微分作用素と多項式環

黒田 茂（首都大学東京・理工）

導分（微分作用素）は可換環の研究で重要な概念であり，様々な形で研究が行われている．例えば，導分の核に関する研究の代表的なものとして Nowicki [57] が有名である．一方，多項式環の周辺には多くの基本的な問題が未解決なまま残されており，アフィン代数幾何学や多変数関数論などとも関係を持ちながら，活発な研究が展開されている．関連する問題を幅広く扱った文献として，例えば van den Essen [13] がある．導分の概念は，多項式環に関する諸問題の研究でも非常に重要な役割を果たす．本稿では多項式環研究の観点から，導分や関連するいくつかの話題について概説する．

本稿は非専門家を念頭に，可能な限りエッセンスが伝わるよう配慮して執筆した．

1　導分の核と Hilbert の第 14 問題

R を可換環とするとき，$D : R \to R$ が R における**導分（微分作用素）**であるとは，任意の $a, b \in R$ に対し $D(a+b) = D(a) + D(b)$ および

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \tag{1.1}$$

が成り立つときにいう．このとき，D の核 $R^D := \{a \in R \mid D(a) = 0\}$ は R の部分環である．(1.1) より，導分 D は必ず R^D 上の線形写像になる．

S を R の部分環とする．R^D が S を含むとき，D を S **導分**と呼ぶ．R^D が S を含むという条件は，D が S 線形写像であるという条件と同値である．R における導分全体の集合，S 導分全体の集合をそれぞれ $\mathrm{Der}\,R$, $\mathrm{Der}_S\,R$ で表す．$X \subset R$ が S 代数 R を生成するとき，$D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_S\,R$ が $D_1|_X = D_2|_X$ を満たすならば，導分 $D_1 - D_2$ の核は R と等しい．よって，$D_1 = D_2$ が成り立つ．例えば，$R = S[x_1, \ldots, x_n]$ が多項式環のとき，任意の $D \in \mathrm{Der}_S\,R$ に対し

$$D = D(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + D(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

が成り立つ．R における S 導分 D に対して次の問題は基本的である．

問題 1.1　S 代数 R が有限生成のとき，S 部分代数 R^D の有限生成性を判定せよ．

S が正標数のネーター環のとき，S 代数 R が有限生成ならば R^D は有限生成である．実際, $R = S[a_1, \ldots, a_n]$, $\operatorname{char} S = l$ とすれば, $i = 1, \ldots, n$ に対し $D(a_i^l) = la_i^{l-1}D(a_i) = 0$ が成り立つから $R' := S[a_1^l, \ldots, a_n^l]$ は R^D に含まれる．R は R' 上整だから，R は有限生成 R' 加群である．R' はネーター環なので R' 部分加群 R^D は有限生成であり，従って S 代数として有限生成である．なお，S がネーター環でなければ，類似の主張は一般に成り立たない．例えば，s, t を可換環 A 上の不定元とするとき，$S := A[s, st, st^2, \ldots]$ はネーター環でない．S 上の 2 変数多項式環 $R = S[x, y]$ における S 導分

$$D = s\frac{\partial}{\partial x} + st\frac{\partial}{\partial y}$$

を考える．$R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$ を多項式環 R の標準的次数付けとすれば，任意の $d \geq 1$ に対し $D(R_d) \subset R_{d-1}$ であるので，$R^D = \bigoplus_{d=0}^{\infty}(R^D \cap R_d)$ が成り立つ．$R^D \cap R_1$ は $tx - y$ を含まないため，$\{st^i(tx - y) \mid i \geq 0\}$ で生成される非有限生成な S 加群になる．従って，S 代数 R^D は有限生成でない．

以下では k を体，$k[\mathbf{x}] := k[x_1, \ldots, x_n]$ を k 上の n 変数多項式環，$k(\mathbf{x})$ をその商体とする．任意の $D \in \operatorname{Der}_k k[\mathbf{x}]$ は $k(\mathbf{x})$ における k 導分に一意的に拡張できる．これも同じ D で表せば，$k[\mathbf{x}]^D = k(\mathbf{x})^D \cap k[\mathbf{x}]$ が成り立つ．$k(\mathbf{x})^D$ は拡大 $k(\mathbf{x})/k$ の中間体なので，k 代数 $k[\mathbf{x}]^D$ の有限生成性の問題は，次の Hilbert の第 14 問題の特別な場合に当たる．なお，上述のように，$\operatorname{char} k > 0$ のとき $k[\mathbf{x}]^D$ は常に有限生成である．

問題 1.2（Hilbert の第 14 問題）　$k(\mathbf{x})/k$ の中間体 L に対し，k 代数 $L \cap k[\mathbf{x}]$ は有限生成か？

Zariski [68] より，$r := \operatorname{trans.deg}_k(L \cap k[\mathbf{x}]) \leq 2$ ならば $L \cap k[\mathbf{x}]$ は有限生成である．$\operatorname{char} k = 0$ のとき，任意の $0 \neq D \in \operatorname{Der}_k k[\mathbf{x}]$ は $\operatorname{trans.deg}_k k[\mathbf{x}]^D < n$ を満たすので，$n \leq 3$ ならば $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成である．一方，Hilbert の第 14 問題に対する最初の反例は，1958 年に永田 [55] によって $n = 32$, $r = 4$ の場合に与えられた．その後，Roberts [60] は異なる種類の反例を与えた．各 $l \geq 1$ に対し，

$$P_l := k[x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_l, z]$$

を k 上の $2l + 1$ 変数多項式環とする．Roberts の反例は $\operatorname{char} k = 0$, $n = 7$, $r = 6$ の場合の反例であり，P_3 における k 導分

$$D = x_1^{t+1}\frac{\partial}{\partial y_1} + x_2^{t+1}\frac{\partial}{\partial y_2} + x_3^{t+1}\frac{\partial}{\partial y_3} + (x_1x_2x_3)^t\frac{\partial}{\partial z} \qquad (t \geq 2) \tag{1.2}$$

の核として得られる．なお，藏野 [30] は $t=1$ のとき，この導分の核が k 上 12 個の元で生成されることを示した．

以下，第 3 節まで k は標数 0 の体とする．Roberts の結果を手掛かりに，Hilbert の第 14 問題に対する様々な反例が構成された．小島・宮西 [25] は $l \geq 3$, $t \geq 2$ のとき，P_l における k 導分

$$D = x_1^{t+1}\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + x_l^{t+1}\frac{\partial}{\partial y_l} + (x_1 \cdots x_l)^t \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.3}$$

の核が有限生成でないことを示した．黒田 [32] は P_l における $k[x_1, \ldots, x_l]$ 導分 D で，$D(y_1), \ldots, D(y_l)$, $D(z)$ が $x_1, \ldots, x_l$ の単項式であるものに対し，核が有限生成でないための詳しい十分条件を与えた．それによれば，$l \geq 4$, $t=1$ の場合も (1.3) の核は有限生成でない．また，P_3 における k 導分

$$D = x_1^{\delta_1^1}x_2^{\delta_1^2}x_3^{\delta_1^3}\frac{\partial}{\partial y_1} + x_1^{\delta_2^1}x_2^{\delta_2^2}x_3^{\delta_2^3}\frac{\partial}{\partial y_2} + x_1^{\delta_3^1}x_2^{\delta_3^2}x_3^{\delta_3^3}\frac{\partial}{\partial y_3} + x_1^{\delta_4^1}x_2^{\delta_4^2}x_3^{\delta_4^3}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.4}$$

の核は，$\epsilon_{i,j}^i := \delta_i^i - \delta_j^i > 0$ $(1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 4,\ i \neq j)$ かつ

$$\frac{\epsilon_{1,4}^1}{\min\{\epsilon_{1,2}^1 . \epsilon_{1,3}^1\}} + \frac{\epsilon_{2,4}^2}{\min\{\epsilon_{2,3}^2 . \epsilon_{2,1}^2\}} + \frac{\epsilon_{3,4}^3}{\min\{\epsilon_{3,1}^3 . \epsilon_{3,2}^3\}} \leq 1 \tag{1.5}$$

ならば有限生成でない．一方，$\epsilon_{i,j}^i > 0$ $(1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 4,\ i \neq j)$ のとき，(1.5) の不等式が成り立たなければ D の核は有限生成であると予想しているが，大きな進展は得られていない ([32, Conjecture 4.8])．

より低次元の反例を得るために，Freudenburg [16] と Daigle-Freudenburg [9] は Roberts の反例に手を加え，それぞれ $n = 6, 5$, $r = 5, 4$ の反例を構成した．これらの反例も導分の核として与えられた．例えば [9] は P_2 における k 導分

$$D = x_1^t \frac{\partial}{\partial y_1} + (x_1 y_1 + x_2)\frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial z} \qquad (t \geq 2) \tag{1.6}$$

の核が有限生成でないことを示した．黒田 [33], [35] は [32] の手法を改良し，それぞれ $n = 4, 3$ の場合に $r = 3$ の反例を構成した．これにより，Hilbert の第 14 問題は全ての n について決着した．また，$r = 3$ の場合に反例が存在することが初めて分かった．[34] より，[33] で与えた $n = 4$ の場合の反例は導分の核として実現できるので，$k[\mathbf{x}]^D$ の有限生成性の問題も全ての n について決着した．なお，$n = 3$ の場合の反例では，$k(\mathbf{x})/L$ は必然的に代数拡大になる．黒田 [36] は $n = 3$ の場合に，各 $d \geq 3$ に対し，$[k(\mathbf{x}) : L] = d$ を満たす反例 L を構成した．

2 Field Modification Problem

Hilbert の第 14 問題について議論を進めるために，$k(\mathbf{x})/k$ の中間体 L と，$A := L \cap k[\mathbf{x}]$ の商体 $Q(A)$ の関係について注意を述べる．明らかに，$Q(A) \subset L$ かつ $Q(A) \cap k[\mathbf{x}] = A$ が成り立つ．さらに，$Q(A)$ は L において代数的に閉じている．実際，$f \in L$ が $Q(A)$ 上代数的ならば，$\sum_{i=0}^{d} a_i f^i = 0$, $a_d \neq 0$ を満たす $a_0, \ldots, a_d \in A$ が存在する．このとき，$a_d f$ は $k[\mathbf{x}]$ 上整なので $k[\mathbf{x}]$ に属する．よって，$a_d f \in L \cap k[\mathbf{x}] = A$ であり，$f \in Q(A)$ を得る．従って，$\mathrm{trans.deg}_k L = \mathrm{trans.deg}_k A$ であることと，$L = Q(A)$ であることは同値である．本稿では，$k(\mathbf{x})/k$ の中間体 L がこの条件を満たすとき，L は**極小**であるという．Hilbert の第 14 問題 (問題 1.2) では，L が極小な場合を考えれば十分である．

具体例として，第 1 節で述べた Roberts の反例について考える．P_3 の商体を Q_3 とするとき，(1.2) で定義した導分の核 Q_3^D は

$$K = k\left(x_1, x_2, x_3, (x_1x_2x_3)^t y_1 - x_1^{t+1} z, (x_1x_2x_3)^t y_2 - x_2^{t+1} z, (x_1x_2x_3)^t y_3 - x_i^{t+1} z\right)$$

と等しい．実際，この K が Q_3^D に含まれることは容易に分かるが，$Q_3 = K(z)$ が K 上の 1 変数有理関数体なので，$D(z) = (x_1x_2x_3)^t \neq 0$ と合わせて $Q_3^D = K$ と結論できる．この K は極小である．一方，任意の $d \in \mathbf{Z}$ に対し，$K' := K(z^d + z^{-d})$ は $K' \cap K[z] = K$ を満たす．$P_3 \subset K[z]$ なので，

$$K' \cap P_3 = K' \cap K[z] \cap P_3 = K \cap P_3 = P_3^D$$

が成り立つ．よって，K' も Hilbert の第 14 問題の反例であるが，K' は極小でない．なお，k が 1 の原始 d 乗根 ζ を含むとき，$\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}_K K(z) = \mathrm{Aut}_K Q_3$ が $\sigma(z) = \zeta z$, $\tau(z) = z^{-1}$ で定義される．このとき，K' は $\mathrm{Aut}_k Q_3$ の有限部分群 $\langle \sigma, \tau \rangle$ の不変体である．

ところで，$\sigma \in \mathrm{Aut}_k Q_3$ が

$$\sigma(x_i) = x_i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \sigma(y_i) = (x_1x_2x_3)^t y_i - x_i^{t+1} z \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \sigma(z) = z$$

で定義され，K は σ による $k(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ の像と等しい．このように，$k(\mathbf{x})/k$ の分かり易い中間体を $\mathrm{Aut}_k k(\mathbf{x})$ の適当な元で写すことで，Hilbert の第 14 問題の反例が得られることがある（永田の反例について [11] を参照）．そこで，次の問題を考える．

問題 2.1（Field Modification Problem） M を $k(\mathbf{x})/k$ の極小な中間体とし，$M \neq k(\mathbf{x})$ かつ $\mathrm{trans.deg}_k M \geq 3$ を満たすと仮定する．このとき，$\sigma(M)$ が Hilbert の第 14 問題の極小な反例となるような $\sigma \in \mathrm{Aut}_k k(\mathbf{x})$ は常に存在するか？

問題 2.1 の状況において，M の体論的性質は σ で写しても保たれるので，この方法により Hilbert の第 14 問題に対する多様な反例が得られる．例えば，M が $\mathrm{Aut}_k\, k(\mathbf{x})$ の部分群 G の不変体ならば，$\sigma(M)$ は $\sigma G\sigma^{-1}$ の不変体である．また，M が $D \in \mathrm{Der}_k\, k(\mathbf{x})$ の核ならば，$\sigma(M)$ は導分 $D' := \sigma D\sigma^{-1}$ の核である．$fD'(x_1), \ldots, fD'(x_n)$ が $k[\mathbf{x}]$ に属するような $f \in k(\mathbf{x})^{\times}$ に対し，fD' は $\mathrm{Der}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元を誘導する．このとき，

$$k[\mathbf{x}]^{fD'} = k(\mathbf{x})^{fD'} \cap k[\mathbf{x}] = k(\mathbf{x})^{D'} \cap k[\mathbf{x}] = \sigma(M) \cap k[\mathbf{x}]$$

が成り立つので，有限生成でない核を持つ $\mathrm{Der}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元が得られる．

問題 2.1 は設定が少し厳しいので，この問題の「安定版」を考える．ただし，z は $k(\mathbf{x})$ 上の不定元とし，$k(\mathbf{x}, z)$ は k 上の $n+1$ 変数有理関数体とする．

問題 2.2（Stable Field Modification Problem） M を $k(\mathbf{x})/k$ の極小な中間体とし，$M \neq k(\mathbf{x})$ かつ $\mathrm{trans.deg}_k\, M \geq 2$ を満たすと仮定する．このとき，$\sigma(M(z))$ が Hilbert の第 14 問題の極小な反例となるような $\sigma \in \mathrm{Aut}_k\, k(\mathbf{x}, z)$ は常に存在するか？

M の様々な性質が $M(z)$ に遺伝する．例えば，M が $\mathrm{Aut}_k\, k(\mathbf{x})$ の部分群 G の不変体ならば，$M(z)$ は G' の不変体である．ここで，G' は G から誘導される $\mathrm{Aut}_{k(z)}\, k(\mathbf{x}, z)$ の部分群とする．同様に，M が $D \in \mathrm{Der}_k\, k(\mathbf{x})$ の核ならば，$M(z)$ は D' の核である．ここで，D' は D から定まる $\mathrm{Der}_{k(z)}\, k(\mathbf{x}, z)$ の元とする．

Hilbert の第 14 問題の反例の以前の構成法を精密化し，次の結果を最近得た [47].

定理 2.3 問題 2.2 の解は肯定的である．

定理 2.3 から次の系が直ちに従う．$n = 3$, $d = 2$ の場合が新しい結果である．

系 2.4 任意の自然数 $n \geq 3$, $d \geq 2$ に対し，Hilbert の第 14 問題に対する極小な反例 L で $[k(\mathbf{x}) : L] = d$ を満たすものが存在する．

ところで，位数 n の任意の有限群 G は，各 $\sigma \in G$ を集合 G 上の置換 $G \ni \tau \mapsto \sigma\tau \in G$ と考えることで，n 次対称群 S_n の部分群と見なせる．さらに，各 $\sigma \in S_n$ を $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ で定義される $\mathrm{Aut}_k\, k(\mathbf{x})$ の元と同一視すれば，G は $\mathrm{Aut}_k\, k(\mathbf{x})$ の部分群と見なせる．**Noether の問題**は，この状況において不変体 $k(G) := k(\mathbf{x})^G$ が k の純超越拡大であるかを問う問題である．$p = 47$ をはじめ，様々な素数 p に対し $\mathbf{Q}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ が $\mathbf{Q}$ の純超越拡大でないことが知られている ([21], [65], [67])．一方，G が有限アーベル群のとき，$\mathbf{Q}(G)$ が $\mathbf{Q}$ の純超越拡大であるための必要十分条件は，ある $l \geq 0$ が存在し，$\mathbf{Q}(G)(z_1, \ldots, z_l)$ が $\mathbf{Q}$ の純超越拡大となることである ([12])．ここで，$z_1, \ldots, z_l$ は $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$

上の不定元とする．これらの事実と定理 2.3 から次の系が得られる．

系 2.5 $n = 48$ のとき，$\mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ の位数 47 の巡回部分群 G が存在し，$\mathbf{Q}(\mathbf{x})^G$ は $\mathbf{Q}$ の純超越拡大でなく，$A := \mathbf{Q}(\mathbf{x})^G \cap \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$ は有限生成でなく，$\mathrm{trans.deg}_{\mathbf{Q}}\,A = 48$ である．

3 局所冪零導分

$D \in \mathrm{Der}\,R$ が**局所冪零**であるとは，任意の $a \in R$ に対してある整数 $l \geq 0$ が存在し，$D^l(a) = 0$ を満たすときにいう．R における局所冪零導分全体の集合，局所冪零 S 導分全体の集合をそれぞれ $\mathrm{LND}\,R$, $\mathrm{LND}_S\,R$ で表す．LND は locally nilpotent derivation の略である．多項式環の研究では，局所冪零導分が特に重要である．本節では局所冪零導分に関する基本事項を簡潔に述べる．

$R = S[x]$ が可換環 S 上の 1 変数多項式環のとき，R における S 導分 $D = d/dx$ は局所冪零である．一方，$D' := xD$ は x を固定するので局所冪零でない．一般に，R における導分 D は R^D 線形写像なので，任意の $a \in R^D$, $b \in R$, $l \geq 0$ に対し

$$(aD)^l(b) = aD(aD(\cdots(aD(b))\cdots)) = a^l D^l(b) \tag{3.1}$$

が成り立つ．よって，D が局所冪零ならば，任意の $a \in R^D$ に対して導分 aD は局所冪零である．一方，節末で示すように，R が標数 0 の整域のとき，D が局所冪零か否かに関らず，$D(a) \neq 0$ ならば aD は局所冪零でない．

定義より，$D \in \mathrm{Der}\,R$ が局所冪零であるための必要十分条件は，

$$\mathrm{Nil}(D) := \{a \in R \mid D^l(a) = 0 \text{ を満たす } l \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \text{ が存在 }\}$$

が R と等しいことである．ただし，$\mathbf{Z}_{\geq 0} := \{a \in \mathbf{Z} \mid a \geq 0\}$ とする．(1.1) より

$$D^l(ab) = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} D^i(a) D^{l-i}(b) \qquad (a, b \in R,\ l \geq 0) \tag{3.2}$$

が成り立つ．よって，$a, b \in \mathrm{Nil}(D)$ ならば $ab \in \mathrm{Nil}(D)$ であり，$\mathrm{Nil}(D)$ は R の R^D 部分代数となる．S を R の部分環とし，D を R における S 導分とする．このとき，S は $\mathrm{Nil}(D)$ に含まれる．従って，$\mathrm{Nil}(D)$ が S 代数 R の生成系を含めば，$\mathrm{Nil}(D) = R$ が成り立つので D は局所冪零である．

$D \in \mathrm{Der}_k\,k[\mathbf{x}]$ が**三角**であるとは，

$$D(x_1) \in k,\ D(x_2) \in k[x_1],\ D(x_3) \in k[x_1, x_2],\ \ldots\ , D(x_n) \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$$

を満たすときにいう．このとき，$D(x_i) \in \mathrm{Nil}(D) \iff x_i \in \mathrm{Nil}(D)$ に注意し，$x_1, \ldots, x_n$ が $\mathrm{Nil}(D)$ に属することを n に関する帰納法で確認できる．よって，三角導分は局所冪零である．例えば，(1.2), (1.3), (1.4), (1.6) はいずれも三角導分である．なお，文献によっては，$D(x_i) \in k[x_{i+1}, \ldots, x_n]$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たすとき三角ということもある．本稿では，この条件を満たすとき**逆三角**ということにする．例えば，

$$T = -2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{3.3}$$

は逆三角である．$T(x_1x_3 + x_2^2) = 0$ だから $D := (x_1x_3 + x_2^2)T$ も局所冪零だが，この D は三角でも逆三角でもない．

$D \in \mathrm{LND}\, R$ に対し，$D(s) = 1$ を満たす $s \in R$ を D の**スライス**と呼ぶ．s が D のスライスならば，任意の $f(x) \in R^D[x]$ に対し $D(f(s)) = f'(s)D(s) = f'(s)$ が成り立つ．ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．よって，$f(s) = 0$ ならば $f'(s) = 0$ である．これより，$\mathrm{char}\, R = 0$ のとき s が R^D 上の超越元であることが分かる．今，R を $\mathbf{Q}$ 代数と仮定する．すると，$D(a) \in R^D[s]$ を満たす任意の $a \in R$ に対し，s の多項式としての $D(a)$ の原始関数 $b \in R^D[s]$ が存在する．このとき，$D(a) = D(b)$ だから $a - b \in R^D$ であり，$a \in R^D[s]$ となる．よって，

$$\deg_D a := \max\{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \mid D^n(a) \neq 0\}$$

に関する帰納法で，任意の $a \in R$ が $R^D[s]$ に属することが分かる．ゆえに，$R = R^D[s]$ である．以上より次の**スライス定理**を得る．

定理 3.1 R を $\mathbf{Q}$ 代数とする．$D \in \mathrm{LND}\, R$ と $s \in R$ が $D(s) = 1$ を満たすとき，s は R^D 上の超越元であり，$R = R^D[s]$, $D = d/ds$ が成り立つ．

定理 3.1 の状況において，R^D 代数の全射準同型

$$\sigma_s^D : R = R^D[s] \ni f(s) \mapsto f(0) \in R^D$$

が定義される．この写像を **Dixmier 写像**と呼ぶ．$f(0) = f(s - s)$ を Taylor 展開し，

$$\sigma_s^D(a) = \sum_{l \geq 0} \frac{D^l(a)}{l!}(-s)^l \qquad (a \in R) \tag{3.4}$$

を得る．なお，スライスは一般に存在するとは限らないが，任意の $0 \neq D \in \mathrm{LND}\, R$ に対し，$u := D^l(a) \neq 0$, $D^{l+1}(a) = 0$ を満たす $l \geq 1$ が必ず存在する．u が R の冪零元でなければ，局所化 R_u における導分が D から誘導される．$D(u) = 0$ なので，この導分も

局所冪零であり，$s = D^{l-1}(a)/u$ はそのスライスである．例えば，(1.6) は三角導分なので局所冪零である．この D はスライスを持たないが，D の $P_2[x_1^{-1}]$ への拡張はスライス $s = x_1^{-t}y_1$ を持つ．よって，その核 $P_2[x_1^{-1}]^D$ は，Dixmier 写像を用いて

$$\begin{aligned}P_2[x_1^{-1}]^D &= \sigma_s^D(P_2[x_1^{-1}]) = k[\sigma_s^D(x_1^{\pm 1}), \sigma_s^D(x_2), \sigma_s^D(y_1), \sigma_s^D(y_2), \sigma_s^D(z)] \\ &= k\left[x_1^{\pm 1}, x_2, y_2 - (x_1y_1 + x_2)s + x_1^{t+1}\frac{s^2}{2}, z - y_2 s + (x_1y_1 + x_2)\frac{s^2}{2} - x_1^{t+1}\frac{s^3}{6}\right]\end{aligned}$$

と記述できる．$P_2^D = P_2[x_1^{-1}]^D \cap P_2$ が有限生成でないというのが [9] の主結果である．

R が $\mathbf{Q}$ 代数のとき，任意の $D \in \operatorname{LND} R$ に対し，R^D 代数 R の自己同型 $\exp D$ が

$$(\exp D)(a) := \sum_{l \geq 0} \frac{D^l(a)}{l!} \qquad (a \in R)$$

で定義される．一般に，$D_1, D_2 \in \operatorname{LND} R$ に対し，導分 $D_1 + D_2$ は局所冪零であるとは限らない．しかし，$D_1 \circ D_2 = D_2 \circ D_1$ を満たすとき $D_1 + D_2$ は局所冪零であり，指数法則 $\exp(D_1 + D_2) = \exp D_1 \circ \exp D_2$ が成り立つ．任意の $a \in R^D$ に対し aD は局所冪零導分であり，$aD \circ bD = bD \circ aD$ $(a, b \in R^D)$ が成り立つ．よって，

$$R^D \ni a \mapsto \exp aD \in \operatorname{Aut}_{R^D} R$$

は加法群 R^D から $\operatorname{Aut}_{R^D} R$ への群準同型である．例えば，D がスライス s を持つとき，任意の $a \in R^D$ に対し $(\exp aD)(s) = s + aD(s) = s + a$ が成り立つ．この場合，$\exp aD$ は代入写像 $R^D[s] \ni f(s) \mapsto f(s + a) \in R^D[s]$ である．

ところで，環の準同型 $\epsilon : R \to R[x]$ が**指数写像**であるとは，各 $a \in R$ に対して次が成り立つときにいう．ただし，$\epsilon(a) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ $(a_i \in R)$ とし，y は新しい変数とする．

(E1) $a_0 = a$.　　(E2) $R[x, y]$ において $\sum_{i=0}^m \epsilon(a_i)y^i = \sum_{i=0}^m a_i(x + y)^i$.

この条件は，準同型 $\epsilon : R \to R[x] = R \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[x]$ が加法群スキーム $\mathbf{G}_a = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[x])$ の $\operatorname{Spec}(R)$ への作用を定めるための条件と同値である．例えば，R が $\mathbf{Q}$ 代数のとき，任意の $D \in \operatorname{LND} R$ に対し

$$R \ni a \mapsto \sum_{l \geq 0} \frac{D^l(a)}{l!} x^l \in R[x] \tag{3.5}$$

は指数写像である．実際，D は $D(x) = D(y) = 0$ を満たすように $\operatorname{LND} R[x, y]$ の元に拡張でき，$\exp xD \circ \exp yD = \exp{(x + y)D}$ が成り立つ．一方，任意の指数写像 ϵ に対し，ϵ が環の準同型であることと (E1) より，写像 $\Delta_\epsilon : R \ni a \mapsto a_1 \in R$ は R における導分である．さらに，R が $\mathbf{Q}$ 代数のとき，(E2) から $\Delta_\epsilon^i(a)/i! = a_i$ $(i \geq 0,\ a \in R)$ が従う．十

分大きな i に対して $a_i = 0$ なので，Δ_ϵ は局所冪零である．また，Δ_ϵ から定まる指数写像 (3.5) は ϵ と等しい．ゆえに，$\mathbf{Q}$ 代数における局所冪零導分は $\mathbf{G}_a$ 作用と同値な概念である (cf. [52])．

最後に，R が標数 0 の整域の場合の注意を述べる．任意の $D \in \operatorname{Der} R$ に対し (3.2) より

$$\deg_D ab \leq \deg_D a + \deg_D b \qquad (a, b \in \operatorname{Nil}(D))$$

が成り立つ．ただし，$\deg_D 0 = -\infty$ とする．R が標数 0 の整域のとき，上の不等式において等号が成り立つ．その帰結として，局所冪零導分の様々な性質が導かれる．例えば，任意の $D \in \operatorname{Der} R$ と $a \in R \setminus R^D$ に対し，$D' := aD$ は局所冪零でない．実際，仮に D' が局所冪零ならば，

$$\deg_{D'} a - 1 = \deg_{D'} D'(a) = \deg_{D'} aD(a) = \deg_{D'} a + \deg_{D'} D(a) \geq \deg_{D'} a$$

となり矛盾が生じる．また，任意の $D \in \operatorname{LND} R$ に対し，R^D は R において factorially closed である．ここで，整域 R の部分環 S が R において factorially closed であるとは，$ab \in S$ を満たす任意の $a, b \in R \setminus \{0\}$ が S に属するときにいう．例えば，$R = S[x]$ が整域 S 上の多項式環のとき，$f, g \in R \setminus \{0\}$ に対して次が成り立つ：

$$fg \in S \Rightarrow 0 = \deg fg = \deg f + \deg g \Rightarrow \deg f = \deg g = 0 \Rightarrow f, g \in S.$$

よって，S は R において factorially closed である．deg を $\deg_D$ に変えて考えれば，R^D が R において factorially closed であることも分かる．

一般に，S が R において factorially closed であるとき，$1 \in S$ より $S^\times = R^\times$ が成り立つ．また，R が UFD ならば S は UFD である．これは，$p \in S$ が R の素元であるとき，S の素元であることが分かれば容易に確認できるが，この主張は $pR \cap S = pS$ から従う．そのため，任意の $D \in \operatorname{LND} k[\mathbf{x}]$ は $k^\times = k[\mathbf{x}]^\times = (k[\mathbf{x}]^D)^\times \subset k[\mathbf{x}]^D$ を満たして k 導分となり，$k[\mathbf{x}]^D$ はネーター環であるか否かに関わらず UFD である．

4　多項式自己同型

多項式環の問題の多くが，多項式環の自己同型と深く関係している．しかし，多項式環の自己同型には不明な点が多く，それが多項式環の問題の難しさに影響している．本節では，k 代数 $k[\mathbf{x}]$ の自己同型群 $\operatorname{Aut}_k k[\mathbf{x}]$ やその元について考察する．

当面，k は任意標数の体とする．一般に，k 代数の準同型 $\phi : k[\mathbf{x}] \to k[\mathbf{x}]$ は $x_1, \ldots, x_n$ の像によって一意的に決まるので，ϕ を多項式の組 $(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))$ と同一視する．ϕ

は全射ならば全単射である．すなわち，次が成り立つ：

$$\phi \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] \iff k[\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)] = k[\mathbf{x}] \iff x_1, \ldots, x_n \in k[\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)].$$

よって，非常に具象的に書けば，

$$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \{(f_1, \ldots, f_n) \in k[\mathbf{x}]^n \mid x_1, \ldots, x_n \in k[f_1, \ldots, f_n]\}$$

である．ただし，合成は

$$(f_1, \ldots, f_n) \circ (g_1, \ldots, g_n) := (g_1(f_1, \ldots, f_n), \ldots, g_n(f_1, \ldots, f_n))$$

で定義する．例えば，$n \geq 3$ のとき，

$$f := x_1 - 2(x_1x_3 + x_2^2)x_2 - (x_1x_3 + x_2^2)^2x_3, \quad g := x_2 + (x_1x_3 + x_2^2)x_3 \tag{4.1}$$

に対し $\phi_n := (f, g, x_3, \ldots, x_n)$ は $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元である．このことは，

$$x_1x_3 + x_2^2 = fx_3 + g^2 \in k[f, g, x_3]$$

に気づけば容易に確認できる．もう少し分かり易い $k[\mathbf{x}]$ の自己同型を数種類挙げる．まず，任意の $A \in GL_n(k)$, $b_1, \ldots, b_n \in k$ に対し，

$$\alpha = (x_1, \ldots, x_n)A + (b_1, \ldots, b_n)$$

は $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属する．この形の自己同型を**アフィン自己同型**と呼ぶ．任意の $a \in k^\times$ と $1 \leq l \leq n$, $p \in k[x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n]$ に対し

$$\epsilon = (x_1, \ldots, x_{l-1}, ax_l + p, x_{l+1}, \ldots, x_n)$$

も $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属する．この形の自己同型を**基本自己同型**と呼ぶ．$k[\mathbf{x}]$ の基本自己同型全体で生成される $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の部分群 $\mathrm{T}_n(k)$ を**順部分群**と呼ぶ．$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元は $\mathrm{T}_n(k)$ に属するとき**順**であるといい，そうでないとき**野生**であるという．基本自己同型の逆写像は基本自己同型なので，自己同型が順であることと，基本自己同型の合成写像であることは同じである．$\phi = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に対し，

$$\phi \rightsquigarrow \phi \circ \epsilon = (f_1, \ldots, f_{l-1}, af_l + p(f_1, \ldots, f_{l-1}, f_{l+1}, \ldots, f_n), f_{l+1}, \ldots, f_n)$$

の形の変形を**基本変形**と呼ぶ．自己同型が順であることと，基本変形を繰り返して恒等写像 $\mathrm{id}_{k[\mathbf{x}]} = (x_1, \ldots, x_n)$ に変形できることは同値である．例えば，$n = 2$ のとき

$$\phi = (x_1 + (x_2 + x_1^2)^3, x_2 + x_1^2) \rightsquigarrow (x_1, x_2 + x_1^2) \rightsquigarrow (x_1, x_2)$$

となるから，この ϕ は順である．行列の列基本変形で $GL_n(k)$ の任意の元を単位行列に変形できることから，アフィン自己同型が順であることも分かる．また，$\mathrm{char}\, k = 0$ のとき，$D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ が三角ならば，$i = 1, \ldots, n$ に対して $g_i \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ が存在し，$(\exp D)(x_i) = x_i + g_i$ と書ける．$(x_1 + g_1, \ldots, x_n + g_n)$ も基本変形を繰り返して $\mathrm{id}_{k[\mathbf{x}]}$ に変形できるので，$\exp D$ は順である．D が逆三角の場合も同様である．

例えば，(3.3) の T と任意の $w \in k[x_3, \ldots, x_n]$ に対し，wT は逆三角なので $\exp wT$ は順である．(3.3) の下で述べたように，$h := x_1x_3 + x_2^2$ に対して hT も局所冪零である．この場合，$\exp hT$ は (4.1) で与えた ϕ_n と等しい．実際，(3.1) に注意して計算すれば，

$$
\begin{aligned}
(\exp hT)(x_1) &= x_1 + hT(x_1) + \frac{1}{2}h^2T^2(x_1) + \cdots = x_1 - 2hx_2 - h^2x_3 = f \\
(\exp hT)(x_2) &= x_2 + hT(x_2) + \cdots = x_2 + hx_3 = g
\end{aligned}
$$

であり，$i = 3, \ldots, n$ に対し $(\exp hT)(x_i) = x_i$ となる．

永田 [56] は，$n = 3$ のとき野生自己同型が存在すると予想し，その候補として ϕ_3 を構成した．この予想は 30 年の歳月を経て，2004 年に Shestakov-Umirbaev [62], [63] によって $\mathrm{char}\, k = 0$ の場合のみ肯定的に解決された．$\mathrm{char}\, k > 0$ の場合は依然として未解決である．ただし，$\mathrm{char}\, k = 2$ の場合も含め，ϕ_3 は野生と考えるのが自然である．

上述のように，$\mathrm{char}\, k = 0$ のとき ϕ_3 は逆三角導分 T と $h \in k[\mathbf{x}]^T$ を用いて $\exp hT$ と書ける．このような自己同型がいつ野生であるか完全に分かる ([40, Thm. 3.2.3], [41])．

定理 4.1　$n = 3$ とし，$D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ を逆三角導分，f を $k[\mathbf{x}]^D$ の元とする．このとき，$\exp fD$ が野生であるためには，以下が満たされることが必要十分である：

$$
D(x_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2), \quad D(x_3) = 0, \quad f \notin k[x_3], \quad \frac{\partial D(x_1)}{\partial x_2} \notin D(x_2)k[x_2, x_3].
$$

一方，$n \geq 4$ のとき ϕ_n は順である．一見すると奇妙だが，以下の方法で容易に確認できる．前述のように $\psi := \exp x_nT$ は順である．$\epsilon := (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + h)$ も順であり，$A := k[h, x_3, \ldots, x_{n-1}]$ の元を固定する．A は $k[\mathbf{x}]^T$ に含まれるので，ϕ_n, ψ も A の元を固定する．$x_3 \in A$ なので，ϕ_n, ψ, ϵ は $A' := A[x_3^{-1}]$ 代数 $k[\mathbf{x}][x_3^{-1}]$ の自己同型を誘導する．$k[\mathbf{x}][x_3^{-1}] = A'[x_2, x_n]$ は A' 上の 2 変数多項式環なので，これらを x_2, x_n の像の組と同一視すれば $\phi_n = (x_2 + hx_3, x_n)$, $\psi^{\pm 1} = (x_2 \pm x_nx_3, x_n)$, $\epsilon^{\pm 1} = (x_2, x_n \pm h)$ と書ける．このとき，

$$
(x_2, x_n - h) \circ (x_2 - x_nx_3, x_n) \circ (x_2, x_n + h) \circ (x_2 + x_nx_3, x_n) = (x_2 + hx_3, x_n)
$$

が成り立つ．すなわち，$\epsilon^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \epsilon \circ \psi = \phi_n$ である．ψ, ϵ は順なので ϕ_n も順である．

同様の理由から，任意の三角導分 $D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ と $f \in k[\mathbf{x}]^D$ に対し，$(\exp fD, x_{n+1})$ は $\mathrm{T}_{n+1}(k)$ に属する ([64]).

より一般に，次が成り立つと予想されている．

予想 4.2（Stable Tameness Conjecture） 任意の $\phi \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に対し，ある $l \geq 0$ が存在し，$(\phi, x_{n+1}, \ldots, x_{n+l})$ は $\mathrm{T}_{n+l}(k)$ に属する．

$\phi(x_i) = x_i$ $(i = 3, \ldots, n)$ のとき予想が正しいことが Berson-van den Essen-Wright [4] によって示されているが，$n = 3$ の場合でも完全な解決には至っていない．

上記の事情のため，$n = 3$ の場合に野生自己同型が存在しても，$n \geq 4$ の場合に野生自己同型が存在するとは限らない．次の問題は，$n \geq 4$ の場合や $n = 3$ かつ $\mathrm{char}\, k > 0$ の場合は未解決である．

問題 4.3（Tame Generators Problem） $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \mathrm{T}_n(k)$ は成り立つか？

一方，$n = 2$ かつ $\mathrm{char}\, k = 0$ の場合は Jung [22] によって，$n = 2$ かつ $\mathrm{char}\, k > 0$ の場合は van der Kulk [29] によって，問題 4.3 はそれぞれ肯定的に解決された．

問題 4.3 よりも肯定的な結果を期待できる以下のような問題もあるが，余り進展はない．

問題 4.4 (1) $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ は $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Aut}_{k[x_i]}\, k[\mathbf{x}]$ で生成されるか？
(2) $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ は $\exp D$ $(D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}])$ とアフィン自己同型で生成されるか？

問題 4.3 の研究では，以下で述べる基本簡約の概念が重要である．$\phi = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の**次数**を

$$\deg \phi := \deg f_1 + \cdots + \deg f_n$$

で定義する．$f_1, \ldots, f_n$ は定数でないので，常に $\deg \phi \geq n$ が成り立つ．$\deg \phi = n$ であることと，ϕ がアフィン自己同型であることは同値である．$\deg \phi > \deg \phi'$ を満たす基本変形 $\phi \rightsquigarrow \phi'$ を**基本簡約**と呼ぶ．

次の定理より，$k[x_1, x_2]$ のアフィンでない自己同型は常に基本簡約を許容する．

定理 4.5（cf. [56]） $(f_1, f_2) \in \mathrm{Aut}_k\, k[x_1, x_2]$ がアフィン自己同型でないならば，ある $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, $a \in k^{\times}$, $l \geq 1$ が存在し，$\deg(f_i - a f_j^l) < \deg f_i$ が成り立つ．

$\phi \in \mathrm{Aut}_k\, k[x_1, x_2]$ がアフィン自己同型でないとき，基本簡約を繰り返して ϕ をアフィン自己同型に変形できる．アフィン自己同型は順なので ϕ も順である．このことから，$\mathrm{Aut}_k\, k[x_1, x_2] = \mathrm{T}_2(k)$ が成り立つことが分かる．

5 Shestakov-Umirbaev 理論

本節では k は標数 0 の体とし, Shestakov-Umirbaev 理論やその一般化について述べる．

自己同型 ϕ_3 が基本簡約を許容しないことは簡単に確認できるが，それによって ϕ_3 が野生であるとは結論できない．実際，$n=3$ の場合に Shestakov-Umirbaev は，アフィン自己同型でなく，基本簡約も許容しない順自己同型の存在に気づいた．そこで，彼らは基本簡約の他に 4 種類の「簡約」(I 型簡約から IV 型簡約) を定義し，$\phi \in \mathrm{T}_3(k)$ がアフィン自己同型でないとき，基本簡約または 4 種類の「簡約」のいずれかを必ず許容することを示した ([63])．この結果の証明は非常に複雑で難しいが，ϕ_3 がどの簡約も許容しないことを確かめるのはさほど難しくない．なお，II 型，III 型，IV 型簡約の概念は理論上の要請で導入されたもので，これらを許容する自己同型が実際に存在するかは不明である．

Shestakov-Umirbaev 理論でも「微分」の概念が重要な役割を果たす．$f_1, \ldots, f_r \in k[\mathbf{x}]$ $(1 \le r \le n)$ に対し，$df_1 \wedge \cdots \wedge df_r$ を

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_r = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} J_{i_1,\ldots,i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}, \quad J_{i_1,\ldots,i_r} = \left| \frac{\partial(f_1, \ldots, f_r)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})} \right|$$

と表し，その次数を

$$\deg df_1 \wedge \cdots \wedge df_r := \max\{\deg J_{i_1,\ldots,i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n\}$$

で定義する．自己同型の簡約に関する Shestakov-Umirbaev の理論 [63] は，多項式の次数に関する以下の不等式 [62, Thm. 3] を基礎に構築された：$f, g \in k[\mathbf{x}]$ は k 上代数的独立であるとし，$a := \deg f$, $b := \deg g$ とおく．多項式 $P \in k[x,y] \setminus \{0\}$ に対し，$\deg_y P$ を $a/\gcd(a,b)$ で割った商と余りをそれぞれ q, r とするとき，次の不等式が成り立つ．

定理 5.1（Shestakov-Umirbaev） $\deg P(f,g) \ge q(a'b - a - b + \deg df \wedge dg) + rb.$

k が正標数の場合にこの不等式が成り立たないため，Shestakov-Umirbaev 理論では標数 0 を仮定する必要がある．なお，定理 5.1 は [62, Thm. 3] から不要な仮定を除いたものであり，[62, Thm. 3] とは若干異なる．Shestakov-Umirbaev [62] はこの結果を使い，定理 4.5 の簡単な別証も与えた．

定理 5.1 の一般化や別証が，黒田 [37], Makar-Limanov–Yu [49], Vénéreau [66] 等によって与えられた．ここでは [37] の結果を紹介する．$k[\mathbf{x}]$ 上の多項式 $P(y) = \sum_{i \ge 0} p_i y^i$ と $g \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ に対し，$P(g)$ の**見かけの次数**を $\deg^g P := \max\{\deg p_i g^i \mid i \ge 0\}$ で定

義する．一般に，$\deg P(g) \le \deg^g P$ が成り立つ．$P^{(i)}$ を $P(y)$ の y に関する i 次導関数とすれば，十分大きな $i \ge 0$ に対し $\deg P^{(i)}(g) = \deg^g P^{(i)}$ が成り立つ．そこで，

$$m^g(P) := \min\{i \in \mathbf{Z}_{\ge 0} \mid \deg P^{(i)}(g) = \deg^g P^{(i)}\}$$

と定義する．このとき，k 上代数的独立な $f_1, \ldots, f_r \in k[\mathbf{x}]$ と $P(y) \in k[f_1, \ldots, f_r][y]$ に対して次が成り立つ ([37, Thm. 2.1])．ただし，$\omega := df_1 \wedge \cdots \wedge df_r$ とする．

定理 5.2 $\deg P(g) \ge \deg^g P + m^g(P)(\deg \omega \wedge dg - \deg \omega - \deg g)$.

この定理は $m^g(P)$ に関する帰納法で証明できる．黒田 [39] は定理 5.2 を基礎に，自己同型の簡約に関する Shestakov-Umirbaev の理論を再構築し，IV 型簡約を許容する順自己同型が存在しないことを示した．それにより，自己同型の野生性を判定するとき，IV 型簡約を考慮する必要がなくなった．

応用上，基本簡約などは**重み付き次数**に対して考えると便利である．Γ を全順序が定義された加法群とし，任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ に対し $\alpha \preceq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$ が成り立つと仮定する．重み $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \Gamma^n$ に対し，単項式の **$\mathbf{w}$ 次数**を

$$\deg_{\mathbf{w}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} := i_1 w_1 + \cdots + i_n w_n$$

で定め，$f \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ に現れる単項式の $\mathbf{w}$ 次数の最大値を $\deg_{\mathbf{w}} f$ と定義する．また，f に現れる単項式のうち，$\mathbf{w}$ 次数が $\deg_{\mathbf{w}} f$ と等しいもの全体の和を $f^{\mathbf{w}}$ と表す．例えば，$\Gamma = \mathbf{Z}^n$ に辞書式順序を考え，$\mathbf{w} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ とするとき，$f^{\mathbf{w}}$ は辞書式順序に関する f の先頭項である．ただし，$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbf{Z}^n$ の標準基底とする．このように，$w_1, \ldots, w_n$ が $\mathbf{Z}$ 上 1 次独立ならば $f^{\mathbf{w}}$ は常に単項式である．上で述べた [37], [39] の理論は $\mathbf{w}$ 次数を用いて構築されており，その帰結として種々の実用的な野生性判定法が得られている．例えば，次を満たす $\mathbf{w} \in \Gamma^3$ が存在するとき，$\phi = (f_1, f_2, f_3) \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ は野生である：
(1) w_1, w_2, w_3 は 0 より大きく，$\mathbf{Z}$ 上 1 次独立である．
(2) $f_1^{\mathbf{w}}$, $f_2^{\mathbf{w}}$, $f_3^{\mathbf{w}}$ は k 上代数的従属だが，どの 2 つも k 上代数的独立である．
(3) $(i,j,l) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)$ に対し $f_i^{\mathbf{w}} \not\in k[f_j^{\mathbf{w}}, f_l^{\mathbf{w}}]$.

なお，$\mathbf{w}$ 次数を使えば (2), (3) はそれぞれ以下のように言い換えられる：
(2′) $\deg_{\mathbf{w}} f_1$, $\deg_{\mathbf{w}} f_2$, $\deg_{\mathbf{w}} f_3$ は $\mathbf{Z}$ 上 1 次従属だが，どの 2 つも $\mathbf{Z}$ 上 1 次独立である．
(3′) $(i,j,l) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)$ に対し $\deg_{\mathbf{w}} f_i \not\in \mathbf{Z} \deg_{\mathbf{w}} f_j + \mathbf{Z} \deg_{\mathbf{w}} f_l$.

この判定法の利点は，「簡約」に関する議論をせず $f_1^{\mathbf{w}}$, $f_2^{\mathbf{w}}$, $f_3^{\mathbf{w}}$ の情報だけで ϕ の野生性を証明できる点にある．例えば，$\phi_3 = (f, g, x_3)$ の場合，上述の辞書式順序から定まる $\mathbf{w}$ 次数に関して $\deg_{\mathbf{w}} f = (2,0,3)$, $\deg_{\mathbf{w}} g = (1,0,2)$, $\deg_{\mathbf{w}} x_3 = (0,0,1)$ である．これ

らが $(2')$, $(3')$ を満たすことは容易に分かる．しかし，f_1, f_2, f_3 を具体的に記述することが困難な場合も多く，この方法にも限界がある．例えば，かなり簡単な $D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ でも $(\exp D)(x_i) = x_i + D(x_i) + D^2(x_i)/2 + \cdots$ がどのような多項式かよく分からないことが多い．より広範な自己同型の野生性を調べるために，以下の方法が有効である．一般に，$k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数 A に対し，A 代数 $k[\mathbf{x}]$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}_A\, k[\mathbf{x}]$ は，$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の部分群である．ϕ が $\mathrm{Aut}_A\, k[\mathbf{x}]$ に属するとき，任意の $p \in A$ に対し $\phi(p) = p$ が成り立つので，f_1, f_2, f_3, p の間の関係式が得られる．それらを解析して f_1, f_2, f_3 の情報をとり出し，野生性判定法を適用することで，**順交叉** $\mathrm{Aut}_A\, k[\mathbf{x}] \cap \mathrm{T}_3(k)$ の様子を知ることができる．例えば，任意の $D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ に対し $\exp D$ は $\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^D}\, k[\mathbf{x}]$ に属するので，$\exp D$ の野生性の研究は順交叉 $\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^D}\, k[\mathbf{x}] \cap \mathrm{T}_3(k)$ の研究に帰着される．この方法で実際に色々な結果が得られている．多くの場合，順交叉に含まれる自己同型は特殊なものに限定される点が興味深い．

Shestakov-Umirbaev による永田予想の解決や，その後の進展について，[42] にも解説がある．

6 座標変換

本節を通し k は標数 0 の体とする．$D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ が三角ならば $c := D(x_1)$ は定数である．従って，$c \neq 0$ ならば $s := c^{-1}x_1$ は D のスライスである．(3.4) より，$i = 2, \ldots, n$ に対して $g_i \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ が存在し $\sigma_s^D(x_i) = x_i + g_i$ と書ける．このとき，

$$\phi := (c^{-1}x_1, x_2 + g_2, \ldots, x_n + g_n)$$

は $k[\mathbf{x}]$ の順自己同型であり，$\phi^{-1}D\phi = \partial/\partial x_1$ が成り立つ．

一般に，$D \in \mathrm{Der}_k\, k[\mathbf{x}]$ を固定したとき，各 $\theta \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に対して $r(\theta) \in \{0, \ldots, n\}$ と $f_{\theta,1}, \ldots, f_{\theta,r(\theta)} \in k[\mathbf{x}]$ が存在し，

$$D^\theta := \theta^{-1}D\theta = f_{\theta,1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_{\theta,r(\theta)}\frac{\partial}{\partial x_{r(\theta)}}$$

と書ける．このとき，

$$\mathrm{rank}\, D := \min\{r(\theta) \mid \theta \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]\}$$

を D の**階数**と呼ぶ．例えば，上で見たように，$D(x_1) \neq 0$ を満たす三角導分 D の階数は 1 である．$D(x_1) = 0$ ならば $\mathrm{rank}\, D < n$ なので，$k[\mathbf{x}]$ における三角導分の階数は常に n 未満である．D^θ が三角であるような $\theta \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ が存在するとき，D は**三角化可能**で

あるという．任意の $\theta \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に対し $\mathrm{rank}\, D^\theta = \mathrm{rank}\, D$ が成り立つので，三角化可能な導分の階数も n 未満である．

$\mathrm{rank}\, D = 1$ ならば $D^\theta = f\partial/\partial x_n$ を満たす $\theta \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$, $f \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ が存在する．このとき，$k[\mathbf{x}]^{D^\theta} = k[\mathbf{x}]^{\partial/\partial x_n} = k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ なので，k 代数 $k[\mathbf{x}]^D = \theta(k[\mathbf{x}]^{D^\theta})$ も $n-1$ 個の元で生成される．さらに，D が局所冪零ならば D^θ も局所冪零なので，f は $k[\mathbf{x}]^{\partial/\partial x_n}$ に属する．よって，階数 1 の局所冪零導分は常に三角化可能である．

Rentschler [59] は，任意の $0 \neq D \in \mathrm{LND}_k\, k[x_1, x_2]$ が $\mathrm{rank}\, D = 1$ を満たすことを示した．従って，D は三角化可能である．一方，$n = 3$ のとき，三角化可能でない局所冪零導分の最初の例が Bass [3] によって与えられた．Bass の例は (3.3) の下に挙げた $D = (x_1x_3 + x_2^2)T$ である．その後，Popov [58] は任意の $n \geq 3$ に対してこの D が三角化可能でないことを示した．$n \geq 3$ のとき，階数 n の局所冪零導分は三角化可能でない．従って，三角化可能性の問題は，階数が n 未満の場合を考えればよい．Daigle [8] は $n = 3$ のとき，階数 2 の局所冪零導分が三角化可能であるための必要十分条件を与えた．なお，階数が 2 以下の局所冪零導分 D は，適当な $\theta \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ と $f_1, f_2 \in k[\mathbf{x}]$ を用いて $D^\theta = f_1\partial/\partial x_1 + f_2\partial/\partial x_2$ と書ける．$k' := k(x_3, \ldots, x_n)$ とし，D^θ を $\mathrm{LND}_{k'}\, k'[x_1, x_2]$ の元と見なせば Rentschler の結果が使えるので，$n \geq 3$ でも大体の様子は分かる．しかし，階数が 3 以上の局所冪零導分については不明な点が多く残されている．

ところで，$D \in \mathrm{Der}_k\, k[\mathbf{x}]$ が $\mathrm{rank}\, D < n$ を満たすための必要十分条件は，$k[\mathbf{x}]^D$ が $k[\mathbf{x}]$ の座標を含むことである．ここで，$f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[\mathbf{x}]$ の**座標**であるとは，$f = \phi(x_i)$ を満たす $\phi \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$, $1 \leq i \leq n$ が存在するときにいう．ϕ のヤコビアンが $k^\times$ に属するため，座標には 1 次の単項式が必ず現れる．ϕ を $\mathrm{T}_n(k)$ からとれるとき，f を**順座標**と呼ぶ．例えば，x_1 や $x_1 + x_2^2$ などは $k[\mathbf{x}]$ の順座標である．また，本節冒頭の考察より，三角導分の核は常に順座標を含む．f が $k[\mathbf{x}]$ の座標であることと，$k[f, f_2, \ldots, f_n] = k[\mathbf{x}]$ を満たす $f_2, \ldots, f_n \in k[\mathbf{x}]$ が存在することは同値である．従って，$f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[\mathbf{x}]$ の座標ならば，任意の $l \geq 1$ に対して f は $k[x_1, \ldots, x_{n+l}]$ の座標である．逆に，$f \in k[\mathbf{x}]$ が $k[x_1, \ldots, x_{n+l}]$ の座標であるような $l \geq 1$ が存在するとき，f が $k[\mathbf{x}]$ の座標であるかは大問題である ([48])．k が体の場合の反例は見つかっていないが，k が正規でない整域の場合の反例は存在する ([5])．

Freudenburg [15] は，$k[\mathbf{x}]$ における階数 n の局所冪零導分の最初の例を，各 $n \geq 3$ に対して与えた．例えば $n = 3$ のとき，整数 $l \geq 1$ に対し $f := x_1x_3 - x_2^2$, $r := f^l x_2 + x_1^{2l+1}$,

$$g := \frac{f^{2l+1} + r^2}{x_1} = \frac{f^{2l}(x_1x_3 - x_2^2) + (f^l x_2 + x_1^{2l+1})^2}{x_1} = f^{2l}x_3 + 2f^l x_1^{2l} x_2 + x_1^{4l+1}$$

とおき，$D_{(f,g)}: k[\mathbf{x}] \to k[\mathbf{x}]$ を

$$D_{(f,g)}(h) := \left| \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} \right| \qquad (h \in k[\mathbf{x}])$$

で定義する．このとき，$D_{(f,g)}$ は局所冪零導分であり，さらに $k[\mathbf{x}]^{D_{(f,g)}} = k[f,g]$ を満たす (cf. [14, §4.1])．f, g は 1 次の項を持たないので，1 次の項を持つ多項式は $k[f,g]$ に属さない．よって，$k[\mathbf{x}]^{D_{(f,g)}} = k[f,g]$ であることから $\operatorname{rank} D_{(f,g)} = 3$ が直ちに従う．

上の例において，任意の $0 \neq h \in k[f,g]$ に対し $\exp hD_{(f,g)}$ は野生である ([43])．$n = 3$ のとき，階数 3 の局所冪零導分の他の多くの例に対し同様の結果がある ([40, §7], [41])．従って，$n = 3$ のとき，“$\exp D$ が順ならば $\operatorname{rank} D \leq 2$” と予想するのが自然だが，私はより強い次の予想を立てている．以下の 3 つの予想では $n = 3$, $D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ とする．

予想 6.1　$\exp D$ が順ならば，$k[\mathbf{x}]^D$ は少なくとも 1 つ $k[\mathbf{x}]$ の順座標を含む．

$\phi^{-1}D\phi$ が三角となるような $\phi \in \mathrm{T}_3(k)$ が存在するとき，$\exp \phi^{-1}D\phi$ は順なので

$$\exp D = \phi \circ (\exp \phi^{-1}D\phi) \circ \phi^{-1}$$

も順である．この逆が成り立つと予想している．

予想 6.2　$\exp D$ が順ならば，$\phi^{-1}D\phi$ が三角であるような $\phi \in \mathrm{T}_3(k)$ が存在する．

$k[\mathbf{x}]^D$ が $k[\mathbf{x}]$ の順座標を少なくとも 1 つ含むとき，予想 6.2 は正しいことを示した ([40, Thm. 3.1.3 (i)], [41])．従って，予想 6.1 が正しければ予想 6.2 も正しい．一方，三角導分の核は必ず順座標を含むので，$\phi^{-1}D\phi$ が三角であるような $\phi \in \mathrm{T}_3(k)$ が存在するとき，$k[\mathbf{x}]^D$ は $k[\mathbf{x}]$ の順座標を少なくとも 1 つ含む．よって，予想 6.2 が正しければ予想 6.1 も正しく，これら 2 つの予想は同値である．予想 6.2 が正しければ次の予想も正しい．

予想 6.3　ある $f \in k[\mathbf{x}]^D \setminus \{0\}$ が存在して $\exp fD$ が順ならば，$\exp D$ は順である．

より正確に，$\Sigma \subset \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ が次の 2 つの条件を満たすとき，任意の $D \in \Sigma$ に対して予想 6.3 は正しい．
(i) 任意の $f \in k[\mathbf{x}]^D$, $D \in \Sigma$ に対して fD は Σ に属する．
(ii) 任意の $D \in \Sigma$ に対して予想 6.2 は正しい．

実際，$D \in \Sigma$, $f \in k[\mathbf{x}]^D \setminus \{0\}$ が $\exp fD \in \mathrm{T}_3(k)$ を満たすとき，(i) より $fD \in \Sigma$ なので，(ii) よりある $\phi \in \mathrm{T}_3(k)$ が存在して $(fD)^\phi = \phi^{-1}(f) \cdot \phi^{-1}D\phi$ が三角となる．このとき，$\phi^{-1}D\phi$ は三角である．ϕ は順なので，予想 6.2 の上で述べたように $\exp D$ は順

である．例えば，核が順座標を含むような局所冪零導分全体の集合は明らかに (i) を満たし，上述のように (ii) も満たす．よって，このような局所冪零導分に対して予想 6.3 は正しい．

ところで，自己同型の順性の概念は，座標系のとり方に依存する．例えば，$y_1, \ldots, y_n \in k[\mathbf{x}]$ が $k[y_1, \ldots, y_n] = k[\mathbf{x}]$ を満たすとき，$\phi \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ が

$$\phi(y_i) = y_i \quad (i = 1, \ldots, n-1), \qquad \phi(y_n) = y_n + 1$$

で定義される．$y_1, \ldots, y_n$ を基準に考えれば ϕ は明らかに順だが，$x_1, \ldots, x_n$ を基準に考えた場合，ϕ が順であるか否かは $y_1, \ldots, y_n$ の選び方による．実際，$n = 3$ の場合に次のような例が存在する ([40, Thm. 6.1.1], [41]):

(†) $\phi(y_1) = y_1$ を満たす任意の $\mathrm{id}_{k[\mathbf{x}]} \neq \phi \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ は野生である．

この例の (y_1, y_2, y_3) は，ある種の $D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ に対する $\exp D$ として与えられた．なお，条件 (†) は $\mathrm{Aut}_{k[y_1]}\, k[\mathbf{x}] \cap \mathrm{T}_3(k) = \{\mathrm{id}_{k[\mathbf{x}]}\}$ と同値であり，これも前節末で述べた順交叉に関する結果の 1 つである．

最後に $0 \neq D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ の核 $k[\mathbf{x}]^D$ の生成系について触れる．上述のように，$n = 2$ ならば Rentschler [59] より $\mathrm{rank}\, D = 1$ なので，$k[\mathbf{x}]^D$ は 1 つの元で生成される．$n = 3$ のとき，宮西 [54] より $k[\mathbf{x}]^D$ は k 上 2 個の元で生成される．これらの結果は非常に有用である．一方，第 1 節で見たように，$n \geq 5$ では D が三角でも $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成とは限らない．Daigle-Freudenburg [10] は，$n = 4$ で D が三角のとき $k[\mathbf{x}]^D$ が有限生成であることを示した．Bhatwadekar-Daigle [6] はこの結果を一般化し，$n = 4$, $\mathrm{rank}\, D \leq 3$ ならば $k[\mathbf{x}]^D$ は有限生成であることを示した．次の問題は依然として未解決である．

問題 6.4　$n = 4$ のとき，$k[\mathbf{x}]$ における階数 4 の局所冪零導分の核は常に有限性成か？

7　消去問題と線形化問題

本節では，特に断らない限り k は標数 0 の体とする．$D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ がスライス z を持つとき，スライス定理より $D = d/dz$ である．このとき $\mathrm{rank}\, D = 1$ であるか？実は，この問題は以下で述べる**消去問題**と同値である．

A を $k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数とする．$k[\mathbf{x}] = A[z]$ を満たす A 上の超越元 $z \in k[\mathbf{x}]$ が存在するとき $k[\mathbf{x}] = A^{[1]}$ と表す．このとき，$\pi : k[\mathbf{x}] = A[z] \ni f(z) \mapsto f(0) \in A$ は k 代数の全射準同型なので，$A = \pi(k[\mathbf{x}])$ は k 上高々 n 個の元で生成される．

問題 7.1（消去問題） $k[\mathbf{x}]$ の k 部分代数 A が $k[\mathbf{x}]=A^{[1]}$ を満たすとき，A は k 上 $n-1$ 個の元で生成されるか？

実際，問題 7.1 の仮定の下，$k[\mathbf{x}]=A[z]$ における局所冪零導分 $D=d/dz$ は $k[\mathbf{x}]^D=A$ および $D(z)=1$ を満たす．従って，“$D\in\mathrm{LND}_k\,k[\mathbf{x}]$ がスライスを持つとき $\mathrm{rank}\,D=1$” という主張が真ならば，$A=k[\mathbf{x}]^D$ は $n-1$ 個の元で生成される．一方，$D\in\mathrm{LND}_k\,k[\mathbf{x}]$ がスライス z を持つとき，定理 3.1 より $k[\mathbf{x}]=(k[\mathbf{x}]^D)^{[1]}$ である．従って，問題 7.1 の解が肯定的ならば，$k[\mathbf{x}]^D=k[y_1,\ldots,y_{n-1}]$ を満たす $y_1,\ldots,y_{n-1}\in k[\mathbf{x}]^D$ が存在する．このとき，$\theta=(z,y_1,\ldots,y_{n-1})$ は $k[\mathbf{x}]$ の自己同型であり，$D^\theta=\partial/\partial x_1$ を満たす．

問題 7.1 は z が $k[\mathbf{x}]$ の座標の場合は易しい．実際，$k[\mathbf{x}]=k[z_1,\ldots,z_{n-1},z]$ を満たす $z_1,\ldots,z_{n-1}\in k[\mathbf{x}]$ が存在するので

$$A\simeq A[z]/(z)=k[z_1,\ldots,z_{n-1},z]/(z)\simeq k[z_1,\ldots,z_{n-1}]$$

が成り立つ．前節で見たように，$n=2,3$ のとき，任意の $0\neq D\in\mathrm{LND}_k\,k[\mathbf{x}]$ に対し $k[\mathbf{x}]^D$ は k 上 $n-1$ 個の元で生成される．問題 7.1 において A は d/dz の核と等しいので，この場合も肯定的である (cf. [1], [18], [53])．Crachiola–Makar-Limanov [7] は，有限生成 k 整域 A に対し “$\mathrm{LND}_k\,A=\{0\}\Rightarrow\mathrm{LND}_k\,A[z]=\mathrm{LND}_A\,A[z]$” が成り立つことに着目し，$n=3$ の場合のより簡単な証明を与えた．なお，$\mathrm{char}\,k>0$ の場合も $n=2,3$ のときは肯定的だが，$n\geq 4$ では反例が存在する (cf. [2], [19], [20])．

次に，ϕ を $\mathrm{Aut}_k\,k[\mathbf{x}]$ の元とする．$\phi=(x_1,\ldots,x_n)A$ を満たす $A\in GL_n(k)$ が存在するとき，ϕ は**線形**であるという．$\theta^{-1}\circ\phi\circ\theta=(x_1,\ldots,x_n)A$ を満たす $\theta\in\mathrm{Aut}_k\,k[\mathbf{x}]$ と $A\in GL_n(k)$ が存在するとき，ϕ は**線形化可能**であるという．特に，A を対角行列にとれるとき，ϕ は**対角化可能**であるという．ϕ が対角化可能であるための必要十分条件は，

$$k[f_1,\ldots,f_n]=k[\mathbf{x}],\qquad \phi(f_i)=\alpha_i f_i\quad(i=1,\ldots,n)$$

を満たす $f_1,\ldots,f_n\in k[\mathbf{x}]$ と $\alpha_1,\ldots,\alpha\in k^\times$ が存在することである．従って，$\phi\neq\mathrm{id}_{k[\mathbf{x}]}$ が対角化可能ならば，$k[\mathbf{x}]$ の座標 f と $\alpha\in k\setminus\{1,0\}$ が存在し，$\phi(f)=\alpha f$ を満たす．

$A\in GL_n(\mathbf{C})$ が，ある $l\geq 1$ に対し $A^l=E$ を満たすとき，A の最小多項式は x^l-1 の因子なので重解を持たない．よって，行列 A は対角化可能である．従って，$\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の自己同型は，<u>線形かつ有限位数</u> ならば対角化可能である．次の問題は Kraft [27] の “eight challenging open problems in affine spaces”の 1 つであり，$n\geq 3$ の場合は未解決である (cf. [26])．上の注意より，「対角化可能」を「線形化可能」に変えても問題の意味は変わらない．

問題 7.2（線形化問題） $\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の自己同型は，有限位数ならば常に対角化可能か？

この問題の主張は非常に強く，仮にある $d \geq 2$ が存在し，$\mathbf{C}[\mathbf{x}]$ の位数 d の任意の自己同型が対角化可能ならば，$k = \mathbf{C}$ の場合の問題 7.1 が肯定的に解決する．実際，ζ を 1 の原始 d 乗根とするとき，A 代数 $k[\mathbf{x}] = A[z]$ の位数 d の自己同型 ϕ が $\phi(z) = \zeta z$ で定義される．仮定より ϕ は対角化可能なので，座標 $p(z)$ と $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{1, 0\}$ が存在し，$p(\zeta z) = \phi(p(z)) = \alpha p(z)$ を満たす．このとき，$(\alpha - 1)p(z) = p(\zeta z) - p(z)$ は z で割り切れるが，$p(z)$ は座標なので $k[\mathbf{x}]$ の既約元である．従って，z と $p(z)$ は同伴であり，z も $k[\mathbf{x}]$ の座標である．

問題 7.2 は，簡約代数群のアフィン空間への作用の線形化可能性を問う「上林の線形化問題」の特別な場合である (cf. [23])．$n = 2$ の場合の上林の問題は肯定的に解決しており，そこでは $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}\,\mathbf{C}[x_1, x_2] = \mathrm{T}_2(\mathbf{C})$ であることが本質的な役割を果たす．高次元では反例が見つかっており，有限群の場合の反例も存在する (cf. [24], [50], [61])．しかし，有限アーベル群に対する反例は見つかっていない．なお，$\mathrm{char}\, k = p > 0$ の場合，例えば $(x_1 + 1, x_2) \in \mathrm{Aut}_k\, k[x_1, x_2]$ の位数は p だが，$k^2 \ni (a_1, a_2) \mapsto (a_1 + 1, a_2) \in k^2$ が固定点を持たないので線形化可能でない．実際，線形自己同型ならば原点が固定されるので，線形化可能ならば固定点が必ず存在する．浅沼 [2] は $n \geq 4$ のとき，位数が p で割り切れないような有限アーベル群に対して線形化問題の反例を与えた．

係数環が体でない場合の線形化問題を考える．k の標数は任意とし，k が代数閉体であることも仮定しない．R を k 整域とし，G を $\mathrm{Aut}_R\, R[\mathbf{x}]$ の部分群とする．$\theta^{-1} G \theta$ が

$$D_n(k) := \{(a_1 x_1, \ldots, a_n x_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in k^{\times}\}$$

に含まれるような $\theta \in \mathrm{Aut}_R\, R[\mathbf{x}]$ が存在するとき，G は**対角化可能**であるという．R の商体を K とすれば，$\mathrm{Aut}_R\, R[\mathbf{x}]$ は $\mathrm{Aut}_K\, K[\mathbf{x}]$ の部分群と見なせる．$\theta^{-1} G \theta \subset D_n(k)$ を満たす $\theta \in \mathrm{Aut}_K\, K[\mathbf{x}]$ が存在しても，このような θ を $\mathrm{Aut}_R\, R[\mathbf{x}]$ からとれるとは限らない．そのため，G は K 上で対角化可能でも，R 上で対角化可能であるとは限らない．次の結果は黒田 [44, Thm. 1.1 (i)] による．

定理 7.3 R が PID のとき，$\mathrm{Aut}_R\, R[x_1, x_2]$ の部分群 G が K 上で対角化可能ならば，G は R 上で対角化可能である．

定理 7.3 は任意の体 k に対して成り立つが，$k = \mathbf{C}$ で R が $\mathbf{C}$ 上有限生成な PID の場合は Kraft-Russell [28, Thm. 3.2] に含まれる．

定理 7.3 から次の系が従う

系 7.4　R を PID, G を $\mathrm{Aut}_R\, R[x_1, x_2]$ の有限アーベル部分群とする．k が 1 の原始 d 乗根を含むならば，G は R 上で対角化可能である．ただし，$d := \max\{\mathrm{ord}\,\phi \mid \phi \in G\}$ とする．

上の系において $R = k[x_3]$ とすれば，$\mathrm{Aut}_k\, k[x_1, x_2, x_3]$ の有限アーベル部分群の線形化に関する部分的な結果が得られる．

以下では再び k の標数は 0 とする．$0 \neq \delta \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ を任意にとり，$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の部分群 $\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}]$ について考察する．この部分群は，第 5 節で述べた順交叉の観点からも興味深い．任意の $D \in \mathrm{LND}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}]$ は $k[\mathbf{x}]^D \supset k[\mathbf{x}]^\delta$ を満たすから，

$$\exp D \in \mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^D}\, k[\mathbf{x}] \subset \mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}]$$

が成り立つ．よって，

$$\mathcal{N}_\delta := \{\exp D \mid D \in \mathrm{LND}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}]\}$$

は $\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}]$ に含まれる．実は，$\mathcal{N}_\delta$ は $\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}]$ の正規部分群である．以下では $\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}]$ や剰余群 $(\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}])/\mathcal{N}_\delta$ に関して得られている結果を述べる (cf. [46])．

定理 7.5　$k[\mathbf{x}] \neq (k[\mathbf{x}]^\delta)^{[1]}$ ならば，剰余群 $(\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}])/\mathcal{N}_\delta$ は $k^\times$ の有限巡回部分群と同型であり，$(\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}]) \setminus \mathcal{N}_\delta$ に属する自己同型の位数は常に有限である．

なお，任意の $0 \neq D \in \mathrm{LND}_k\, k[\mathbf{x}]$ と $l \geq 1$ に対して $(\exp D)^l = \exp lD \neq \mathrm{id}_{k[\mathbf{x}]}$ が成り立つので，$\mathcal{N}_\delta \setminus \{\mathrm{id}_{k[\mathbf{x}]}\}$ に属する自己同型の位数は常に無限である．また，A を $A^\times \cup \{0\}$ が体であるような $\mathbf{Q}$ 上の UFD とするとき，定理 7.5 は $k[\mathbf{x}]$, $k^\times$ をそれぞれ A, $A^\times$ に替えても成り立つ．

以下では k を代数閉体とする．次の 2 つの定理の証明に，有限位数の自己同型の線形化に関する [44] の結果が使われる．

定理 7.6　$n \geq 3$, $\mathrm{rank}\,\delta = 2$ と仮定する．

(1) $(\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}]) \setminus \mathcal{N}_\delta$ の任意の元は有限位数かつ線形化可能である．

(2) δ が既約のとき，$\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}] \neq \mathcal{N}_\delta$ ならば δ は三角化可能である．

ここで，δ が**既約**であるとは，$\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)$ が共通因子を持たないときにいう．

定理 7.7　$n = \mathrm{rank}\,\delta = 3$ のとき，$(\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}]) \setminus \mathcal{N}_\delta$ の任意の元は有限位数であり，かつ線形化可能でない ($\mathrm{Aut}_{k[\mathbf{x}]^\delta}\, k[\mathbf{x}] = \mathcal{N}_\delta$ の可能性もある)．

参考文献

[1] S. S. Abhyankar, W. Heinzer and P. Eakin, On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring, J. Algebra **23** (1972), 310–342.

[2] T. Asanuma, Nonlinearizable algebraic group actions on $\mathbf{A}^n$, J. Algebra **166** (1994), 72–79.

[3] H. Bass, A nontriangular action of $\mathbf{G}_a$ on $\mathbf{A}^3$, J. Pure Appl. Algebra **33** (1984), 1–5.

[4] J. Berson, A. van den Essen and D. Wright, Stable tameness of two-dimensional polynomial automorphisms over a regular ring, Adv. Math. **230** (2012), no. 4-6, 2176–2197.

[5] S. M. Bhatwadekar and A. K. Dutta, On residual variables and stably polynomial algebras, Comm. Algebra **21** (1993), no. 2, 635–645.

[6] S. M. Bhatwadekar and D. Daigle, On finite generation of kernels of locally nilpotent R-derivations of $R[X, Y, Z]$, J. Algebra **322** (2009), no. 9, 2915–2926.

[7] A. J. Crachiola and L. G. Makar-Limanov, An algebraic proof of a cancellation theorem for surfaces, J. Algebra **320** (2008), 3113–3119.

[8] D. Daigle, A necessary and sufficient condition for triangulability of derivations of $k[X, Y, Z]$, J. Pure Appl. Algebra **113** (1996), 297–305.

[9] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5, J. Algebra **221** (1999), 528–535.

[10] D. Daigle and G. Freudenburg, Triangular derivations of $\mathbf{k}[X_1, X_2, X_3, X_4]$, J. Algebra **241** (2001), 328–339.

[11] H. Derksen, The kernel of a derivation, J. Pure Appl. Algebra **84** (1993), 13–16.

[12] S. Endo and T. Miyata, Invariants of finite abelian groups, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 7–26.

[13] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, Vol. 190, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2000.

[14] G. Freudenburg, Local slice constructions in $k[X, Y, Z]$, Osaka J. Math. **34** (1997), 757–767.

[15] G. Freudenburg, Actions of $\mathbf{G}_a$ on $\mathbf{A}^3$ defined by homogeneous derivations, J. Pure Appl. Algebra **126** (1998), 169–181.

[16] G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension six, Transform. Groups **5** (2000), 61–71.

[17] G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopaedia Math. Sci., 136, Springer, Berlin, 2006.

[18] T. Fujita, On Zariski problem, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55** (1979), 106–110.

[19] N. Gupta, On the cancellation problem for the affine space $\mathbb{A}^3$ in characteristic p, Invent. Math. **195** (2014), no. 1, 279–288.

[20] N. Gupta, On Zariski's cancellation problem in positive characteristic, Adv. Math. **264** (2014), 296–307.

[21] A. Hoshi, On Noether's problem for cyclic groups of prime order, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **91** (2015), no. 3, 39–44.

[22] H. Jung, Über ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. **184** (1942), 161–174.

[23] T. Kambayashi, Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group action on an affine space, J. Algebra **60** (1979), 439–451.

[24] F. Knop, Nichtlinearisierbare Operationen halbeinfacher Gruppen auf affinen Räumen, Invent. Math. **105** (1991), 217–220.

[25] H. Kojima and M. Miyanishi, On Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, J. Pure Appl. Algebra **122** (1997), 277–292

[26] H. Kraft and G. Schwarz, Finite automorphisms of affine N-space, in *Automorphisms of affine spaces (Curaçao, 1994)*, 55–66, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[27] H. Kraft, Challenging problems on affine n-space, Astérisque No. 237 (1996), Exp. No. 802, 5, 295–317.

[28] H. Kraft and P. Russell, Families of group actions, generic isotriviality, and linearization, Transform. Groups **19** (2014), 779–792.

[29] W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables, Nieuw Arch. Wisk. (3) **1** (1953), 33–41.

[30] K. Kurano, Positive characteristic finite generation of symbolic Rees algebras and Roberts' counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert, Tokyo J. Math. **16** (1993), no. 2, 473–496.

[31] S. Kuroda, A condition for finite generation of the kernel of a derivation, J. Algebra **262** (2003), 391–400.

[32] S. Kuroda, A generalization of Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, Tohoku Math. J. **56** (2004), 501–522.

[33] S. Kuroda, A counterexample to the Fourteenth Problem of Hilbert in dimension four, J. Algebra **279** (2004), 126–134.

[34] S. Kuroda, Fields defined by locally nilpotent derivations and monomials, J. Algebra **293** (2005), 395–406.

[35] S. Kuroda, A counterexample to the Fourteenth Problem of Hilbert in dimension three, Michigan Math. J. **53** (2005), 123–132.

[36] S. Kuroda, Hilbert's fourteenth problem and algebraic extensions, J. Algebra **309** (2007), no. 1, 282–291.

[37] S. Kuroda, A generalization of the Shestakov-Umirbaev inequality, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), 495–510.

[38] S. Kuroda, Automorphisms of a polynomial ring which admit reductions of type I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **45** (2009), 907–917.

[39] S. Kuroda, Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism, Tohoku Math. J. **62** (2010), 75–115.

[40] S. Kuroda, Wildness of polynomial automorphisms in three variables, arXiv:math.AC/1110.1466v1.

[41] S. Kuroda, Wildness of polynomial automorphisms: applications of the Shestakov-Umirbaev theory and its generalization, in *Higher dimensional algebraic geometry*, 103–120, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B24, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto.

[42] S. Kuroda, Recent developments related to automorphisms of polynomial rings—the solution to the Nagata conjecture and developments thereafter, Sūgaku **65** (2013), no. 1, 45–68.

[43] S. Kuroda, How to prove the wildness of polynomial automorphisms: an example, in *Automorphisms in birational and affine geometry*, 381–386, Springer Proc. Math. Stat., 79, Springer, Cham.

[44] S. Kuroda, Subgroups of polynomial automorphisms with diagonalizable fibers, J. Algebra **435** (2015), 159–173.

[45] S. Kuroda, A generalization of Nakai's theorem on locally finite iterative higher derivations, to appear in Osaka Math. J.

[46] S. Kuroda, The automorphism group of a UFD over the kernel of a locally nilpo-

tent derivation, 第 35 回可換環論シンポジウム報告集，8 ページ.

[47] S. Kuroda, Hilbert's fourteenth problem and field modifications, in preparation.

[48] L. Makar-Limanov, P. van Rossum, V. Shpilrain and J.-T. Yu, The stable equivalence and cancellation problems, Comment. Math. Helv. **79** (2004), 341–349.

[49] L. Makar-Limanov and J.-T. Yu, Degree estimate for subalgebras generated by two elements, J. Eur. Math. Soc. **10** (2008), 533–541.

[50] M. Masuda, L. Moser-Jauslin and T. Petrie, Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: applications, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **88** (1991), 9065–9066.

[51] A. A. Mikhalev, V. Shpilrain and J.-T. Yu, *Combinatorial methods*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 19, Springer, New York, 2004.

[52] M. Miyanishi, *Curves on rational and unirational surfaces*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 60, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1978.

[53] M. Miyanishi and T. Sugie, Affine surfaces containing cylinderlike open sets, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), 11–42.

[54] M. Miyanishi, Normal affine subalgebras of a polynomial ring, Algebraic and Topological Theories—to the memory of Dr. Takehiko Miyata (Tokyo), Kinokuniya, 1985, pp. 37–51.

[55] M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1960, 459–462.

[56] M. Nagata, *On Automorphism Group of* $k[x,y]$, Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, Vol. 5, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1972.

[57] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń, 1994.

[58] V. L. Popov, On actions of $\mathbf{G}_a$ on $\mathbf{A}^n$, in *Algebraic groups Utrecht 1986*, 237–242, Lecture Notes in Math., 1271, Springer, Berlin.

[59] R. Rentschler, Opérations du groupe additif sur le plan affine, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **267** (1968), 384–387.

[60] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and

a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, J. Algebra **132** (1990), no. 2, 461–473.
[61] G. W. Schwarz, Exotic algebraic group actions, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309** (1989), 89–94.
[62] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 1, 181–196.
[63] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 1, 197–227.
[64] M. K. Smith, Stably tame automorphisms, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), 209–212.
[65] R. G. Swan, Invariant rational functions and a problem of Steenrod, Invent. Math. **7** (1969), 148–158.
[66] S. Vénéreau, A parachute for the degree of a polynomial in algebraically independent ones, Math. Ann. **349** (2011), 589–597.
[67] V. E. Voskresenskiĭ, On the question of the structure of the subfield of invariants of a cyclic group of automorphisms of the field $Q(x_1, \cdots, x_n)$, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970), 366–375. MR0274427
[68] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math. **78** (1954), 155–168.

〒192-0397 八王子市南大沢 1-1
首都大学東京大学院理工学研究科 数理情報科学専攻