. Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities*, Invent.Math. **77** (1984), 199–290.

[MM] K. Misra and T. Miwa, *Crystal base for the basic representation of* $U_q(\mathfrak{sl}(n))$, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 79–88.

[Oh] S. Oh, *Young Walls of Type* $D^{(2)}_{n+1}$ *and Strict Partitions*, arXiv:1105.2380

[OV] A. Okounkov and A. Vershik, *A new approach to representation theory of symmetric groups*, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), 581–605.

[Rog] L.J. Rogers, *Second Memoir on the Expansion of certain Infinite Products*, Proc.London Math.Soc. S1-25 (1894), 318–343.

[Sch] I. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen and der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.

[Ste] J. Stembridge, *A local characterization of simply-laced crystals*, Trans.Amer.Math.Soc. **355** (2003), 4807–4823.

[Ts1] 土岡俊介, *Schur* の分割定理の $p = 7$ 類似について, 数理解析研究所講究録 1992 (2016) 33–43

[Ts2] S. Tsuchioka, *A local characterization of* B_2 *regular crystals*, arXiv:1710.09622

[Ts3] S. Tsuchioka, *Hecke-Clifford superalgebras and crystals of type* $D^{(2)}_l$, Publ.Res.Inst.Math.Sci. **46** (2010), 423–471.

[TW] S. Tsuchioka and M. Watanabe, *Schur partition theorems via perfect crystal*, arXiv:1609.01905

ユニタリ表現の指標と軌道の方法

大島 芳樹　(大阪大学大学院情報科学研究科)

この内容は Benjamin Harris 氏との共同研究に基づく．

G を Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする．G の $\mathfrak{g}^*$ への余随伴作用を考えると，その軌道 (余随伴軌道) は自然なシンプレクティック形式 (Kirillov–Kostant–Souriau 形式) をもつ．軌道の方法は，余随伴軌道と G の既約ユニタリ表現との関係について主張するものである．

$$\mathfrak{g}^*/G \quad \longleftrightarrow \{G \text{ の既約ユニタリ表現の同値類 }\} \tag{1}$$

軌道の方法は初めに冪零 Lie 群に対して Kirillov [6] によって導入された．連結単連結冪零 Lie 群については (1) の集合の間に 1 対 1 対応があり，さらに表現の側の重要な問題である指標，制限，誘導などが軌道の側の言葉で簡明に記述される ([8])．

一方簡約 Lie 群の場合には，冪零 Lie 群のときのような完全な対応は期待できないが，$\mathfrak{g}^*/G$ の方を適当に修正すると (1) の両辺の部分集合の間に対応ができて，表現の側の現象が軌道を使って良く記述できることがしばしば観察されている．以下では簡約 Lie 群のユニタリ表現について，既約表現の構成，指標，誘導が，軌道とどのように対応しているかを見る．

1　既約表現

G を実簡約 Lie 群とする．ただしここでは実簡約 Lie 群とは連結複素簡約 Lie 群の実形のこととする．余随伴軌道と表現の対応では，$\sqrt{-1}\mathfrak{g}^*/G$ を考えるのが自然である．$\sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ を不変形式により $\sqrt{-1}\mathfrak{g}$ と同一視し，さらに Lie 環の埋め込み $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ を使って $\sqrt{-1}\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ の部分空間とみなす．$G \cdot \xi \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ が半単純軌道であるとは，対応する $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ の元が対角化可能であることとする．これは $G \cdot \xi \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ が閉集合になることと同値である．$G \cdot \xi \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ が冪零軌道であるとは，対応する $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ の元が冪零行列であることとする．

既約表現の構成は半単純軌道の場合と冪零軌道の場合にわけられる．半単純軌道の場合は標準的な構成が知られている．冪零軌道については一般的な構成は得られていないが，対応する表現に極小表現など重要な表現が現れる ([14], [15] などを参照)．

ここでは半単純軌道の場合を扱う．余随伴軌道 $\mathcal{O} \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ に対して $\xi \in \mathcal{O}$ をとり，$G(\xi)$ をその固定部分群，$\mathfrak{g}(\xi)$ をその Lie 環とする．$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\xi)$ のシンプレクティック形式に関するメタプレクティック被覆を $\widetilde{G}(\xi)$ とする．

半単純軌道に付随する次のデータから表現が構成される．

定義 1.1. ペア $(\mathcal{O}, \Lambda)$ が半単純軌道データとは，半単純軌道 $\mathcal{O} \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ と，各 $\xi \in \mathcal{O}$ に対する $\widetilde{G}(\xi)$ のユニタリ指標 Λ_ξ が定まっていて次をみたすものとする．

- $d\Lambda_\xi = \xi|_{\mathfrak{g}(\xi)}$,

- $g \cdot \Lambda_\xi \simeq \Lambda_{g\cdot\xi} \quad (\forall g \in G)$.
- Λ_ξ は $\widetilde{G}(\xi) \to G(\xi)$ を経由しない．

$(\mathcal{O}, \Lambda)$ を半単純軌道データとし，$\xi \in \mathcal{O}$ をとる．同型 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ で ξ に対応する元を $X_\xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{g}$ とする．X_ξ は半単純元なので，ある Cartan 部分代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ が存在して $X_\xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ となる．$\mathfrak{g}$ の Cartan 対合 θ を $\theta(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ となるようにとり，$K = G^\theta$ とする．$\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ を複素放物型部分代数，$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}$ をその Levi 分解とする．$\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_\mathbb{C}(\xi)$ をみたすとき $\mathfrak{q}$ を $\mathcal{O}$ の polarization という．また polarization $\mathfrak{q}$ は，$\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$ に対して

$$\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{R}_{>0} \Longrightarrow \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$$

であるとき admissible polarization という．さらに $\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}}$ の次元が admissible polarization のうち最大であるような $\mathfrak{q}$ を maximally real admissible polarization という．ここで $\bar{\mathfrak{q}}$ は，実形 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ に関する $\mathfrak{q}$ の複素共役である．

$(\mathcal{O}, \Lambda)$ に対応する表現は，admissible polarization $\mathfrak{q}$ をとると Harish-Chandra 加群の誘導関手 $I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{q},G(\xi)\cap K}$ を使って定義される ([9] を参照)．$s = \dim(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k})$ とし，virtual $(\mathfrak{g}, K)$ 加群を

$$X(\mathcal{O}, \Lambda) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j [(I^{\mathfrak{g},K}_{\mathfrak{q},G(\xi)\cap K})^{s+j}(\xi \otimes \mathbb{C}_{\rho(\mathfrak{n})})]$$

と定義する．$X(\mathcal{O}, \Lambda)$ は $\mathfrak{q}$ のとり方によらない．もし条件

$$\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{t}_\mathbb{C}) \text{ かつ } \alpha \text{ は imaginary root } \Longrightarrow \langle \xi + \rho_\mathfrak{l}, \alpha \rangle > 0 \tag{2}$$

を満たせば，ある G の既約ユニタリ表現 $\pi(\mathcal{O}, \Lambda)$ が存在して $X(\mathcal{O}, \Lambda) = [\pi(\mathcal{O}, \Lambda)_K]$ となる．

この構成は Zuckerman 誘導と放物型誘導を組み合わせたものである．$X_\xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{k}$ のとき $\mathcal{O}$ を楕円型軌道，$X_\xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{g}^{-\theta}$ のとき $\mathcal{O}$ を双曲型軌道とよぶ．楕円型軌道 $\mathcal{O}$ には複素構造が入り Λ_ξ はその上の正則直線束を定める．この場合 $\pi(\mathcal{O}, \Lambda)$ はその Dolbeault コホモロジーと同型になる ([16])．双曲型軌道の場合は $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ が実の放物型部分代数になり，$\pi(\mathcal{O}, \Lambda)$ は (退化) ユニタリ主系列表現になる．

また $\mathcal{O}$ が余随伴軌道の中で次元が最大のとき regular という．regular な軌道には緩増加表現が対応する．特に $\operatorname{rank}\mathfrak{g} = \operatorname{rank}\mathfrak{k}$ のとき，regular な楕円型軌道は離散系列表現と対応する．

2 指標

有限次元表現 π に対して指標 $\Theta(g) = \operatorname{Trace}\pi(g)$ は G 上の関数を定めるが，無限次元表現に対しても G 上の distribution として指標を定義できることがある．例えば，冪零 Lie 群の既約ユニタリ表現や簡約 Lie 群の既約 admissible 表現については $f \in C_c^\infty(G)$ に対する $\pi(f)$ が trace class になり，$f \mapsto \operatorname{Trace}\pi(f)$ が G 上の distribution $\Theta(\pi)$ を定める．$\Theta(\pi)$ を指数写像で引き戻して $\mathfrak{g}$ 上の distribution $\theta(\pi)$ を得る．

軌道の方法によれば，軌道 $\mathcal{O}$ と表現 π が対応するとき $\theta(\pi)$ の Fourier 変換は軌道 $\mathcal{O}$ 上の積分で与えられる．

実際，冪零 Lie 群の既約ユニタリ表現の指標 $\theta(\pi)$ は緩増加になり，Fourier 変換 $f \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}) \mapsto \hat{f} \in \mathscr{S}(\sqrt{-1}\mathfrak{g}^*)$ を

$$\hat{f}(\xi) := \int_\mathfrak{g} e^{\langle \xi, x\rangle} f(x)dx$$

とすると，

$$\langle \theta(\pi), f \rangle = \int_{\xi\in\mathcal{O}} \hat{f}(\xi)\omega_\mathcal{O} \tag{3}$$

が成り立つ．ここで $\omega_{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}$ のシンプレクティック形式から定まる体積形式を表す．

簡約 Lie 群の既約 admissible 表現の場合は $\theta(\pi)$ の定義を修正して

$$\theta(\pi) = \sqrt{\exp} \cdot \exp^*(\Theta(\pi))$$

とする．この補正により，π が無限小指標を持つことに応じて $\theta(\pi)$ が定数係数の微分方程式をみたす．また $\Theta(\pi)$ および $\theta(\pi)$ は局所 L^1 関数になる ([1])．

G がコンパクトの場合は，Kirillov [7] により (3) が示された．

G が非コンパクトでも π が緩増加表現の場合には $\theta(\pi)$ が緩増加になり，やはり (3) の式が成立する ([11])．ところが π が緩増加表現でない場合には $\theta(\pi)$ は一般に指数関数程度の増大度をもち緩増加でない．従って $\theta(\pi)$ は $\sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ の軌道の Fourier 変換とは等しくならない．

Rossmann [12] は実の余随伴軌道の代わりに，軌道の複素化の中のサイクルを使って指標が表せることを示した．π を regular な無限小指標をもつ既約 admissible 表現として，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ をその無限小指標に対応する複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の余随伴軌道とする．$2n = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rank} \mathfrak{g}$ とおく．このとき，ある実 $2n$ 次元のサイクル C が次の意味で指標 $\theta(\pi)$ を記述する：$f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ に対して

$$\langle \theta(\pi), f \rangle = \int_C \hat{f} \omega_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}. \tag{4}$$

ここで Fourier 変換 $\hat{f}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数にのばしている．$\omega_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の正則シンプレクティック形式から定まる正則 $2n$ 形式である．C の台はコンパクトとは限らないが，積分が収束するようなサイクルである．また C は一意的には定まらず $\omega_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}$ の中間次元のホモロジーの元とみなせる．

さらに (4) のサイクル C は，π と対応する旗多様体の同変層の特性サイクルにより表されることが Schmid–Vilonen [13] で示されている．$X = G_{\mathbb{C}}/B$ を G の複素化の旗多様体とする．X 上の G 同変層と表現 π の対応は柏原 [3] によって予想され，[4], [5] で示された．π に対応する X 上の G 同変層 $\mathcal{F}$ は，Beilinson–Bernstein 対応，Riemann–Hilbert 対応，松木対応 [10] の合成で得られる．このとき [13] は，(4) に現れるサイクル C が $\mathcal{F}$ の特性サイクルによる twisted moment map の像で与えられることを示した．

前節で定義した半単純軌道に付随した既約ユニタリ表現 π について考えてみよう．半単純軌道 $\mathcal{O}$ に対して前節の記号を用いる．U を $G_{\mathbb{C}}$ の極大コンパクト部分群で K を含むものとする．π に対応する X 上の G 同変層 $\mathcal{F}$ の特性サイクルを求め，[13] を適用することにより次の定理が得られる ([2])．

定理 2.1. $(\mathcal{O}, \Lambda)$ を (2) を満たす半単純軌道データとする．また $\mathfrak{q}$ を maximally real admissible polarization とする．このとき既約ユニタリ表現 $\pi = \pi(\mathcal{O}, \Lambda)$ について

$$\langle \theta(\pi), f \rangle = \int_C \hat{f} \omega_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}, \qquad C = \{ g \cdot \xi + u \cdot \rho_{\mathfrak{l}} : g \in G,\ u \in U,\ g \cdot \mathfrak{q} = u \cdot \mathfrak{q} \}$$

が成り立つ．

$\mathcal{O} = G \cdot \xi$ であるから，C の定義において $u \cdot \rho_{\mathfrak{l}}$ の項が無ければ (3) になる．

3 誘導

G を実簡約代数群，H をその部分代数群とする．ここでは H をユニモジュラーとし，自明表現からのユニタリ誘導を考える．軌道の方法によれば，G のユニタリ表現 $L^2(G/H)$ と $G \cdot \mathfrak{h}^\perp$ とが対応する．ここで $\mathfrak{h}^\perp := \{ \xi \in \sqrt{-1}\mathfrak{g}^* : \xi|_{\mathfrak{h}} = 0 \}$ とおいた．

$L^2(G/H)$ の annihilator ideal に着目することにより，次の定理が証明できる．

定理 3.1. もし G の既約ユニタリ表現 π が $L^2(G/H)$ に寄与するなら，π はある半単純元 $\lambda \in G_{\mathbb{C}} \cdot \mathfrak{h}^{\perp}$ から定まる $G_{\mathbb{C}}$ の一般旗多様体上のあるねじれ $\mathscr{D}$ 加群として実現される．さらにこのとき，ねじれ $\mathscr{D}$ 加群のパラメータは $G_{\mathbb{C}} \cdot \mathfrak{h}^{\perp}$ の Zariski 閉包に入る．

参考文献

[1] Harish-Chandra, *Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group*, Trans. Amer. Math. Soc. **119** (1965), 457–508.

[2] B. Harris, Y. Oshima, *Irreducible characters and semisimple coadjoint orbits*, arXiv:1710.10190.

[3] M. Kashiwara, *Character, character cycle, fixed point theorem and group representations*, Representations of Lie groups, Adv. Stud. Pure Math. **14** (1987), 369–378.

[4] M. Kashiwara, *Equivariant derived category and representation of real semisimple Lie groups*, Representation theory and complex analysis, Lecture Notes in Math. **1931**, Springer, Berlin, (2008), 137–234.

[5] M. Kashiwara, W. Schmid, *Quasi-equivariant $\mathscr{D}$-modules, equivariant derived category, and representations of reductive Lie groups*, Lie theory and geometry, Progr. Math. **123**, Birkhäuser Boston, (1994), 457–488.

[6] A. A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Uspehi Mat. Nauk **17** (1962), 57–110.

[7] A. A. Kirillov, *Characters of unitary representations of Lie groups*, Funkcional. Anal. i Priložen **2** (1968), 40–55.

[8] A. A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*, Graduate Studies in Mathematics **64** (2004), Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[9] A. Knapp, D. Vogan, *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Mathematical Series **45** (1995), Princeton University Press, Princeton, NJ.

[10] I. Mirković, T. Uzawa, K. Vilonen, *Matsuki correspondence for sheaves*, Invent. Math. **109** (1992), 231–245.

[11] W. Rossmann, *Kirillov's character formula for reductive Lie groups*, Invent. Math. **48** (1978), 207–220.

[12] W. Rossmann, *Characters as contour integrals*, Lie group representations, III, Lecture Notes in Math. **1077**, Springer, Berlin, (1984), 375–388.

[13] W. Schmid, K. Vilonen, *Two geometric character formulas for reductive Lie groups*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 799–867.

[14] P. Torasso, *Méthode des orbites de Kirillov-Duflo et représentations minimales des groupes simples sur un corps local de caractéristique nulle*, Duke Math. J. **90** (1997), 261–377.

[15] D. Vogan, *The method of coadjoint orbits for real reductive groups*, Representation theory of Lie groups (Park City, UT), Amer. Math. Soc., Providence, RI. (2000), 179–238.

[16] H. Wong, *Dolbeault cohomological realization of Zuckerman modules associated with finite rank representations*, J. Funct. Anal. **129** (1995), 428–454.

GROUP CHARACTEROIDS AND QUIVER REPRESENTATIONS

山口大学 飯寄信保（Nobuo Iiyori. Yamaguchi University)

今回の講演の内容は、千葉大学の澤辺正人さんとの共同研究の一部です。澤辺さんとは、有限群の部分群束の構造をいろいろな視点から考察しています。例えば, 部分群束を単体的複体と捉え、その幾何構造について素数グラフなどの視点などから考察をしています。今回は、部分群束をクイバーと考え，その表現を用いて群の指標について考察していきたいと思います。

記号等.

・$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\pi(n) := \{p : \mathrm{prime} |\ p|n\}$
・素数からなる集合 π : に対し，$n_\pi \in \mathbb{N}$ は次の 3 つの条件 $(1) n_\pi|n, \quad (2) \pi(n_\pi) \subseteq \pi, \quad (3) \pi(n/n_\pi) \cap \pi = \emptyset.$ を満たす正整数とする。
・$\pi(G) = \pi(|G|)$,
・$G_\pi = \{x \in G | x^{|G|_\pi} = 1\}$,
・$\pi' = \pi(G) - \pi$,
・ただ一つの素数からなる集合 $\{p\}$ は，単に p と表す。

そのほかの記号等については必要な時に説明します。

Definiteion of a Quiver.

定義　四つ組 $Q = (Q_0,\ Q_1,\ (s : Q_1 \to Q_0),\ (r : Q_1 \to Q_0))$ が次の 2 つの条件を満たすとき quiver と呼ぶ。
(1)$Q_0\ (\neq \emptyset),\ Q_1 =$ は集合である。
(2)$s,\ r$ は，Q_1 から Q_0 への写像である。

Q_0 の元を point と呼び，Q_1 の元を arrow と呼ぶ。また，arrow $\alpha \in Q_1$ に対し，$s(\alpha) = a$ かつ $r(\alpha) = b$ のとき，$a \xrightarrow{\alpha} b$ or $\alpha = (a \to b)$ で表す。arrow の有限列 $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k$ で条件 $r(\alpha_l) = s(\alpha_{l+1})$ for $1 \leq l \leq k-1$ を満たすものを path と呼ぶ。

クイバー Q から直接得られる重要な 2 つのクイバーを紹介します。

定義.　$Q = (Q_0,\ Q_1,\ (s : Q_1 \to Q_0),\ (r : Q_1 \to Q_0))$ を quiver とする。各 $\alpha = (a \to b) \in Q_1$ に対し，シンボル ${}^t\alpha$ を作り，$Q_1^{\mathrm{op}} := \{{}^t\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$ とする（$Q_1 \cap Q_1^{\mathrm{op}} = \emptyset$ に注意する）。写像 $\widetilde{s},\ \widetilde{r}$ を次のように定める。

$$\widetilde{s} : Q_1^{\mathrm{op}} \longrightarrow Q_0\ (\widetilde{s}({}^t\alpha) := r(\alpha)) \widetilde{r} : Q_1^{\mathrm{op}} \longrightarrow Q_0\ (\widetilde{r}({}^t\alpha) := s(\alpha))$$

このとき，$Q^{\mathrm{op}} := (Q_0, Q_1^{\mathrm{op}}, \widetilde{s}, \widetilde{r})$ を Q の opposite という。

Date: December 25, 2017.

定義. $Q=(Q_0,\ Q_1,\ (s:Q_1\to Q_0),\ (r:Q_1\to Q_0))$ を quiver とし，$Q^{\mathrm{op}}:=(Q_0,Q_1^{\mathrm{op}},\widetilde{s},\widetilde{r})$ を Q の opposite とする。Q の UD-quiver$Q^{\mathrm{ud}}=(Q_0^{\mathrm{ud}},\ Q_1^{\mathrm{ud}},\ s^{\mathrm{ud}},\ r^{\mathrm{ud}})$ は，次の式で定義される quiver である：$Q_0^{\mathrm{ud}}=Q_0,\quad Q_1^{\mathrm{ud}}=Q_1\cup Q_1^{\mathrm{op}}$,

$$s^{\mathrm{ud}}(\alpha)=\begin{cases} s(\alpha) & \text{if } \alpha\in Q_1\\ \widetilde{s}(\alpha) & \text{if } \alpha\in Q_1^{\mathrm{op}}\end{cases}\quad \text{and}\quad r^{\mathrm{ud}}(\alpha)=\begin{cases} r(\alpha) & \text{if } \alpha\in Q_1\\ \widetilde{r}(\alpha) & \text{if } \alpha\in Q_1^{\mathrm{op}}.\end{cases}$$

また，アップダウンクイバーにおいては，パス $\gamma=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ の oppsite は ${}^t\gamma={}^t\alpha_k{}^t\alpha_{k-1}\cdots{}^t\alpha_1$,（ここで， ${}^t({}^t\alpha)=\alpha$ である）で定まるパスとする。

今回の話では，次に示す例の形でクイバーが用いられます。

例（poset の quiver）.
$\mathcal{P}\,(=(\mathcal{P},\leq))$ poset とし，$\mathcal{P}_0=\mathcal{P}$，$\mathcal{P}_1=\{a\to b|a,b\in\mathcal{P}\text{ and } b\lneq a\}$ とおく。$Q_{\mathcal{P}}$ あるいは，$\mathcal{P}=(\mathcal{P}_0,\mathcal{P}_1,s,r)$ を poset $\mathcal{P}$ の quiver と呼ぶ。

さて，G を有限群，$\mathrm{Sgp}(G)$ を G の部分群全体とする。$(\mathrm{Sgp}(G),\leq)\ (=\mathrm{Sgp}(G))$ として poset とみる（ G の部分群束と呼ぶ)。quiver $Q_{\mathrm{Sgp}(G)}$ が今回の話の主対象である。

Quiver の表現の定義等.

R を可換環とする。$\mathcal{F}$ が quiver$Q$ の R 上の表現であるとは，各 $a\in Q_0$ に対し $\mathcal{F}_a$ は有限集合 (あるいは R-module, R-algebra) であり，各 $\alpha=(a\to b)\in Q_1$ に対して $\mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}_{(a\to b)}:R[\mathcal{F}_a]\longrightarrow R[\mathcal{F}_b]$ （または $\mathcal{F}_a\longrightarrow\mathcal{F}_b$) が R-準同形となることを意味する。また，各パス $\gamma=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ に対し，$\mathcal{F}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}=\mathcal{F}_{\alpha_k}\circ\mathcal{F}_{\alpha_{k-1}}\circ\cdots\circ\mathcal{F}_{\alpha_1}$ と定義しておく。

可換環 $\mathfrak{B}_n(G)$.

G を有限群，n を正整数，$L_n(G):=\{x\in G|x^n=1\}$ とおき，$\mathbb{Z}$-代数　$\mathfrak{B}_n(G)$ を

$$\mathfrak{B}_n(G)=\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{\varphi\big|_{L_n(G)}|\varphi\in\mathrm{Irr}(G)\}.$$

と定める。 この可換代数について基本的な事項は以下の通りである。

補題
(1) $\mathfrak{B}_n(G)$ は，指標環の演算により自然に $\mathbb{Z}$-代数となる。
(2) 2 つの正整数 $m|n$ と部分群 $K\leq H\leq G$ に対し，制限写像 $\mathrm{Res}^{(H,n)}_{(K,m)}:\mathfrak{B}_n(G)\to\mathfrak{B}_m(G)$ を

$$\mathrm{Res}^{(H,n)}_{(K,m)}(f)=f|_{L_m(K).}$$

と定義することができ，これは $\mathbb{Z}$-準同形である。
(3)$X\subseteq G$ に対し

$$\mathrm{C}(X):=\{D\subseteq X|D:G\text{-共役類}\}$$

とおくと

$$\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(G)\simeq\mathbb{C}^{|\mathrm{C}(L_n(G))|}.$$

が成り立つ。

さて，$\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(G)$ 上には非退化な Hremitian 積が次のように定義できる。 $f, g\in\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(G)$ に対し

$$[f, g]_{(G,n)} := \frac{1}{(|G|, n)}\sum_{x\in L_n(G)} f(x)\overline{g(x)}.$$

この内積について次の重要な性質が成り立ちます。

定理 (Frobenius propoerty)
$K\le H\le G$ を G の部分群，m, n を $m|n$ なる 2 つの正整数とする。$f\in\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_m(K)$ に対して

$$\mathrm{Ind}_{(K,m)}^{(H,n)}(f) := \frac{(|H|, n)}{(|K|, m)}\left(\frac{|H|}{|K|}\right)^{-1}\sum_{D\in \mathrm{C}(L_m(K))} f(x_D)\sum_{t\in K\backslash H}\chi_{D^t}^{L_n(H)},$$

ここで $x_D\in D$ は $D\in C(L_m(K)$ の代表元とし，$B\subseteq A$ に対し χ_B^A は B の A における特性関数とする。このとき $\mathrm{Ind}_{(K,m)}^{(H,n)}$ は $\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_m(K)$ から $\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(H)$ への $\mathbb{C}$-線形写像であり、次を満たす。各 $f\in\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(H)$ と $g\in\mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_m(K)$ に対し

$$[f,\ \mathrm{Ind}_{(K,m)}^{(H,\ n)}(g)]_{(H,n)} = [\mathrm{Res}_{(K,m)}^{(H,n)}(f),\ g]_{(K,m)}$$

Remark. 上で $m = n = |G|$ のとき，我々の Frobenius property は通常指標における Frobenius reciprocity と一致する。講演においては $\mathrm{Ind}_{(K,m)}^{(H,n)}(f)$ の式につて誤ったものを紹介しましたが，訂正いたします。

Generalized π-Brauer Characeroids.

G を有限群とし，$\pi\subseteq\pi(G)$ をとる。

$$\mathfrak{B}_\pi(G) := \mathfrak{B}_{|G|_{\pi'}}(G) \text{ および } [*, *]_{(G,\pi)} = [*, *]_{(G,|G|_{\pi'})}.$$

のように記号を定義しておく。
$\mathfrak{B}_\pi(G)$ に属する類関数を G の *generalized π-Brauer characteroid* と呼ぶことにする。特に $\pi = \{p\}$ のとき，generalized p-Brauer characteroid は一般 p-Brauer 指標 と一致する。この generalized π-Brauer characteroid　の特徴づけとして次が挙げられる。

命題　2 整数 a, b を $a|G|_\pi + b|G|_{\pi'} = 1$ のように選ぶ。bZ-線形写像$\hat{}: \mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_\pi(G)\to\mathbb{C}\otimes\mathbb{Z}[\mathrm{Irr}(G)]$ を次のように定める。

$$\hat{f}(x) := f(x^{a|G|_\pi}).$$

このとき $f\in\mathfrak{B}_\pi(G) \iff \hat{f}\in\mathbb{Z}[\mathrm{Irr}(G)]$ が成り立つ。

この generalized p-Brauer characteroid の重要な性質として次がある。

定理　$\pi_1\subseteq\pi_2\subseteq\pi(G)$ とする。

$$\mathrm{Ind}_{(H,|H|_{\pi_2'})}^{(H,|H|_{\pi_1'})}\Big|_{\mathfrak{B}_{\pi_2}(H)} \subseteq \mathfrak{B}_{\pi_1}(H).$$

以下，

$$\mathrm{Ind}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)} := \mathrm{Ind}_{(K,|K|_{\pi_2'})}^{(H,|H|_{\pi_1'})} \quad \text{および} \quad \mathrm{ind}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)} := \mathrm{Ind}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)}|_{\mathfrak{B}_{\pi_2}(K)}.$$

$$\mathrm{Res}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)} := \mathrm{Res}_{(K,|K|_{\pi_2'})}^{(H,|H|_{\pi_1'})} \quad \text{および} \quad \mathrm{res}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)} := \mathrm{Res}_{(K,\pi_2)}^{(H,\pi_1)}|_{\mathfrak{B}_{\pi_1}(H)}.$$

のように記号を整理しておく。次は，characteroid が通常の指標と似通った性質をもつことの示しているものである。

定理　$\langle [\mathfrak{B}_\pi(G),\ \mathfrak{B}_\pi(G)]_{(G,\pi)}\rangle = \mathbb{Z}$.

Quivers of our cases.

これまでの事柄がクイバーの表現を用いてそのように整理できるかを説明する。次の 3 つのクイバーがターゲットである。

$$\text{(i) } Q_{\mathrm{Sgp}(G)\times(\mathbb{Z},\ |\ )},\ \text{(ii) } Q_{\mathrm{Sgp}(G)\times(\{n\in\mathbb{Z}_{>0}|n\big||G|\},|\ )},\ \text{(iii) } Q_{\mathrm{Sgp}(G)\times 2^{\pi(G)}}.$$

(ii) は (i) の部分クイバーである。(iii) の 2^π の poset のオーダーリングは通常のものと逆なものを採用している。Q' を (i)∼(iii) または $Q=(Q')^{\mathrm{ud}}$ のクイバーのどれか一つとする。点 $a(=(H,n)$ あるいは $(H,\pi))\in Q_0$ と矢 $\alpha\in Q_1$ に対し，

$$\mathcal{F}_a = \mathbb{C}\otimes\mathfrak{B}_n(H) \text{ or } \mathfrak{B}_\pi(H),\quad \mathcal{F}_\alpha = \begin{cases} \mathrm{res}^{s(\alpha)}_{r(\alpha)} & \text{if } \alpha\in Q'_1 \\ \mathrm{ind}^{s(\alpha)}_{r(\alpha)} & \text{if } \alpha\in (Q')^{\mathrm{op}}_1 \end{cases}$$

とする。このとき，$\mathcal{F}$ は Q の表現となる。この準備の下で，次の定理が成立つ。

定理　γ を Q の path とする。任意の $f\in\mathcal{F}_{s(\gamma)}$ と $g\in\mathcal{F}_{r(\gamma)}$ に対し次が成立する。

$$[\mathcal{F}_\gamma(f),\ g]_{\mathcal{F}_{r(\gamma)}} = [f,\mathcal{F}_{{}^t\gamma}(g)]_{\mathcal{F}_{s(\gamma)}}.$$

系　$\pi_3\subseteq\pi_1,\pi_2\subseteq\pi(G)$ と $H,K\le L\le G$ に対し次が成立する。

$$[f,\mathrm{res}^{(L,\pi_3)}_{(H,\pi_1)}\mathrm{ind}^{(L,\pi_3)}_{(K,\pi_2)}(g)]_{(H,\pi_1)} = [\mathrm{res}^{(L,\pi_3)}_{(K,\pi_2)}\mathrm{ind}^{(L,\pi_3)}_{(H,\pi_1)}(f),\ g]_{(K,\pi_2)}$$

ただし，$f\in\mathfrak{B}_{\pi_1}(H)$，$g\in\mathfrak{B}_{\pi_2}(K)$ とする。

系　　$p,q\in\pi\subseteq\pi(G)$ および $H,K\le H\le G$ とする。$f\in\mathbb{Z}[p-\mathrm{IBr}(H)],\ g\in\mathbb{Z}[q-\mathrm{IBr}(K)]$ に対して，次が成立する。

$$[f,\mathrm{res}^{(L,\pi)}_{(H,p)}\mathrm{ind}^{(L,\pi)}_{(K,q)}(g)]_{(H,p)} = [\mathrm{res}^{(L,\pi)}_{(K,q)}\mathrm{ind}^{(L,\pi)}_{(H,p)}(f),\ g]_{(K,q)}$$

Application.

以上の話と通常の群論との関係は次の定理がもっとも重要なものと思われる。ただし，上で紹介した定理を書き換えたものに過ぎない。

定理　G を有限群，$\pi\subseteq\pi(G)$ とする。このとき任意の一般指標 f,g に対し

$$\sum_{x\in G_\pi} f(x)\overline{g(x)} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ |G|_\pi)$$

が成立する。

上の定理は群指標の初歩的な教科書に書かれるべき極めて基本的な性質のように私は思う。

References

[1] N. Iiyori and M. Sawabe, Representations of path algebras with applications to subgroup lattices and group characters, *Tokyo J. Math.* **37** (2014), 37–59.

[2] N. Iiyori and M. Sawabe, Simplicial complexes associated to quivers arising from finite groups, *Osaka J. Math.* **52** (2015), 161–204.

[3] N. Iiyori and M. Sawabe, Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups, *Osaka J. Math.* **53** (2016), 731–750.

[4] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of a certain associative algebra, *Hokkaido Math. J.* **46** (2017), 227–256.

[5] N. Iiyori and M. Sawabe, Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups II, *Topology Appl.* **231** (2017), 197–218.

[6] N. Iiyori and M. Sawabe, Homology of the complex of all non-trivial nilpotent subgroups of a finite non-solvable group, *Tokyo J. Math.*, in press

[7] N. Iiyori and M. Sawabe, Class functions related to Brauer characters and quiver representations, preprint.

[8] N. Iiyori and M. Sawabe, Representations of quivers with applications to finite groups, preprint.

[9] I.M. Isaacs, "Character theory of finite groups", Corrected reprint of the 1976 original, Dover Publications, New York, (1994).

[10] G. Navarro, "Characters and blocks of finite groups", London Mathematical Society Lecture Note Series, **250**, Cambridge University Press, Cambridge, (1998).