頂点代数の表現と結合的代数

田辺顕一朗 (北海道大学大学院理学研究院数学部門)

e-mail：ktanabe@math.sci.hokudai.ac.jp

1 はじめに

頂点代数Vとは，物理における共形場理論の代数的定式化や，ムーンシャイン予想の解決等を目的として1986年にBorcherds[4]によって導入された可換環的な性質を持つ代数系である．頂点代数に，Virasoro元(共形ベクトル)ωの存在を仮定し，付随するいくつかの条件を追加したものを頂点作用素代数(cf. [11],[14])という．筆者は頂点代数上の加群，特に不変部分頂点代数$V^G = \{a \in V \mid$ 任意のgに対して $ga = a\}$ 上の加群を研究している．ここで，Gは頂点代数Vの有限位数の自己同型群である．V^G加群は，Borcherdsによるムーンシャイン予想の解決[5]で中心的役割を果たしたムーンシャイン頂点代数の構成に用いられていることもあり，活発に研究されている．V^Gの表現論でまず興味があるのは，当然V加群とV^G加群との関係である．V加群は自然にV^G加群となるが，さらに次のことが予想されている:

予想 1.1. [6] 頂点作用素代数Vが“よい性質”を持つならば，任意の既約V^G加群Mに対して，ある$g \in G$とある既約g-twisted V加群N(定義 2.4を参照)が存在して，MはNの部分加群になっている(1-twisted V加群がV加群である)．

ここで“よい性質”についての説明は省略する．自己同型の位数が小さい場合は，ハイゼンベルグ頂点代数$M(1)$ ([8],[10]) や正定値偶格子に付随する頂点代数([1],[9],[20],[21])等で予想1.1が正しいことが検証されてきた．これらの検証は，いずれも頂点作用素代数に付随するZhu代数を詳細に調べることによってなされている．Zhu[22]により，頂点作用素代数の既約加群(正しくは$\mathbb{N}$次数付き既約弱加群)と，付随するZhu代数の既約加群とが一対一に対応していることが示されているからである．

最近，頂点作用素代数の表現論において重要な性質であるC_2余有限性に関して大きな進展[17]があり，それを用いて予想1.1および関連する問題の解明が進んでいる．

さて，ここではV加群ではなく，そこから次数付けの条件をはずした，弱V加群とよばれる対象を考察する．弱加群は頂点代数の表現の研究の様々な場面で自然に現れてくる(cf. [15])．予想 1.1は加群を弱加群に変えても意味をなすことから，

弱加群の場合に予想が成り立つかどうかは，筆者自身は昔から気になっていた．しかし，一般の弱 V 加群では範囲が広すぎること，また Zhu 代数のような便利が道具がないことから，予想を具体例で確かめてみようにもどうすればよいのか分からなかった．最近になってリー環の表現において，Whittaker 加群という最高ウェイト加群ではない加群のクラスがあるのを知った．Whittaker 加群 (Whittaker ベクトル) は，リー環 $sl_2(\mathbb{C})$ の既約加群の研究 [3] において初めて現れた後，[13] において一般の複素数体上の有限次元半単純リー環の場合に研究された．Whittaker 加群は三角分解を持つリー環ならば，いつでも定義できるものであるため，その後様々なリー環に対して調べられているようである．特に Virasoro 代数の Whittaker 加群 [18] およびその拡張 [16] は，Virasoro 頂点代数の既約弱加群であるが，加群とならない例を与えていることが分かる．Virasoro 代数の Whittaker 加群はまた，[12] においても用いられている．[2] では $A_1^{(1)}$ 型のアフィンリー環の Whittaker 加群が考察されている．一般の頂点代数に関しては，三角分解のような構造が期待出来ないため，Whittaker 加群の類似が定義できるかどうかは不明である．しかし，頂点作用素代数は Virasoro 元を持つので，Virasoro 代数としての Whittaker ベクトルをもつ頂点代数の加群を考えることは出来る．そこでハイゼンベルグ頂点代数の不変部分代数 $M(1)^+$ に対して，Whittaker ベクトルをもつ既約弱加群の分類をおこない，この場合にも予想 1.1 の類似が正しいことを検証できたというのが今回の報告である．

2 頂点 (作用素) 代数とその加群

まず頂点代数の定義を書いておく．

定義 2.1. 次の条件を満たす $(V, Y, \mathbf{1})$ を頂点代数という:

(1) V は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間.

(2) x を形式的変数として，Y は線形写像

$$
\begin{array}{rccc}
Y(\ ,x): & V \otimes_{\mathbb{C}} V & \longrightarrow & V((x)) \\
& \cup & & \cup \\
& a \otimes b & \longmapsto & Y(a,x)b
\end{array}
$$

である．$Y(a,x)b = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i b x^{-i-1}$ と展開を書く．

(3) $\mathbf{1} \in V$ で $Y(\mathbf{1}, x) = \mathrm{id}_V$ (V 上の恒等写像). つまり，$\mathbf{1}_{-1} = \mathrm{id}_V$ と $\mathbf{1}_i = 0$ ($i \neq -1$). また，$a \in V$ に対して，$Y(a,x)\mathbf{1} = a + \sum_{i \le -2} a_i \mathbf{1} x^{-i-1} \in V[[x]]$.

(4) $a,b,c\in V$ に対して，$Y(a,b,c|x,y)\in V[[x,y]][x^{-1},y^{-1},(x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned}\iota_{x,y}Y(a,b,c|x,y)&=Y(a,x)Y(b,y)c\in V(\!(x)\!)(\!(y)\!),\\ \iota_{y,x}Y(a,b,c|x,y)&=Y(b,y)Y(a,x)c\in V(\!(y)\!)(\!(x)\!),\\ \iota_{y,x-y}Y(a,b,c|x,y)&=Y(Y(a,x-y)b,y)c\in V(\!(y)\!)(\!(x-y)\!).\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}V[[x]]&=\{\sum_{i=0}^{\infty}v_{(i)}x^i\mid v_i\in V\ (i=0,1,\ldots)\},\\ V[[x,y]]&=\sum_{i,j=0}^{\infty}v_{(i,j)}x^iy^j\mid v_{(i,j)}\in V\ (i,j=0,1,\ldots)\},\\ V(\!(x)\!)&=\{\sum_{i\in\mathbb{Z}}v_{(i)}x^i\mid v_{(i)}\in V\ (i\in\mathbb{Z})\text{ で }v_{(i)}=0(i\ll 0)\},\\ V(\!(x)\!)(\!(y)\!)&=(V(\!(x)\!))(\!(y)\!)\end{aligned}$$

等である．$V(\!(x)\!)(\!(y)\!)\neq V(\!(y)\!)(\!(x)\!)$ に注意する．また $\iota_{x,y}f$ は，f を $|x|>|y|$ と思って形式的に展開したものである．$\iota_{y,x},\iota_{x,y-x}$ も同様に定める．つまり，$a\in V$ に対して $\iota_{x,y}(a)=\iota_{y,x}(a)=\iota_{y,x-y}(a)=a$ で，$j,k,l\in\mathbb{Z}$ に対して二項展開を用いて

$$\begin{aligned}\iota_{x,y}\big(x^jy^k(x-y)^l\big)&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{l}{i}(-1)^ix^{j+l-i}y^{k+i}\in\mathbb{C}(\!(x)\!)(\!(y)\!),\\ \iota_{y,x}\big(x^jy^k(x-y)^l\big)&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{l}{i}(-1)^{l-i}y^{k+l-i}x^{j+i}\in\mathbb{C}(\!(y)\!)(\!(x)\!),\\ \iota_{x,y-x}\big(x^jy^k(x-y)^l\big)&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k}{i}x^{j+k-i}(-1)^l(y-x)^{l+i}\in\mathbb{C}(\!(y)\!)(\!(x-y)\!)\end{aligned}\tag{2.1}$$

と定める．例えば

$$\iota_{x,y}(x-y)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}x^{-i-1}y^i,\qquad \iota_{y,x}(x-y)^{-1}=-\sum_{i=0}^{\infty}y^{-i-1}x^i,$$
$$\iota_{y,x-y}x^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^iy^{-i-1}(x-y)^i$$

となる．頂点代数の例は 3 節で与える．

定義 2.1 中の (4) は，条件 (2) の下で，Borcherds 恒等式と呼ばれる次の条件と同値である: $a,b,c\in V$ と $l,m,n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{m}{i}(a_{l+i}b)_{m+n-i}c=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{l}{i}\Big(a_{m+l-i}b_{n+i}c+(-1)^{l+1}b_{n+l-i}a_{m+i}c\Big).$$

こちらを用いたものが，よく見かける頂点代数の定義である．

頂点代数 V に対して Virasoro 元 ω の存在を仮定し，いくつかの条件を追加したものを頂点作用素代数 (cf. [11],[14]) という:

定義 2.2. $(V, Y, \mathbf{1})$ を頂点代数で，$\omega \in V$ とする．次の条件を満たすとき，$(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ を**頂点作用素代数**という．

(1) $L(i) = \omega_{i+1}$ $(i \in \mathbb{Z})$ としたとき，$c_V \in \mathbb{C}$ が存在して

$$[L(i), L(j)] = (i-j)L(i+j) + \delta_{i+j,0}\frac{i(i^2-1)}{12}c_V \tag{2.2}$$

を満たす．さらに $a \in V$ に対して $L(-1)a = a_{-2}\mathbf{1}$ となる．

(2) $i \in \mathbb{Z}$ に対して，$V_i = \{a \in V \mid L(0)a = ia\}$ とおくと，$V = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$ と直和分解する．さらに各 i に対して $\dim_{\mathbb{C}} V_i < \infty$ で $V_i = 0$ $(i \ll 0)$.

以下 V は頂点作用素代数とする．次に頂点作用素代数上の弱加群を次のように定める．

定義 2.3. 次の条件を全て満たす組 (M, Y_M) を**弱 V 加群**という．

(1) M は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間.

(2) $$\begin{array}{cccc} Y_M(\ ,x): & V \otimes_{\mathbb{C}} M & \longrightarrow & M(\!(x)\!) \\ & \cup & & \cup \\ & a \otimes u & \longmapsto & Y_M(a,x)u \end{array}$$ は $\mathbb{C}$ 線形写像．$Y_M(a,x)b = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i u x^{-i-1}$ と展開を書く．

(3) $Y_M(\mathbf{1}, x) = \mathrm{id}_M$.

(4) $a, b \in V, u \in M$ に対して，$Y_M(a,b,u|x,y) \in M[[x,y]][x^{-1}, y^{-1}, (x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned} \iota_{x,y} Y_M(a,b,u|x,y) &= Y_M(a,x)Y_M(b,y)u \in M(\!(x)\!)(\!(y)\!), \\ \iota_{y,x} Y_M(a,b,u|x,y) &= Y_M(b,y)Y_M(a,x)u \in M(\!(y)\!)(\!(x)\!), \\ \iota_{y,x-y} Y_M(a,b,u|x,y) &= Y_M(Y(a,x-y)b,y)u \in M(\!(y)\!)(\!(x-y)\!) \end{aligned}$$

となる．

頂点作用素代数 V に対して，$g \in GL(V)$ で $g(Y(a,x)b) = Y(ga,x)gb$ $(a, b \in V)$, $g(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, g(\omega) = \omega$ をみたすものを，V の**自己同型**という．V の自己同型の全体を $\mathrm{Aut}\, V$ で表す．$g \in \mathrm{Aut}\, V$ を有限位数 T の自己同型として

$$V^{(g,r)} = \{a \in V \mid ga = e^{-2\pi\sqrt{-1}r/T}a\}, \quad r = 0, 1, \ldots, T-1$$

とおく．

定義 2.4. 上の設定の下で，次の条件を全て満たす組 (M, Y_M) を**弱 g-twisted V 加群**という.

(1) M は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間.

(2) $$\begin{array}{rccc} Y_M(\ ,x): & V\otimes_{\mathbb{C}} M & \to & M((x^{1/T})) \\ & \cup & & \cup \\ & a\otimes u & \longmapsto & Y_M(a,x)u \end{array}$$ は $\mathbb{C}$ 線形写像. $Y_M(a,x)u = \sum_{i\in(1/T)\mathbb{Z}} a_i u x^{-i-1}$ と展開を書く.

(3) $a \in V^{(g,r)}$ のとき，$i \notin r/T + \mathbb{Z}$ ならば $a_i b = 0$. つまり $Y_M(a,x)b = \sum_{i\in r/T+\mathbb{Z}} a_i b x^{-i-1}$.

(4) $Y_M(\mathbf{1}, x) = \mathrm{id}_M$.

(5) $a, b \in V, u \in M$ に対して，$Y_M(a,b,u|x,y) \in M[[x^{1/T}, y^{1/T}]][x^{-1/T}, y^{-1/T}, (x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned} \iota_{x,y} Y_M(a,b,u|x,y) &= Y_M(a,x)Y_M(b,y)u \in M((x^{1/T}))((y^{1/T})), \\ \iota_{y,x} Y_M(a,b,u|x,y) &= Y_M(b,y)Y_M(a,x)u \in M((y^{1/T}))((x^{1/T})), \\ \iota_{y,x-y} Y_M(a,b,u|x,y) &= Y_M(Y(a,x-y)b,y)u \in M((y^{1/T}))((x-y)) \end{aligned}$$

となる．ここで $\iota_{x,y}$ 等は (2.1) を適切に拡張して定義する.

G を $\mathrm{Aut}\, V$ の部分群としたとき，不変部分空間 $V^G = \{a \in V \mid 任意の\ g\ に対して\ ga = a\}$ は，V の $\mathbf{1}$ と Virasoro 元を持つ頂点作用素代数となる．$g \in G$ を有限位数の自己同型とすると，g-twisted 弱 V 加群は弱 V^G 加群になる.

次に V 加群の定義を紹介する.

定義 2.5. M を弱 V 加群とする．M が $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{C}} M_i, M_i = \{u \in M \mid L(0)u = iu\}$ と $L(0)$ の固有空間に分解し

(1) 任意の $i \in \mathbb{C}$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} M_i < \infty$ である.

(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$M_{\lambda+n} = 0, \mathbb{Z} \ni n \ll 0$ となっている.

とき，M を **V 加群**という.

定義 2.6. $g \in \mathrm{Aut}\, V$ を有限位数 T の自己同型とする．M を弱 g-twisted V 加群とする．M が $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{C}} M_i, M_i = \{u \in M \mid L(0)u = iu\}$ と $L(0)$ の固有空間に分解し

(1) 任意の $i \in \mathbb{C}$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} M_i < \infty$ である.

(2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$M_{\lambda+n/T} = 0, \mathbb{Z} \ni n \ll 0$ となっている.

とき，M を **g-twisted V 加群**という.

3　ハイゼンベルグ頂点作用素代数

ここでは本稿の考察の対象であるハイゼンベルグ頂点作用素代数とその不変部分代数を紹介する．H を 1 次元ベクトル空間 (有限次元としても以下同様のことが成り立つ) で，非退化双線形形式 $\langle -, - \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ を一つ固定しておく．K を記号として $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\hat{H} = H \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ に，リー環の構造を

$$[\alpha(i), \beta(j)] = \delta_{i+j,0} \langle \alpha, \beta \rangle K, \qquad [\hat{H}, K] = 0$$

で定める．ただし，ここで $\alpha(i) = \alpha \otimes t^i$ $(\alpha \in H, i \in \mathbb{Z})$ とおいている．$\hat{H}$ の部分リー環 $\hat{H}^{\geq 0} = \oplus_{i=0}^{\infty} H \otimes t^i \oplus \mathbb{C}K$ をとる．$\hat{H}^{\geq 0}$ 加群 U であって，任意の $\alpha \in H$ と任意の $u \in U$ に対して

$$\alpha(i)u = 0, i \gg 0, \qquad Ku = u \tag{3.1}$$

を満たしているものを考える．U に対して，$\hat{H}$ への誘導加群

$$M(1, U) = \mathscr{U}(\hat{H}) \otimes_{\mathscr{U}(\hat{H}^{\geq 0})} U$$

を取る．ここで $\mathscr{U}(\hat{H})$ は，$\hat{H}$ の包絡環を表している．

$\alpha \in H$ に対して，一次元 $\hat{H}^{\geq 0}$ 加群 $\mathbb{C}e^{\alpha}$ を

$$\beta(i)e^{\alpha} = \begin{cases} \langle \beta, \alpha \rangle e^{\alpha}, & i = 0, \\ 0, & i \geq 1, \end{cases} \ (\beta \in H), \qquad Ke^{\alpha} = e^{\alpha}$$

で定める．$\mathbb{C}e^{\alpha}$ は条件 (3.1) を満たしていることに注意する．$\alpha = 0$ のとき，$1 \otimes e^0 \in M(1, \mathbb{C}e^0)$ を $\mathbf{1}$ と書いて，$M(1, \mathbb{C}e^0)$ の元 $\alpha_1(-j_1) \cdots \alpha_k(-j_k) \otimes e^0$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in H, j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_{>0})$ を，$\alpha_1(-j_1) \cdots \alpha_k(-j_k)\mathbf{1}$ と表すことにする．

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in H$ とする．$i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{Z}$ に対して写像

$${}^{\circ}_{\circ}\alpha_1(i_1) \cdots \alpha_1(i_k){}^{\circ}_{\circ} : M(1, U) \to M(1, U)$$

を帰納的に

$$\begin{aligned} {}^{\circ}_{\circ}\alpha_1(i_1){}^{\circ}_{\circ} &= \alpha_1(i_1), \\ {}^{\circ}_{\circ}\alpha_1(i_1) \cdots \alpha_1(i_k){}^{\circ}_{\circ} &= \begin{cases} \alpha_1(i_1) {}^{\circ}_{\circ}\alpha_2(i_2) \cdots \alpha_1(i_k){}^{\circ}_{\circ} & i_1 < 0 \\ {}^{\circ}_{\circ}\alpha_2(i_2) \cdots \alpha_1(i_k){}^{\circ}_{\circ}\alpha_1(i_1) & i_1 \geq 0. \end{cases} \ (k \geq 2) \end{aligned}$$

で定め，$\alpha_1(-j_1) \ldots \alpha_k(-j_k)\mathbf{1} \in M(1, \mathbb{C}e^0)$, $(j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_{>0})$ に対して

$$\begin{aligned} &Y_{M(1,U)}(\alpha_1(-j_1) \ldots \alpha_k(-j_k)\mathbf{1}, x) \\ &= {}^{\circ}_{\circ}\Big(\frac{1}{(j_1 - 1)!} \frac{d^{j_1 - 1}}{dx^{j_1 - 1}} \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \alpha_1(m_1) x^{-m_1 - 1} \Big) \cdots \Big(\frac{1}{(j_k - 1)!} \frac{d^{j_k - 1}}{dx^{j_k - 1}} \sum_{m_k \in \mathbb{Z}} \alpha_k(m_k) x^{-m_k - 1} \Big){}^{\circ}_{\circ} \end{aligned}$$

とおく．例えば

$$
\begin{aligned}
&Y_{M(1,U)}(\alpha(-1)\mathbf{1},x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\alpha(m)x^{-m-1},\\
&Y_{M(1,U)}(\alpha_1(-1)\alpha_2(-1)\mathbf{1},x)=\sum_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}}{}^{\circ}_{\circ}\alpha_1(m_1)\alpha_1(m_2){}^{\circ}_{\circ}x^{-m_1-m_2-2}\\
&=\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}\sum_{m_1<0}\alpha_1(m_1)\alpha_2(m_2)x^{-m_1-m_2-2}+\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}\sum_{m_1\geq 0}\alpha_2(m_2)\alpha_1(m_1)x^{-m_1-m_2-2}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

となる．条件 (3.1) より，$a\in M(1,\mathbb{C}e^0)$ と $b\in M(1,U)$ に対して $Y_{M(1,U)}(a,x)b$ の各 x^i $(i\in\mathbb{Z})$ の係数はちゃんと定まっていることが分かる．次のことはよく知られている:

定理 3.1. (1) $(M(1,\mathbb{C}e^0),Y_{M(1,\mathbb{C}e^0)},\mathbf{1},h(-1)^2\mathbf{1}/2)$ は頂点作用素代数となる．ここで，$h\in H$ は $\langle h,h\rangle=1$ となる元である．頂点作用素代数 $M(1,\mathbb{C}e^0)$ を (ランク 1 の) **ハイゼンベルグ頂点作用素代数**といい，以降，$M(1)$ で表すことにする．

(2) 任意の $\alpha\in H$ に対して，$(M(1,\mathbb{C}e^\alpha),Y_{M(1,\mathbb{C}e^\alpha)})$ は既約 $M(1)$ 加群となる．また $\{M(1,\mathbb{C}e^\alpha)\mid\alpha\in H\}$ は既約 $M(1)$ 加群の同型類の完全代表系となっている．

(3) 条件 (3.1) を満たす $\hat{H}^{\geq 0}$ 加群 U に対して，$M(1,U)$ は弱 $M(1)$ 加群になる．

$\theta:M(1)\to M(1)$ を

$$\theta:\alpha(-j_1)\ldots\alpha_k(-j_k)\mathbf{1}\mapsto(-1)^k\alpha(-j_1)\ldots\alpha_k(-j_k)\mathbf{1}.$$

で定められる $M(1)$ の位数 2 の自己同型とし

$$M(1)^{\pm}=\{a\in M(1)\mid\theta a=\pm a\}\tag{3.3}$$

とおく．頂点作用素代数 $M(1)^+(=M(1)^{\langle\theta\rangle})$ は Virasoro 元 $\omega=h(-1)^2\mathbf{1}/2$ と

$$J=h(-1)^4\mathbf{1}-2h(-3)h(-1)\mathbf{1}+\frac{3}{2}h(-2)^2\mathbf{1}\in M(1)^+\tag{3.4}$$

で生成されており [7, Theorem 2.7 (2)]，さらに ω,J は次の関係式

$$
\begin{aligned}
&[\omega_i,J_j]=(3i-j)J_{i+j-1},\\
&[J_i,J_j]=(-\frac{1392}{5}\omega_{-6}\mathbf{1}-\frac{2784}{5}\omega_{-4}\omega_{-1}\mathbf{1}+120\omega_{-3}\omega_{-2}\mathbf{1}+\frac{1632}{5}\omega_{-2}\omega_{-1}^2\mathbf{1}\\
&\qquad-\frac{56}{5}\omega_{-2}J_{-1}\mathbf{1}-\frac{56}{5}\omega_{-1}J_{-2}\mathbf{1}+\frac{6}{5}J_{-4}\mathbf{1})_{i+j}+\cdots
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

を満たしている．$M(1)^+$ に対しては予想 1.1 が成り立つことが知られている:

定理 3.2. [8, Theorem 4.5] $M(1)^{\pm}$, $\underset{(\cong M(1,\mathbb{C}e^{-\alpha}))}{M(1,\mathbb{C}e^{\alpha})}$ $(0 \neq \alpha \in H)$, $M(1)(\theta)^{\pm}$ は既約 $M(1)^{+}$ の完全代表系である．ここで，$M(1)(\theta)$ は θ-twisted 既約 $M(1)$ 加群で，$M(1)(\theta)^{\pm} = \{u \in M(1)(\theta) \mid \theta u = \pm u\}$ である．

4 ハイゼンベルグ頂点作用素代数の不変部分代数と Whittaker ベクトル

ここでは本稿の主結果である，$M(1)^{+}$ の既約弱加群のあるクラスの分類について述べる．まず，Virasoro 代数の Whittaker ベクトルを [18],[16] に沿って紹介する．$\mathrm{Vir} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L(i) \oplus \mathbb{C}C$ を Virasoro 代数とし，$1 \leq s \in \mathbb{Z}$ に対して部分リー環 $\mathrm{Vir}^{\geq s} = \oplus_{i=s}^{\infty}\mathbb{C}L(i) \oplus \mathbb{C}C$ を考える．$\chi : \mathrm{Vir}^{\geq s} \to \mathbb{C}$ を 0 でないリー環の準同型写像とする．

定義 4.1. M を Vir 加群とする．$0 \neq w \in M$ は，任意の $a \in \mathrm{Vir}^{\geq s}$ に対して

$$aw = \chi(a)u$$

を満たすとき，**Whittaker ベクトル**であるという．一つの Whittaker ベクトルで生成されている Vir 加群を **Whittaker 加群**という．

Remark 4.2. (1) w を Whittaker ベクトルとするとき，(2.2) より，$i \geq 2s+1$ ならば $\chi(L(i)) = 0$ が分かる．したがって $(\chi(L(s)), \ldots, \chi(L(2s)))$ を指定すれば χ が定まる．$(\chi(L(2s-1), \chi(L(2s))) \neq (0,0)$ ならば，w から生成される Whittaker 加群は既約となる ([18],[16]).

(2) 定義 4.1 で $s = 1$ の場合が，もともとの Whittaker ベクトルの定義である [18].

一般の頂点作用素代数に対しては，三角分解を持つことが期待できないため，Whittaker 加群の類似があるかどうかは不明である．Whittaker 加群を考える代わりに，(2.2) が頂点作用素代数の Virasoro 元 ω が Vir の表現を与えていることに着目して次のように Whittaker ベクトルを定める．

定義 4.3. $2 \leq m \in \mathbb{Z}, \lambda = (\lambda_{\lfloor m/2\rfloor+1}, \lambda_{\lfloor m/2\rfloor+2}, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^{m-\lfloor m/2\rfloor}$ で $\lambda_m \neq 0$ とする．M を V 加群とする．$0 \neq w \in M$ は

$$\omega_i w (= L(i-1)w) = \lambda_i w, \quad i = \lfloor m/2\rfloor+1, \lfloor m/2\rfloor+2, \ldots, m \tag{4.1}$$

を満たすとき，**(ω に関する)λ 型の Whittaker ベクトル**であるという．ここで，$\lfloor m/2\rfloor = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid i \leq m/2\}$ とおいている．

3節のハイゼンベルグ頂点作用素代数 $M(1)$ を考える．r を正の整数，$\zeta = (\zeta_0, \ldots, \zeta_r) \in \mathbb{C}^{r+1}$ で $\zeta_r \neq 0$ とする．$\hat{H}^{\geq 0}$ 加群 $\mathbb{C}u_\zeta$ を次で定める．

$$h(i)u_\zeta = \begin{cases} \zeta_i u_\zeta, & i = 0, \ldots, r, \\ 0, & i > r, \end{cases} \qquad\qquad Ku_\zeta = u_\zeta.$$

弱 $M(1)$ 加群 $M(1, \mathbb{C}u_\zeta) = \mathscr{U}(\hat{H}) \otimes_{\mathscr{U}(\hat{H}^{\geq 0})} \mathbb{C}u_\zeta$ を簡単に $M(1, \zeta)$ と書くことにする．$M(1, \zeta)$ が既約であることは簡単に分かる．(3.2) より

$$\omega_i u_\zeta (= L(i-1)u_\zeta) \begin{cases} \in \mathbb{C}u_\zeta, & i = r+1, r+2, \ldots, 2r+1, \\ = 0, & i \geq 2r+2, \end{cases}$$

特に，$\omega_{2r+1}u_\zeta = (\zeta_r^2/2)u_\zeta \in \mathbb{C}^\times u_\zeta$ が分かる．したがって，u_ζ は $M(1, \zeta)$ の Whittaker ベクトルである．また，頂点作用素代数の加群では，ω_{2r+1} は 0 以外の固有値が持たないことがすぐに分かるので，$M(1, \zeta)$ は $M(1)$ 加群でない弱 $M(1)$ 加群であることが分かる．

Whittaker ベクトルを持つ既約弱 $M(1)^+$ 加群について，予想 1.1 の類似が正しいことを示したのが本稿の主結果である:

定理 4.4. [19, Theorem 1.1] ω に関する Whittaker ベクトルから生成されている弱 $M(1)^+$ 加群 M は既約である．また，次は Whittaker ベクトルをもつ既約弱 $M(1)^+$ 加群の完全代表系である:

(1) $M(1, \zeta)(\cong M(1, -\zeta)), \zeta \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^\times, r = 1, 2, \ldots$

(2) $M(1, \zeta)(\theta)(\cong M(1, -\zeta)(\theta)), \zeta \in \mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{C}^\times$, $r = 1, 2, \ldots$. ここで，$M(1, \zeta)(\theta)$ は既約弱 θ-twisted $M(1)$ 加群である．

証明は，まず (3.4) の ω, J に関して，$M(1)^+$ での関係式をうまく見つけておく．その関係式を用い，(3.5) と (4.1) を繰り返し使って，[18],[16] の Virasoro 代数の Whittaker 加群の場合に問題を帰着させれば，証明が完了する．

参考文献

[1] T. Abe and C. Dong, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra V_L^+ : general case, *J. Algebra* **273** (2004), 657–685.

[2] D. Adamović, R. Lü, and. K. Zhao, Whittaker modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, *Adv. Math.* **289** (2016), 438–479.

[3] D. Arnal and G. Pinczon, On algebraically irreducible representations of the Lie algebra $sl(2)$, *J. Math. Phys.* **15** (1974), 350–359.

[4] R. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.

[5] R. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109** (1992), 405–444.

[6] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, and H. Verlinde, The operator algebra of orbifold models, *Comm. Math. Phys.* **123** (1989), 485–526.

[7] C. Dong and R. L. Griess Jr., Rank one lattice type vertex operator algebras and their automorphism groups, *J. Algebra* **208** (1998), 262–275.

[8] C. Dong and K. Nagatomo, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra $M(1)^+$, *J. Algebra* **216** (1999), 384–404.

[9] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L, *Comm. Math. Phys.* **202** (1999), 169–195.

[10] C. Dong and K. Nagatomo, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra $M(1)^+$. II. Higher rank, *J. Algebra* **240** (2001), 289–325.

[11] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. **134**, Academic Press, 1988.

[12] D. Gaiotto, Asymptotically free $\mathscr{N} = 2$ theories and irregular conformal blocks, Journal of Physics: Conference Series **462** (2013) 012014

[13] B. Kostant, On Whittaker vectors and representation theory, *Invent. Math.* **48** (1978), 101–184.

[14] J. Lepowsky and H. S. Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and their Representations*, Progress in Mathematics **227**, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[15] H. S. Li, Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules, *J. Pure Appl. Algebra* **109** (1996), 143–195.

[16] R. Lü, X. Guo, K. Zhao, Irreducible modules over the Virasoro algebra, *Doc. Math.* **16** (2011), 709–721.

[17] M. Miyamoto, C_2-Cofiniteness of Cyclic-Orbifold Models, *Comm. Math. Phys.* **335** (2015), 1279–1286.

[18] M. Ondrus and E. Wiesner, Whittaker modules for the Virasoro algebra, *J. Algebra Appl.* **8** (2009), 363–377.

[19] K. Tanabe, Simple weak modules for the fixed point subalgebra of the Heisenberg vertex operator algebra of rank 1 by an automorphism of order 2 and Whittaker vectors, arXiv:1608.07890.

[20] K. Tanabe and H. Yamada, The fixed point subalgebra of a lattice vertex operator algebra by an automorphism of order three, *Pacific J. Math.* **230** (2007), 469–510.

[21] K. Tanabe and H. Yamada, Fixed point subalgebras of lattice vertex operator algebras by an automorphism of order three, *J J. Math. Soc. Japan* **65** (2013), 1169–1242.

[22] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.