代数多様体の数論的基本群とその線形表現

玉川安騎男

京都大学数理解析研究所

本稿の主目的は、Anna Cadoret 氏らとの最近の共同研究について紹介することです。非常に大ざっぱに言えば、代数多様体（特に代数曲線）の数論的基本群の幾何的 ℓ 進表現や幾何的法 ℓ 表現族が、よい群論的／幾何的／数論的性質を持つという研究です。

§0. 定義と問題設定

この節では、数論的基本群とその線形表現に関連するさまざまな定義をいくつかの例とともに復習し、最後に本稿で取り扱う問題について説明します。

0.1. 位相群

Γ を位相群とし、ℓ を素数とします。

定義

Γ: 副有限群

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\Gamma \simeq \varprojlim \Gamma_\lambda$, Γ_λ: 有限群

$\iff$ Γ: コンパクトかつ全不連結

Γ: 副 ℓ 群

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\Gamma \simeq \varprojlim \Gamma_\lambda$, Γ_λ: 有限 ℓ 群

Γ: 概副 ℓ 群

$\overset{\text{def}}{\iff}$ Γ: 副有限 & $\Gamma \underset{\text{op}}{\supset} \exists\Gamma'$: 副 ℓ

Γ: ℓ 進リー群

$\overset{\text{def}}{\iff}$ Γ: $\mathbf{Q}_\ell$ 上の解析多様体の構造が与えられ、群演算が解析的

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Lie}(\Gamma)$: $\mathbf{Q}_\ell$ 上の有限次元リー代数

注意 Γ: コンパクト ℓ 進リー群 $\iff$ $\exists\Gamma \underset{\text{cl}}{\hookrightarrow} \mathrm{GL}_N(\mathbf{Z}_\ell)$ $\implies$ Γ: 概副 ℓ

0.2. 数論的基本群

連結スキーム X とその上の幾何的点（すなわち、代数閉体のスペクトラムから X への射）b が与えられたとき、エタール基本群と呼ばれる副有限群 $\pi_1(X,b)$ が定まります。$\pi_1(X,b)$ は b を取り替えても同型なので、しばしば $\pi_1(X)$ と書きます。簡単に言えば、$\widetilde{X}$ を「副有限普遍被覆」とするとき $\pi_1(X) = \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ であり、次の基本的な一対一対応（ガロア対応）が成り立ちます。

$$U \underset{\text{op}}{\subset} \pi_1(X) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} X_U\text{: } X \text{ の連結有限エタール被覆}$$

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

例 1 X: $\mathbf{C}$ 上の代数多様体 $\Longrightarrow$ $\pi_1(X) \simeq \widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}})}$

ここで、X^{an} は X に付随する複素解析空間、π_1^{top} は通常の位相的基本群、$\widehat{G} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_{N \lhd G, (G:N)<\infty} G/N$ は群 G の副有限完備化。

例 2 k: 体 $\Longrightarrow$ $\pi_1(\mathrm{Spec}(k)) \simeq \Gamma_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$

例 3 X:（局所ネーター）正規スキーム $\Longrightarrow$ $\pi_1(X) \simeq \mathrm{Gal}(k(X)^{\sim}/k(X)) \twoheadleftarrow \Gamma_{k(X)}$
ここで、$k(X)^{\sim}$ は、X 上いたるところ不分岐な $k(X)$ 上のガロア拡大で最大のもの。

例 4 k: 体、 X: k 上の幾何的連結（$X_{\overline{k}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} X \times_k \overline{k}$ が連結）な代数多様体 $\Longrightarrow$

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{k}}) \to \pi_1(X) \stackrel{\mathrm{pr}_X}{\to} \Gamma_k \to 1 \text{ (完全)}$$

ここで、$\pi_1(X)$ を「数論的基本群」、$\pi_1(X_{\overline{k}})$ を「幾何的基本群」と呼びます。

各点 $x \in X^{\mathrm{cl}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{X \text{ の閉点全体}\}$ に対し、k 上の自然な射 $\mathrm{Spec}(k(x)) \to X$ から Γ_k 上の自然な射 $s_x : \Gamma_{k(x)} \to \pi_1(X)$、すなわち

$$\begin{array}{ccccc} 1 \to \pi_1(X_{\overline{k}}) \to \pi_1(X) & \stackrel{\mathrm{pr}_X}{\to} & \Gamma_k & \to 1 \\ & & \cup_{\mathrm{op}} & \\ & & \Gamma_{k(x)} & \end{array}$$

の自然な（準）切断が定まります。$D_x \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Im}\, s_x$ は $\pi_1(X)$ の x における分解群と一致します。

0.3. ℓ 進表現

以下本稿では、

k: 体

X: k 上の正規かつ幾何的連結な代数多様体

$K \stackrel{\mathrm{def}}{=} k(X)$: X の関数体

ℓ: k の標数と異なる素数

とします。数論的基本群 $\pi_1(X)$ の ℓ 進表現とは、

V: $\mathbf{Q}_\ell$ 上の有限次元ベクトル空間、$\dim(V) = r$

ρ: $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}(V)$ 連続群準同型

のことを言います。このとき、V の $\pi_1(X)$ 安定な $\mathbf{Z}_\ell$（必ず存在）T を取ると、次の図式が得られます。

$$\begin{array}{ccccc} \rho : \pi_1(X) & \to & \mathrm{GL}(T) & \hookrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & & |\wr & & |\wr \\ & & \mathrm{GL}_r(\mathbf{Z}_\ell) & \subset & \mathrm{GL}_r(\mathbf{Q}_\ell) \end{array}$$

例 1 $A \to X$: 相対次元 δ のアーベルスキーム（すなわち、X によってパラメトライズされた δ 次元アーベル多様体の族）

$\rightsquigarrow \rho_A : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(T) \subset \mathrm{GL}(V)$

ここで、

$T \stackrel{\mathrm{def}}{=} T_\ell(A_{\overline{K}}) = \varprojlim A_{\overline{K}}[\ell^n]$ $(\simeq \mathbf{Z}_\ell^{2\delta})$

$V \stackrel{\mathrm{def}}{=} V_\ell(A_{\overline{K}}) = T \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ $(\simeq \mathbf{Q}_\ell^{2\delta})$

例 2（幾何的 ℓ 進表現）$Y \to X$: 固有かつ滑らか、$i, j \in \mathbf{Z}$、$i \geq 0$

$\rightsquigarrow \rho_{Y,i,j} : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(T) \subset \mathrm{GL}(V)$

ここで、

$T \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell(j))/(\text{torsion})$

$V \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_\ell(j)) = T \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$

但し、

$\mathbf{Z}_\ell(1) \stackrel{\mathrm{def}}{=} T_\ell(\mathbf{G}_{m,\overline{K}}) = \varprojlim \mathbf{G}_{m,\overline{K}}[\ell^n] \ (\simeq \mathbf{Z}_\ell)$

$\mathbf{Z}_\ell(j) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Z}_\ell(1)^{\otimes j} \ (j \geq 0),\ \mathbf{Z}_\ell(-j)^\vee \ (j < 0) \ (\simeq \mathbf{Z}_\ell)$

$\mathbf{Q}_\ell(j) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Z}_\ell(j) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \ (\simeq \mathbf{Q}_\ell)$

注意 例 1 は例 2 の特別な場合と見なせます: $\rho_A = \rho_{A^\vee,1,1} = \rho_{A,2\delta-1,\delta}$

注意 $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell(j))$ は、ほとんどすべての ℓ に対し非自明なねじれ元を持たないことが知られています（Gabber-Orgogozo）。

ℓ 進表現 $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(T) \subset \mathrm{GL}(V)$ と $x \in X^{\mathrm{cl}}$ が与えられたとき、次の図式が得られます。

$$\begin{array}{ccccccc}
\overline{G} & & G & & & & \\
\|\mathrm{def} & & \|\mathrm{def} & & & & \\
\rho(\pi_1(\overline{X})) & \underset{\mathrm{cl}}{\lhd} & \rho(\pi_1(X)) & \underset{\mathrm{cl}}{\subset} & \mathrm{GL}(T) & \simeq & \mathrm{GL}_r(\mathbf{Z}_\ell) \\
& & \cup_{\mathrm{cl}} & & & & \\
& & \rho(D_x) & & & & \\
& & \|\mathrm{def} & & & & \\
& & G_x & & & &
\end{array}$$

これらはすべて（コンパクト）ℓ 進リー群になります。したがって、リー理論により次の図式が得られます。

$$\begin{array}{ccccccc}
\overline{\mathfrak{g}} & & \mathfrak{g} & & & & \\
\|\mathrm{def} & & \|\mathrm{def} & & & & \\
\mathrm{Lie}(\overline{G}) & \underset{\mathrm{ideal}}{\subset} & \mathrm{Lie}(G) & \subset & \mathfrak{gl}(V) & \simeq & \mathfrak{gl}_r(\mathbf{Q}_\ell) \\
& & \cup & & & & \\
& & \mathrm{Lie}(G_x) & & & & \\
& & \|\mathrm{def} & & & & \\
& & \mathfrak{g}_x & & & &
\end{array}$$

これらはすべて $\mathbf{Q}_\ell$ 上の有限次元リー代数になります。

0.4. 法 ℓ 表現族

数論的基本群 $\pi_1(X)$ の法 ℓ 表現とは、

M_ℓ: 有限次元 $\mathbf{F}_\ell$ ベクトル空間。$\dim(M_\ell) = r$

ρ_ℓ: $\pi_1(X) \to \mathrm{GL}(M_\ell)$ $(\simeq \mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_\ell))$

のことを言います。素数の無限集合を走らせて、族 $(\rho_\ell)_\ell$ を考えることが多いです。

例 1 $A \to X$: 相対次元 δ のアーベルスキーム

$\rightsquigarrow \rho_{A,\ell} : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(M_\ell)$

ここで、

$M_\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_{\overline{K}}[\ell]$ $(\simeq \mathbf{F}_\ell^{2\delta})$

注意 $A_{\overline{K}}[\ell] = T_\ell(A_{\overline{K}}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{F}_\ell$

例 2 （幾何的法 ℓ 表現族）$Y \to X$: 固有かつ滑らか、$i, j \in \mathbf{Z}$、$i \geq 0$

$\rightsquigarrow \rho_{Y,i,j,\ell} : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(M_\ell)$

ここで、

$M_\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{F}_\ell(j))$

但し、

$\mathbf{F}_\ell(1) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{G}_{m,\overline{K}}[\ell]$ $(\simeq \mathbf{F}_\ell)$

$\mathbf{F}_\ell(j) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{F}_\ell(1)^{\otimes j}$ $(j \geq 0)$, $\mathbf{F}_\ell(-j)^\vee$ $(j < 0)$ $(\simeq \mathbf{F}_\ell)$

注意 例 1 は例 2 の特別な場合と見なせます: $\rho_{A,\ell} = \rho_{A^\vee,1,1,\ell} = \rho_{A,2\delta-1,\delta,\ell}$

注意 ほとんどすべての ℓ に対し、$H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{F}_\ell(j)) = H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell(j)) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{F}_\ell$

0.5. 問題設定

本稿の主目的は、Anna Cadoret 氏との最近の共同研究（現在も進行中）について紹介することです。非常に大ざっぱに言えば、幾何的 ℓ 進表現や幾何的法 ℓ 表現族がよい群論的／幾何的／数論的性質を持つという研究で、本稿では、特に次の二つの問題について考えます：

(§1) $\pi_1(X)$ の幾何的 ℓ 進表現 ρ において、$G_x \subset G$ は「たいていの」$x \in X^{\mathrm{cl}}$ に対して「大きい」。

(§2) $\pi_1(X)$ の幾何的法 ℓ 表現族 $(\rho_\ell)_\ell$ において、$\rho_\ell|_{\pi_1(X_{\overline{k}})}$ はほとんどすべての ℓ に対して半単純。

§1. 普遍開像定理 (Anna Cadoret 氏との共同研究)

本節では、k は $\mathbf{Q}$ 上有限生成な体（例：$[k:\mathbf{Q}] < \infty$）とし、引き続き

X: k 上の正規かつ幾何的連結な代数多様体

$K \stackrel{\mathrm{def}}{=} k(X)$: X の関数体

$\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(T) \subset \mathrm{GL}(V)$ ℓ 進表現

とします。

定義 ρ: GLP（Geometrically Lie Perfect 幾何的リー完全）

$\stackrel{\mathrm{def}}{\iff} \overline{\mathfrak{g}}^{\mathrm{ab}} = 0$

$\iff \forall U \underset{\mathrm{op}}{\subset} \overline{G}, |U^{\mathrm{ab}}| < \infty$

命題 1 ([CT4]) 例 2 の幾何的 ℓ 進表現 $\rho_{Y,i,j}$ は GLP である。特に、例 1 の ℓ 進表現 ρ_A は GLP である。

証明 フロベニウス重みの理論によります。（ホッジ理論による別証明もあります。） □

以下この節では、X が（滑らかな）代数曲線であると仮定し、各 $d \geq 1$ に対し、$X^{\leq d} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in X^{\mathrm{cl}} \mid [k(x):k] \leq d\}$ と定義します。次の定理が、この節の主結果です。

定理 2 ([CT4][CT5]) ρ が GLP であると仮定し、$d \geq 1$ とする。このとき、ほとんどすべての $x \in X^{\leq d}$ に対し、$\mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}$（すなわち $G_x \underset{\text{op}}{\subset} G$）が成立する。より精密には、$U_d \underset{\text{op}}{\lhd} G$ が存在し、ほとんどすべての $x \in X^{\leq d}$ に対し、$G_x \supset U_d$ が成立する。

注意 以下の命題は、ヒルベルトの既約性定理から直ちに従います：（必ずしも GLP でない）任意の ρ と十分大きい正整数 d に対し、$G_x = G$ となるような無限個の $x \in X^{\leq d}$ が存在する。

定理 2 の証明 証明は、群論的部分、幾何的部分、数論的部分からなります。群論的部分では、（コンパクト）ℓ 進リー群の性質を用いて $\overline{G}$ の開部分群からなる射影系を構成します。幾何的部分では、GLP 性質を用いて、この射影系に対応する $X_{\overline{k}}$ の被覆の塔の種数やゴナリティーが無限大に発散することを証明します。（この部分が一番大変です。）数論的部分では、幾何的部分の帰結及びモーデル予想／モーデル・ラング予想（Faltings）を用いて、例外点の有限性を証明します。 $\square$

系 ([CT3][CT4][CT5]) $A \to X$ をアーベルスキームとし、$d \geq 1$ とする。このとき、$N = N(k, X, A, \ell, d)$ が存在して、すべての $x \in X^{\leq d}$ 及びすべての $v \in A_x(k(x))[\ell^\infty]$ に対し、v の位数は N 以下である。

証明 定理 2 を ℓ 進表現 $\rho = \rho_A$ に適用します。 $\square$

GLP でない ℓ 進表現に対しては、定理 2 は一般には成立しません：

例 $X = \mathrm{Spec}(k[T, T^{-1}])$ とし、$a \in k^\times \smallsetminus (k^\times)_{\mathrm{tors}}$ とします。$\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}_\ell)$ を、以下で与えられる ℓ 進表現とします：

$$\rho = \begin{pmatrix} \chi & \psi_T & \psi_a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、χ は ℓ 進円分指標、ψ_h は h に付随する ℓ 進クンマー 1 次コサイクルを表します。このとき、任意の $x \in a^{\mathbf{Z}} \subset k^\times = X(k)$ に対し、G_x は G の開でない部分群です。

一般の ℓ 進表現 $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(T)$ (X は代数曲線) と $d \geq 1$ に対しては、定理 2（とその証明の手法）及びリー代数の理論を用いて、以下が証明できます。

定理 3 ([CT5]) ほとんどすべての $x \in X^{\leq d}$ に対し、$\mathrm{codim}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_x) \leq 2$ が成立する。 $\square$

定理 4 ([CT6]) ほとんどすべての $x \in X^{\leq d}$ に対し、$D(D(\overline{\mathfrak{g}})) \subset \mathfrak{g}_x$ が成立する（$D(\mathfrak{h}) \overset{\text{def}}{=} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$）。 $\square$

定理 2、定理 4 から思い付く次の問題の成否は、現時点では不明です。

問題 ほとんどすべての $x \in X^{\leq d}$ に対し、$D(\overline{\mathfrak{g}}) \subset \mathfrak{g}_x$ が成立するか？

注意 (i) [CT1] では、定理 2 の系の正標数類似が取り扱われています。

(ii) [CT2][CT7][CT8][CT9] では、定理 2 の法 ℓ 表現族類似が取り扱われています。

§2. 幾何的半単純性定理 (Anna Cadoret 氏、Chun Yin Hui 氏との共同研究)

この節では、k は任意の体とし、

X: k 上の正規かつ幾何的連結な代数多様体

$K \overset{\text{def}}{=} k(X)$: X の関数体

$Y \to X$: 固有かつ滑らかな射
$i, j \in \mathbf{Z}$, $i \geq 0$
ℓ: k の標数と異なる素数
とします。このとき、付随する幾何的 ℓ 進表現

$$\rho_{Y,i,j} : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_\ell(j)))$$

の幾何的基本群 $\pi_1(X_{\overline{k}})$ への制限は半単純であることが知られています（Deligne）。この事実の幾何的法 ℓ 表現族

$$(\rho_{Y,i,j,\ell})_\ell,\ \rho_{Y,i,j,\ell} : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{F}_\ell(j)))$$

における類似がこの節の主結果です：

定理 5 ([CHT]) ほとんどすべての ℓ に対し、$\rho_\ell|_{\pi_1(X_{\overline{k}})}$ は半単純。

定理 5 の証明の鍵となるのが、次の定理（とそのいくつかの一般化）です：

定理 6 ([CHT]) ほとんど全ての ℓ に対し、

$$H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell)^{\pi_1(X_{\overline{k}})} \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{F}_\ell \xrightarrow{\sim} H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{F}_\ell)^{\pi_1(X_{\overline{k}})}$$

証明 k が有限体の場合に帰着し、フロベニウス重みの理論を使うというのが基本的方針ですが、ねじれ係数のため工夫が必要です。X が k 上固有的な場合には Y に対してフロベニウス重みの理論（Deligne）を適用でき、一般にはオルタレーション（de Jong）を使って、次元に関する帰納法により必要な重みの性質を導きます。 □

定理 5 の証明 $M_\ell \stackrel{\text{def}}{=} H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{F}_\ell(j))$ とし、N_ℓ をその任意の $\pi_1(X_{\overline{k}})$ 部分加群とします。証明したいことは、$\pi_1(X_{\overline{k}})$ 加群の完全列

$$0 \to N_\ell \to M_\ell \to M_\ell/N_\ell \to 0$$

が分裂することです。N_ℓ が $M_{\ell^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell(j))$ の $\pi_1(X_{\overline{k}})$ 部分加群 N_{ℓ^∞} に持ち上がる場合には、定理 5 の一般化（M_{ℓ^∞}, M_ℓ を N_{ℓ^∞}, N_ℓ にかえたもの）を用いて上述の Deligne の半単純性定理に帰着できます。

一般の場合は、$\dim(N_\ell) = s$ とすると、上記の完全列の分裂が、完全列

$$0 \to \overset{s}{\wedge} N_\ell \to \overset{s}{\wedge} M_\ell \to \overset{s}{\wedge} M_\ell / \overset{s}{\wedge} N_\ell \to 0$$

の分裂と同値になることがわかります。定理 1 の法 ℓ 版（[CT8][CT9]）を用いると、X を適当な被覆に取り替えることにより、$\overset{s}{\wedge} N_\ell$ への $\pi_1(X_{\overline{k}})$ の作用が自明である場合に帰着できます。このとき、上記の完全列の分裂は

$$0 \to (\overset{s}{\wedge} M_\ell)^{\pi_1(X_{\overline{k}})} \to \overset{s}{\wedge} M_\ell \to \overset{s}{\wedge} M_\ell / (\overset{s}{\wedge} M_\ell)^{\pi_1(X_{\overline{k}})} \to 0$$

の分裂に帰着できます。ここで、定理 5 の一般化（M_{ℓ^∞} を $\overset{s}{\wedge} M_{\ell^\infty}$ にかえたもの）により、$\overset{s}{\wedge} M_\ell$ の $\pi_1(X_{\overline{k}})$ 部分加群 $(\overset{s}{\wedge} M_\ell)^{\pi_1(X_{\overline{k}})}$ が $\overset{s}{\wedge} M_{\ell^\infty}$ の $\pi_1(X_{\overline{k}})$ 部分加群 $(\overset{s}{\wedge} M_{\ell^\infty})^{\pi_1(X_{\overline{k}})}$ に持ち上がることがわかります。$\overset{s}{\wedge} M_{\ell^\infty}$ は（$\ell \gg 0$ のとき）$H^{si}_{\text{ét}}(Y^s_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell(sj))$ の直和因子となりますので、これで冒頭の特別な場合に帰着できて証明が終了します。 □

参考文献（プレプリント類は、Cadoret 氏のホームページ

http://www.math.polytechnique.fr/perso/cadoret.anna/Travaux.html

においてあります。）

[CHT] Anna Cadoret, Chun Yin Hui and Akio Tamagawa, Geometric monodromy — semisimplicity and maximality, preprint, submitted.

[CT1] —, Torsion of abelian schemes and rational points on moduli spaces, in "Algebraic Number Theory and Related Topics 2007", RIMS Kokyuroku Bessatsu B12, RIMS, Kyoto Univ., 2009, 7–29.

[CT2] —, On a weak variant of the geometric torsion conjecture, Journal of Algebra 346 (2011), no. 1, 227–247.

[CT3] —, Uniform boundedness of p-primary torsion of abelian schemes, Inventiones Mathematicae 188 (2012), no. 1, 83–125.

[CT4] —, A uniform open image theorem for ℓ-adic representations I, Duke Mathematical Journal 161 (2012), no. 13, 2605–2634.

[CT5] —, A uniform open image theorem for ℓ-adic representations II, Duke Mathematical Journal 162 (2013), no. 12, 2301–2344.

[CT6] —, Controlling the Galois images in one-dimensional families of ℓ-adic representations, Journal of Algebra 412 (2014), 189–206.

[CT7] —, Gonality of abstract modular curves in positive characteristic, Compositio Mathematica 152 (2016), no. 11, 2405–2442.

[CT8] —, Genus of abstract modular curves with level-ℓ structures, to appear in J. reine angew. Math..

[CT9] —, On the geometric image of $\mathbb{F}_\ell$-linear representations of étale fundamental groups, preprint, submitted.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学数理解析研究所
E-mail address: `tamagawa@kurims.kyoto-u.ac.jp`