標数が奇素数の場合の二次元非可換Lubin-Tate理論の局所的証明とその周辺

津嶋貴弘

1　導入と背景

この節では研究の背景や動機について歴史的な事柄にもふれながら概観したい。
フェルマー予想 (F): 「r を 3 以上の整数とする。このとき、

$$X^r + Y^r = Z^r, \quad XYZ \neq 0$$

をみたす整数の組 (X, Y, Z) は存在しない。」
この予想はFreyのアイデアを受けてRibetにより志村・谷山予想の特別な場合に帰着され、1994年にWilesは、その特別な場合を示すことでフェルマー予想を解決した。志村・谷山予想は大雑把には次の二つの対象の結び付きを予想している。

$$\text{志村・谷山予想 (ST)}: \boxed{\text{ガロワ表現 (代数的対象)}} \longleftrightarrow \boxed{\text{保型形式（解析的対象)}} \tag{1.1}$$

左辺は有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対ガロワ群 $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathbb{Q}})$ の連続表現のことである。右辺は上半平面 $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z > 0\}$ 上の保型性をみたすある種の正則関数のことである。このように左辺は代数的な対象で右辺は解析対象で各々独立に長らく研究されてきたものである。志村氏は保型形式に対して二次元のガロワ表現を構成した。ある種のガロワ表現が保型形式からくるというのが志村・谷山予想のおおまかな内容である。上の二つの出自の異なる対象を結び付ける橋渡しの役割を果たすのがモジュラー曲線である。標語的には

$$\boxed{\text{モジュラー曲線} = \{\text{楕円曲線, レベル構造}\}\text{の組の同型類のモジュライ}}$$

となる。レベル構造の種類に応じて $X_0(p^m)$, $X_1(p^m)$, $X(p^m)$ (p は素数) などと表記される (cf. [KM] や [Sa] を参照)。これらは古典的にはコンパクトリーマン面として調べられ、代数幾何の発展に伴って $\mathbb{Q}$ 上の射影スムーズ曲線として調べられた。更に重要なことは、これらの $\mathbb{Z}$ 上のモデルの性質が詳しく調べられたことである。この発展のキーアイデアはDrinfeldによる適切なレベル構造の定義である ([Dr] と [KM, Introduction] を参照)。任意の素数 p に対して $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ という環の射による底変換で $\mathbb{Z}$ 上の多様体 X を還元できる。還元で得られる $\mathbb{F}_p$ 上の多様体 $X_{\mathbb{F}_p}$ がスムーズになれば X は p で良い還元を持つという。上のモジュラー曲線達はいずれも p で良い還元を持たない。良い還元の次に「良い」還元を安定還元という。 $X_0(p)$ は p で安定還元を持ち、その還元の様子が詳しくわかっている (井草, Deligne-Rapoport, Katz-Mazur)。この事実は (F) を (ST) に帰着させる際に重要な役割を果たす。その後の研究で、$m = 2$, $m = 3$, $m = 4$ の場合の $X_0(p^m)$ の安定還元はそれぞれ [E], [CMc], [T2] において与えられている。$m \geq 5$ のと

[0] 千葉大学理学研究科
E-mail addresses: tsushima@math.s.chiba-u.ac.jp, or affa4282@chiba-u.jp

きは、$X_0(p^m)$ の安定還元の具体的な様子は知られていない。
(1.1) の対応は Langlands により表現同士の対応として再定式化された。現在 Langlands 対応と呼ばれ盛に研究されている。

$$\text{(大域)Langlands 対応}: \boxed{\text{ガロワ表現}} \longleftrightarrow \boxed{\text{保型表現}}$$

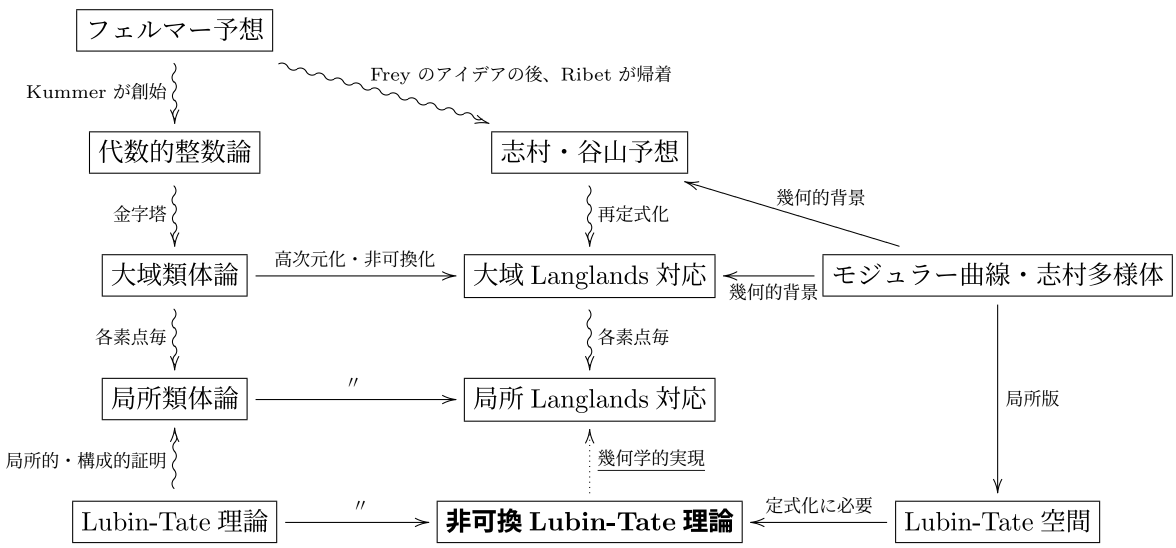
この対応は各素点ごとの局所 Langlands 対応に分解される。局所 Langlands 対応の方は後ほども出てくるので少し正確に述べる。F を非アルキメデス局所体とする。$\mathcal{O}_F$ をその整数環とする。

$$\text{局所 Langlands 対応}: \boxed{\mathrm{GL}_n(F) \text{ の既約尖点表現の同型類}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \boxed{n \text{ 次元既約ガロワ表現の同型類}}$$

([Yo3] を参照)。左から右への一対一対応写像を LL と書く。$n=1$ のときには局所類体論になる。この対応は L 因子や ϵ 因子を保つ数論的に意味のある対応になっている。この対応の仲間として局所 Jacquet-Langlands 対応というものがある。D_n を Hasse 不変量 $1/n$ の F 上の中心斜体とする。$D_n^\times$ をその乗法群とする。局所 Jacquet-Langlands 対応は以下の二つの集合の一対一対応を与える。

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(F) \text{ の既約尖点表現の同型類}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \boxed{D_n^\times \text{ の既約許容表現の同型類}}$$

この左から右への一対一対応写像を JL と書く。この二つの対応の詳細については例えば [Hen] を参照。この二つの対応が Lubin-Tate 空間という rigid analytic 空間のエタール・コホモロジーの中に実現されるだろう、というのが**非可換 Lubin-Tate 理論 (Deligne-Carayol 予想)** である。$n=2$, $F=\mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$ の場合を、大域的な保型表現論に基づいて最初に Deligne が示した。Carayol は後ろの二つの条件を外し、一般の n に関して予想を定式化した。非可換 Lubin-Tate 理論は [Bo], [HT] において大域的な保型表現論や志村多様体・Drinfeld モジュラー多様体を使って示されている。非可換 Lubin-Tate 理論の $n=1$ の場合は Lubin-Tate 理論 ([LT]) と等価になる。Lubin-Tate 理論は局所類体論の局所的理論を与えるものだった (cf. [Iw], [Yo2, §2])。最初、局所類体論は大域類体論の系として証明された。その後 Lubin-Tate 理論により、簡明な局所的証明が与えられた (この辺りの歴史的な事情については [Iw, Preface] を参照)。Lubin-Tate 理論によれば F のアーベル拡大は、高さ 1, 一次元の形式 $\mathcal{O}_F$ 加群の等分点を全て F に添加した体と F の最大不分岐拡大体との合成体として明示的に構成される。非可換 Lubin-Tate 理論は Lubin-Tate 理論の一般化・非可換化であることを標榜しており、Lubin-Tate 理論は局所類体論の局所的理論を与えるものであったので、非可換 Lubin-Tate 理論も局所的な理論として確立されるべきだと考えている。そのような問題意識の下、F の標数が p で $p \neq 2$ のときにこの予想を局所的に証明したというのが本稿で紹介したい [T3] の主定理である。以下の節では何を調べることでこれが可能になったか、またどのような既知の結果がその証明で重要であるか、要点をかいつまんで説明したい。ここまでの話で現れた色々の予想や理論の相関図を以下にまとめる。



重要な用語を標語的にまとめると

$\boxed{\text{Lubin-Tate 空間}}$ = { 形式群, レベル構造 } の組の同種類の変形空間の生成ファイバー
= モジュラー曲線の局所モデル ($n = 2$ のとき)

$\boxed{\text{Lubin-Tate 理論}}$ = 形式群の等分点を使って F の最大アーベル拡大体を構成する理論
= 局所類体論の局所的・構成的理論

$\boxed{\text{非可換 Lubin-Tate 理論}}$ = Lubin-Tate 空間のコホモロジーの中に表現の対応を構成する理論

となる。ここまでの話のより詳しい解説が [Ka] や [IY] にあるのでそちらも参照されたい。またフェルマー予想の証明については [Sa] に詳しい。

2 非可換 Lubin-Tate 理論 ([Bo], [Ca])

以下、もう少し正確に Lubin-Tate 空間を導入し、Deligne-Carayol 予想・非可換 Lubin-Tate 理論がどのように定式化されるかを紹介する。

$\mathcal{O}_F$ の極大イデアルを $\mathfrak{p}$ と書く。F の代数閉包 $\overline{F}$ を固定する。$\overline{F}$ の $\mathfrak{p}$ 進完備化を $\mathbf{C}$ と書く。$\overline{F}$ の中での F の最大不分岐拡大体を F^{ur} と書く。これの $\mathfrak{p}$ 進完備化を $\widehat{F}^{\mathrm{ur}}$ と書く。これの整数環を $\widehat{O}$ と書く。これの剰余体は $\overline{\mathbb{F}}_p$ となっている。

n を正の整数とする。$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の高さ n の一次元の形式 $\mathcal{O}_F$ 加群は同型を除いて唯一つ存在する。これを Ω と書く。$\widehat{O}$-代数であり、剰余体が $\overline{\mathbb{F}}_p$ となる完備ネーター局所環のなす圏を $\mathcal{C}$ と書く。非負整数 r に対して以下の関手を考える。

$$R(\mathfrak{p}^r)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}ets;\ A \mapsto \{(\mathscr{F}_A, \iota, \phi)\}.$$

但し、右辺は $(\mathscr{F}_A, \iota, \phi)$ という三つ組の同型類の集合とする。ここで、$\mathscr{F}_A$ は A 上の形式 $\mathcal{O}_F$ 加群で、$\iota\colon \Omega \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_A \otimes_A \overline{\mathbb{F}}_p$ は同型であり、$\phi\colon (\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}^r)^{\oplus n} \to \mathscr{F}_A[\mathfrak{p}^r]$ は Drinfeld レベル構造である。この関手 $R(\mathfrak{p}^r)$ は正則局所環により表現可能であることが [Dr, Proposition 4.3] において示されている。形式スキーム $\mathrm{Spf}\, R(\mathfrak{p}^r)$ の生成ファイバーを $\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)$ と書く。これは $\widehat{F}^{\mathrm{ur}}$ 上の rigid analytic 空間というものになる (rigid analytic 空間については [BGR] を参照)。更に

$$\cdots \to \mathbf{X}(\mathfrak{p}^{r+1}) \to \mathbf{X}(\mathfrak{p}^r) \to \cdots \to \mathbf{X}(\mathfrak{p}) \to \mathbf{X}(1) \tag{2.1}$$

と rigid analytic 空間の射影系を成す。

さて非可換 Lubin-Tate 理論を定式化するためには、rigid analytic 空間のエタールコホモロジーが必要である。スキームに関しては SGA において Deligne, Grothendieck らによりエタールコホモロジー理論が発展せられた (cf. [Del])。rigid analytic 空間のエタールコホモロジーに関しては van der Put-de Jong, Berkovich, Huber らにより発展せられた。Berkovich, Huber らはそれぞれ rigid analytic 空間の概念を拡張して、より広いクラスの空間に関しエタールサイトを定義している (cf. [Be], [Be2], [Hu], [Hu2] を参照)。それらの空間はそれぞれ Berkovich 空間、adic 空間と呼ばれている。エタールサイトからはエタールコホモロジーが定義される。例えば [Hu2] においては、rigid analytic 空間のコンパクト台を持つエタールコホモロジーは、adic 空間の枠組みでそれの部分的なコンパクト化を取ることで、スキームの場合と類似的に定義される。rigid analytic 空間の枠組みではコンパクト化の存在がわからないので、このような所でも空間概念を拡張しておく必要がある。詳しくは [Hu2, p.19] を参照されたい。$\widehat{F}^{\mathrm{ur}}$ から $\mathbf{C}$ への $\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)$ の底変換を $\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)_{\mathbf{C}}$ と書く。ℓ を p と異なる素数とする。整数 i に対して $\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)_{\mathbf{C}}$ の i 番目のコンパクト台付きのエタールコホモロジーを

$$H_r^i = H_c^i(\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)_{\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

と書く。射影系 (2.1) の引き戻しにより帰納系 $\{H_r^i\}_{r=0}^{\infty}$ を得る。$\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)$ は $n-1$ 次元の rigid analytic 空間であり、以下では中間コホモロジーに注目する。

$$\mathcal{H}_n = \varinjlim_{r} H_r^{n-1} \tag{2.2}$$

とおく。W_F を F のヴェイユ群とする。この $\mathcal{H}_n$ には直積群 $G_n = \mathrm{GL}_n(F) \times D_n^{\times} \times W_F$ のある部分群 P が作用する。この P 表現 $\mathcal{H}_n$ の G_n への誘導表現を $\mathcal{U}_n$ と書く (cf. この辺りの話は [Bo], [Ca] を参照)。

定理 2.1. *(n 次元非可換 Lubin-Tate 理論)* 任意の $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約尖点表現 π に対して、$D_n^{\times} \times W_F$ 表現としての同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)}(\mathcal{U}_n, \pi) \simeq \mathrm{LL}(\pi) \otimes \mathrm{JL}(\pi)$$

が存在する。

定理 2.2. *([T3])* 上の定理の $n = 2$, $\mathrm{char}\ F = p \neq 2$ の場合に上の定理の局所的な証明を得た。

以下ではこの証明のポイントを解説したい。$n = 2$ のとき $\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)$ は 1 次元なので、これを Lubin-Tate 曲線と呼ぶ。

3 明示的局所 Langlands 対応 ([BH])

Bushnell, Kutzko, Henniart らによって、構築されたタイプ理論という表現論の理論がある。これは $\mathrm{GL}_n(F)$ の尖点表現を、$\mathrm{GL}_n(F)$ の中心でわってコンパクト (compact mod center) になるような具体的な開部分群とその有限次元スムーズ表現を用いて具体的に構成するという理論である。$n = 2$ の場合には [BH] に詳しく述べられている。局所 Langlands 対応で比較される二つの表現の同型類の集合は、$n = 2$ かつ $p \neq 2$ の場合には非常に簡明に記述できる。二つの表現の同型類の集合は、共に許容対 (admissible pair) というものでパラメトライズされる。この許容対が局所 Langlands 対応と局所 Jacquet-Langlands 対応の下でどのように振る舞うかを理解する理論をそれぞれ明示的局所 Langlands 対応、明示的局所 Jacquet-Langlands 対応と呼ぶ。$n = 2$ かつ $p \neq 2$ の場合に、これについてざっと雰囲気を述べたい。一般の n に関するこの理論の進展については [Hen] にまとめられている。以下本稿では断らない限り $n = 2$, $p \neq 2$ を仮定する。

定義 3.1. E/F を分離的な二次拡大体とする。χ を $E^{\times}$ のスムーズな指標とする。
1. $(E/F, \chi)$ が許容対であるとは、以下の二条件を満たすことである。
(1) χ がノルム写像 $E^{\times} \to F^{\times}$ を経由せず、
(2) もし $\chi|_{U_E^1}$ がノルム写像 $E^{\times} \to F^{\times}$ を経由するならば、E/F は不分岐拡大である。
2. 二つの許容対 $(E/F, \chi)$, $(E'/F, \chi')$ が同型であるとは、F 上の体の同型 $\phi\colon E \xrightarrow{\sim} E'$ が存在して $\chi = \chi' \circ \phi$ が成立することとする。

許容対 $(E/F, \chi)$ があると χ を局所類体論を通じて W_E の指標と見なし、W_F の二次元既約表現 $\tau_{\chi}^0 = \mathrm{Ind}_{E/F}\chi$ が構成出来る。ここで既約性は許容対の定義から従う。さらにこの表現の同型類は許容対の同型類にしかよらない。

許容対 $(E/F, \chi)$ が与えられたとき、$D_2^{\times}$ の既約許容表現 ρ_{χ} と $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約尖点表現 π_{χ} を作る明示的なレシピが知られている。出来上がる ρ_{χ}, π_{χ} は許容対 $(E/F, \chi)$ の同型類にのみ依存する。

非アルキメデス局所体 L に対してその整数環の極大イデアルを $\mathfrak{p}_L$ と書き、正の整数 k に対して $U_L^k = 1 + \mathfrak{p}_L^k$ とおく。$E^{\times}$ のスムーズ指標 χ のスワン導手 $\mathrm{sw}(\chi)$ を $\chi|_{U_E^{n+1}} = 1$ なる最小の非負整数 n として定義する。

上で述べたレシピについてすべて述べるとなかなか煩雑なので以下では、E/F が不分岐で χ のスワン導手が正の偶数の場合に、許容対 $(E/F, \chi)$ に対する π_χ の構成を述べる。U_F^1 への制限が自明で $\psi|_{\mathcal{O}_F} \neq 1$ となる指標 $\psi\colon F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ を固定する。$\mathrm{sw}(\chi) = 2(m-1) = r-1 \geq 1$ と書く。F 代数としての単射準同型写像

$$E \hookrightarrow M_2(F) \tag{3.1}$$

を固定する。非負整数 $k \geq 0$ に対して $\mathrm{GL}_2(F)$ の開コンパクト部分群を

$$U_{\mathfrak{M}}^k = \begin{cases} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F) & \text{if } k = 0, \\ 1 + \mathfrak{p}^k M_2(\mathcal{O}_F) & \text{if } k > 0 \end{cases}$$

と定める。ここで添字の $\mathfrak{M}$ は $\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_F)$ という $\mathrm{M}_2(F)$ の order を表し、この order に付随する開コンパクト部分群という意味で添字に付いている。余談ではあるが、E/F が分岐するときには $\begin{pmatrix} \mathcal{O}_F & \mathcal{O}_F \\ \mathfrak{p} & \mathcal{O}_F \end{pmatrix}$ という別の $\mathrm{M}_2(F)$ の order とそれに付随する開コンパクト部分群を考える。任意の元 $x \in \mathfrak{p}_E^m$ に対して $\chi(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/F}(\alpha x)$ となる $\alpha \in \mathfrak{p}_E^{-(r-1)}$ を一つ取る。まず $U_E^1 U_{\mathfrak{M}}^m$ のスムーズ指標 θ を以下で定義する。任意の元 $x \in U_E^1$, $1+y \in U_{\mathfrak{M}}^m$ に対して

$$\theta(x(1+y)) = \chi(x)\psi(\mathrm{Tr}(\alpha y)).$$

このとき、有限 Heisenberg 群の表現論を使うと、$U_E^1 U_{\mathfrak{M}}^{m-1}$ の q 次元既約表現 η_θ で θ を含むものが同型を除いて唯一つ存在することがわかる。更に

$$J_{1,r} = E^\times U_{\mathfrak{M}}^{m-1}$$

とおく。$J_{1,r}$ の q 次元既約表現 Λ_χ で η_θ を含み、以下の二条件を満たすものが同型を除いて唯一つ存在する。

(1)　$\Lambda_\chi|_{E^\times}$ は $\chi|_{E^\times}^{\oplus q}$ と同型であり、

(2)　任意の元 $\mu \in \mu_{q^2-1}(E) \setminus \mu_{q-1}(F)$ に対して $\mathrm{Tr}\,\Lambda_\chi(\mu) = -\chi(\mu)$ が成立する。

最後に

$$\pi_\chi = \text{c-Ind}_{J_{1,r}}^{\mathrm{GL}_2(F)} \Lambda_\chi$$

とおく。ただし、右辺はコンパクト誘導である。こうして作られたスムーズ表現は既約尖点表現であり ([BH, Theorem 15.3])、その同型類は埋め込み (3.1) の取り方によらないことも示せる。前述通り、これは許容類の同型類にのみ依存する。

定理 3.2. *([BH, Parametrization theorem 20.2], タイプ理論)* 任意の $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約尖点表現 π に対して、許容対 $(E/F, \chi)$ が存在して同型 $\pi \simeq \pi_\chi$ が成り立つ。更に、このような許容対の同型類は唯一つに定まる。

残念ながらこうして構成される π_χ と τ_χ^0 は局所 Langlands 対応で移り合わない。位数が 4 の約数であるような特別な馴分岐指標で τ_χ^0 を捻る必要がある。この微妙なズレは [BH] においてイプシロン因子を計算することで明示的に理解されている。この補正を行った正しい W_F の二次元既約表現を τ_χ と書くことにする。上の構成と類似的に ρ_χ の方も適切に構成することが出来る。

すると、明示的局所 Langlands 対応と明示的局所 Jacquet-Langlands 対応は以下の形で述べられる。

定理 3.3. *([BH, §34, §56])* 任意の許容対 $(E/F, \chi)$ に対して

$$\mathrm{LL}(\pi_\chi) = \tau_\chi, \quad \mathrm{JL}(\pi_\chi) = \rho_\chi$$

が成り立つ。

[T3, §5.1] にもこの理論の要約があるので詳しくはそちらもご覧頂きたい。

4 アフィノイドとその還元のコホモロジー ([T3])

(2.2) のエタールコホモロジーを理解することが目標である。そのためには Lubin-Tate 曲線の安定モデルを構成してその還元の様子がわかればよい。曲線の安定モデルの存在については本質的には Deligne-Mumford の定理の帰結であるが rigid 幾何的な設定でのそのような話は [CMc, §2] に詳しい。しかし、安定モデルを完全に理解することは一般には難しい ([IT] や [T] にレベルを固定した場合の計算例がある)。そこでこの文脈で表現論の重要な部分と結びつく Lubin-Tate 曲線のアフィノイドを見つけてそれを (2.2) と結び付けて考えるという方針を考える (cf. [Ha])。アフィノイドについては [BGR] を参照されたい。定理 2.2 の証明では、そのようなアフィノイドを構成し、還元を理解することが一つの大きな部分を占める。このアフィノイドに二つの系列があり、一方は $\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)$ の中に自然に住んでいるが、一方のアフィノイドはねじれた感じで $\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)$ に入っており解析が少しやりづらいので別のレベル構造を持つ Lubin-Tate 曲線を考えた方が都合が良い。モジュライ解釈を説明することはしないが、岩掘型のレベル構造を持つ Lubin-Tate 空間を考える。それを $\mathbf{X}_{\mathrm{Iw}}(\mathfrak{p}^r)$ と書こう。これは [GL] において詳しく調べられたものである。アフィノイド $\mathbf{X}$ に対してその還元を $\overline{\mathbf{X}}$ と書く。アフィノイドの還元についての基本事項について [T3, §2.1] に要約がある。F の剰余体を $\mathbb{F}_q$ とする。アフィノイド

$$\mathbf{X}_r \subset \mathbf{X}(\mathfrak{p}^r),$$
$$\mathbf{Y}_r \subset \mathbf{X}_{\mathrm{Iw}}(\mathfrak{p}^r)$$

で以下のような良い還元

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{X}}_1 &\colon x^q y - x y^q = 1, \\ \overline{\mathbf{X}}_r &\colon a^q - a = t^{q+1} \quad (r \geq 2), \\ \overline{\mathbf{Y}}_r &\colon a^q - a = s^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

を持ち、例えば $\overline{\mathbf{X}}_r$ の中間コホモロジーは前節の $U_{\mathfrak{M}}^{[r/2]}$ の表現 $\Lambda_\chi|_{U_{\mathfrak{M}}^{[r/2]}}$ を全て含んでいるようなものが存在する。他の $\overline{\mathbf{Y}}_r$ の中間コホモロジーの方も E/F が分岐二次拡大であるような許容対 $(E/F,\chi)$ から定まるタイプ理論の核となるような Λ_χ が定義され、それと結びつく。このように添字の r は表現の導手と関係付く整数なのだが、方程式の形は r によらずたった三種類しかないことは不思議である。つまり群作用は r ごとに異なっているが、代数幾何的には同じものが繰り返し現れるという現象が起きる。これらのコホモロジーへの群作用がどうなるかを理解し、更にフロベニウス固有値等も理解することができる。

これらのアフィノイドが Lubin-Tate 空間の中でどの辺りに存在するかを少し説明する。Lubin-Tate 曲線上には CM 点と呼ばれる F の分離的二次拡大体の整数環乗法を持つ特殊な形式 $\mathcal{O}_F$ 加群に対応する点があり、これらのアフィノイドはこの点の近くに住んでいる (CM 点については [Gr] を参照)。この二次拡大体が不分岐か分岐かということで $\mathbf{X}_r, \mathbf{Y}_r$ という二つの系列が出てきていて、そのコホモロジーと関係付く許容対に現れる二次拡大体と一致するという風になっている。$r=1$ のときだけ少し特殊なことがおきていて、方程式も見た目は異なるが $\mathbf{X}_1$ も不分岐型ということで $\mathbf{X}_r$ の仲間と見なせる。$\mathbf{X}_1$ の還元は Drinfeld 曲線或は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ に対する Deligne-Lusztig 曲線と呼ばれる (この由来については [DL, p.117] を参照)。これらのアフィノイドは CM 点の近くにあることはわかるが、モジュライ解釈を用いてその正確な場所を特定するわけではない。現状では具体的な関数を考えて、その関数が定義する適当な半径のアフィノイドとして定義される。これらのアフィノイド上に何らかのモジュライ解釈があるかどうかは著者には分からない。

4.1 鍵となる観察

ここで、これらの曲線に関して以下の顕著な性質が満たされる。コンパクト台を忘れるという標準的な以下の写像は共に同型である。

$$
\begin{aligned}
&H^1_{\mathrm{c}}(\overline{\mathbf{X}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^1(\overline{\mathbf{X}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad (r \geq 2), \\
&H^1_{\mathrm{c}}(\overline{\mathbf{Y}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^1(\overline{\mathbf{Y}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

更にこれらのコホモロジーはすべて非零である (この辺りのことは [T3, §4.2, §4.3] に詳しい)。一般に固有的でない有限体上の代数多様体 X に対して標準写像

$$
H^i_{\mathrm{c}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^i(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \tag{4.3}
$$

は必ずしも同型でない。しかし、Lubin-Tate 空間の部分アフィノイドで中間コホモロジーが消えていない場合には、その還元として現れる多様体の中間コホモロジーに関して (4.3) は同型になると期待している。アフィノイド $\mathbf{X}_r$ は良い還元を持つので、Huber の消滅輪体に関する結果 [Hu2, Theorem 5.7.6] とスキームの場合の消滅輪体に関する事実 [Del2, Reformulation 2.1.5] が適用できて標準同型

$$
H^1_{\mathrm{c}}(\overline{\mathbf{X}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H^1_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \tag{4.4}
$$

$$
H^1(\overline{\mathbf{X}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H^1(\mathbf{X}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \tag{4.5}
$$

が存在する ([Mi2] も参照)。(4.2) と同様に、標準写像 $H^1_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^1(\mathbf{X}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ があり、次の図式が可換になる。

$$
\begin{tikzcd}
H^1_{\mathrm{c}}(\overline{\mathbf{X}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "(4.4)", "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] & H^1_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[d] \\
H^1(\overline{\mathbf{X}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "(4.5)", "\simeq"'] & H^1(\mathbf{X}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).
\end{tikzcd}
$$

これより同型

$$
H^1_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbf{X}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)
$$

を得る。更に標準的な写像を組み合わせて次の可換図式を得る。

$$
\begin{tikzcd}
H^1_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "(a)"] \arrow[d, "\simeq"'] & H^1_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)_{\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[d] \\
H^1(\mathbf{X}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & H^1(\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)_{\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[l, "\text{制限写像}"']
\end{tikzcd}
$$

(cf. [T3, Lemma 4.5]). (a) についてはスキーム X とその開部分スキーム U に対して、自然な写像 $H^i_{\mathrm{c}}(U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^i_{\mathrm{c}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ があったことを想起して頂きたい。上の可換図式より、写像 (a) が単射であることが従う。全く同様に単射

$$
H^1_{\mathrm{c}}(\overline{\mathbf{Y}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H^1_{\mathrm{c}}(\mathbf{Y}_{r,\mathbf{C}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{Iw},r} = H^1_{\mathrm{c}}(\mathbf{X}_{\mathrm{Iw}}(\mathfrak{p}^r), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)
$$

を得る。以上の単純な議論で $\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)$ や $\mathbf{X}_{\mathrm{Iw}}(\mathfrak{p}^r)$ の安定モデル全体の様子が分かっていなくても、ある一部のアフィノイドの性質 (4.2) から生成ファイバーのコホモロジーに非自明な表現が含まれることが分かる。更に

$$
H^1_{\mathrm{c}}(\overline{\mathbf{X}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \quad H^1_{\mathrm{c}}(\overline{\mathbf{Y}}_r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)
$$

というコホモロジーは、タイプ理論の構成の核になるような本質的部分を含むことが理解出来る。合わせると生成ファイバーのコホモロジー H^1_r や $H^1_{\mathrm{Iw},r}$ にタイプ理論の核となる表現が含

まれることが分かる。更に $H_r^1 \subset \mathcal{U}_2$, $H_{\mathrm{Iw},r}^1 \subset \mathcal{U}_2$ なので $\mathcal{U}_2$ にもそのような寄与があることが示せる。$r=1$ の場合には (4.2) が成り立たないので、この議論では $H_1^1 \subset \mathcal{U}_2$ は示せないが、尖点部分 $H_{1,\mathrm{cusp}}^1 \subset H_1^1$ というタイプ理論と関係付く部分は $\mathcal{U}_2$ に単射で入っていることが示せる。

以上のことを勘案して、きちんと議論すると次の命題を得る。

定理 4.1. *([T3, Theorem 5.18])* 任意の許容対 $(E/F, \chi)$ に対して、G_2 同変な単射準同型写像

$$\pi_\chi \otimes \rho_\chi^\vee \otimes \tau_\chi^\vee \hookrightarrow \mathcal{U}_2$$

が存在する。

この命題の証明が論文 [T3] の主要部分 (§2, §3) を占めている。この定理を得るためには定理 3.3 は未だ使っていないことを注意しておく。

5 定理 4.1 から定理 2.2 を導く

定理 4.1 で然るべき三つ組の表現が $\mathcal{U}_2$ の部分表現として入っていることが分かったが、ここから定理 2.2 のように対応を一つに特定するにはまだギャップがある。つまり別の三つ組が $\mathcal{U}_2$ の部分表現として入っている可能性が排除出来ていない。この可能性を排除するためには [Mi2], [St] において示されている Lubin-Tate 空間のコホモロジーと局所 Jacquet-Langlands 対応を結び付ける以下の結果が必要になる。

定理 5.1. *([Mi2], [St])* 任意の尖点表現 π に対して $D_2^\times$ 表現としての同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F)}(\mathcal{U}_2, \pi) \simeq \mathrm{JL}(\pi)^{\oplus 2}$$

が成立する。

この証明は大域保型表現に依らず幾何学的かつ局所的なものである。この意味で、我々の目的に適した結果であることを注意しておく。$\mathrm{Nrd}_{D_2/F} \colon D_2^\times \to F^\times$ を被約ノルム写像とする。また局所類体論の相互写像 $\mathbf{a}_F \colon W_F^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} F^\times$ を幾何的フロベニウス写像が素元に移るように正規化しておく。これと標準写像 $W_F \to W_F^{\mathrm{ab}}$ の合成写像も $\mathbf{a}_F$ と書く。次の群の準同型写像を考える。

$$G_2 = \mathrm{GL}_2(F) \times D_2^\times \times W_F \to F^\times;\ (g, d, \sigma) \mapsto \det(g) \left(\mathrm{Nrd}_{D_2/F}(d)\mathbf{a}_F(\sigma)\right)^{-1}. \tag{5.1}$$

Lubin-Tate 曲線の連結成分のなす集合への群作用を調べると、$F^\times$ の任意のスムーズ指標と (5.1) の合成で得られる G_2 の指標による捻りで $\mathcal{U}_2$ が不変であることが示せる (cf. [T3, Corollary 5.15])。このことを使うと定理 2.2 を示すためには π の中心指標は自明であるとしてよい。中心指標が自明な尖点表現は、中心指標が自明な $\mathrm{GL}_2(F)$ のスムーズ表現のなす圏の入射的対象であることが知られている ([Cs, Theorem 5.4.1])。これを使うと定理 2.2 の単射から次の $D_2^\times \times W_F$ 同変な全射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F)}(\mathcal{U}_2, \pi_\chi) \twoheadrightarrow \rho_\chi \otimes \tau_\chi \tag{5.2}$$

を得る。$D_2^\times$ は中心でわるとコンパクトなので $D_2^\times$ の許容表現は有限次元になる。定理 5.1 と明示的 Jacquet-Langlands 対応の帰結

$$\dim \rho_\chi = \dim \mathrm{JL}(\pi_\chi)$$

を使うと全射 (5.2) の両辺の次元は等しい。故に (5.2) は同型であることが従う。ここで使った定理 5.1 に関しては、次元の情報だけが必要であったことを注意しておく。以上と定理 3.2, 定

理 3.3 を使えば定理 2.2 を得て証明が完了する。ここまでの定理 2.2 の証明の流れを以下の図式にまとめておく。

$$\begin{tikzcd}
\text{Lubin-Tate 曲線} \arrow[r, rightsquigarrow, "\text{CM 点の近く}"] & \text{アフィノイド } \mathbf{X}_r,\, \mathbf{Y}_r \arrow[r, rightsquigarrow] & \text{還元} \arrow[d, rightsquigarrow, "\text{中間コホモロジー}"] \\
\text{定理 } 4.1 \arrow[d, "\text{定理 } 3.2+\text{定理 } 3.3+\text{定理 } 5.1"] & & \text{タイプ理論の核となる部分} \arrow[ll, rightsquigarrow, "\S 4.1 \text{ の観察}"'] \\
\text{定理 } 2.2 & &
\end{tikzcd}$$

本稿で解説した定理 4.1 は GL_2 の場合であった。[Yo] では深さが零の表現について非可換 Lubin-Tate 理論の局所的証明を与えている。[We1] はそれを一つ深いレベルの表現の場合に部分的に一般化している。定理 2.1 の証明までには至っていないが、高次元の場合のアフィノイドの研究として [IT2], [IT3], [To] がある。これらに §4.1 の考察を適用すれば、定理 2.1 の命題がこれらの論文で対象としている特別なクラスの π に対しては証明できる。この三つは perfectoid 空間に基づいた研究である。

また $p \neq 2$ の場合に非可換 Lubin-Tate 理論を使ってコホモロジーの情報から Lubin-Tate 曲線の安定還元に関する情報を導くという研究が [We3] にある。[We2] では $p \neq 2$ のときに Lubin-Tate 曲線の安定還元になるべき有限体上の安定曲線を群作用込みで構成・予想している。$p = 2$ のときには安定還元の既約成分にどのような曲線があらわれるのか未知な部分が多い。少なくともレベルが低い Lubin-Tate 曲線の安定還元の既約成分として $\overline{\mathbb{F}}_2$ 上の同型を除いて唯一つの超特異楕円曲線 (定義方程式は $a^2 + a = s^3$ で与えられる) が現れることが [IT] により知られている。これだけ見ても $p = 2$ の場合は奇素数の (4.1) の様子と大分異なることが見て取れる。この場合に Lubin-Tate 曲線 $\mathbf{X}(\mathfrak{p}^r)$ の安定還元の既約成分のリストを作ることは今後の課題である。

謝辞 今回代数学シンポジウムにて講演させて頂く貴重な機会を与えて下さったオーガナイザーの先生方、特に推薦して頂いた三枝洋一先生に感謝します。

References

[Be] V. G. Berkovich, *Vanishing cycles for formal schemes*, Invent. Math. 115 (1994), 539–571.

[Be2] V. G. Berkovich, *Vanishing cycles for formal schemes II*, Invent. Math. 125 (1996), no. 2, 367–390.

[BGR] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert, *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren Math. Wiss. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Bo] P. Boyer, *Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Invent. Math. 138, (1999), no. 3, 573–629.

[BH] C. J. Bushnell and G. Henniart, *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren Math. Wiss. 335, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Ca] H. Carayol, *Non-abelian Lubin-Tate theory*, Automorphic Forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., 11, Academic Press. Boston, MA, 1990, 15-39.

[Cs] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of* $\mathfrak{p}$*-adic reductive groups*, preprint,
available at https://www.math.ubc.ca/ cass/research/publications.html.

[CMc] R. Coleman and K. McMurdy, *Stable reduction of* $X_0(p^3)$, With an Appendix by Everett W. Howe, Algebra Number Theory 4 (2010), No. 4, 357–431.

[Del] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, Lect. Notes Math., Vol. 569, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[Del2] P. Deligne, *La formalisme des cycles évanescents*, Exposé XIII in SGA7, Lect. Notes Math., Vol. 340, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[DL] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. 103 (1976), 103-161.

[Dr] V. Drinfeld, *Elliptic modules*, English translation, Math. USSR-Sb. 23 (1974), no. 4, 561–592.

[E] B. Edixhoven, *Minimal resolution and the stable reduction of $X_0(N)$*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 40 (1990), no. 1, 31–67.

[GL] A. Genestier and V. Lafforgue, *L'isomorphisme des duex tours Une autre approach en égales caractérstiques*, Deuxième partie in L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld, Prog. Math. 262, 2008.

[Gr] B. H. Gross, *On canonical and quasi-canonical liftings*, Invent. Math. 84, (1986), 321–326.

[Ha] M. Harris, *On the local Langlands correspondence*, in Proc. ICM Beijing 2002, Vol. II, 583–597.

[HT] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Stud., vol. 151, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[Hen] G. Henniart, *On the local Langlands and Jacquet-Langlands correspondences*, ICM, Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich 2006, 1171–1182.

[Hu] R. Huber, *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Math. Z. 217 (1994), 513–551.

[Hu2] R. Huber, *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects Math., E 30. Friedr. Viewveg & Sohn, Braunschweig, 1996.

[IT] N. Imai and T. Tsushima, *Stable models of Lubin-Tate curves with level three*, to appear in Nagoya Math. J. Available at arXiv:1111.1893v3.

[IT2] N. Imai and T. Tsushima, *Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple epipelagic representations I: tame case*, preprint, arXiv:1308.1276v2.

[IT3] N. Imai and T. Tsushima, *Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple epipelagic representations II: wild case*, preprint, arXiv:1603.04693.

[IY] 伊藤哲史、吉田輝義述、「佐藤–テイト予想の解決と展望」、数学のたのしみ　最終号 2008, 日本評論社。

[Iw] K. Iwasawa, *Local class field theory*, Oxford Univ. Press, 1986.

[Ka] 加藤和也著、「フェルマーの最終定理・佐藤–テイト予想解決への道」、岩波書店。

[KM] N. M. Katz and B. Mazur, *Arithmetic moduli of elliptic curves,* Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 108 (1985).

[LT] J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. Math. 81 (1965), 380–387.

[Mi] Y. Mieda, *Variants of formal nearby cycles*, J. Inst. Math. Jussieu, Vol. 13, Issue 04 (2014), 701–752.

[Mi2] Y. Mieda, *Geometric approach to the local Jacquet-Langlands correspondence*, Am. J. Math. Vol. 136, Number 4, (2014), 1067–1091.

[Sa] 斎藤毅著、「フェルマー予想」、2009, 岩波書店。

[St] M. Strauch, *Deformation spaces of one-dimensional formal modules and their cohomology*, Adv. Math. Vol. 217, Issue 3 (2008), 889–951.

[To] K. Tokimoto, *Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and special cases of the local Langlands correspondence in positive characteristic*, doctoral thesis.

[T] T. Tsushima, *On the stable reduction of the Lubin-Tate curve of level two in the equal characteristic case*, J. of Number Theory 147 (2015), 184–210.

[T2] T. Tsushima, *Stable reduction of* $X_0(p^4)$, J. Reine Angew. Math. 707 (2015), 1–43.

[T3] T. Tsushima, *On non-abelian Lubin-Tate theory for* GL(2) *in the odd equal characteristic case*, preprint, arXiv:1604.08857.

[Yo] T. Yoshida, *On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles*, Algebraic and arithmetic structures of moduli spaces (Sapporo 2007), Adv. Stud. Pure Math., vol. 58, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, 361–402.

[Yo2] 吉田輝義、「非可換 Lubin-Tate 理論と Deligne-Lusztig 理論」、早稲田大学整数論研究集会報告集, 2004.

[Yo3] 吉田輝義、「GL_n の大域・局所 Langlands 対応」、第 50 回代数学シンポジウム報告集, 2005.

[We1] J. Weinstein, *Good reduction of affinoids on the Lubin-Tate tower*, Doc. Math. 15 (2010), 981–1007.

[We2] J. Weinstein, *Explicit non-abelian Lubin-Tate theory for* GL(2), preprint, arXiv:0910.1132v1.

[We3] J. Weinstein, *Semistable models for modular curves of arbitrary level*, preprint, arXiv:1010.4241v2, to appear in Invent. Math.