Almost Ring Theoryの観点からのホモロジカル予想

下元数馬 (日本大学)

以下で扱う環は全て可換環であると仮定する。ホモロジカル予想とはHochsterらが導入したネーター局所環に関する予想の一群のことであるが、中でも良く知られているのが**直和因子予想**と呼ばれるものである。

Conjecture 1 (直和因子予想)**.** $R \hookrightarrow S$ はネーター環の整拡大、R は正則であって S は有限生成 R-加群であるとする。このとき、R は R-加群として S の直和因子である。

この予想は[12]でHochsterによって定式化され、彼自身は正標数の場合を解決した。零標数の場合は比較的易しい。しかしながら R が体を含まない場合、つまり**混合標数**のケースが未解決のまま残されていた。2002年にR. Heitmannが3次元の場合を解決し([11]を参照)、2016年にはY. AndréによりAlmost ring theoryとPerfectoid幾何学の理論を用いて完全な解決がもたらされた([1],[2]を参照)。

Almost ring theoryとは、1980年代にG. Faltingsが p-進Hodge理論における基本的な問題を解決するために導入した可換環の手法のことである([8]を参照)。直和因子予想はB. Bhatt([4]を参照)によって更に簡明な証明が付けられたが、実際にはAndréによって次の強い結果が示された(用語に関しては本文を参照のこと)。

Theorem 2 (André; [1], [2])**.** *k は標数 $p > 0$ の完全体、$V = W(k)$ は Witt 環を表すとする。また*

$$R := V[[x_2, \ldots, x_d]] \hookrightarrow S$$

は d 次元完備正則局所環から整閉整域 S への有限生成な整拡大、$d \geq 2$ であると仮定する。このとき、ある元 $g \in R \setminus pR$ が存在して $R[\frac{1}{pg}] \to S[\frac{1}{pg}]$ がエタール拡大となる。更に R-代数 T で以下の性質を満たすものが存在する。

1. *T は integral almost perfectoid 代数である。*
2. *$pg \in T$ は非零因子であり、任意の自然数 $n > 0$ に対して $(pg)^{\frac{1}{p^n}} \in T$ となる。*
3. *$T/\mathfrak{m}T$ は T-加群として almost zero ではなく、更に*

$$(pg)^{\frac{1}{p^n}} \cdot \frac{((p, x_2, \ldots, x_i)T :_T x_{i+1})}{(p, x_2, \ldots, x_i)T} = 0$$

が全ての自然数 n に対して成立する。

Theorem 2 により任意のネーター局所環は big Cohen-Macaulay 代数 (以下、big CM 代数と呼ぶ) を持つことが示され、そこから直和因子予想も容易に従う。尚、定理で得られた S-代数 T は *almost Cohen-Macaulay* 代数と呼ばれているものである。Heitmann の証明からヒントを得て、Hochster は almost CM 代数から big CM 代数を直接構成する方法 (partial algebra modification ; [13] を参照のこと) を見出していた。この論説ではホモロジカル予想、Almost ring theory 周辺の話題、それと直和因子予想の証明のアイデアについてなるべく分かり易い説明を試みる。尚、André の論文 [1] では、Almost purity 定理を更に拡張した Perfectoid Abhyankar 補題と呼ばれる、非常に深い定理を証明してから Theorem 2 を導いていることに注意したい。ホモロジカル予想の歴史については [20] に簡にして要を得た解説があり参照のこと。

謝辞: 代数学シンポジウムにおいて講演の機会を与えて下さり、運営に関わられた皆様方に深く感謝したいと思います。

1 Big Cohen-Macaulay 代数

環は全て可換かつ単位元を持つと仮定する。ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m})$ に対して $d := \dim R$ とおく。与えられたネーター環を考察する際、「その環は Cohen-Macaulay であるか？」という問題を考えることがしばしば重要である。また CM 性のお陰で問題が考えやすくなることがある。仮に環が CM でなくても次の問題を考えることは自然である。

Problem 3. $(R, \mathfrak{m})$ はネーター局所環とする。以下の性質を満たす R-代数 B が存在するだろうか？

- $x_1, \ldots, x_d$ を R のパラメータ系とする。この時、$B \neq \mathfrak{m}B$ かつ $x_1, \ldots, x_d$ は B において正則列となる。

上のような性質を持つ B を一般に **big CM 代数**と呼んでいる。ここで B は必ずしもネーター的とは仮定していないことに注意する。このような代数の存在は、R が体を含む場合 (等標数) には Hochster-Huneke の仕事によって知られていた。最も難しいのは R が体を含まない場合 (混合標数) であるが、Theorem 2 から次の定理が正しいことが示された (証明に関しては [2] を参照)。

Theorem 4. 任意のネーター局所環は *big CM* 代数を持つ。

次に big CM 代数と直和因子予想との関係について述べたい。

Lemma 5. $(R, \mathfrak{m})$ は *Krull* 次元が d である *CM* ネーター局所環と仮定する。R の任意のパラメータ系 $x_1, \ldots, x_d$ に関して

$$(x_1 \cdots x_d)^n \notin (x_1^{n+1}, \ldots, x_d^{n+1})$$

が全ての $n > 0$ に対して成立する。

Lemma 5 はパラメータ系が正則列であるということから容易に従う。「一般の (CM とは限らない) 局所環でも Lemma 5 の結論は成立するだろうか？」というのが **Monomial 予想**と呼ばれているホモロジカル予想の一部であり、Theorem 4 を認めれば正しい。

Theorem 6. *Monomial* 予想が成立する。

Proof. $(R, \mathfrak{m})$ は Krull 次元が d であるネーター局所環、$x_1, \ldots, x_d$ を R のパラメータ系とし、ある自然数 n に対して

$$(x_1 \cdots x_d)^n \in (x_1^{n+1}, \ldots, x_d^{n+1})$$

が成立したと仮定する。Theorem 4 によって big CM 代数 $R \to B$ が存在する。すると

$$(x_1 \cdots x_d)^n \in (x_1^{n+1}, \ldots, x_d^{n+1})B$$

となる。しかし $x_1, \ldots, x_d$ は B において正則列なのでこれは矛盾である。 □

[12] において Hochster は Monomial 予想から直和因子予想が従うことを示した。従って Theorem 4 の証明の鍵となるアイデアを理解すれば良いことが分かった。直和因子予想そのものは big CM 代数の存在を仮定しなくても証明は可能であるが、この論説の主題である Almost ring theory と Theorem 4 とが深く関係していることを強調しておきたい。

2 Almost ring theory

必要な用語を定義することから始めたい。Almost ring theory の基本的文献として [9] を挙げておく。

Definition 7. A は可換環、π は A の非零因子であるとする。更に $\pi_n := \pi^{\frac{1}{p^n}} \in A$ かつ $\pi_{n+1}^p = \pi_n$ であると仮定する。以下、$\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ を固定する。

1. A-加群 M が **almost zero** であるとは、$\pi_n \cdot M = 0$ が全ての n に対して成立するときに言う。これを $M \approx 0$ という記号で表す。

2. A-加群の写像 $f : M \to N$ が **almost isomorphism** であるとは、Ker $(f) \approx 0$ かつ $\mathrm{Im}(f) \approx 0$ であるときに言う。

以下、$(\pi^\infty) := \bigcup_{n>0} \pi^{\frac{1}{p^n}} A$ とおいて、組 $(A, (\pi^\infty))$ を**基本設定** (basic setup) と呼ぶことにする。イデアル (π^∞) は単項イデアルの順極限なので、A-加群として平坦である。

Remark 8. 1. 具体例について述べる。$A := \overline{\mathbb{Z}}_p$ を p-進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ での整閉包とする。$\pi_n = p^{\frac{1}{p^n}}$ とおくと、$(A, (\pi^\infty))$ は基本設定を与えている。また $A/(\pi^\infty)$ は自明でない almost zero な A-加群となる。

2. 「almost zero となる加群は、如何なる条件の下でゼロ加群になるか？」に関しては次の事実が知られている (読者への練習問題とする)。

   - A-加群 M がある有限表示型を持つ A-加群の部分加群であって、更に $M \approx 0$ ならば $M = 0$ となる。

Definition 9. $(R, \mathfrak{m})$ は Krull 次元が d のネーター局所環、$x_1, \dots, x_d$ をパラメータ系とする。基本設定 $(A, (\pi^\infty))$ を固定し、T は R-代数かつ A-代数であると仮定する。T が **almost CM** であるとは、以下の条件が満たされるときに言う。

1. 任意の $n \geq 0$ に対して

$$\pi_n \cdot \frac{((x_1, \dots, x_i)T :_T x_{i+1})}{(x_1, \dots, x_i)T} = 0$$

   が成立する。

2. $T/\mathfrak{m}T$ は almost zero でない。

次の定理は Hochster による partial algebra modification を用いて示される。

Theorem 10. $(R, \mathfrak{m})$ は任意標数のネーター局所環とする。R 上の *almost CM* 代数が存在すれば R は *big CM* 代数を持つ。

Theorem 10 によって big CM 代数を構成する問題は almost CM 代数を構成する問題に帰着された。まず易しい場合である正標数から始めたい。

Theorem 11. $(R, \mathfrak{m})$ は完備ネーター局所整域であって、有限体 $\mathbb{F}_p$ を含むとする。

$$R_\infty := \bigcup_{n>0} R^{\frac{1}{p^n}}$$

とする。このとき、R は *almost CM* R-代数である。

R_∞ は R の**完全閉包** (perfect closure) とよばれるもので、フロベニウス写像が全単射で作用する。また R が体で無ければ R_∞ はネーター環とはなり得ないことに注意する。Theorem 11 の証明に関しては [16] を参照。

Remark 12. R_∞ は必ずしも big CM 代数ではないことに注意したい。例えば、R として F-純かつ CM でないものを取ってくると、R_∞ は big CM 代数ではない。ここで標数 $p > 0$ のネーター整域 R が **F-純**であるとは、R が R^p-加群として純 (pure) という意味である。ただし、$R^p = \{x^p \mid x \in R\}$ とする。

Scholze の論文 [17] と André の論文 [1] に従って用語を導入する。

Definition 13. 基本設定 $(A, (\pi^\infty))$ を固定する。A は $\mathbb{Z}_p$ 上忠実平坦な可換環、任意の自然数 $n > 0$ に対して $t_n := p^{\frac{1}{p^n}} \in A$ とおいて $t_{n+1}^p = t_n$ であると仮定する。

1. A が p-進位相で完備かつ分離的、フロベニウス写像 $F : A/pA \to A/pA$ に関して Ker $(F) = t_1 A$ かつ $\pi_n \cdot \mathrm{Coker}(F) = 0$ が全ての自然数 n について成立するとき、A は **integral almost perfectoid** 代数と呼ぶ。

2. A が **integral perfectoid** 代数であるとは、A が integral almost perfectoid であって更に $\mathrm{Coker}(F) = 0$、つまりフロベニウス写像の全射性が成立するときに言う。

定義に関して注意しておくと、応用上興味があるのは、ある元 $g \in A$ が与えられていて $\pi = pg$ という関係を満たしている場合である。既に Theorem 2 において述べたように、André の論文 [1] において、完備ネーター局所環の有限生成な整拡大 $R = V[[x_2, \dots, x_d]] \to S$ の分岐集合 $V(pg) \subset \mathrm{Spec}\ R$ を考えている。$g = 1$ の場合は Faltings による **Almost purity 定理**として良く知られている結果である。また 1 次元の場合は、J. Tate によって 1960 年代に調べられていた。これから Tate は局所体上の Abel 多様体から派生する Tate 加群、p-divisible 群について幾つかの結果を導いた。Faltings による Almost purity 定理については、次章以降において直和因子予想の証明と関連して説明を試みる。

混合標数の場合には次が問題となる。

Problem 14. $(R, \mathfrak{m})$ は混合標数を持つ完備ネーター局所整域とする。このとき、完全閉包に相当する可換環を混合標数でも構成できないだろうか？更に CM 性を満たすものが作れないだろうか？

完全閉包の混合標数における類似が integral perfectoid 性を満たすものだと認めれば、Theorem 2 の結論によって上の疑問に答える形で近いものが構成されていることが分かる。より詳しく言うと以下の問題が未解決である。

Problem 15 (下元)**.** $(R, \mathfrak{m})$ は混合標数を持つネーター局所環とする。このとき、big CM R-代数で integral perfectoid 代数の構造を持つものが存在するだろうか？

また次の問題に対する反例は知られていないようである。ただし、$\pi = p$ であるならば正しいことが示される。これについては [1] を参照のこと。

Problem 16 (André)**.** 任意の integral almost perfectoid 代数は integral perfectoid であるか？

3　直和因子予想の証明 (特別な場合)

最初に Almost purity 定理を説明する。そのために用語を導入する。k は標数 $p > 0$ の完全体であるとし、$V = W(k)$ は Witt 環とする。$R := V[[x_2, \dots, x_d]]$ は d-次元完備正則局所環とする。また

$$R_n := V[p^{\frac{1}{p^n}}][[x_2^{\frac{1}{p^n}}, \dots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]]$$

で $R_\infty := \bigcup_{n>0} R_n$ とおく。構成の仕方から明らかなように、R_∞ は整閉整域であり、フロベニウス写像 $F : R_\infty/pR_\infty \to R_\infty/pR_\infty$ は全射である。

Theorem 17 (Faltings; [8])**.** $R := V[[x_2, \dots, x_d]] \hookrightarrow S$ は完備ネーター局所環の有限生成な整拡大、S は整閉整域、$R[\frac{1}{p}] \to S[\frac{1}{p}]$ はエタール拡大であると仮定する。また S_n は $R_n \otimes_R S$ の全商環での $R_n \otimes_R S$ の整閉包を表すものとし、$S_\infty := \bigcup_{n>0} S_n$ とおく。このとき

$$R_\infty \to S_\infty$$

は *almost étale* 拡大となる。

Remark 18. Almost purity 定理は古典的な Nagata-Zariski の定理と深い関係にある。また [8] では、R が V 上本質有限型なスムーズ代数と仮定されていたが、Scholze[17] により一般化的な状況で示されたことに言及しておく。Almost purity 定理は幾つかの異なるバージョンが知られている。Kedlaya-Liu によるもの [14]、また Davis-Kedlaya によるもの [6] が知られている。特に Davis-Kedlaya による定式化は p-進完備化を取らなくてもよいという利点があり、将来的には $\mathbb{Z}$ 上の Hodge 理論が展開されることが期待される。

まず古典的な状況に関して復習する。

Definition 19. スキーム X と空でない開集合 $U \subset X$ から成る組 (X, U) を考える。$\mathbf{Et}(X)$ を X 上有限エタールなスキームの作る圏とする。このとき関手

$$\mathbf{Et}(X) \to \mathbf{Et}(U);\ Y \mapsto Y' := Y \times_X U$$

が圏同値を与えるとき、(X, U) を**純な対** (pure pair) と呼ぶ。

以下の結果を思い出したい。

Theorem 20. $(R, \mathfrak{m})$ をネーター局所環とし、$X := \mathrm{Spec}\ R$、$U := \mathrm{Spec}\ R \setminus \{\mathfrak{m}\}$ とおく。以下の事実が成立する。

1. R が正則局所環であり *Krull* 次元が *2* 以上であれば、(X, U) は純。
2. R が完全交叉であり *Krull* 次元が *3* 以上であれば、(X, U) は純。

次に純な対という概念を、Almost ring theory の枠組みへと拡張する。定義や用語は [3] に従うものとする。

Definition 21. $(A, (\pi^\infty))$ は基本設定、R は A-代数、M と N はともに R-加群とする。

1. M が **almost flat** であるとは、$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) \approx 0$ が任意の $i > 0$ と N に対して成り立つことを言う。

2. M が **almost projective** であるとは、$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \approx 0$ が任意の $i > 0$ と N に対して成り立つことを言う。

3. M が **almost faithfully flat** であるとは、まず M が almost flat であり更に任意の R-加群 N_1 と N_2 に対して, 自然な写像

$$\mathrm{Hom}_R(N_1, N_2) \to \mathrm{Hom}_R(N_1 \otimes_R M, N_2 \otimes_R M)$$

の核が almost zero となることである。

4. M が **almost finitely generated** であるとは、任意に与えられた自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、ある有限生成な R-加群 M_n と R-準同型 $f_n : M_n \to M$、$g_n : M \to M_n$ が存在して、$f_n \circ g_n = \pi_n \circ \mathrm{Id}_M$ と $g_n \circ f_n = \pi_n \circ \mathrm{Id}_{M_n}$ が成立するときに言う。

以上の準備の下に almost étale 拡大の定義を与える。

Definition 22. $(A, (\pi^\infty))$ は基本設定とする。A-代数の準同型 $f : B \to C$ が **almost étale 拡大**であるとは、以下の条件が満たされるときに言う。

1. C は B-加群として almost finitely generated、almost faithfully flat、almost projective である。

2. $\mu : C \otimes_B C \to C$ を $\mu(b \otimes c) = bc$ で定義する。この写像を通して C を $C \otimes_B C$-加群とみなす。このとき、C は $C \otimes_B C$-加群として almost projective である。

上の定義を Spec A 上のスキームまで拡張することが可能であるが、詳細については [10] に譲る。また almost étale 拡大に関しては文献によって見かけ上、若干異なる定義が採用されているようである。

Remark 23. 環準同型 $f : B \to C$ がエタールであるとは、f が有限表示型、平坦かつ不分岐であることを思い出す。上の定義で現われた「$C \otimes_B C$-加群 C が (almost) projective である」という条件はあまり見慣れないかもしれないが、環準同型の不分岐性と関係している。これについては [9] や [15] を参照のこと。

一般に $f : B \to C$ が平坦で C が $C \otimes_B C$-加群として平坦である場合には、$f : B \to C$ は **weaky étale 拡大**と呼ばれている。Bhatt-Scholze の論文 [5] ではエタール・コホモロジーへの応用が与えられている。

Problem 24. 論文 [5] において次の結果が鍵となる。

- $f : B \to C$ は weakly étale であるとする。このとき、faithfully flat な ind-étale な準同型写像 $g : C \to D$ であって合成写像 $g \circ f : B \to D$ が ind-étale となるものが存在する。

この結果の証明を純粋に環論だけを用いて示すことは可能であろうか？[5] で与えられている証明は、環論以外にも集合・位相空間論などを駆使するもので技術的にもかなり難しい。

純な対の概念を Almost ring theory の枠組みまで拡張する。

Definition 25 (Gabber-Ramero; [10])**.** $(A, (\pi^\infty))$ は基本設定とする。また R を A-代数、$I \subset R$ をイデアルとする。$X := \mathrm{Spec}\ R$、$U := \mathrm{Spec}\ R \setminus V(I)$ とおく。$\mathbf{Et}^a(X)$ を almost étale な X-スキーム達の作る圏とする。このとき関手

$$\mathbf{Et}^a(X) \to \mathbf{Et}^a(U);\ Y \mapsto Y' := Y \times_X U$$

が圏同値を与えるとき、(X, U) を**概純な対** (almost pure pair) と呼ぶ。

この定義から意味ある結果を導くためには、R が整閉整域など技術的な条件が必要であるが、定義も含めた詳細については [10] を参照のこと。冒頭で述べた Faltings の定理は $X = \mathrm{Spec}\ R_\infty$、$U = \mathrm{Spec}\ R_\infty[\frac{1}{p}]$ の場合に相当する。

以上の準備の下で、直和因子予想を、Almost purity 定理と同じ仮定の下で証明を与える。以下の証明は [3] によるものであるが、一般の場合の直和因子予想の証明 [4] を理解するための重要なエッセンスが含まれている。取り扱いが困難な混合標数の可換環の問題に取り組む上で役立つ道具や考え方が含まれていることを強調しておきたい。

Theorem 26 (Bhatt; [3])**.** *k は標数 $p > 0$ の完全体、$V = W(k)$ は Witt 環であるとする。また*

$$f : R = V[[x_2, \ldots, x_d]] \hookrightarrow S$$

は有限生成な整拡大、S は整閉整域、更に $R[\frac{1}{p}] \to S[\frac{1}{p}]$ はエタール拡大であると仮定する。このとき、R は R-加群として S の直和因子である。

Proof. まず $Q := \mathrm{Coker}(f)$ とおく。すると完全列

$$0 \to R \xrightarrow{f} S \to Q \to 0$$

より次の長完全列が誘導される。

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(Q, R) \to \mathrm{Hom}_R(S, R) \to \mathrm{Hom}_R(R, R) \to \mathrm{Ext}^1_R(Q, R) \to \cdots$$

そこで $\mathrm{ob}(f) \in \mathrm{Ext}^1_R(Q, R)$ を $\mathrm{Id}_R \in \mathrm{Hom}_R(R, R)$ の像とする。また

$$R_\infty := \bigcup_{n>0} V[p^{\frac{1}{p^n}}][[x_2^{\frac{1}{p^n}}, \ldots, x_d^{\frac{1}{p^n}}]]$$

とおいて基本設定を $(R_\infty, (p^\infty))$ としておく。もし $\mathrm{ob}(f) = 0$ が正しければ、R-準同型 $g : S \to R$ で $g \circ f = \mathrm{Id}_R$ を満たすものの存在が言える。そのために以下の事実を示す。

(事実): $\mathrm{ob}(f) \otimes 1 \in \mathrm{Ext}^1_R(Q, R) \otimes_R R_\infty$ で生成された巡回 R_∞-加群は almost zero である。言い換えると、$p^{\frac{1}{p^n}} \cdot \mathrm{ob}(f) \otimes 1 = 0$ が任意の $n > 0$ に対して成立する。

正規環 S_∞ は Theorem 17 において定義されたものとする。$Q_\infty := \mathrm{Ker}\,\big(f_\infty : R_\infty \to S_\infty\big)$ とおく。上と同様にして $\mathrm{ob}(f_\infty) \in \mathrm{Ext}^1_{R_\infty}(Q_\infty, R_\infty)$ を定義する。次の可換図式を考えたい。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R_\infty & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{R_\infty}\otimes f} & R_\infty \otimes_R S & \longrightarrow & R_\infty \otimes_R Q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\| & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R_\infty & \xrightarrow{f_\infty} & S_\infty & \longrightarrow & Q_\infty & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

すると almost purity 定理によって $R_\infty \to S_\infty$ が almost étale 拡大であることから、Q_∞ は almost projective な R_∞-加群であることが示される (この事実の証明については [3] を参照)。つまり

$$\mathrm{Ext}^1_{R_\infty}(Q_\infty, R_\infty) \approx 0$$

となる。これは $R_\infty \cdot \mathrm{ob}(f_\infty) \approx 0$ を意味する。また構成から分かるように $R \to R_\infty$ は忠実平坦なので、R_∞-加群の同型 $\mathrm{Ext}^1_{R_\infty}(R_\infty \otimes_R Q, R_\infty) \cong \mathrm{Ext}^1_R(Q, R) \otimes_R R_\infty$ が従う。$R_\infty \otimes_R Q \to Q_\infty$ から自然に誘導される写像

$$\mathrm{Ext}^1_{R_\infty}(Q_\infty, R_\infty) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Ext}^1_{R_\infty}(R_\infty \otimes_R Q, R_\infty) \cong \mathrm{Ext}^1_R(Q, R) \otimes_R R_\infty$$

を考えると、$\mathrm{ob}(f) \otimes 1 = \pi(\mathrm{ob}(f_\infty))$ となることが確かめられるので、

$$R_\infty \cdot (\mathrm{ob}(f) \otimes 1) \approx 0$$

が出る。これで (事実) が示された。

次に $\mathrm{Ext}^1_{R_\infty}(R_\infty \otimes_R Q, R_\infty) \cong \mathrm{Ext}^1_R(Q, R) \otimes_R R_\infty$ は有限表示型 R_∞-加群であることに注意する。$M := R_\infty \cdot (\mathrm{ob}(f) \otimes 1)$ とおく。すると almost zero な R_∞-加群 M は有限表示型 R_∞-加群の部分加群なので、Remark 8 で述べたように $M = 0$ となる。$R \to R_\infty$ が忠実平坦であることから $\mathrm{ob}(f) = 0$ となり、これで定理が示された。 □

Remark 27. 論文 [18] では同様のアイデアを用いて、Theorem 26 と同じ条件の下で big CM 代数を構成している。本文中で述べた Problem 15 であるが、[7]、[19] で展開されている理論が役立つのではないかと思う。ホモロジカル予想を超えてより豊かな理論を作り上げるためには、big CM 代数の構造を詳しく解析することが不可欠であろう。

次の問題は混合標数の場合が未解決である。

Problem 28. $(R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ は完備ネーター局所整域の局所準同型とする。このとき、big CM R-代数 $\mathcal{B}(R)$ と big CM S-代数 $\mathcal{B}(S)$ で、次の図式を可換にするものは存在するであろうか？

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{B}(R) & \longrightarrow & \mathcal{B}(S) \\
\Big\uparrow & & \Big\uparrow \\
R & \longrightarrow & S
\end{array}
$$

André の論文 [1]、[2] に関するコメントをしておきたい。環準同型 $A \to B$ が与えられたとして、$A[\frac{1}{g}] \to B[\frac{1}{g}]$ がエタール拡大であるような状況を想定したい。Perfectoid Abhyankar 補題とは、従来の Almost purity 定理を超えて、$(X = \mathrm{Spec}\ A, U = \mathrm{Spec}\ A[\frac{1}{g}])$ が概純な対 (almost pure pair) であることを目指しており、数論幾何や可換環論においても強力な道具と成り得ることが期待される。この原稿を執筆している時点において、これらの論文の妥当性についての最終的な判断は下されていないようである。しかしながら論文 [4] においてその有効性が示されており、[1] の詳しい解析が喫緊の課題と言えるであろう。最後に、Perfectoid Abhyankar 補題の特別な場合を紹介して本稿を終えたい。

Theorem 29 (André; [1])**.** *A は integral perfectoid 代数、$g \in A$ は非零因子とする。また任意の自然数 $n > 0$ に対して $g^{\frac{1}{p^n}} \in A$ であり、B' は $A[\frac{1}{g}]$ 上有限なエタール代数であると仮定する。*

$$g^{-\frac{1}{p^\infty}}A := \left\{ b \in A[\frac{1}{g}] \;\middle|\; g^{\frac{1}{p^n}} \cdot b \in A,\ \forall\ n > 0 \right\}$$

とおくと、自然に $A[\frac{1}{g}]$ の部分環とみなせる。B を B' における $g^{-\frac{1}{p^\infty}}A$ の整閉包の p-進完備化を表すものとする。また $\pi := pg$ とおいて $(A, (\pi^\infty))$ を基本設定としておく。このとき、B は integral almost perfectoid 代数となる。つまりフロベニウス写像 $F : B/pB \to B/pB$ の余核は almost zero となる。

References

[1] Y. André, *Le lemme d'Abhyankar perfectoide*, https://arxiv.org/abs/1609.00320.

[2] Y. André, *La conjecture du facteur direct*, https://arxiv.org/abs/1609.00345.

[3] B. Bhatt, *Almost direct summands*, Nagoya Math. J. **214** (2014), 195–204.

[4] B. Bhatt, *On the direct summand conjecture and its derived variant*, https://arxiv.org/abs/1608.08882.

[5] B. Bhatt and P. Scholze, *The pro-étale topology for schemes*, Astérisque **369** (2015), 99–201.

[6] C. Davis and K. S. Kedlaya, *On the Witt vector Frobenius*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 2211–2226.

[7] G. Dietz, *Big Cohen-Macaulay algebras and seeds*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 5959–5989.

[8] G. Faltings, *Almost étale extensions*: Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques II, Asérisque, **279** (2002), 185–270.

[9] O. Gabber and L. Ramero, *Almost ring theory*, Lecture notes in mathematics **1800**, Springer-Verlag, 2003.

[10] O. Gabber and L. Ramero, *Foundations for almost ring theory*, https://arxiv.org/abs/math/0409584.

[11] R. Heitmann, *The direct summand conjecture in dimension three*, Ann. of Math. **156** (2002), 695–712.

[12] M. Hochster, *Contracted ideals from integral extensions of regular rings*, Nagoya Math. J. **51** (1973), 25–43.

[13] M. Hochster, *Big Cohen-Macaulay algebras in dimension three via Heitmann's theorem*, J. Algebra **254** (2002), 395–408.

[14] K. S. Kedlaya and R. Liu, *Relative p-adic Hodge theory, I: Foundations*, **371** (2015), Astérisque.

[15] J.-P. Olivier, *Going up along absolutely flat morphisms*, J. Pure Appl. Algebra **30** (1983), 47–59.

[16] P. Roberts, A. Singh and V. Srinivas, *Annihilators of local cohomology in characteristic zero*, Illinois J. Math. **51** (2007), 237–254.

[17] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. de l'IHÉS **116** (2012), 245–313.

[18] K. Shimomoto, *An application of the almost purity theorem to the homological conjectures*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), 621–632.

[19] K. Shimomoto, *An embedding problem of Noetherian rings into the Witt vectors*, https://arxiv.org/abs/1503.02018.

[20] 高木俊輔・高橋亮, 可換環論の発展ーホモロジカル予想を中心として、第 54 回代数学シンポジウム.