有理曲面上のボエタ予想

安福 悠 (日本大学理工学部)*
yasufuku@math.cst.nihon-u.ac.jp

1　はじめに

本稿は，プレプリント [6] に基づいて行った 2016 年の代数学シンポジウムでの講演内容をまとめたものである．

2　主定理の紹介

Vojta の主予想 [3, Main Conjecture 3.4.3] とは，代数体 k，k 上定義される滑らかな射影代数多様体 X，k 上定義される正規交叉因子 D ごとに定まる，X の k 有理点が満たすとされる高さ関数の不等式である．代数多様体の標準因子が負であればあるほど，正規交叉因子に有理点が近づけると主張し，「幾何が整数論を制御する」という哲学が明示化される一つの方法となっている．大変難解な予想とされており，Faltings により証明された Mordell 予想や，ディオファントス近似の金字塔とされる Schmidt の部分空間定理も，特別な場合として含んでしまっている．また,「一般型の代数多様体には k 有理点が Zariski 稠密にはない」と主張する Bombieri–Lang 予想や，2012 年に京都大学数理解析研究所の望月新一教授により証明が発表された abc 予想も導ける (Vojta [4]）ことが分かっている．

このような背景から，Vojta 主予想が正しいと証明できる具体例の構築は重要である．高さ関数が具体的に計算できる代数曲面として，射影平面から (infinitely near なものも含めて) 繰り返しブローアップすることで得られる多様体が考えられる．まず，次の定理を証明した．

定理 1. $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^2$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義できるような，一般の位置にある 3 直線とする． $\mathbb{P}^2$ を $L_1 \setminus (L_2 \cup L_3)$ の点で一度ブローアップしたものを X_1 と呼び，このときの例外因子を E_1 とする．$n \geq 2$ に対しては，$E_{n-1} \cap \widetilde{L_1}$ に含まれる唯一の点で X_{n-1} をブローアップしたものを，X_n と帰納的に定義し，このときの例外因子を E_n とする．このとき，X_n とその上の因子

$$\widetilde{L_1} + \widetilde{L_2} + \widetilde{L_3} + \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_{n-1}} + E_n$$

* 本研究は科研費 若手研究 B (15K17522) の援助を受けている．

に関する *Vojta* 予想が成り立つ．

ここで，$\widetilde{\ }$ は X_n への strict transform を指している．定理 1 では，必ず $\widetilde{L_1}$ との交点でブローアップを続けていったが，同じ X_1 から始めて交点をブローアップし続けるものの，一度は $\widetilde{L_1}$ との交点ではないところでブローアップした状況を考えたのが次の 2 つの定理である．

定理 2. $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^2$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義できるような，一般の位置にある 3 直線とする． $\mathbb{P}^2$ を $L_1 \setminus (L_2 \cup L_3)$ の点で一度ブローアップしたものを X_1 と呼び，このときの例外因子を E_1 とする．$n \geq 2$ に対しては，$\widetilde{L_1}, \widetilde{E_1}, \ldots, \widetilde{E_{n-2}}, E_{n-1}$ のうちの 2 つが交わる点で X_{n-1} をブローアップしたものを X_n と帰納的に定義し，このときの例外因子を E_n とする．また，少なくとも一度のブローアップは $\widetilde{L_1}$ 上にない点で行われるとする．このとき，X_n とその上の因子

$$\widetilde{L_1} + \widetilde{L_2} + \widetilde{L_3} + \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_{n-1}} + E_n$$

に関する *Vojta* 予想を仮定すると，次の集合に対する *abc* 予想を導ける : k を代数体, S を素イデアルの有限集合とし，

$$\{(a,b,c) : a \in k, a\mathcal{O}_k \text{ の素イデアル分解は } S \text{ に含まれる素イデアルで書ける}, b = 1-a, c = 1\}.$$

逆に：

定理 3. $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^2$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義できるような，一般の位置にある 3 直線とする． $\mathbb{P}^2$ を $L_1 \setminus (L_2 \cup L_3)$ の点で一度ブローアップしたものを X_1 と呼び，このときの例外因子を E_1 とする．$n \geq 2$ に対しては，$\widetilde{L_1}, \widetilde{E_1}, \ldots, \widetilde{E_{n-2}}, E_{n-1}$ のうちの 2 つが交わる点で X_{n-1} をブローアップしたものを X_n と帰納的に定義し，このときの例外因子を E_n とする．このとき，*abc* 予想を仮定すると，X_n とその上の因子

$$\widetilde{L_1} + \widetilde{L_2} + \widetilde{L_3} + \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_{n-1}} + E_n$$

に関する *Vojta* 予想を導ける．

これらの定理で扱う典型的状況を図解したものが図 1 である．三角形のうち，水平な直線 L_1 にだけのっている点をブローアップしたものが X_1 である．このとき，例外因子との交点は一つしかないので，そこをブローアップしたものが X_2 となる．X_2 において，水平な直線 $\widetilde{L_1}$ との交点をブローアップしたものが，図解された X_3 である．上の図において，X_3 の黒く塗られた点でブローアップしたら定理 1 の状況となり無条件に Vojta 予想が証明でき，塗られていない 2 点のいずれかを次にブローアップしたら定理 2 や 3 の範疇となり *abc* 予想との相互関連性がある状況になる．下の図では，X_2 においては $\widetilde{L_1}$ との交点をブローアップするものの，X_3 においては $\widetilde{L_1}$ にない点 (この場

合は E_2 と E_3 との交点）をブローアップしている．この場合，$\widetilde{L_1}$ にない点を一度ブローアップしているので，得られた X_4 においてどの 4 点を次にブローアップしたとしても，定理 2 や 3 の範疇となり，abc 予想との相互関連性がある状況となる．

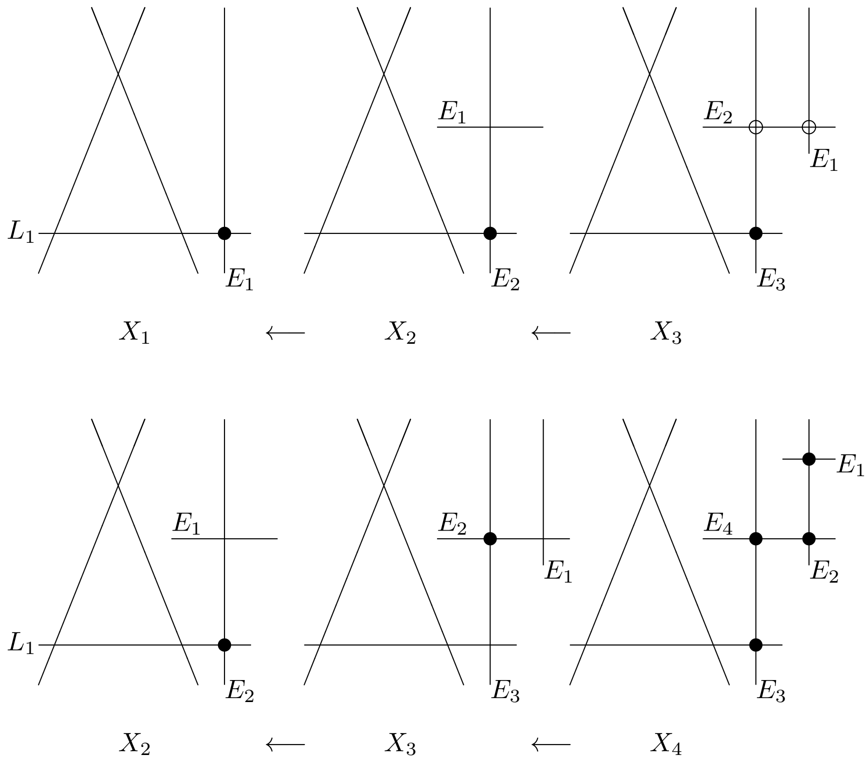

図 1: ブローアップの図解

ブローアップを行うと，例外因子に対する高さ関数が最大公約数の式となるので，ブローアップ上での Vojta 予想は，最大公約数に関する不等式となることが多い (詳しくは Silverman [2] を参照のこと）．本稿の定理の結果からも最大公約数に関する非自明な不等式を得られるが，証明に触れないと具体的な式を紹介しづらいので，次節 ((2) 式) に行う．

先行研究としては，[5] において，X_1 における Vojta 予想を証明している．Vojta 予想はブローアップするごとに，より強い主張となるので，この結果が定理 1 の一番簡単な場合となっている．また，X_1 で E_1 上の一般の点をブローアップした場合 (本稿での X_2 とは少し違う，射影平面の 2 重ブローアップ) の Vojta 予想が，定理 2 の場合と同じ abc 予想の特別な場合を導くことも，同じ論文で証明した．ちなみに，始めに三角形の交点で $\mathbb{P}^2$ をブローアップした場合 Vojta 予想は非常に自明な主張である．逆に，どの直線にものらない点から始めると，一度ブローアップした空間での Vojta 予想が未解決で，大変難解であろうと思われている．ただ，3 直線に対する整数点集合におい

ては，Vojta 予想の高さ不等式が成り立つことが，Corvaja と Zannier[1] により示されている．

3 証明の概略

定理 1 に関しては，基本方針は論文 [5] と同じで，まず，ブローアップによって構築される例外因子の局所方程式を計算する．これにより，高さ関数を最大公約数の式として明示的表示できるようになるので，あとは上手に Schmidt の部分空間定理を活用することで，示すことができる．

定理 2 と 3 の証明には，Farey 数列，特に Stern–Brocot 樹と呼ばれる形で整理されたものが活躍する．$\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{1}$ から始めて，分母同士，分子同士足した

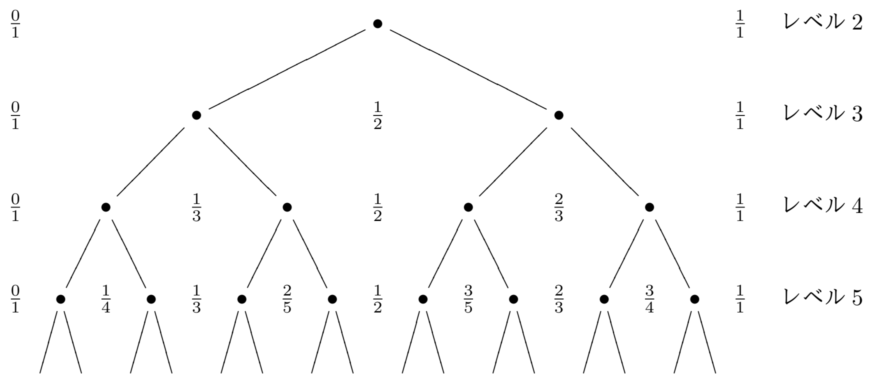

図 2: Stern–Brocot 樹

ものを間に挿入し続けることでこの樹は作られている．定理 2 と 3 の状況で，「X_{n-1} からのブローアップを必ず一番最近に構築された例外因子 E_{n-1} との交点で行う」という追加条件をつけると，X_n 上の例外因子 E_n の v 進局所高さ関数は，

$$\gcd_v^+\left(\frac{(x-1)^{b_n}}{y^{a_n}}, \frac{y^{c_n}}{(x-1)^{d_n}}\right)$$

と表すことができる．ここで，$\gcd_v^+$ とは，分子の最大公約数の v 進部分の対数をとったもので，$\frac{a_n}{b_n}$ と $\frac{c_n}{d_n}$ は，Stern–Brocot 樹のレベル n にある隣同士の分数である．これで Farey 数列が本稿の定理と関連があることが分かる．

ただ，定理 2 と 3 の状況の Vojta 予想を調べるには，Farey 数列に関して知られている性質だけでは無理と思われ，次の新しい性質が必要となった．

定理 4. *$\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ が，レベル $(n+1)$ で初めて Stern–Brocot 樹に登場するとする．また，レベル i において，α が $\frac{a_i(\alpha)}{b_i(\alpha)}$ と $\frac{c_i(\alpha)}{d_i(\alpha)}$ の間にあるとする．*

このとき，$I_\alpha = \left(\dfrac{a_n(\alpha)}{b_n(\alpha)},\ \dfrac{c_n(\alpha)}{d_n(\alpha)}\right)$ 上で関数 φ_α を

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \min\left(b_i(\alpha)\cdot x - a_i(\alpha),\ c_i(\alpha) - d_i(\alpha)\cdot x\right) \tag{1}$$

と定義すると，この関数の最大値は $x=\alpha$ のときの $\frac{(\alpha\text{の分母})-1}{\alpha\text{の分母}}$ である．

定理 2 の証明では，初めて $\widetilde{L_1}$ との交点でないところでブローアップするのが n 回目だとして，このときの Vojta 予想に着目する．a が S 単数で整数の場合，$a-1$ の素因数分解 $\prod p^{n_p}$ に対して，

$$m_p = \begin{cases} 0 & n_p = 1 \\ \frac{n_p}{2}\cdot(2n-3) & n_p \text{ が偶数} \\ \frac{n_p(2n-3)-1}{2} & n_p \text{ が 3 以上の奇数} \end{cases}$$

とし，$b = \prod p^{m_p}$ とおく．Vojta 予想の不等式に点 $[a:b:1]$ を代入し，定理 4 を使って高さ関数を評価することで，abc 予想の特別な場合を導いていく．

定理 3 の証明においての一番のアイディアは，空間 X_n ごとに Vojta 予想の不等式を考えないことである．Vojta 予想には，不等式が成り立たなくてもよい「例外集合」が許されているので，X_n の点のうち $\mathbb{P}^2$ と同一視できるような点でだけ Vojta 不等式を示せばよい．そこで，$\mathbb{P}^2$ の点 P と非アルキメデス付値 v ごとに，一番 Vojta 予想の不等式が成り立たなさそうなブローアップを考える．この「最悪」な状態において定理 4 を使って点 $[a:b:1]$ で高さ関数の評価をすると，$a-1$ の v 進付値より一つ少ない位の高さ関数の大きさとなる．これは，定理 4 を $\alpha = \frac{v(b)}{v(a-1)}$ で使うことにより従う．(P,v) にとって「最悪」の場合でこうなので，一般の X_n の場合はこれより悪化することはない．abc 予想によると，$a-1$ の素因数分解の殆どは 1 乗なので，この寄与を足したとしても，元々の a の v 進付値と同じくらいにしかならないことが分かり証明が終わる．

最後に，本稿の定理により証明される最大公約数の不等式の一例を紹介しよう： S を素数の有限集合，ϵ を正の数としたとき, 定数 C と代数曲線の有限集合 Z_ϵ が存在して，

$$\gcd(a-1,b) + \sum_{p\notin S}\sum_{i=1}^{n} \gcd_p^+\left(\frac{(a-1)^{b_i}}{b^{a_i}}, \frac{b^{c_i}}{(a-1)^{d_i}}\right) < \epsilon \log\max(|a|,|b|) + \log|ab|'_S + C \tag{2}$$

が $(a,b)\in\mathbb{Z}^2\setminus Z_\epsilon$ で成り立つ．ここで，整数 n に対して $|n|'_S$ とは n の素因数分解のうち S の外の部分を指し，$\frac{a_i}{b_i}$ と $\frac{c_i}{d_i}$ は Stern–Brocot 樹のレベル i で隣接する分数である．

謝辞：　代数学シンポジウムで講演の機会を下さったシンポジウム責任者の寺杣先生，数論プログラム責任者の三枝先生・若槻先生，ならびに世話人の皆様に感謝いたします.

参考文献

[1] Pietro Corvaja and Umberto Zannier, *A lower bound for the height of a rational function at S-unit points*, Monatsh. Math. **144** (2005), no. 3, 203–224.

[2] Joseph H. Silverman, *Generalized greatest common divisors, divisibility sequences, and Vojta's conjecture for blowups*, Monatsh. Math. **145** (2005), no. 4, 333–350.

[3] Paul Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1239, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] ———, *On the ABC conjecture and Diophantine approximation by rational points*, Amer. J. Math. **122** (2000), no. 4, 843–872.

[5] Yu Yasufuku, *Vojta's conjecture on blowups of $\mathbb{P}^n$, greatest common divisors, and the abc conjecture*, Monatsh. Math. **163** (2011), no. 2, 237–247.

[6] ———, *Vojta's conjecture on multiple blowups of $\mathbb{P}^2$ and the abc conjecture*, arXiv:1601.03825, 2016.