GEOMETRIC CHARACTERIZATIONS OF RATIONAL HOMOGENEOUS MANIFOLDS

埼玉大学・理工学研究科　渡邉　究

1. はじめに

本稿において，多様体とは複素数体上定義された非特異代数多様体を意味する．多様体 X が群多様体の推移的な代数的作用をもつとき，X を等質多様体と呼ぶ．以下，等質多様体とは射影的な等質多様体を意味する．A. Borel と R. Remmert の結果（定理 2.1）により，全ての等質多様体はアーベル多様体と有理等質多様体の積として記述されることが知られている．本稿では Hwang, Mok を中心に構築された有理曲線の接ベクトルの理論（VMRT 理論）の観点から得られる種々の等質多様体の特徴付けについて概説する．

本稿は以下のように構成されている．まず第 2 章で等質多様体の分類に関する古典的な結果をまとめる．第 3 章では単線織多様体上の有理曲線の変形理論の復習をしたのち，それを用いて VMRT の定義を述べる．さらに，ピカール数 1 の有理等質多様体に対して，その VMRT の構造を具体的に記述する．第 4 章において，VMRT の観点から種々の等質多様体の特徴付けについて概説する．基本的には [4] の記号や用語を用いる．特に，多様体 X 上の局所自由層 $\mathcal{E}$ に対し，$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ はグロタンディックの意味での射影化 $\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}))$ とする．

2. 等質多様体の分類について

この章では等質多様体の分類について述べる．A. Borel と R. Remmert により，以下の等質多様体の構造定理が知られている：

定理 2.1 ([2]). 任意の等質多様体はアーベル多様体と有理等質多様体の積と同型である．さらに，任意の有理等質多様体は半単純線形代数群 G の閉部分群 P による幾何学的商 G/P と同型である．

g 次元のアーベル多様体はリーマンの条件を満たす階数 $2g$ の格子 Λ による g 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^g$ の商空間 $\mathbb{C}^g/\Lambda$ として記述される．一方，有理等質多様体は印付きディンキン図形により分類される．この章では後者の分類について復習する．

線形代数群 G に対し，そのリー代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(G)}$ は G 上の左不変代数的ベクトル場全体の集合として定義される（例えば，[6, 9.1] 参照）．幾つか定義を思い出そう．

定義 2.2. G を連結線形代数群，$\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする．

(i) $\mathfrak{g}$ が非自明なイデアルを含まず，かつ導来イデアル $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が 0 でないとき，G と $\mathfrak{g}$ はそれぞれ**単純**という．

代数学シンポジウムにおける講演の機会を下さったプログラム責任者の石井亮先生，伊藤浩行先生とシンポジウム責任者の市川尚志先生に感謝いたします．本研究は科学研究費「若手研究 B（研究課題番号 ♯17K14153）」のサポートを受けています．

(ii) $\mathfrak{g}$ が単純イデアル $\mathfrak{g}_i$ の直和 $\mathfrak{g}=\bigoplus \mathfrak{g}_i$ とかけるとき，G と $\mathfrak{g}$ はそれぞれ**半単純**という．

定理 2.1 により，有理等質多様体を分類するためには，半単純線形代数群 G とその放物的部分群 P の商 G/P を分類すればよい．ここで，G/P が射影多様体となる G の閉部分群 P を G の**放物的部分群**と呼ぶ．G の普遍被覆 $\tilde{G}\to G$ をとると，$\tilde{G}$ は $\mathrm{Lie}(\tilde{\mathrm{G}})\cong\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ を満たす半単純線形代数群である．さらに，G/P は $\tilde{G}$ の作用に関して等質になる．従って，G を初めから単連結半単純線形代数群としてよい．このようにとることにより，単連結半単純線形代数群 G と半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ は一対一に対応する．以下，単連結半単純線形代数群 G に対応する半単純リー代数 $\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ を $\mathfrak{g}$ と記す．

単連結半単純線形代数群 G の極大連結可解閉部分群 B を G の**ボレル部分群**と呼ぶ．ボレル部分群と放物的部分群に関して次の結果が知られている．

命題 2.3 ([6, Theorem, Corollary B, 21.3])**.** 単連結半単純線形代数群 G に対し，以下が成立する．

(i) ボレル部分群は放物的部分群である．

(ii) G の連結閉部分群 P に対し，P がボレル部分群を含むことと P が放物的部分群であることは同値である．

(iii) G の任意のボレル部分群は互いに共役である．

G のボレル部分群 B を固定する．P を G の任意の放物的部分群とする．命題 2.3 (ii) より，P はあるボレル部分群 B' を含む．B と B' は互いに共役なので，ある $g\in G$ が存在して，$B=g^{-1}B'g$ となる．このとき，$Q:=g^{-1}Pg$ と定めると，$G/P\cong G/Q$ かつ Q は B を含む放物的部分群である．

一方，半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，その極大可解部分リー代数 $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の**ボレル部分代数**，ボレル部分代数 $\mathfrak{b}$ を含む $\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{p}$ を**放物的部分代数**と呼ぶ．このとき，次が成立する．

命題 2.4 ([6, Theorem 13.1], [25, 命題 9.31])**.** 半単純線形代数群 G とそのリー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，

$$\{G\text{ の閉部分群 }\}\to\{\mathfrak{g}\text{ の部分リー代数 }\};H\mapsto\mathfrak{h}:=\mathrm{Lie}(H)$$

なる写像は単射である．さらに，この写像の下，G のボレル部分群と $\mathfrak{g}$ のボレル部分代数，G の放物的部分群と $\mathfrak{g}$ の放物的部分代数はそれぞれ一対一に対応する．

以上をまとめると，有理等質多様体を分類するためには，各半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，そのボレル部分代数 $\mathfrak{b}$ を一つ固定し，$\mathfrak{b}$ を含む放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ を分類すればよい．

半単純リー代数 $\mathfrak{b}$ を含む放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ を分類するために，$\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ を一つ固定する．カルタン部分代数は可換なので，$\mathfrak{g}$ の随伴表現 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ による像 $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ も可換である．従って，$\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ に含まれる $\mathfrak{g}$ 上の線形変換は同時対角化可能であり，$\mathfrak{g}$ は同時固有空間分解可能である．これにより，$\mathfrak{g}$ のルート空間分解を得る（例えば，[7, Chap. 8] 参照）：

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha$$

ただし，

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} | \operatorname{ad}(h)(x) = \alpha(h)x \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\},$$

$$\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^\vee \setminus \{0\} | \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

とする．さらに，Φ の基底 $\Delta := \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\ell\}$ を固定し，Φ を正のルートの集合と負のルートの集合へ分解する：$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$．このとき，以下が成立する．

命題 2.5. 上記記号の下，以下が成立する．

(i) $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{g}$ のボレル部分代数である．

(ii) (i) の $\mathfrak{b}$ を含む任意の放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ に対し，$I \subset \Delta$ が存在し，

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+(I)} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

と表される．ただし，$\Phi^+(I) := \{\sum_{\alpha_i \in \Delta \setminus I} k_{\alpha_i}\alpha_i \in \Phi | k_{\alpha_i} \in \mathbb{Z}\}$ とする．

以下，この $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}_I$ とかく．さらに，$\mathfrak{p}_I$ に対応する放物的部分群を P_I とかく．

証明. (i) ルート $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が成り立つことに注意する．このとき，導来イデアル $D\mathfrak{b} := [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}], D^i\mathfrak{b} := D(D^{i-1}\mathfrak{b})$ に対して，$D\mathfrak{b} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ となる．このことから，十分大きい正整数 n について，$D^n\mathfrak{b} = 0$ となることが簡単に分かる．従って，$\mathfrak{b}$ は可解リー代数である．極大性を示すために，$\mathfrak{b}$ を真に含む $\mathfrak{g}$ の可解部分リー代数 $\mathfrak{b}'$ が存在したと仮定する．このとき，$\mathfrak{b}'$ は $\operatorname{ad}(\mathfrak{h})$-不変なので，ルート空間分解と同様に，ある Φ の部分集合 S が存在し，$\mathfrak{b}' = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in S} \mathfrak{g}_\alpha$ とかける．仮定より，$\Phi^+ \subset S$ かつ S は少なくとも一つの負のルート $-\alpha \in \Phi^-$ を含む．このとき，

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{b}'$$

となるが，$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ は可解でないので矛盾．

(ii) $\mathfrak{b}$ を含む任意の放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ に対し，$\mathfrak{p}$ が $\operatorname{ad}(\mathfrak{h})$-不変なので，(i) と同様にある Φ の部分集合 T が存在し，$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in T} \mathfrak{g}_\alpha$ とかける．このとき，$\Phi^+ \subset T$ が成り立つ．さらに，$\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$ が $\alpha = \beta + \gamma$ かつ $-\alpha \in T$ を満たすならば $-\beta, -\gamma \in T$ が成り立つ．このことから主張は従う． ■

これにより，有理等質多様体 G/P は推移的に作用する群 G も込めて，半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ と単純ルートの集合 Δ の部分集合 I の組 $(\mathfrak{g}, I)$ により決まる．半単純リー代数は単純ルートを頂点として得られるディンキン図形により分類されるので，有理等質多様体 G/P は $(\mathcal{D}, I)$ により群作用も込めて一意的に定まる．ただし，$\mathcal{D}$ は $\mathfrak{g}$ から定まるディンキン図形であり，$I \subset \Delta$ はその頂点の部分集合である．以下，場合に応じて単純ルート α_k を k，ルートの基底 Δ を $\{1, 2, \cdots, \ell\}$ と略記する．ディンキン図形の頂点の番号付けは [7, P. 58] に従う．以下，印付きディンキン図形 $(\mathcal{D}, I)$ に対応する有理等質多様体を $\mathcal{D}(I)$ とかく．

例 2.6. (i) $A_\ell(r)$ は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{\ell+1}$ の r 次元線形部分空間をパラメータ付けするグラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^{\ell+1})$ に対応する．

(ii) 正整数の組 $(r_1 < r_2 < \cdots < r_s \leq \ell)$ に対し，$A_\ell(r_1, r_2, \cdots, r_s)$ は旗多様体

$$\{(V_{r_1}, V_{r_2}, \cdots, V_{r_s}) | V_{r_i} \subset V_{r_{i+1}},\ V_{r_i} \text{ は } \mathbb{C}^{\ell+1} \text{ の } r_i \text{ 次元線形部分空間}\}$$

に対応する．

(iii) ω を $\mathbb{C}^n$ の非退化対称双線形形式とする．このとき，グラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^n)$ の部分集合

$$OG(r, \mathbb{C}^n) := \{[W] \in G(r, \mathbb{C}^n) \mid \omega(W, W) = 0\}$$

を考える．$n = 2\ell+1$ かつ $1 \leq r \leq \ell$ のとき，$B_\ell(r)$ は $OG(r, \mathbb{C}^{2\ell+1})$ に対応する．また，$n = 2\ell$ かつ $1 \leq r \leq \ell-2$ のとき，$D_\ell(r)$ は $OG(r, \mathbb{C}^{2\ell})$ に対応する．一方，$OG(\ell, \mathbb{C}^{2\ell})$ は二つの互いに同型な既約成分 $S_{\ell-1}$ からなり，$D_{2\ell}(\ell-1)$ と $D_{2\ell}(\ell)$ は $S_{\ell-1}$ と同型である．$OG(r, \mathbb{C}^n)$ を**直交グラスマン多様体**，$S_{\ell-1}$ を**スピノール多様体**という（$OG(\ell+1, \mathbb{C}^{2\ell+2})$ の既約成分として S_ℓ を定義することもあるが，ここでは [18] の記号に従う）．

(iv) ω を $\mathbb{C}^{2\ell}$ の非退化反対称双線形形式（シンプレクティック形式）とする．このとき，グラスマン多様体 $G(r, \mathbb{C}^{2\ell})$ の部分集合

$$LG(r, \mathbb{C}^{2\ell}) := \{[W] \in G(r, \mathbb{C}^{2\ell}) \mid \omega(W, W) = 0\}$$

を考える．$1 \leq r \leq \ell$ のとき，$C_\ell(r)$ は $LG(r, \mathbb{C}^{2\ell+1})$ に対応する．$LG(r, \mathbb{C}^{2\ell})$ を**シンプレクティックグラスマン多様体**，もしくは**ラグランジアングラスマン多様体**という．

注意 2.7. 上記例から，例えば $A_{2\ell-1}(1), A_{2\ell-1}(2\ell-1),\ C_\ell(1)$ は全て $(2\ell-1)$ 次元の射影空間 $\mathbb{P}^{2\ell-1}$ と同型である．多様体としては全て同型だが，最初の二つは互いに双対の関係にあり，ともに対応する群は特殊線形群 $\mathrm{SL}(2\ell)$ である．一方，$C_\ell(1)$ に対応する群はシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(2\ell)$ である．

命題 2.8. $\dim \mathcal{D}(I) = \sharp(\Phi^+ \setminus \Phi^+(I))$

証明. 任意の点 $o \in \mathcal{D}(I)$ に対し $\mathcal{D}(I)$ の o における接空間を $T_o(\mathcal{D}(I))$ と書くと，$\dim \mathcal{D}(I) = \dim T_o(\mathcal{D}(I)) = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}_I$ が成り立つ．命題 2.5 により，ベクトル空間として $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_I \cong \bigoplus_{\Phi^+ \setminus \Phi^+(I)} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ となり，任意のルート α に対し $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ であることから主張は従う． ■

$I \subset J \subset \Delta$ に対して，対応する放物的部分代数 $\mathfrak{p}_J \subset \mathfrak{p}_I \subset \mathfrak{g}$ とそれらに対応する放物的部分群 $P_J \subset P_I \subset G$ を考える．このとき，自然な射影 $\pi_{J,I} : G/P_J \to G/P_I$ は代数多様体の射となる．この射に対して以下が成立する．

命題 2.9. 上記記号の下，$\pi_{J,I}$ の任意のファイバーは $(\mathcal{D} \setminus I, J \setminus I)$ なる印付きディンキン図形に対応する有理等質多様体である．ただし，$\mathcal{D} \setminus I$ はディンキン図形 $\mathcal{D}$ から I に対応する頂点を取り除いて得られるディンキン図形とする．

証明. $\pi_{J,I}$ の任意のファイバーは P_I/P_J と表すことができる．放物的部分群 P_I のレヴィ分解を考えると，P_I のユニポテント根基 $R_u(P_I)$ による P_I の商は簡

約代数群となる（[6, Theorem 30.2]）．さらにその簡約代数群をその中心で割ることにより半単純線形代数群 G_I を得る．G_I に対応するリー代数 $\mathrm{Lie}(G_I)$ は

$$\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+(I)} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}])$$

とかける．これはディンキン図形 $\mathcal{D}\setminus I$ に対応するリー代数である．さらに，自然な射影 $\mathfrak{p}_I \to \mathrm{Lie}(G_I)$ による $\mathfrak{p}_J \subset \mathfrak{p}_I$ の像 $\overline{\mathfrak{p}_J}$ は

$$\left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+(I)} ([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus \mathfrak{g}_\alpha)\right) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+(J)} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

とかける．これは $\mathrm{Lie}(G_I)$ の放物的部分代数である．そこで，$\overline{\mathfrak{p}_J}$ に対応する G_I の放物的部分群を $\overline{P_J}$ とかくと，$P_I/P_J \cong G_I/\overline{P_J}$ となる．上記 $\overline{\mathfrak{p}_J}$ の記述から主張が従う． ■

有理等質多様体 $\mathcal{D}(I)$ のピカール群や曲線の錐，因子の錐，コホモロジーの計算についても多くのことが知られている（例えば，[24] 参照）．特に，$\mathcal{D}(I)$ のピカール数 $\rho(\mathcal{D}(I))$ は $\sharp I$ と一致する．

3 章以降のために 2 つ定義を述べる．

定義 2.10. 有理等質多様体 X が長いルート α_k（定義は [7, 10.4] を参照）を用いて $\mathcal{D}(\alpha_k)$ と表されるとき，X を**長いルートに対応する有理等質多様体**と呼ぶ．

定義 2.11. 有理等質多様体 $\mathcal{D}(\Delta)$ を**完全旗多様体**と呼ぶ．$\mathcal{D}(\Delta)$ は G/B に他ならない．

命題 2.12. 長いルートに対応しないピカール数 1 の有理等質多様体 $\mathcal{D}(k)$ はシンプレクティックグラスマン多様体 $C_\ell(k)$ (ただし，$1<k<\ell$) と $F_4(k)$（ただし，$k=3$ または 4）である．

証明. 長いルートに対応しないピカール数 1 の有理等質多様体 $\mathcal{D}(k)$ に対し，ディンキン図形 $\mathcal{D}$ は連結であり，α_k は短いルートである．従って，連結ディンキン図形の分類 [7, 11.4] により，$\mathcal{D}(k)$ は以下のいずれかである：

$$B_\ell(\ell),\ C_\ell(k)\ (k<\ell),\ F_4(k)\ (k=3,\ 4),\ G_2(1).$$

$B_\ell(\ell)$ は多様体として $D_{\ell+1}(\ell+1)$ と同型である．実際，$B_\ell(\ell)$ は非特異 2 次超曲面 $Q^{2\ell-1}$ に含まれる $(\ell-1)$ 次元線形部分空間をパラメータ付けする直交グラスマン $OG(\ell-1, Q^{2\ell-1})$ であり，$D_{\ell+1}(\ell+1)$ は非特異 2 次超曲面 $Q^{2\ell}$ に含まれる ℓ 次元線形部分空間をパラメータ付けする直交グラスマンの既約成分 $OG(\ell, Q^{2\ell})^o$ である．ここで，$Q^{2\ell}$ が張る射影空間の超平面 H を用いて $Q^{2\ell-1}=Q^{2\ell}\cap H$ とみることにより，

$$OG(\ell, Q^{2\ell})^o \to OG(\ell-1, Q^{2\ell-1}); [\mathbb{P}^\ell] \mapsto [\mathbb{P}^\ell \cap H]$$

なる射を得るが，これは同型射である．また，注意 2.7 で述べた通り，$C_\ell(1)\cong A_{2\ell-1}(1)$ である．最後に，$G_2(1)$ は Q^5 と同型であることが知られている（例えば，[3, 23.3] 参照）．従って，$G_2(1)\cong B_3(1)$ である．以上により，$B_\ell(\ell), C_\ell(1), G_2(1)$ はそれぞれ $D_{\ell+1}(\ell+1), A_{2\ell-1}(1), B_3(1)$ とみなすことができるので，長いルートに対応する有理等質多様体である． ■

多様体間の非特異射 $f : X \to Y$ の全てのファイバーが $\mathbb{P}^1$ と同型なとき f を $\mathbb{P}^1$ **束**という．完全旗多様体は多くの $\mathbb{P}^1$ 束構造をもつ．

命題 2.13. 完全旗多様体 $\mathcal{D}(\Delta) = G/B$ は $\sharp\Delta$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束構造をもつ．

証明. 命題 2.9 により，任意の $\alpha_k \in \Delta$ に対して，$\mathcal{D}(\Delta) \to \mathcal{D}(\Delta \setminus \{\alpha_k\})$ は $\mathbb{P}^1$ 束である． ∎

3. VMRT について

この章では有理曲線の変形理論と VMRT について知られていることをまとめる．有理曲線の変形理論に関しては [13] を，VMRT の一般論に関しては，[8, 12, 15, 17, 18] を参照されたい．

3.1. 有理曲線の変形理論と VMRT の定義.

有理曲線の族により覆われる多様体を**単線織多様体**と呼ぶ．また，反標準因子 $-K_X$ が豊富な多様体を**ファノ多様体**と呼ぶ．よく知られている通り，ファノ多様体は単線織多様体である．この章では断りがない限り，X を単線織（非特異）射影多様体とする．$\mathbb{P}^1$ から X への射をパラメータ付けする Hom スキームを $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく．また，非定値射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ に対し，対応する Hom スキームの点を $[f] \in \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく．有理曲線 $C \subset X$ に対しその正規化をとることにより非定値射 $f_C : \mathbb{P}^1 \to C \subset X$ が定まる．グロタンディックの定理（例えば [23, Chap. 1, Theorem 2.1.1] 参照）により $\mathbb{P}^1$ 上の任意のベクトル束は直線束の直和としてかけるので，X の接束 T_X の f_C による引き戻し $f_C^* T_X$ に対しある整数 $a_1 \geq a_2 \ldots \geq a_m$ が存在して，

$$f_C^* T_X = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_2) \oplus \ldots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_m)$$

とかける．

定義 3.1. 上記記号のもと，全ての i に対し $a_i \geq 0$ が成り立つとき，C を**自由有理曲線（free rational curve）**という．また，$a_1 = 2 > a_2$ を満たす自由有理曲線 C を**標準的有理曲線（standard rational curve）**という（[13, Definition IV.2.8] では「極小有理射」と呼んでいることに注意する）．

像と双有理同値な射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ をパラメータ付けする $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ の開部分スキームを $\mathrm{Hom}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく．さらに，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ の正規化を $\mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく（肩付きの $^{\mathrm{n}}$ は正規化 (normalization) を意味し，次元を表しているわけではない）．自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ は自然に $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ と $\mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ へ作用し，それらの幾何学的商をそれぞれ

$$\mathrm{Univ}(X),\ \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$$

と記す（[13, Comment II.2.7, Definition-Proposition II.2.11] 参照）．有理曲線 $C \subset X$ に対し，対応する点を $[C] \in \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ とかく．

定理 3.2 ([13, Corollary II.2.12, Theorem II.2.15])**.** 上記記号のもと，以下の可換図式が成り立つ

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \arrow[r, "U"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Univ}(X) \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \arrow[r, "u"] & \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X). \end{tikzcd}$$

さらに，U と u はそれぞれ主 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 束であり，p は $\mathbb{P}^1$ 束である．

注意 3.3. 一般に，$\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ から X のチャウスキームへの自然な有限射 $\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X) \to \mathrm{Chow}(X)$ が存在する．この射はほとんどの点で単射（generically injective）であるが，一般には必ずしも単射ではない．

評価写像 $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \to X$ に対応し，$\mathrm{Univ}(X)$ の評価写像

$$\mathrm{Univ}(X) \to X$$

が定まる．以下，$\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ の既約成分 $\mathcal{M}$ を固定し，$p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ により $\mathrm{Univ}(X) \to \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ の引き戻しを，$\iota : \mathcal{U} \to X$ により評価写像を表す．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & X \\ \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

定義 3.4. 上記記号のもと，$\iota : \mathcal{U} \to X$ が支配的となるとき，既約成分 $\mathcal{M}$ を**支配的**という．支配的な既約成分のうち反標準次数が最小のものを**極小有理成分**（**minimal rational component**）という．さらに，極小有理成分 $\mathcal{M}$ がスキームとして $\mathbb{C}$ 上固有的ならば，$\mathcal{M}$ を**非分裂**（**unsplit**）という．また，極小有理成分 $\mathcal{M}$ と任意の $x \in X$ に対し $p(\iota^{-1}(x))$ の正規化を $\mathcal{M}_x$ と記し，$p_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{M}_x$ と $\iota_x : \mathcal{U}_x \to X$ により対応する普遍族を表す．[13, Corollary II.2.12] により p_x は $\mathbb{P}^1$ 束である．

注意 3.5. 極小有理成分 $\mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{M}$ が $\mathbb{C}$ 上固有的であることと $\mathbb{C}$ 上射影的であることは同値である．実際，$\mathcal{M}$ が $\mathbb{C}$ 上固有的ならば，有限射 π : $\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X) \to \mathrm{Chow}(X)$ による像 $\pi(\mathcal{M})$ も $\mathbb{C}$ 上固有的である．一般に，$\mathrm{Chow}(X)$ が $\mathbb{C}$ 上射影的なので $\pi(\mathcal{M})$ も射影的となり，$\pi : \mathcal{M} \to \pi(\mathcal{M})$ が有限であることから $\mathcal{M}$ の射影性も従う．

例 3.6. $X \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 3 次曲面とする．X に含まれる直線は 27 本のみであり，X は直線では覆われない．この場合，X の極小有理成分 $\mathcal{M}$ はコニックの族である．また，2 本の直線の和集合が極限として現れるコニックの列が存在するので，$\mathcal{M}$ は一般にスキームとして $\mathbb{C}$ 上固有的ではない．

定理 3.7. $\mathcal{M}$ を X の極小有理成分とする．一般の点 $x \in X$ と $[C] \in \mathcal{M}_x$ に対し，以下が成立する．

(i) C は自由である．
(ii) $\mathcal{M}_x$ は非特異かつ $\mathbb{C}$ 上射影的であり，$\dim \mathcal{M}_x = -K_X.C - 2$ を満たす．
(iii) $[C] \in \mathcal{M}_x$ が $\mathcal{M}_x$ の既約成分の一般元であれば，C は標準的である．

(iv) $f_C(o) = x$ ($o \in \mathbb{P}^1$) とすると，f は o においてはめ込みである．すなわち，f_C の o における微分 $(df_C)_o$ は零写像でない．

(v) $\mathcal{M}_x$ は $\iota^{-1}(x)$ と同型である．

証明. (i) は [13, Theorem II.3.11] と同様の議論により従う．(ii) の射影性以外の主張は [13, Theorem II.1.7, Theorem II.2.16] から従う．$\mathcal{M}_x$ が射影的であることは [13, Proposition II.2.2] と極小有理成分の次数の最小性から従う．(iii) は [13, Corollary II.2.9] より従う．(iv) と (v) は [11, Theorem 3.3] より従う．■

定義 3.8. X の極小有理成分 $\mathcal{M}$ と一般の点 $x \in X$ に対し，定理 3.7 (iv) により，次の射が定まる：

$$\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathbb{P}(\Omega_{X,x}); [C] \mapsto [\mathrm{Im}((df_C)_o)]$$

この射を x **における接写像（tangent map at** x**）**，

$$\mathcal{C}_x := \mathrm{Im}(\tau_x) \subset \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$$

を X の点 x **における VMRT (Variety of Minimal Rational Tangents at** x**)** という．さらに，一般の点 $x \in X$ に対し τ_x が定まることと定理 3.7 (v) により，有理写像

$$\tau : \mathcal{U} \cdots \to \mathbb{P}(\Omega_X)$$

が定まる．この有理写像を**グローバル接写像（global tangent map）**という．

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(\Omega_X) \arrow[d, "\text{projection}"] \\ \mathcal{U} \arrow[ur, dotted, "\tau"] \arrow[r, "\iota"] & X \end{tikzcd}$$

定理 3.9 ([11, Theorem 3.4], [9, Theorem 1, Corollary 1])**.** 定義 3.8 の仮定のもと，以下が成立する．

(i) $\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ は有限射である．

(ii) $\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ は双有理射である．

従って，$\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ は正規化である．

命題 3.10 ([1, Proposition 2.7])**.** 定義 3.8 の仮定のもと，$\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ が $[C] \in \mathcal{M}_x$ においてはめ込みであることと，C が標準的であることは同値である．

例 3.11. 多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が直線で覆われている場合を考える．このとき，X の極小有理成分 $\mathcal{M}$ は直線の族である．定理 3.7 (i) により，一般の $x \in X$ と任意の $[\ell] \in \mathcal{M}_x$ に対し，ℓ は自由有理曲線である．また，2 つの単射

$$T_{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow T_X|_\ell,\ T_X|_\ell \hookrightarrow T_{\mathbb{P}^N}|_\ell$$

により，ℓ は標準的有理曲線であることが分かる．よって，命題 3.10 により，τ_x ははめ込みである．また，固定点 x を通る直線は x における接方向により一意的に定まるので，τ_x は単射である．以上により，$\tau_x : \mathcal{M}_x \hookrightarrow \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$ は閉埋め込みであり，従って $\mathcal{M}_x \cong \mathcal{C}_x$ となる．

注意 3.12. X 上の極小有理成分 $\mathcal{M}$ と一般の点 $x \in X$ に対し，$p_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{M}_x$ と $\iota_x : \mathcal{U}_x \to X$ を普遍族に付随する射，$T_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}$ と $K_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}$ をそれぞれ $\mathcal{U}_x \to \mathcal{M}_x$ の相対接束と相対標準因子とする．自然な射 $T_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}|_{q^{-1}(x)} \subset T_{\mathcal{U}_x}|_{q^{-1}(x)}$ と $T_{\mathcal{U}_x}|_{q^{-1}(x)} \to T_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{q^{-1}(x)}$ の合成を考えると，[11, Theorem 3.3, Theorem 3.4] により $T_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}|_{q^{-1}(x)}$ は $T_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{q^{-1}(x)}$ の部分束である．この束により定まる射 $q^{-1}(x) \to \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$ が接写像 τ_x である．よって，接写像 τ_x は次を満たす：

$$\tau_x^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_{X,x})}(1) = \mathcal{O}_{q^{-1}(x)}(K_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}). \tag{1}$$

3.2. **ピカール数 1 の有理等質多様体の VMRT.** X をピカール数 1 の有理等質多様体とする．このとき，X のピカール群の豊富な生成元 L は非常に豊富なので，完備線形系 $|L|$ により X を射影空間に埋め込むことができる（例えば，[24, Theorem 6.5] 参照）．さらに，この埋め込みに関して X は直線により覆われる（例えば，[13, Theorem V.1.15] 参照）．従って，例 3.11 により，接写像 τ_x は埋め込みになり，$\mathcal{M}_x \cong \mathcal{C}_x$ が成り立つ．また，注意 3.12 により，$\mathcal{C}_x$ の埋め込みの情報が得られる．一般の多様体に対して VMRT $\mathcal{C}_x$ は一般の点 $x \in X$ においてのみ定義されるが，X が等質ならば推移的群作用により任意の点で VMRT は定義され，それらは互いに射影同値であることに注意する．

一般に，ピカール数 1 の有理等質多様体の VMRT の構造は完全に決定されている（例えば，[8, 14, 15] などを参照）．まず，長い単純ルートに対応する有理等質多様体（定義 2.10）について考える．連結なディンキン図形 $\mathcal{D}$ に対し，その第 r 番目の頂点と辺を共有する頂点の集合を $N(r) \subset D$ とおく．このとき以下が成り立つ．

命題 3.13 ([14, Theorem 4.9] 参照)**.** 連結なディンキン図形 $\mathcal{D}$ に対し，X を有理等質多様体 $\mathcal{D}(r)$ とする．r 番目の頂点が長い単純ルートならば，X の任意の点における VMRT は $\mathcal{D}$ から r 番目の頂点を取り除いて得られるディンキン図形 $\mathcal{D} \setminus \{r\}$ とその頂点の部分集合 $N(r)$ の組に対応する有理等質多様体 $(\mathcal{D} \setminus \{r\})(N(r))$ である．

この命題を用いて長い単純ルートに対応する有理等質多様体の VMRT の構造を次頁の Table 1 にまとめる．ただし，$\mathcal{O}(1)$ により対応する多様体のピカール群の豊富な生成元を表す．また，多様体の積 $Y_1 \times Y_2 \times \dots$ とその第 i 射影 p_i に対し，$p_1^*\mathcal{O}(a_1) \otimes p_2^*\mathcal{O}(a_2) \otimes \dots$ を $\mathcal{O}(a_1, a_2, \dots)$ により表す．全ての場合において，VMRT の埋め込みは対応する直線束の完備線形系による埋め込みとする．

命題 2.12 により，長い単純ルートに対応しない等質多様体はシンプレクティックグラスマン多様体 $C_\ell(k)$ (ただし，$1 < k < \ell$) と $F_4(k)$（ただし，$k = 3$ または 4）の 3 種類のみである．それらに関しては次が成立する．

命題 3.14. $(\mathcal{D}, r) = (C_\ell, r),\ r = 2, \dots, \ell - 1, \quad (F_4, 3), \quad (F_4, 4)$ に対応する有理等質多様体 $\mathcal{D}(r)$ の VMRT はそれぞれ以下により与えられる:

- (C_ℓ, r) $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(1)^{2\ell-2r})$ とそのトートロジー的直線束による完備線形系 $|\mathcal{O}(1)|$.
- $(F_4, 3)$ $\mathbb{P}^1$ 上の階数 4 のあるベクトル束 $\mathcal{E}$ により定まるグラスマン束 $G(2, \mathcal{E})$ とそのプリュッカー直線束による完備線形系.
- $(F_4, 4)$ スピノール多様体 $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$ の超平面切断.

$\mathcal{D}$	頂点 r	X	VMRT	埋め込み
A_ℓ	$\le \ell$	$G(r, \mathbb{C}^{\ell+1})$	$\mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{P}^{\ell-r}$	$\mathcal{O}(1,1)$
B_ℓ	$\le \ell-2$	$OG(r, \mathbb{C}^{2\ell+1})$	$\mathbb{P}^{r-1} \times Q^{2(\ell-r)-1}$	$\mathcal{O}(1,1)$
	$\ell-1$	$OG(\ell-1, \mathbb{C}^{2\ell+1})$	$\mathbb{P}^{\ell-2} \times \mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(1,2)$
	ℓ	S_ℓ	$G(\ell-1, \mathbb{C}^{\ell+1})$	$\mathcal{O}(1)$
C_ℓ	1	$\mathbb{P}^{2\ell-1}$	$\mathbb{P}^{2\ell-2}$	$\mathcal{O}(1)$
	$\le n-1$	$LG(r, \mathbb{C}^{2\ell})$	(命題 3.14 参照)	
	ℓ	$LG(\ell, \mathbb{C}^{2\ell})$	$\mathbb{P}^{\ell-1}$	$\mathcal{O}(2)$
D_ℓ	$\le \ell-3$	$OG(r, \mathbb{C}^{2\ell})$	$\mathbb{P}^{r-1} \times Q^{2(\ell-r-1)}$	$\mathcal{O}(1,1)$
	$\ell-2$	$OG(\ell-2, \mathbb{C}^{2\ell})$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{\ell-3}$	$\mathcal{O}(1,1,1)$
	$\ell-1, \ell$	$S_{\ell-1}$	$G(2, \mathbb{C}^\ell)$	$\mathcal{O}(1)$
E_k	1	$E_k(1)$	S_{k-2}	$\mathcal{O}(1)$
	2	$E_k(2)$	$G(3, \mathbb{C}^k)$	$\mathcal{O}(1)$
	3	$E_k(3)$	$\mathbb{P}^1 \times G(2, \mathbb{C}^{k-1})$	$\mathcal{O}(1,1)$
	4	$E_k(4)$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{k-4}$	$\mathcal{O}(1,1,1)$
	5	$E_k(5)$	$G(2, \mathbb{C}^5) \times \mathbb{P}^{k-5}$	$\mathcal{O}(1,1)$
	6	$E_k(6)$	$S_4 \times \mathbb{P}^{k-6}$	$\mathcal{O}(1,1)$
	7	$E_k(7)$	$E_6(1) \times \mathbb{P}^{k-7}$	$\mathcal{O}(1,1)$
	8	$E_8(8)$	$E_7(7)$	$\mathcal{O}(1)$
F_4	1	$F_4(1)$	$LG(3, \mathbb{C}^6)$	$\mathcal{O}(1)$
	2	$F_4(2)$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}(1,2)$
	3	$F_4(3)$	(命題 3.14 参照)	
	4	$F_4(4)$	(命題 3.14 参照)	
G_2	1	Q^5	Q^3	$\mathcal{O}(1)$
	2	$G_2(2)$	$\mathbb{P}^1$	$\mathcal{O}(3)$

Table 1. ピカール数 1 の有理等質多様体の VMRT

特に，VMRT は等質多様体でない．

証明. 例えば [14] 参照．また，$C_\ell(r)$ と $F_4(4)$ の VMRT やその射影幾何学的性質に関しては，それぞれ [19, 20] にも記述がある．$F_4(3)$ の VMRT に関しては [10] に詳しい記述が載っている． ■

4. VMRT による等質多様体の特徴付け

この章では VMRT の観点からピカール数 1 の有理等質多様体の特徴付けについて考える．前章において有理等質多様体の VMRT の構造をみたが，N. Mok [16] と J. Hong, J. M. Hwang [5] により，長い単純ルートに対応する有理等質多様体は VMRT により特徴付けられることが知られている：

定理 4.1 ([16, 5])**.** ピカール数 1 のファノ多様体 X に対し，X 上の一般の点における VMRT $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$ が長い単純ルートに対応する有理等質多様体 G/P の VMRT と射影同値であれば，X は G/P と同型である．

命題 3.13 により，長い単純ルートに対応する有理等質多様体の VMRT は再び有理等質多様体になることに注意する．このことが上記定理 4.1 の証明でも

用いられている．一方，命題 2.12 により，長い単純ルートに対応しないピカール数 1 の有理等質多様体はシンプレクティックグラスマン多様体と 2 つの F_4 型の多様体のみである．これらの場合，VMRT は有理等質多様体でない．しかし，これらに対しても定理 4.1 と同じことが成り立つことが Mok, Hong, Hwang により予想されている：

予想 4.2. ピカール数 1 のファノ多様体 X に対し，X 上の一般の点における VMRT $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$ がピカール数 1 の有理等質多様体 G/P の VMRT と射影同値であれば，X は G/P と同型である．

また，定理 4.1 に関連して，G. Occhetta, L. E. Solá Conde, J. A. Wiśniewski による次の結果も知られている：

定理 4.3 ([22]). X をピカール数 1 のファノ多様体とする．X は非分裂極小有理成分 $p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ をもち，その評価写像 $\iota : \mathcal{U} \to X$ が非特異射であると仮定する．さらに，任意の $x \in X$ に対し，$\iota^{-1}(x)$ が（固定された）有理等質多様体 Z と同型ならば，X は有理等質多様体である．

注意 4.4. 定理 4.1 と定理 4.3 は似ているが，どちらか一方からもう一方が（直ちに）従うわけではない．定理 4.1 の利点は一般の点における VMRT の構造のみを仮定すれば良い点である．一方で，定理 4.3 は任意の点における $\iota^{-1}(x)$ の等質性を仮定しているが，接写像による埋め込み方を仮定する必要がない点が優れている．

定理 4.3 の証明において次の結果が本質的に重要である．

定理 4.5 ([21], [22, Theorem A.1]). 射影多様体 X に対し，以下は同値である．
- (i) X はピカール数 $\rho(X)$ と同じ数の $\mathbb{P}^1$ 束構造をもち，それらの張る端射線は $N_1(X)$ において線形独立である．
- (ii) X はあるディンキン図形 $\mathcal{D}$ に付随する完全旗多様体 $\mathcal{D}(\Delta) = G/B$ と同型である．

系 4.6. ファノ多様体 X が有理等質多様体であることと以下の条件を満たす射影多様体 Z が存在することは同値である*:*
- (i) Z から X へ収縮射が存在する．
- (ii) 射影多様体 Z は $\rho(Z)$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束構造をもち，それらの張る端射線は $N_1(Z)$ において線形独立である．

証明. X を有理等質多様体とする．定理 2.1 により，半単純線形代数群 G とその放物的部分群 P が存在し $X = G/P$ となる．このとき，P に含まれるボレル部分群 B を用いて $Z = G/B$ とすればよい．逆に，Z が条件 (i), (ii) を満たすならば，定理 4.5 により $Z = G/B$ となる．条件 (i) より X は有理等質多様体 G/B の収縮射の像であるが，それは有理等質多様体である． ■

この系を用いて定理 4.3 をどのように示すか，証明のアイデアのみ述べる：

定理 4.3 の証明のアイデア. 定理の仮定のもと，$\iota : \mathcal{U} \to X$ の任意のファイバーは有理等質多様体 Z と同型である．G を $\mathrm{Aut}(Z)$ の単位元を含む既約成分とすると，$Z = G/P$ とかける．ここで，G は半単純線形代数群，P はその放物的部分群である．このとき，解析的位相に関して $\iota : \mathcal{U} \to X$ は G/P をファイバー

としてもつファイバー束となる．ファイバー束 ι はコサイクル $\theta \in H^1(X,G)$ を定める．このコサイクルを用いて，X 上の主 G 束 $E_G \to X$ を構成することができる．さらに，任意の放物的部分群 $P' \subset G$ に対し，G/P' 束を考えることができる：

$$q_{P'} : E_{P'} := E_G \times_G G/P' := (E_G \times G/P')/\sim_G \to X.$$

ただし，任意の $h \in G$ に対し，$(x, gP') \sim_G (xh, h^{-1}gP')$ とする．このように定めると，任意の放物的部分群 $P_1 \subset P_2 \subset G$ に対し，$q_{P_2} \circ q_{P_1,P_2} = q_{P_1}$ を満たす自然な射 $q_{P_1,P_2} : E_{P_1} \to E_{P_2}$ が存在する．特に，P に含まれるボレル部分群 B をとり，$\bar{\iota} : \overline{\mathcal{U}} := E_B \to X$ とおくと，次の可換図式を満たす：

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{U}} \arrow[d] \arrow[dr, "\bar{\iota}"] & \\
\mathcal{U} \arrow[r, "\iota"'] & X
\end{tikzcd}$$

また，命題 2.13 により，B を真に含む最小の放物的部分群 P_i が $\rho(G/B)$ 個あり，$G/B \to G/P_i$ はそれぞれ $\mathbb{P}^1$ 束である．従って，$\overline{\mathcal{U}} := E_B$ は $\rho(G/B)$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束 $\overline{\mathcal{U}} \to E_{P_i}$ を持つ．

いま，$\rho(\overline{\mathcal{U}}) = \rho(G/B) + 1$ なので，系 4.6 を適用するにはさらにもう 1 つ独立な $\mathbb{P}^1$ 束構造が必要である．定理 3.7 により，$\mathcal{U}$ は $\mathbb{P}^1$ 束構造 $p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ をもつが，この $\mathbb{P}^1$ 束構造が $\overline{\mathcal{U}}$ 上に持ち上がることを示すことができる．その結果，$\overline{\mathcal{U}}$ は $\rho(G/B)+1$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束構造を持つことが分かる．それらが定める端射線が $N_1(\overline{\mathcal{U}})$ において独立であることは簡単に確認できるので，系 4.6 により X の等質性が従う． ■

定理 4.3 の証明と同様のアイデアを用いると，予想 4.2 の弱型がシンプレクティックグラスマン多様体と $F_4(4)$ に対して成立することを示すことができる：

定理 4.7 ([19, 20])**.** X をピカール数 1 のファノ多様体とする．X は非分裂極小有理成分 $p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ をもち，グローバル接写像 $\tau : \mathcal{U} \to \mathbb{P}(\Omega_X)$ が閉埋め込みであると仮定する．任意の $x \in X$ に対し，$\iota^{-1}(x)$ がシンプレクティックグラスマン多様体または $F_4(4)$ の VMRT と射影同値であれば，X はそれぞれシンプレクティックグラスマン多様体または $F_4(4)$ と同型である．

注意 4.8. 先にも触れた通り，$C_\ell(k)$ $(1 < k < \ell)$ や $F_4(4)$ の VMRT は等質多様体ではない．しかし，それらの VMRT は有理等質多様体をある群の作用に関する閉軌道として含んでおり，その軌道を用いて X 上に G/P 束を構成することができる．しかし，この G/P 束を構成する箇所や，その後の議論において，しばしば定理 4.3 と同じ手法を適用することができないため，個別に扱う必要がある．詳細は [19, 20] を参照されたい．

参考文献

[1] Carolina Araujo. Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces. *Math. Ann.*, 335(4):937–951, 2006.

[2] Armand Borel and Reinhold Remmert. Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 145:429–439, 1961/1962.

[3] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[4] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[5] Jaehyun Hong and Jun-Muk Hwang. Characterization of the rational homogeneous space associated to a long simple root by its variety of minimal rational tangents. In *Algebraic geometry in East Asia—Hanoi 2005*, volume 50 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 217–236. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.

[6] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[7] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.

[8] Jun-Muk Hwang. Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds. In *School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000)*, volume 6 of *ICTP Lect. Notes*, pages 335–393. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001.

[9] Jun-Muk Hwang and Ngaiming Mok. Birationality of the tangent map for minimal rational curves. *Asian J. Math.*, 8(1):51–63, 2004.

[10] Jun-Muk Hwang and Ngaiming Mok. Deformation rigidity of the 20-dimensional F_4-homogeneous space associated to a short root. In *Algebraic transformation groups and algebraic varieties*, volume 132 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 37–58. Springer, Berlin, 2004.

[11] Stefan Kebekus. Families of singular rational curves. *J. Algebraic Geom.*, 11(2):245–256, 2002.

[12] Stefan Kebekus and Luis E. Solá Conde. Existence of rational curves on algebraic varieties, minimal rational tangents, and applications. In *Global aspects of complex geometry*, pages 359–416. Springer, Berlin, 2006.

[13] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[14] Joseph M. Landsberg and Laurent Manivel. On the projective geometry of rational homogeneous varieties. *Comment. Math. Helv.*, 78(1):65–100, 2003.

[15] Ngaiming Mok. Geometric structures on uniruled projective manifolds defined by their varieties of minimal rational tangents. *Astérisque*, (322):151–205, 2008. Géométrie différentielle, physique mathématique, mathématiques et société. II.

[16] Ngaiming Mok. Recognizing certain rational homogeneous manifolds of Picard number 1 from their varieties of minimal rational tangents. In *Third International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2*, volume 2 of *AMS/IP Stud. Adv. Math., 42, pt. 1*, pages 41–61. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[17] Ngaiming Mok. Geometric structures and substructures on uniruled projective manifolds. In *Foliation Theory in Algebraic Geometry*, Simons Symposia, pages 103–148. Springer International Publishing, 2016.

[18] Roberto Muñoz, Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, Kiwamu Watanabe, Jarosław A. Wiśniewski, A survey on the Campana-Peternell conjecture. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 47:127–185, 2015.

[19] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe. A characterization of Symplectic Grassmannians. *Math. Z.*, 286(3-4):1421–1433, 2017.

[20] Gianluca Occhetta, Luis E. Sola Conde, and Kiwamu Watanabe. Characterizing the homogeneous variety $F_4(4)$. *Preprint arXiv*:1706.01640, 2017.

[21] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe, Jarosław A. Wiśniewski. Fano manifolds whose elementary contractions are smooth $\mathbb{P}^1$-fibrations: A geometric characterization of flag varieties. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 17(2):573–607, 2017.

[22] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Jarosław A. Wiśniewski. Flag bundles on Fano manifolds. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 106(4):651–669, 2016.

[23] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler. Vector bundles on complex projective spaces. Progress in Mathematics, 3. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

[24] Dennis M. Snow. *Homogeneous vector bundles*, volume 10 of *CMS Conf.* Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[25] 西山享，太田琢也. 代数群と軌道. 数学の杜. 数学書房, 2015.

Course of Mathematics, Programs in Mathematics, Electronics and Informatics, Graduate School of Science and Engineering, Saitama University. Shimo-Okubo 255, Sakura-ku Saitama-shi, 338-8570, Japan.

E-mail address: kwatanab@rimath.saitama-u.ac.jp