多角形ルコルマン
-三角圏の対称性-

加藤　希理子

Contents

0. 序

導来圏やホモトピー圏は, ホモロジー代数を研究するための基本的な枠組みだが, これら三角圏を分析するためのひとつの手がかりは, 部分圏の直交性である. 三角圏 $\mathcal{T}$ の部分圏 $\mathcal{U}$ による局所化とは, 商圏 $\mathcal{T}/\mathcal{U}$ を取る Verdier 局所化が基本的であり, どんな部分圏に対しても行うことができる. いっぽう, 一定の条件をみたす部分圏については,

$$\mathcal{T}/\mathcal{U} \simeq \mathcal{U}^{\perp} = \{t \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(\mathcal{U}, t) = 0\},$$

または

$$\mathcal{T}/\mathcal{U} \simeq {}^{\perp}\mathcal{U} = \{t \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(t, \mathcal{U}) = 0\}$$

なる準同型定理のような三角同値が成立し, 商圏を充満部分圏として捉えることができる. これが Bousfield 局所化である. 随伴函手対として定義されることが多いが, 直交部分圏の対（半直交分解）として捉えることもできる.　Bousfield 局所化の発展形としてルコルマン (連続する 2 対の半直交分解), 三角形ルコルマン（連続して回帰的な 3 対の半直交分解）があり, 順に対称性が高くなる. 図 1.3(Bousfield 局所化), 図 1.6（ルコルマン), 図 1.10（三角形ルコルマン）を比較してみて欲しい.

三角形ルコルマンの応用例として, 特異圏と Cohen-Macaulay 安定圏の同値が挙げられる.　Gorenstein 環 R 上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏は, 以下のホモト

2016 年 9 月 10 日 第 61 回代数学シンポジウム
本稿は, 伊山修, 宮地淳一両氏との共同研究 [17], [18], [19] に基づく.

ピー圏および導来圏（特異圏と呼ばれる）と三角同値であることが知られている．(Buchweitz [7].)

$$\underline{\mathsf{CM}}(R) \simeq \mathsf{K}^{\mathrm{b},-}(\mathsf{proj}\,R)/\,\mathsf{K}^{b}(\mathsf{proj}\,R) \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}R)/\,\mathsf{D}_{perf} \tag{0.1}$$

$\mathsf{K}^{\mathrm{b},-}(\mathsf{proj}\,R)$ の拡大圏である $\mathsf{K}^{\mathrm{b},\infty}(\mathsf{proj}\,R)$ において同様の Verdier 商を取ると, R の上三角行列環 $T_2(R)$ の特異圏と同値であることがわかった（定理 2.3).

$$\mathsf{K}^{\mathrm{b},\infty}(\mathsf{proj}\,R)/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R) \simeq \underline{\mathsf{CM}}(T_2(R)) \tag{0.2}$$

これは, 圏の拡大 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R) \subset \mathsf{K}^{\mathrm{b},-}(\mathsf{proj}\,R) \subset \mathsf{K}^{\mathrm{b},\infty}(\mathsf{proj}\,R)$ において

$$\mathsf{K}^{\mathrm{b},\infty}(\mathsf{proj}\,R)/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b},-}(\mathsf{proj}\,R) \simeq \mathsf{K}^{\mathrm{b},-}(\mathsf{proj}\,R)/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R) \simeq \underline{\mathsf{CM}}(R)$$

が成立することと関係がある．$\mathsf{K}^{\mathrm{b},\infty}(\mathsf{proj}\,R)/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R)$ における三角形ルコルマンを用いると, 部分圏における同値 (0.1) から全体の同値 (0.2) を引き出すことができる．

三角圏がこのような対称性を有するとは考えられていなかったようだが, 一般に n 角形ルコルマンを定義することができる．たとえば, ADE 型の道代数の導来圏には, グラフの形に応じた多角形ルコルマンが存在する．構造的な理由は, これらの導来圏の分数 Calabi-Yau 性である．函手的有限な部分圏は左右の直交圏とともにルコルマンを形成するが, 分数 Calabi-Yau 圏においては, 直交圏を取る操作が回帰的になるので, 多角形ルコルマンが得られる（命題 3.3).

多角形ルコルマンを備えた新しい三角圏として注目したのが N-複体の圏である．通常の複体は微分写像 2 回の合成が零になるのに対し, 微分写像 N 回の合成で零になるのが N-複体である．概念自体は単体的複体のホモロジー計算に端を発し [28], 最近になって様々な動機から研究対象となっている [2, 4, 8, 9, 10, 11, 16, 20, 22, 25, 26]. 実際, 加法圏 $\mathcal{B}$ の N-複体のホモトピー圏 $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ を構成してみると, $2N$ 角形ルコルマンを見つけることができた（定理 4.9）.

ところで得られた $2N$ 角形ルコルマンを観察してみると, 意外な事実が判明した．$M \in \mathcal{B}$ を $N-1$ 個並べた $M = M = \cdots = M$ は N-複体とみなせる．そこで $\mathcal{B}$ の $N-2$ 条の分裂単射の列 $M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_{N-1}$ からなる加法圏 $\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B})$ を考える．すると, N-複体のホモトピー圏 $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ とは, 通常の（2-複体の）ホモトピー圏 $\mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B}))$ と三角同値であることが判った (定理 5.5). たとえば $\mathcal{B}$ として環 R の射影加群の圏を考えれば, $\mathsf{K}_N(\mathsf{Proj}\,R) \simeq \mathsf{K}(\mathsf{Proj}\,T_{N-1}(R))$ ということになる．

1. Bousfield 局所化

1.1. 半直交分解.

定義 1.1 (Bousfield 局所化函手)**.** 三角圏 $\mathcal{T}$ と濃密部分圏 $\mathcal{U}$ に対し，　商函手 $Q: \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{U}$ が右随伴函手 $L: \mathcal{T}/\mathcal{U} \to \mathcal{T}$ を持つとき，L を **Bousfield 局所化函手 (Bousfield localization functor)** と呼ぶ．このとき，$\mathcal{T}$ は $\mathcal{U}$ に関して Bousfield 局所化可能であるという．商函手の左随伴函手があれば, Bousfield 余局所化函手と呼ばれる.

命題 1.2 (局所化による圏の完全列)**.** $\mathcal{T}$ は $\mathcal{U}$ に関して *Bousfield* 局所化可能としよう.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "inc_{\mathcal{U}}"] & \mathcal{T} \arrow[r, shift left, "Q_{\mathcal{U}}"] & \mathcal{T}/\mathcal{U} \arrow[l, shift left, "L"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{U}^{\perp}=\mathcal{V}$ とおくと，　$\mathcal{U}(\mathcal{V})$ に関する包含函手および商函手は, 右（左）随伴函手をもち, 以下の図式が可換である.

(1.3)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}/\mathcal{V} \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, shift left, "\Gamma"] & & & \\
\mathcal{U} \arrow[rr, shift left, "inc_{\mathcal{U}}"] & & \mathcal{T} \arrow[ll, shift left, "U"] \arrow[ul, shift left, "Q_{\mathcal{V}}"] \arrow[rr, shift left, "Q_{\mathcal{U}}"] \arrow[dr, shift left, "V"] & & \mathcal{T}/\mathcal{U} \arrow[ll, shift left, "L"] \\
 & & & \mathcal{V} \arrow[ul, shift left, "inc_{\mathcal{V}}"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

$(inc_{\mathcal{U}},U)$, $(Q_{\mathcal{U}},L)$, $(\Gamma,Q_{\mathcal{V}})$, $(V,inc_{\mathcal{V}})$ は随伴函手対である.

定義 1.4 (半直交分解)**.** 三角圏 $\mathcal{T}$ の**半直交分解 (semi-orthogonal decomposition)** (または**安定 t 構造 (stable t-structure)**) とは，　以下の条件をみたす充満部分圏の組 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ である.

(a) $\mathcal{U}=\Sigma\mathcal{U}$, $\mathcal{V}=\Sigma\mathcal{V}$.
(b) $\mathcal{T}(\mathcal{U},\mathcal{V})=0$.
(c) $\mathcal{T}$ の各対象 $x\in\mathcal{T}$ に対し, $u\in\mathcal{U}$, $v\in\mathcal{V}$ なる完全三角 $u\to x\to v\to\Sigma u$ が存在する.

命題 1.2 における考察をまとめると以下のようになる.

命題 1.5 (Bousfield 局所化と半直交分解: [29] 9.1)**.** 三角圏 $\mathcal{T}$ の濃密部分圏 $\mathcal{U}$ について以下は同値である.

(1) $\mathcal{T}$ は $\mathcal{U}$ に関して *Bousfield* 局所化可能である.
(2) $\mathcal{T}$ は $\mathcal{U}^{\perp}$ に関して *Bousfield* 余局所化可能である.
(3) $(\mathcal{U},\mathcal{U}^{\perp})$ は $\mathcal{T}$ の半直交分解である.

1.2. **ルコルマン.**

$(\mathcal{U},\mathcal{V})$, $(\mathcal{V},\mathcal{W})$ がともに $\mathcal{T}$ の半直交分解だとしよう. 命題 1.2 を繰り返すと, 以下の図式が得られる. ただし上下・左右の矢印はいずれも随伴函手対である.

(1.6)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}/\mathcal{V} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, shift left=2] \arrow[dr, shift right=2] & & \mathcal{W} \arrow[dl, shift left] & \\
\mathcal{U} \arrow[rr, shift left] & & \mathcal{T} \arrow[ll, shift left] \arrow[ul] \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, shift left] \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, shift left=2] \arrow[dr, shift right=2] & & \mathcal{T}/\mathcal{U} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & \mathcal{T}/\mathcal{W} \arrow[rr, "\simeq"'] \arrow[ur, shift left] & & \mathcal{V} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

上図の左上-右下のラインを見ると　, $\mathcal{V}$ に関する包含函手と商函手がそれぞれ, 右随伴函手と左随伴函手を両方持っていることがわかる.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \arrow[r, "inc" description] & \mathcal{T} \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] \arrow[r, "Q" description] & \mathcal{T}/\mathcal{V} \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2]
\end{tikzcd}$$

このような状況をルコルマンと呼ぶ.　Bellinson-Bernstein-Deligne によって与えられたルコルマンの定義は定義 1.7 の通りであるが, 命題 1.8 で見るように, ルコルマンは, 連続する 2 対の半直交分解 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$, $(\mathcal{V},\mathcal{W})$ と捉えてよい.

定義 1.7 (ルコルマン: Bellinson-Bernstein-Deligne [3])**.** 三角圏と三角函手の図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}' \arrow[r, "i_*" description] & \mathcal{T} \arrow[l, shift right=2ex, "i^*"'] \arrow[l, shift left=2ex, "i^!"] \arrow[r, "j^*" description] & \mathcal{T}'' \arrow[l, shift right=2ex, "j_*"'] \arrow[l, shift left=2ex, "j_!"] \end{tikzcd}$$

は，　以下の条件をみたすとき**ルコルマン (recollement)**と呼ばれる.

(1) i_*, $j_!$ および j_* は充満忠実.
(2) (i^*, i_*), $(i_*, i^!)$, (j_*, j^*), $(j^*, j_!)$ は随伴函手対.
(3) 自然な包含 $\mathrm{Im}\, j_! \hookrightarrow \mathrm{Ker}\, i^!$, $\mathrm{Im}\, i_* \hookrightarrow \mathrm{Ker}\, j^*$,
$\mathrm{Im}\, j_* \hookrightarrow \mathrm{Ker}\, i^*$ は同値函手.

このとき, $\mathcal{T}$ は $\mathcal{T}'$ と $\mathcal{T}''$ のルコルマン（貼り合せ）であるという.

命題 1.8 (ルコルマンと半直交分解: Bellinson-Bernstein-Deligne [3] 1.4.17, Miyachi [24] 2.7)**.**

(1)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}' \arrow[r, "i_*" description] & \mathcal{T} \arrow[l, shift right=2ex, "i^*"'] \arrow[l, shift left=2ex, "i^!"] \arrow[r, "j^*" description] & \mathcal{T}'' \arrow[l, shift right=2ex, "j_*"'] \arrow[l, shift left=2ex, "j_!"] \end{tikzcd}$$

がルコルマンであるとき, $\mathcal{U} = \mathrm{Im}\, j_*$, $\mathcal{V} = \mathrm{Im}\, i_*$, $\mathcal{W} = \mathrm{Im}\, j_!$ とおけば, $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ は $\mathcal{T}$ の半直交分解となる.

(2) $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ を $\mathcal{T}$ の半直交分解とする. 包含函手を $i_* : \mathcal{V} \to \mathcal{T}$ とすると, $\mathrm{Im}\, j_* = \mathcal{U}$, $\mathrm{Im}\, j_! = \mathcal{W}$ となるような以下のルコルマンが存在する.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "i_*" description] & \mathcal{T} \arrow[l, shift right=2ex, "i^*"'] \arrow[l, shift left=2ex, "i^!"] \arrow[r, "j^*" description] & \mathcal{T}/\mathcal{V} \arrow[l, shift right=2ex, "j_*"'] \arrow[l, shift left=2ex, "j_!"] \end{tikzcd}$$

1.3. **多角形ルコルマン.**

定義 1.9 (多角形ルコルマン: [19])**.** $\mathcal{T}$ に連続回帰的な n 個の半直交分解 $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, $(\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3)$, $\cdots$, $(\mathcal{U}_{n-1}, \mathcal{U}_n)$, $(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_1)$ があるとき, $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n)$ を **n 角形ルコルマン** (n-gon of recollements) と呼ぶ.

n が奇数の場合, n 角形ルコルマンは,　関係する部分圏 $\mathcal{U}_i$ と商圏 $\mathcal{T}/\mathcal{U}_i$ はすべて三角同値になり, 極めて高い対称性を呈する. このことは, 命題 1.2 の議論を繰り返せばわかる. 下図は, 三角形ルコルマン $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})$ を表している. ただし上下・左右の矢印は随伴函手対である.

(1.10)
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{T}/\mathcal{V} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] \arrow[dr, leftarrow] & & \mathcal{W} \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dl, leftarrow] & \\ \mathcal{U} \arrow[rr, ""] & & \mathcal{T} \arrow[ll, shift left] \arrow[ll, shift right] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] & & \mathcal{T}/\mathcal{U} \arrow[ll] \arrow[dl, "\simeq"] \\ & \mathcal{T}/\mathcal{W} \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[rr, "\simeq"'] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[ur, leftarrow] & & \mathrm{V} \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right] \arrow[ul, leftarrow] & \end{tikzcd}$$

命題 1.11 (多角形ルコルマンの対称性; [19])**.** $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n)$ を三角圏 $\mathcal{T}$ の n 角形ルコルマンとすると, 以下の三角同値が成り立つ.

(1) n が奇数のとき, すべての $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{T}/\mathcal{U}_i$ は同値.
(2) n が偶数のとき,

(a) すべての $\mathcal{U}_{2i}$ と $\mathcal{T}/\mathcal{U}_{2i+1}$ は同値.
(b) すべての $\mathcal{U}_{2i+1}$ と $\mathcal{T}/\mathcal{U}_{2i}$ は同値.

対称性の帰結として, 三角形ルコルマンがあるときには, 部分圏を見ただけで圏全体の情報が得られるという便利な状況になっている.

命題 1.12 ([17] 1.16, [19] 1.7)**.** $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ を n 角形ルコルマンを持つような三角圏とし, $(\mathcal{U}_1,\cdots,\mathcal{U}_n)$, $(\mathcal{V}_1,\cdots,\mathcal{V}_n)$ をそれぞれ $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ の n 角形ルコルマンとする. 三角函手 $F:\mathcal{T}\to\mathcal{S}$ が $F(\mathcal{U}_i)\subset\mathcal{V}_i \quad (i=1,\cdots,n)$ をみたすとする.

(1) n が奇数の場合, F の部分圏への制限 $F|_{\mathcal{U}_1}:\mathcal{U}_1\to\mathcal{V}_1$ が同値であれば, F は同値である.
(2) n が偶数の場合, F の部分圏への制限 $F|_{\mathcal{U}_1}:\mathcal{U}_1\to\mathcal{V}_1$, $F|_{\mathcal{U}_2}:\mathcal{U}_2\to\mathcal{V}_2$ が同値であれば, F は同値である.

注意 1.13. 四角形ルコルマンに対応するものとして, spherical functor なる概念がある. これは, DG 三角圏の間の函手 $S:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ で一連の性質をみたすものである (Anno-Logvinenko [1]). このとき, 貼り合わせ $\mathcal{E}*\mathcal{D}$ に四角形ルコルマンが存在する. 逆に, DG 三角圏の四角形ルコルマンからは spherical functor を構成することができる (Halpern-Leistner-Shipman[13]). spherical functor の定義は人工的に見えるが, 組紐群の表現に関連した自然な例があるようだ.

2. Cohen-Macaulay 加群と特異圏

多角形ルコルマンの応用例として, ホモトピー圏と Cohen-Macaulay 加群圏の同値について説明しよう.

定義 2.1. 加法圏 $\mathcal{A}$ のホモトピー圏 $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ において次のような部分圏を考える.

	$\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$	$\mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}(\mathcal{A})$	$\mathsf{K}^{+,\mathrm{b}}(\mathcal{A})$	$\mathsf{K}^{\infty,\emptyset}(\mathcal{A})$	$\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}(\mathcal{A})$
complex	bounded	bounded above	bounded below	unbounded	unbounded
homology	bounded	bounded	bounded	acyclic	bounded

つまり添字の 1 番目はホモロジーについて, 2 番目は複体の形状についての記述である.

以下, R を Iwanaga-Gorenstein 環, すなわち両側ネーター環かつ R の入射次元は両側とも有限とする. 有限生成射影加群のホモトピー圏 $\mathsf{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の部分圏を考える. 簡単のために, $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R)$ 等を $\mathsf{proj}\,R$ を省略して $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}$ 等と略記する.

$\mathsf{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の商部分圏のうち, 商圏 $\mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R)$ は**特異圏 (singularity category)** と呼ばれ, 環の正則性を判定する. 最近は超弦理論への応用も関心を集めているが (Orlov [30], [31]), 注目したいのは, 特異圏が加群圏でもあることだ. 有限生成 R-加群 M で $\mathrm{Ext}^i_R(M,R)=0$ $(i>0)$ をみたすものを **Cohen-Macaulay 加群**と呼ぶ. [1] Cohen-Macaulay 加群の圏 $\mathsf{CM}\,R$ は Frobenius 圏ゆえ, 安定圏 $\underline{\mathsf{CM}}R$ は三角圏となり (Happel [14]), 次の三角同値がある

定理 2.2 (Happel [15], Rickard [32], Buchweitz [7])**.**

$$\mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R)\simeq\underline{\mathsf{CM}}R.$$

一方, 次の三角同値があることにも気づく.

$$\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R)\simeq\mathsf{K}^{\infty,\emptyset}(\mathsf{proj}\,R)\simeq\underline{\mathsf{CM}}R.$$

[1] Cohen-Macaulay 加群は一般には正則列によって定義される. 上記は, Gorenstein 環上の Cohen-Macaulay 加群を Gorenstein 射影加群として特徴づける性質である.

これらの観察から, $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R)$ は, Cohen-Macaulay 加群による記述ができるのではないかと推測できる.

定理 2.3 ([17] 4.8)**.**

$$(\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}})(\mathsf{proj}\,R) \simeq \underline{\mathsf{CM}}\,\mathrm{T}_2(R)$$

ただし $\mathrm{T}_2(R)$ *は* R *上 2 次の上三角行列環である.*

証明 : $\mathsf{CM}\,\mathrm{T}_2(R)$ というのはイメージしにくいかも知れないが, Cohen-Macaulay$R$-加群の単射からなる圏と同値である. Cohen-Macaulay 加群の単射 $\lambda : M \to N$ に対して,

$$\cdots \to G^{-1} \to G^0 \xrightarrow{\rho} M \to 0$$
$$0 \to N \xrightarrow{\epsilon} E^1 \to E^2 \to \cdots$$

が完全列になるような射影加群の複体 G, E を取る. それらを λ で貼り合せた複体

$$F(\lambda) : \cdots G^{-1} \to G^0 \xrightarrow{\epsilon\lambda\rho} E^1 \to E^2 \to \cdots$$

を作ると, F は三角函手 $\underline{F} : \underline{\mathsf{CM}}\,\mathrm{T}_2(R) \to \mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}\,/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}$ を導く. 同値を直接計算で示そうとすると結構難しい.

定理 2.4 ([17] 2.8)**.** *商圏* $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}\,/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}} = \mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R)/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R)$ *は, 次の三角形ルコルマンを持つ.*

$$(\mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}, \mathsf{K}^{\infty,\emptyset}, \mathsf{K}^{+,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}})$$

($\mathsf{K}^{\infty,\emptyset} \cap \mathsf{K}^{b} = 0$ *なので* $\mathsf{K}^{\infty,\emptyset}\,/\,\mathsf{K}^{b} = \mathsf{K}^{\infty,\emptyset}$ *である.)*

定理 2.3 証明続き : 定理 2.4 で得られた三角形ルコルマン $(\mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}, \mathsf{K}^{\infty,\emptyset}, \mathsf{K}^{+,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}})$ に注目して $\underline{F}$ による逆像を考えると, 次の $\underline{\mathsf{CM}}\,\mathrm{T}_2(R)$ の部分圏に対応することがわかる.

$$\begin{aligned}
\underline{\mathsf{CM}}_p &= \{M \hookrightarrow P \mid M \in \mathsf{CM}\,R, P \in \mathsf{proj}\,R\},\\
\underline{\mathsf{CM}}_1 &= \{M = M \mid M \in \mathsf{CM}\,R\},\\
\underline{\mathsf{CM}}_0 &= \{0 \to M \mid M \in \mathsf{CM}\,R\}
\end{aligned}$$

特に, $\underline{F}|_{\underline{\mathsf{CM}}_1}$ は, 知られた同値 $\underline{\mathsf{CM}}R \simeq \mathsf{K}^{\infty,\emptyset}$ に他ならない. $(\underline{\mathsf{CM}}_p, \underline{\mathsf{CM}}_1, \underline{\mathsf{CM}}_0)$ は $\underline{\mathsf{CM}}\,\mathrm{T}_2(R)$ の三角形ルコルマンをなすので, 命題 1.12 より $\underline{F}$ の同値性を得る. (定理 2.3 証明終)

定理 2.4 の証明 : 三角形ルコルマンは順次, 以下の半直交分解から得られる. このうち, (1)-(3) は環 R が Iwanaga-Gorenstein でなくても一般に成り立つ.

(1) $(\mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}, \mathsf{K}^{\infty,\emptyset})$ は $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}$ の半直交分解.
(2) $(\mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}, \mathsf{K}^{\infty,\emptyset})$ は $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}$ の半直交分解.
(3) $(\mathsf{K}^{+,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}, \mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}})$ は $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}$ の半直交分解.
(4) $(\mathsf{K}^{\infty,\emptyset}, \mathsf{K}^{+,\mathrm{b}})$ は $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}$ の半直交分解.
(5) $(\mathsf{K}^{\infty,\emptyset}, \mathsf{K}^{+,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}})$ は $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}/\,\mathsf{K}^{\mathrm{b}}$ の半直交分解.

(4), (5) は R の Iwanaga-Gorenstein 性から $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ によって引き起こされる以下の反変同値が鍵である.

$$\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R) \simeq \mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R^{op})$$

$\mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R) \simeq \mathsf{K}^{+,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R^{op}), \mathsf{K}^{+,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R) \simeq \mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R^{op}), \mathsf{K}^{\infty,\emptyset}(\mathsf{proj}\,R) \simeq \mathsf{K}^{\infty,\emptyset}(\mathsf{proj}\,R^{op})$.

従って (1) で得られた $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R^{op})$ の半直交分解 $(\mathsf{K}^{-,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R^{op}), \mathsf{K}^{\infty,\emptyset}(\mathsf{proj}\,R^{op}))$ は, $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ によって $\mathsf{K}^{\infty,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R)$ の半直交分解 $(\mathsf{K}^{\infty,\emptyset}(\mathsf{proj}\,R), \mathsf{K}^{+,\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,R))$ に移される. (証明終)

3. 分数 Calabi-Yau 圏

多角形ルコルマンを自然に導く三角圏の構造について説明しよう.

定義 3.1 (分数 Calabi-Yau 圏). 三角圏 $\mathcal{T}$ の射の空間が体 K 上有限次元ベクトル空間となっているとする.（このとき $\mathcal{T}$ は K-線型な三角圏と呼ばれる）. 整数 m, n に対し, $\mathcal{T}$ が $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$**-Calabi-Yau 圏**とは, 以下の性質をみたす自己同値函手 $S : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ があることをいう.

- 自然な同型 $\mathcal{T}(x, y) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathcal{T}(y, Sx), K)$ が成り立つ. このような函手 S は Serre 函手と呼ばれる.
- 自然な同型 $S^n \simeq \Sigma^m$ が成り立つ

$n = 1$ のときは, 単に **Calabi-Yau 圏**と呼ばれる.

例 3.2 ([21] Example 8.3 (2)). R を A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 型 Dynkin 箙の K 上道代数としたとき, Serre 函手 $\Sigma\tau$ によって $\mathsf{D}^b(\mod R)$ は $\frac{h-2}{h}$-Calabi-Yau 圏になる. 但し τ は Auslander-Reiten 移動, h は Coxeter 数である.

$\mathcal{T}$ を $\frac{m}{n}$-Calabi-Yau 圏とする. 函手的有限な三角部分圏 $\mathcal{U}$ に対して, 以下の $2n$ 角形ルコルマンが得られる.

$$(\mathcal{U}, \mathcal{U}^{\perp}, S\mathcal{U}, (S\mathcal{U})^{\perp}, \cdots, S^{n-1}\mathcal{U}, (S^{n-1}\mathcal{U})^{\perp})$$

実際, $(\mathcal{U}^{\perp}, S\mathcal{U})$ が半直交分解であることは, Serre 函手の定義からわかる. したがって $((S^{n-1}\mathcal{U})^{\perp}, S^n\mathcal{U})$ は半直交分解だが, $S^n\mathcal{U} = \Sigma^m\mathcal{U} = \mathcal{U}$ である. $\mathcal{U}$ の取り方によっては, 上の $2n$ 角形ルコルマンは, $2n$ の約数 l によって l 角形ルコルマンにできる.

命題 3.3 (分数 Calabi-Yau 圏の多角形ルコルマン ; [18]). *$\frac{m}{n}$-Calabi-Yau 圏は, $2n$ 角形ルコルマンを持つ.*

因みに, Kuznetsov は, Lefschetz タイプの半直交分解と spherical functor から分数 Calabi-Yau 圏を構成している [23] .

4. N 複体の圏

4.1. N-複体の圏, ホモトピー圏, 導来圏.

[N-複体の圏] 整数 $N \geq 2$ に対して加法圏 $\mathcal{B}$ 上の N-複体 とは, $\mathcal{B}$ における射の列

$$\cdots \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} \cdots$$

で各 $i \in \mathbf{Z}$ において

$$d_X^{i+N-1} \cdots d_X^{i+1} d_X^i = 0$$

をみたすものをいう. 通常の複体は 2-複体である. N 複体の射は, 射の可換図式で与えられる.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \xrightarrow{d_X^{i+1}} \cdots \\ & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & \\ \cdots \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} & \xrightarrow{d_Y^{i+1}} \cdots \end{array}$$

すると, N-複体の圏 $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ を定義することができる.

[N-複体のホモトピー圏] N 複体の射 $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ がホモトピー同値 ($f \sim g$) とは, 各 $i \in \mathbf{Z}$ に対して, 以下をみたす射 $s^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X^i, Y^{i-N+1})$ が存在することをいう.

$$f^i - g^i = \sum_{j=1}^{N-1} d_Y^{i-1} \cdots d_Y^{i-N+j} s^{i+j-1} d_X^{i+j-2} \cdots d_X^i \tag{4.1}$$

N 複体の**ホモトピー圏** $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ とは, ホモトピー同値類を射とする圏である.

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}_N(\mathcal{B})}(X,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_N(\mathcal{B})}(X,Y)/\sim .$$

$\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ の三角圏構造は, $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ の Frobenius 圏構造から得られる. すなわち, 以下のように段階を踏んで遷移と完全三角を定義する.

(1) $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ において, 射の列 $0\to X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\to 0$ で各項 $0\to X^i\xrightarrow{f^i}Y^i\xrightarrow{g^i}Z^i\to 0$ が分裂完全列であるようなものを短完全列 (conflation) と呼ぶことにする. この短完全列に関する入射対象や射影対象を考えてみる. $M\in\mathcal{B}$ および 整数 s に対し, M を第 s 項から左側に N 個並べたものは N-複体になる.

$$\mu_N^s(M):\cdots\to 0\to M=\cdots=M=M\to 0\to\cdots$$

つまり $\mu_N^s(M)^i=M\ (s-N+1\le i\le s)$, $d^i_{\mu_N^s(M)}=1_M\ (s-N+1\le i<s)$ である. すると, 以下が成り立つ.

補題 4.2 ([18] 2.2)**.** $\mu_N^s(M)$ は $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ の入射対象かつ射影対象である.

(2) 任意の $X\in\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ に対して, 以下の短完全列がある.

$$0\to\mathrm{Ker}\,\rho_X\xrightarrow{\epsilon_X}\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\mu_N^n(X^{n-N+1})\xrightarrow{\rho_X}X\to 0,$$

$$0\to X\xrightarrow{\lambda_X}\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\mu_N^n(X^n)\xrightarrow{\eta_X}\mathrm{Cok}\,\lambda_X\to 0.$$

これは, $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ が入射対象と射影対象を十分に備えていることを意味する. したがって, 以下を得る.

定理 4.3 ([18] 2.1)**.** $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ は *Frobenius* 圏である.

(3) 一般に Frobenius 圏 $\mathcal{F}$ の安定圏 $\underline{\mathcal{F}}$ は, 三角圏構造を持つことが知られている [15]. このタイプの三角圏を代数的三角圏と呼ぶ. ただし安定圏 $\underline{\mathcal{F}}$ とは, $\mathcal{F}$ と同じ対象からなり,

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{F}}}(X,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(X,Y)/\mathcal{I}(X,Y)$$

と定義する. $\mathcal{I}(X,Y)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(X,Y)$ に属する射のうち, 射影入射対象を通過するものからなるイデアルである.

(4) $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ の射 $f:X\to Y$ に対して, 補題 4.2 の第 2 短完全列において $I(X)=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\mu_N^n(X^n)$, $\Sigma X=\mathrm{Cok}\,\lambda_X$ とおく. 以下の短完全列の図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\lambda_X"] \arrow[d, "f"] & I(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\psi_f"] & \Sigma X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

そこで,

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{h}\Sigma X$$

を完全三角とし, $X\mapsto\Sigma X$ を遷移とすれば良い. 写像錘の具体的な記述については [18]2 節を参照されたい.

[**N-複体の導来圏**] アーベル圏 $\mathcal{A}$ 上の N-複体 に対しては, ホモロジーを定義することができる. N-複体

$$\cdots\to X^{i-1}\xrightarrow{d_X^{i-1}}X^i\xrightarrow{d_X^i}X^{i+1}\to\cdots.$$

および, 整数 $0 \le r \le N$, $i \in \mathbf{Z}$ に対して, X の i-次・振幅 r のホモロジー $\mathrm{H}^i_{(r)}(X)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}^i_{(r)}(X) &:= \mathrm{Ker}(d_X^{i+r-1} \cdots d_X^i), \quad \mathrm{B}^i_{(r)}(X) := \mathrm{Im}(d_X^{i-1} \cdots d_X^{i-r}),\\
\mathrm{C}^i_{(r)}(X) &:= \mathrm{Cok}(d_X^{i-1} \cdots d_X^{i-r}), \quad \mathrm{H}^i_{(r)}(X) := \mathrm{Z}^i_{(r)}(X)/\,\mathrm{B}^i_{(N-r)}(X).
\end{aligned}$$

定義 4.4. $X \in \mathsf{C}_N(\mathcal{A})$ が **非輪状**とは, 任意の $0 < r < N$ および $i \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{H}^i_{(r)}(X) = 0$ が成り立つことをいう.

たとえば N-複体 $\mu^s_N(M)$ はもちろん, 非輪状である. N-複体のホモロジーには, 次数に加えて振幅があるので厄介そうだが, 実は, $\mathrm{H}^i_{(r)}(X) = 0$ $(i \in \mathbb{Z})$ がある r について成立していれば, N-複体 X は非輪状である (Kapranov [20]).

定義 4.5. 非輪状な N-複体からなる $\mathsf{K}_N(\mathcal{A})$ の部分圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{a}}_N(\mathcal{A})$ は, 三角部分圏となる. 商圏 $\mathsf{K}_N(\mathcal{A})/\,\mathsf{K}^{\mathrm{a}}_N(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の N-複体の**導来圏**と呼び, $\mathsf{D}_N(\mathcal{A})$ で表す.

4.2. **N-複体の圏における多角形ルコルマン.** $(N-1)$-複体は明らかに N-複体である. この事実を, 三角函手として捉えてみよう.

[待たせる函手 $I_s : \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}_N(\mathcal{B})$] $X \in \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$, $s \in \mathbb{Z}$ に対して, $I_sX = I \in \mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}
I^{s+iN} &= X^{s+i(N-1)}, & d_I^{s+iN} &= 1_{X^{s+i(N-1)}}\\
I^{s+iN+1} &= X^{s+i(N-1)}, & d_I^{s+iN+1} &= d_X^{s+i(N-1)}\\
I^{s+iN+j} &= X^{s+i(N-1)+j-1}, & d_I^{s+iN+j} &= d_X^{s+i(N-1)+j-1} \quad (2 \le j < N)
\end{aligned}$$

$I = I_sX$ とおくと, 三角函手 $I_s : \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ が定義される.

$$\begin{tikzcd}
X: & \cdots \arrow[r] & X^s \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^{s+1} \arrow[r] & X^{s+2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X^{s+(N-1)} \arrow[r] \arrow[dr, equal] & X^{s+N} \arrow[r] & X^{s+N+1} \arrow[r] & \cdots\\
I_sX: & \cdots \arrow[r] & X^s \arrow[r, equal] & X^s \arrow[r] & X^{s+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X^{s+N-2} \arrow[r] & X^{s+(N-1)} \arrow[r, equal] & X^{s+N-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

[急がせる函手 $J_s : \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$] 逆に $Y \in \mathsf{K}_N(\mathcal{B})$, $s \in \mathbb{Z}$ に対して $J_sY = J \in \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}
J^{s+i(N-1)} &= Y^{s+iN}, & d_J^{s+i(N-1)} &= d_{Y^{s+iN+1}} d_{Y^{s+iN}}\\
J^{s+i(N-1)+1} &= Y^{s+iN+2}, & d_J^{s+i(N-1)+1} &= d_Y^{s+iN+2}\\
J^{s+i(N-1)+j} &= Y^{s+iN+j+1}, & d_J^{s+i(N-1)+j} &= d_Y^{s+iN+j+1} \quad (2 \le j < N-1)
\end{aligned}$$

$J = J_sY$ とおくと, 三角函手 $J_s : \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$ が定義される.

$$\begin{tikzcd}
Y: & \cdots \arrow[r] & Y^s \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y^{s+1} \arrow[r] & Y^{s+2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y^{s+N-1} \arrow[r] & Y^{s+N} \arrow[r] \arrow[dl, equal] & Y^{s+N+1} \arrow[r] & \cdots\\
J_sY: & \cdots \arrow[r] & Y^s \arrow[r, "d_Y^2"'] & Y^{s+2} \arrow[r] & Y^{s+3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y^{s+N} \arrow[r, "d_Y^2"'] & Y^{s+N+2} \arrow[r] & Y^{s+N+3} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

[$\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ のルコルマン]

命題 4.6 ([19] 5.6)**.** 上記の対応は, 三角函手 $I_s : \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}_N(\mathcal{B})$, $J_s : \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$ を定義する. I_s は J_s の左随伴函手であり. J_s は I_{s+1} の左随伴函手である. I_s は忠実充満である.

$$\mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \underset{\xleftarrow{I_{s+1}}}{\overset{\xleftarrow{I_s}}{\xrightarrow{J_s}}} \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \tag{4.7}$$

命題 4.6 から, $(\operatorname{Im} I_s, \operatorname{Ker} J_s)$, $(\operatorname{Ker} J_s, \operatorname{Im} I_{s+1})$ が $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ の半直交分解になっていることがわかる. また命題 1.8 から $\operatorname{Ker} J_s$ は三角函手の像になっているはずである. 合成函手 $\mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \xrightarrow{J_s} \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \xrightarrow{J_s} \mathsf{K}_{N-2}(\mathcal{B}) \cdots \xrightarrow{J_s} \mathsf{K}_2(\mathcal{B})$ を $J_s^{N-2} : \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}_2(\mathcal{B})$ と表すことにする. 同様に $I_s^{N-2} : \mathsf{K}_2(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ も定義する.

$$\operatorname{Ker} J_s = \{X \in \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \mid d_X^i = \mathrm{id}\ (j \equiv s+2, s+3, \cdots, s+N-1 \mod N)\}$$

より $\operatorname{Ker} J_s = \operatorname{Im} I_{s+2}^{N-2}$ がわかる.

命題 4.8 ([19] 5.10)**.** 任意の整数 s に対して, 以下のルコルマンがある.

$$\mathsf{K}_2(\mathcal{B}) \underset{\xleftarrow{J_{s+2}^{N-2}}}{\overset{\xleftarrow{J_{s+1}^{N-2}}}{\xrightarrow{I_{s+2}^{N-2}}}} \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \quad \underset{\xleftarrow{I_{s+1}}}{\overset{\xleftarrow{I_s}}{\xrightarrow{J_s}}} \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$$

[$\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ の多角形ルコルマン] $\operatorname{Im} I_s = \mathcal{V}_s$, $\operatorname{Im} I_s^{N-2} = \mathcal{U}_s$ とおくと, 命題 4.6 より, 上記のルコルマンは 以下の半直交分解を導く.

$$\cdots (\mathcal{V}_s, \mathcal{U}_{s+2}), (\mathcal{U}_{s+2}, \mathcal{V}_{s+1}), (\mathcal{V}_{s+1}, \mathcal{U}_{s+3}), (\mathcal{U}_{s+3}, \mathcal{V}_{s+2}), \cdots$$

しかし,

$$\mathcal{V}_s = \{X \in \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \mid d_X^i = \mathrm{id}\ (j \equiv s \mod N)\},$$
$$\mathcal{U}_s = \{X \in \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \mid d_X^i = \mathrm{id}\ (j \equiv s, s+1, \cdots, s+N-2 \mod N)\}$$

ゆえ $\mathcal{V}_s = \mathcal{V}_{s+N}$, $\quad \mathcal{U}_s = \mathcal{U}_{s+N}$ である. 従って次を得る.

定理 4.9 ([19]; 5.11)**.** $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ は, 以下の $2N$ 角形ルコルマンを有する.

$$(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_0, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{U}_N, \mathcal{V}_{N-1})$$

5. 分裂単射の圏

$r < N$ のとき, $\mathcal{B}$ の対象 M を r 個並べた

$$\mu_r^s(M) : \cdots \to 0 \to M = \cdots = M = M \to 0 \to \cdots$$

は N-複体である.

定義 5.1. $\mathcal{B}$ 上の分裂単射の圏 $\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})$ を以下のように定義する.

- $\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})$ の対象は, $\mathcal{B}$ における $N-1$ 条の分裂単射の列 $C : C^1 \xrightarrow{\alpha_C^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_C^{N-2}} C^{N-1}$ である.
- $\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})$ における C から D への射は, 以下の可換図式をみたす $\mathcal{B}$ の射の組 $f = (f^1, \cdots, f^{N-1})$ である.

$$\begin{array}{lccccccc}
C: & C^1 & \xrightarrow{\alpha_C^1} & C^2 & \xrightarrow{\alpha_C^2} & \cdots & \xrightarrow{\alpha_C^{N-2}} & C^{N-1} \\
 & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_{N-1}} \\
D: & D^1 & \xrightarrow{\alpha_D^1} & D^2 & \xrightarrow{\alpha_D^2} & \cdots & \xrightarrow{\alpha_D^{N-2}} & D^{N-1}
\end{array}$$

補題 5.2 ([19] 6.1)**.** $\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})$ の対象 $C: C^1 \xrightarrow{\alpha_C^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_C^{N-2}} C^{N-1}$ に対して, N-複体

$$\cdots \to 0 \to C^1 \xrightarrow{\alpha_C^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_C^{N-2}} C^{N-1} \to 0 \to \cdots$$

を対応させることにより, $\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})$ は, $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ および $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ の充満部分圏と同値である. この対応によって

$$\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}) = \{\coprod_{r=1}^{N-1} \mu_r^{N-1}(B_r) \mid B_r \in \mathcal{B}\}$$

である. $C, D \in \mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_N(\mathcal{B})}(C, \Sigma^i D) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}_N(\mathcal{B})}(C, \Sigma^i D) = 0 (i \neq 0).$$

(証明) 前半は明らかである. 後半を示そう. $B \in \mathcal{B}$, $0 < r < N$ に対して $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ の短完全列

$$0 \to \mu_r^{N-1}(B) \to \mu_N^{N-1}(B) \to \mu_{N-r}^{N-r-1}(B) \to 0$$

において, 中央の $\mu_N^{N-1}(M)$ は射影入射対象なので, $\Sigma\mu_r^{N-1}(B) = \mu_{N-r}^{N-r-1}(B)$ である. これを繰り返すと一般に次がわかる.

$$\begin{aligned}
\Sigma^{2k} \mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}) =& \{\coprod_{r=1}^{N-1} \mu_r^{(1-k)N-1}(B_r) \mid B_r \in \mathcal{B}\}, \\
\Sigma^{2k+1} \mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}) =& \{\coprod_{r=1}^{N-1} \mu_{N-r}^{(1-k)N-r-1}(B_r) \mid B_r \in \mathcal{B}\}
\end{aligned}$$

すなわち, $i \neq 0$ なら $C, D \in \mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})$ に対して, C と $\Sigma^i D$ の非零項の次数は全く重ならない. ここから最後の式を得る. (証明終)

そこで, $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ を $\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})$ の 2-複体の圏 $\mathsf{C}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}))$ と比較してみよう.

補題 5.3 ([19] 6.3)**.** $\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ は, 完全函手 $F: \mathsf{C}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})) \to \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ に拡張できる. F は三角函手 $\underline{F}_N : \mathsf{K}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})) \to \mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ を導く.

証明: 以下のように段階的に三角函手を構成する.

(1) $F: \coprod_i \Sigma_M^i \mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}) \to \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$. $C \in \mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})$ に対して, $F(\Sigma_M C) = \Sigma C$ と定義する. ただし Σ_M は $\mathsf{C}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}))$ における遷移 (-1 次項のみに C を置く 2-複体) を表す.

(2) $F: \mathsf{C}^{\mathrm{b}}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})) \to \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$. $\mathsf{C}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}))$ の対象のうち, 有界なものからなる部分圏を $\mathsf{C}^{\mathrm{b}}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}))$ と書く. $\mathsf{C}^{\mathrm{b}}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}))$ の対象は, $\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})$ の対象から, 遷移と写像錘を有限回繰り返して得られる. したがって, 上記 $F: \coprod_i \Sigma_M^i \mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}) \to \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ から遷移と写像錘を保つように, $F: \mathsf{C}^{\mathrm{b}}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})) \to \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ を定義する.

(3) $F: \mathsf{C}^{-}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B})) \to \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$. $\mathsf{C}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}))$ の対象のうち, 右に有界なものからなる部分圏を $\mathsf{C}^{-}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}))$ と書く. $X \in \mathsf{C}^{-}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}))$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\tau_{\geq n} X : \cdots \to 0 \to X^n \to X^{n+1} \to X^{n+2} \to \cdots,$$

とおく. $\tau_{\geq n} X \in \mathsf{C}^{\mathrm{b}}(\mathsf{Mor}_{N-1}^{\mathrm{sm}}(\mathcal{B}))$ であり, $\tau_{\geq n} X \to \tau_{\geq n-1} X \to \cdots \to X = \varinjlim \tau_{\geq i} X$ である. そこで $F(X) = \varinjlim F(\tau_{\geq i} X)$ とすれば良い.

(4) $F : \mathsf{C}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B})) \to \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$. $Y \in \mathsf{C}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B}))$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\tau_{\leq n}Y : \cdots \to Y^{n-2} \to Y^{n-1} \to Y^n \to 0 \to \cdots$$

とおく．$\tau_{\leq n}Y \in \mathsf{C}^-(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B}))$ であり，$\tau_{\leq n}Y \leftarrow \tau_{\leq n+1}Y \leftarrow \cdots \leftarrow Y = \underset{\leftarrow}{\lim}\tau_{\leq i}Y$ である．そこで $F(Y) = \underset{\leftarrow}{\lim}\tau_{\leq i}F(Y)$ とすれば良い．

(5) $\underline{F} : \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B})) \to \mathsf{K}_N(\mathcal{B})$. $F : \mathsf{C}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B})) \to \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ が射影入射対象を射影入射対象に送ることを示せば良い．射影入射対象とは，恒等射の写像錘の直和因子だが，(2) より，恒等射の写像錘は，恒等射の写像錘になる．

（証明終）

注意 5.4. 函手 $F : \mathsf{C}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B})) \to \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ は，上記の構成を使って具体的に書くことができる．[19]6.6 参照．

[19] の主定理を述べる．多角形ルコルマンが鍵になっていることに注意してほしい．

定理 5.5 ([19]6.8)**.** $\underline{F} : \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B})) \to \mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ は，同値である．

（証明）N に関する帰納法による．$N = 2$ なら明らか．$N \geq 3$ とする．
$\underline{F}^{-1}(\mathcal{U}_s) = \mathcal{U}'_s$, $\underline{F}^{-1}(\mathcal{V}_s) = \mathcal{V}'_s$ とおく．すると，

$$(\mathcal{U}'_1, \mathcal{V}'_0, \mathcal{U}'_2, \mathcal{V}'_1, \cdots, \mathcal{U}'_N, \mathcal{V}'_{N-1})$$

は $\mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B}))$ の $2N$-角形ルコルマンとなる．[[19]; 4.8] 命題 1.12 より，以下を示せばよい．

(1) $\underline{F}\,|_{\mathcal{U}'_1}$ は同値.
(2) $\underline{F}\,|_{\mathcal{V}'_0}$ は同値.

これらは，以下のように簡単にわかる．

(1) $X \in \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B}))$ は，$\mathsf{K}(\mathcal{B})$ の射の列

$$X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{N-1}} X_{N-1}$$

で各 α_i が次数ごとに分裂単射になっているものと捉えられる．函手の対応を見ると，

$$\mathcal{U}'_1 = \{X \in \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B})) \mid X_1 = \cdots = X_{N-1}\}$$

がわかる．三角函手 $U : \mathsf{K}(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B}))$ を $X \mapsto X = \cdots = X$ と定義すると，以下の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}(\mathcal{B}) \arrow[r, "U"] \arrow[d, equal] & \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B})) \arrow[d, "F"] \\
\mathsf{K}(\mathcal{B}) \arrow[r, "I_1^{N-2}"] & \mathsf{K}_N(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

I_1^{N-2} は充満忠実かつ U は同値なので，$F\,|_{\mathrm{Im}\,U}$ は同値 $\mathcal{U}'_1 = \mathrm{Im}\,U \to \mathrm{Im}\,I_1^{N-2}$ を導く．

(2) いっぽう $\mathcal{V}_0$ は，$\mathcal{V}_0 = \{X \mid X_1 = 0\}$ である．そこで，三角函手 $E : \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B})) \to \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B}))$ を $E(X_2 \to X_3 \to X_{N-1}) = (0 \to X_2 \to X_3 \to X_{N-1})$ として，$\mathcal{V}_0 = \mathrm{Im}\,E$ である．以下の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B})) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "F"] & \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-1}(\mathcal{B})) \arrow[d, "F"] \\
\mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B}) \arrow[r, "I_0"] & \mathsf{K}_N(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

I_0 は充満忠実, 左側の $\mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B})) \to \mathsf{K}_{N-1}(\mathcal{B})$ は, 帰納法の仮定によって同値である. 従って FE は充満忠実なので, F は同値 $\mathrm{Im}\, E \to \mathrm{Im}\, I_0$ を与える. （証明終）

導来圏についても, 通常の導来圏との三角同値がある.

定理 5.6 ([18]4.2, [19]6.13)**.** *$\mathcal{A}$ が直和と射影対象を十分に備えた Abel 圏かつ単射の直和が単射である (Ab4 圏) のとき, 以下の三角同値がある.*

$$\mathsf{D}_N(\mathcal{A}) \simeq \mathsf{D}(\mathsf{Mor}_{N-1}(\mathcal{A}))$$

但し $\mathsf{Mor}_{N-1}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の $N-1$ 条の射（分裂単射とは限らない）のなす圏である.

系 5.7. *環 R に対して, 以下の三角同値が成立する.*

$$\mathsf{K}_N(\mathsf{Proj}\, R) \simeq \mathsf{K}(\mathsf{Proj}\, T_{N-1}(R)), \quad \mathsf{D}_N(R) \simeq \mathsf{D}(T_{N-1}(R)).$$

参考文献

[1] R. Anno and T. Logvinenko, Spherical DG-functors, arXiv:1309.5035

[2] R, Berger, Koszulity for nonquadratic algebra, J. Algebra 239 (2001) 705 –739.

[3] A. A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux Pervers, Astérisque **100** (1982).

[4] R, Berger, M. Dubois-Violette and M. Wambst, Homogeneous algebras, J. Algebra 261 (2003), no. 1, 172–185.

[5] A. K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology, Topology 18 (1979), 257-281.

[6] E. H. Brown, Jr. Cohomology theories, Ann. of Math. (2) 75 (1962), 467-484.

[7] R.O. Buchweitz, Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings, Unpublished manuscript (1987), 155 pp.

[8] C. Cibils, A. Solotar and R. Wisbauer, 'N-Complexes as Functors, Amplitude Cohomology and Fusion Rules', *Commun. Math. Phys.* 272 (2007), 837-849.

[9] M. Dubois-Violette, R. Kerner, Universal q-differential calculus and q-analog of homological algebra, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 65 (1996), no. 2, 175–188.

[10] J. Gillespie, 'The homotopy category of N-complexes is a homotopy category', *arXiv:1207.6792*.

[11] J. Gillespie, M. Hovey, 'Gorenstein model structures and generalized derived categories', *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) 53 (2010), no. 3, 675-696.

[12] P. Gabriel and M. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[13] D. Halpern-Leistner and I. Shipman, Autoequivalences of derived categories via geometric invariant theory, arXiv:1303.5531

[14] D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras, London Mathematical Society Lecture Note Series, **119**, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[15] D. Happel, On Gorenstein algebras, Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras (Bielefeld, 1991), 389–404, Progr. Math., **95**, Birkhauser, Basel, 1991.

[16] N. Hiramatsu, G. C. Kato, Urcohomologies and cohomologies of N-complexes. Port. Math. 67 (2010), no. 4, 511–524.

[17] O. Iyama, K. Kato, and J. Miyachi, *Recollement of homotopy categories and Cohen-Macaulay modules*, J. K-Theory **8** (2011), 507–542.

[18] O. Iyama, K. Kato, and J. Miyachi, Derived categories of N-complexes, arXiv:1309.603

[19] O. Iyama, K. Kato, and J. Miyachi, Polygons of recollements and N-complexes,, arXiv:1603.06056

[20] M. M. Kapranov, On the q-analog of homological algebra, *Preprint, Cornell University*,1991; q-alg/961005.

[21] B. Keller, On triangulated orbit categories, Doc. Math. 10 (2005), 551-581 (electronic).

[22] M. Khovanov, Hopfological algebra and categorification at a root of unity: The first steps, J. Knot Theory Ramifications, 25, 1640006 (2016)

[23] A. Kuznetsov, Calabi-Yau and fractional Calabi-Yau categories, arXiv:1509.07657

[24] J. Miyachi, Localization of Triangulated Categories and Derived Categories, J. Algebra **141** (1991), 463-483.

[25] D. Mirmohadees, Homologically optimal categories of sequences lead to N-complexes, arXiv:1405.3921.

[26] D. Mirmohadees, Simplicial structure on complexes, arXiv:1404.0628.

[27] J. Miyachi, Derived Categories with applications to representations of algebras, Chiba University, 2000. Available at the author's webpage: `http://www.u-gakugei.ac.jp/~miyachi/seminar.html`.

[28] W. Mayer, A new homology theory I, II, Annals Math., vol 43 (1942).

[29] A. Neeman, "Triangulated categories", Ann. of Math. Stud., Vol. 148, Princeton University Press, Princeton, 2001.

[30] D. Orlov, Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities, arXiv: math/0503632.

[31] D. Orlov, Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models, Proc. Steklov Inst. Math. 2004, no. 3 (246), 227–248.

[32] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), no. 3, 303–317.

大阪府立大学大学院理学系研究科, 堺市中区学園町 1-1, 599-8531
E-mail address: `kiriko@mi.s.osakafu-u.ac.jp`