AN INTERPRETATION OF BISET FUNCTORS AS MACKEY FUNCTORS ON FINITE GROUPOIDS, AND ITS RELATION TO DERIVATORS

中岡 宏行（HIROYUKI NAKAOKA）

Mackey 関手・丹原関手・biset 関手はいずれも有限群に付随する代数系のあいだの演算を記述する概念である．例えば，有限群 G に Burnside 環 Ω_G を対応させると，部分群 $H \leq G$ および正規部分群による剰余 G/N に対して 6 種の写像

$$\begin{tikzcd}
\Omega_H \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Ind}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Jnd}"'] & \Omega_G \arrow[l, "\mathrm{Res}" description] \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{Orb}"] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Inv}"'] & \Omega_{G/N} \arrow[l, "\mathrm{Inf}" description]
\end{tikzcd}$$

が得られる．大雑把に言うと Mackey 関手はこの 6 つのうち $\mathrm{Ind}, \mathrm{Res}$ の二つを，丹原関手は $\mathrm{Ind}, \mathrm{Res}, \mathrm{Jnd}$ の三つを，biset 関手は $\mathrm{Ind}, \mathrm{Res}, \mathrm{Inf}, \mathrm{Orb}(= \mathrm{Def})$ の 4 つを扱う概念である．そのため，上記全てを包括的に扱う枠組みを与えるために,「丹原 biset 関手」とでも呼ぶべき，biset 関手と丹原関手の融合を目指すのは自然である．

1. Mackey 関手

有限群 G 上の Mackey 関手の定義を記す．Mackey 関手の基本的な性質については [Bo97],[TW95], [W00] などを参照.

定義 1.1. G 上の **Mackey 関手** $M = \{M_H, \mathrm{res}^H_K, \mathrm{ind}^H_K, c_{g,H}\}$ とは，

- 部分群 $H \leq G$ に対し，加群 M_H
- 部分群の列 $K \leq H \leq G$ に対し，**制限**と呼ばれる準同型 $\mathrm{res}^H_K \colon M_H \to M_K$ および**推移**と呼ばれる準同型 $\mathrm{ind}^H_K \colon M_K \to M_H$
- 部分群 $H \leq G$ および元 $g \in G$ に対し，**共役**と呼ばれる準同型 $c_{g,H} \colon M_H \to M_{{}^gH}$

からなる加群と準同型の族であり，以下を満たすものをいう．

(i) 任意の $H \leq G$, $h \in H$ に対して，$\mathrm{res}^H_H = \mathrm{ind}^H_H = c_{h,H} = \mathrm{id}$.
(ii) 任意の $H \leq G$ および $g, g' \in G$ に対して，$c_{g', {}^gH} \circ c_{g,H} = c_{g'g,H}$.
(iii) 任意の $L \leq K \leq H \leq G$ に対して，$\mathrm{res}^K_L \circ \mathrm{res}^H_K = \mathrm{res}^H_L$, $\mathrm{ind}^H_K \circ \mathrm{ind}^K_L = \mathrm{ind}^H_L$.
(iv) 任意の $K \leq H \leq G$ および $g \in G$ に対して，$c_{g,K} \circ \mathrm{res}^H_K = \mathrm{res}^{{}^gH}_{{}^gK} \circ c_{g,H}$，$c_{g,H} \circ \mathrm{ind}^H_K = \mathrm{ind}^{{}^gH}_{{}^gK} \circ c_{g,K}$.
(v) 任意の $K, L \leq H$ に対して

$$\mathrm{res}^H_L \circ \mathrm{ind}^H_K = \sum_{LhK \in L\backslash H/K} \mathrm{ind}^L_{{}^hK \cap L} \circ c_{h, K \cap L^h} \circ \mathrm{res}^K_{K \cap L^h}. \tag{1.1}$$

この (v) は Mackey 条件と呼ばれる．

以下，共役をどのように与えるかについてはしばしば省略する．

例 1.2. 各 $H \le G$ に対して Burnside 環 Ω_H を対応させ，部分群の列 $K \le H \le G$ に通常の制限 $\mathrm{res}^H_K\colon \Omega_H \to \Omega_K$ および推移 $\mathrm{ind}^H_K\colon \Omega_K \to \Omega_H$ を対応させると，**Burnside 関手** Ω が得られる．

例 1.3. Q を G-加群とする．次の対応で Mackey 関手 $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{(Q)}$ が得られる．これを固定点関手と呼ぶことにする．

- 各 $H \le G$ に対して，部分加群 $Q^H = \{q \in Q \mid hq = q\ (\forall h \in H)\}$ を対応させる．
- 部分群の列 $K \le H \le G$ に対して，制限 $\mathrm{res}^H_K\colon Q^H \hookrightarrow Q^K$ は包含写像とし，推移 $\mathrm{ind}^H_K\colon Q^K \to Q^K$ は
$$\mathrm{ind}^H_K(x) = \sum_{h \in H/K} hx \quad (\forall x \in Q^K)$$
なる写像とする．

下記は，有限 G 集合の圏 ${}_Gset$ を用いた同値な言い換えである．部分群 $H \le G$ からは対象 $G/H \in \mathrm{Ob}({}_Gset)$ が得られ，部分群の包含 $K \le H \le G$ からは射 $G/K \to G/H$ が得られることに注意．

定義 1.4. 反変関手 $M^*\colon {}_Gset \to Ab$ と共変関手 $M_*\colon {}_Gset \to Ab$ の対 $M = (M_*, M^*)$ が以下を満たすとき，これを Mackey 関手という．ただし，Ab はアーベル群の圏を表す．

(1) $M^*(X) = M_*(X)$ が任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_Gset)$ に対して成立．これを $M(X)$ で表す．この条件は，$M = (M_*, M^*)$ が共変性と反変性を併せ持つ「両変」関手であることを意味している．
(2) M^* は加法的である．すなわち，${}_Gset$ における任意の有限直和を Ab における有限直積にうつす．
(3) ${}_Gset$ における任意のファイバー積
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$
に対し，$M_*(x)M^*(f') = M^*(f)M_*(y)$.

Mackey 関手 $M = (M^*, M_*)$ から $N = (N^*, N_*)$ への射 $\varphi = \{\varphi_X\}_{X \in \mathrm{Ob}({}_Gset)}$ とは，加群の射 $\varphi_X\colon M(X) \to N(X)$ の族であって共変部分と反変部分の両方に関し自然であるものをいう．これにより，G 上の Mackey 関手の圏 $Mack(G)$ が得られる．

終域の Ab を，単位元付き可換半群の圏 Mon で置き換えると，**半 Mackey 関手**の圏 $SMack(G)$ が得られる．Mon を集合の圏 Set で置き換えても，自然に Mon を経由するため結果は同じとなる．$Mack(G) \subseteq SMack(G)$ は充満部分圏である．

上記の様に関手の対としても定義される Mackey 関手であるが，スパン圏上の単一の関手と見做すこともできる．この結果は Lindner[L76] による．

定義 1.5. ${}_Gset$ から生じる**スパン圏** $\mathcal{S} = \mathcal{S}({}_Gset)$ とは，以下で定まる圏をいう．

- 対象は有限 G-集合．すなわち，$\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) = \mathrm{Ob}({}_Gset)$.
- 対象 X, Y の間の射は，${}_Gset$ における射の対
$$(X \xleftarrow{f} V \xrightarrow{g} Y)$$

の同値類とする．ただし，$(X \xleftarrow{f} V \xrightarrow{g} Y)$ と $(X \xleftarrow{f'} V' \xrightarrow{g'} Y)$ が同値であるとは，$f' \circ v = f$ および $g' \circ v = g$ を満たす同型射 $v \in {}_G set(V, V')$ が存在するときをいう．

射の合成はファイバー積を用いて定義される．圏 $\mathcal{S}$ において，二つの対象 X_1, X_2 の直積が，${}_G set$ における直和 $X_1 \amalg X_2$ で与えられる．また，空集合 $\emptyset$ は終対象となる．

事実 1.6. ([L76]) 圏同値 $Prod(\mathcal{S}, Set) \xrightarrow{\simeq} SMack(G)$ および $Prod(\mathcal{S}, Ab) \xrightarrow{\simeq} Mack(G)$ が存在する．ただし $Prod$ で，有限積を保つ関手の圏を表す.

2. 丹原関手

Mackey 関手が制限・推移（および共役）の関係を記述しているのに対し，丹原関手はこれに乗法的推移を加えた演算の関係を記述する概念である．

定義 2.1. 射 $f \in {}_G set(X, Y)$ の定める引き戻し関手 $f^*\colon {}_G set/Y \to {}_G set/X$ は左随伴 $f \circ -$ および右随伴 Π_f を持つことに注意する．この随伴性を用いると，射 $p \in {}_G set(A, X)$ に対し，次を可換にする e が得られる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & A \arrow[l, "p"'] \arrow[d, phantom, "\Box"] & X \underset{Y}{\times} \Pi_f(A) \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & & \Pi_f(A) \arrow[ll, "\pi"] \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

ただし，外周はファイバー積とする．この図式を f と p から定まる**指数図式** とよぶ.

定義 2.2. （[Ta93, Br05]）関手の 3 つ組 $T = (T^*, T_+, T_\bullet)$ が**丹原関手**（resp. **半丹原関手**）であるとは，以下を満たすときをいう．

(i) 加法部分 $T^\alpha = (T^*, T_+)$ は Mackey 関手（resp. 半 Mackey 関手）.

(ii) 乗法部分 $T^\mu = (T^*, T_\bullet)$ は半 Mackey 関手.

(iii) 任意の指数図式 (2.1) に対して，$T_\bullet(f)T_+(p) = T_+(\pi_+)T_\bullet(f')T^*(e)$.

条件 (iii) を分配則とよぶ．任意の対象 X に対し，$T(X)$ には (i) から加法群（resp. 加法的半群）の構造が，(ii) から乗法的半群の構造が入り，分配則によりこれは可換環（resp. 可換半環）となる．

（半）丹原関手のあいだの射とは，加法部分・乗法部分のいずれについても半 Mackey 関手の射を与えるような写像の族とする．半丹原関手の圏を $STam(G)$，その充満部分圏である丹原関手の圏を $Tam(G)$ で表す.

例 2.3. Burnside 環は丹原関手をなす．また，半 Burnside 環は半丹原関手をなす.

Mackey 関手の圏 $Mack(G)$ はアーベル圏であると同時に，Burnside 関手をユニットとする対称モノイダル圏である．さらに，G が自明な群の場合には Ab に圏同値となる．これらのことから，Mackey 関手はアーベル群の G-同変な拡張とみなされる．丹原関手は

- 加法的には Mackey 関手 ⋯ アーベル群の G-同変版
- 乗法的には半 Mackey 関手 ⋯ 単位元付き可換半群の G-同変版

からなり，さらに分配則の G-同変版を満たす対象である．G が自明な場合は，$Tam(G)$ は通常の可換環の圏に同値となる．そのため，丹原関手は可換環の G-同変版と見做せる（[Y06]）.

注 2.4. 可換 G-代数 R に付随する固定点関手 $\mathcal{P}^{(R)}$ は丹原関手となる．これにより忠実充満な関手

$$\mathcal{P}\colon G\text{-}Ring \to Tam(G)$$

が得られる．この意味で，丹原関手は G-代数よりも広いクラスの対象を扱っていると言える．

可換環の G-同変版であるという観点から，可換環論における基本的な構成が丹原関手に拡張されると期待できる．例えば、次の結果は可換半環の Grothendieck 環をとる構成の拡張を与える．

事実 2.5. ([Ta93]) 包含関手 $Tam(G) \to STam(G)$ は左随伴関手をもつ．

この他にも，

(a) 丹原関手の，乗法的部分半 Mackey 関手による fraction ⋯ [N12a],
(b) 丹原関手のイデアルによる剰余 ⋯ [N12b],
(c) 丹原関手上の,「多項式環」をとる操作の類似 ⋯ [N13],
(d) 半 Mackey 関手から丹原関手を得る，群環をとる操作の G-同変版 ⋯ [N11]

などが可能である．特に，(c) は丹原関手に対する Dress 構成（[OY11]）とも関連する．また，(b) を用いて丹原関手の素スペクトラムを構成することもできる．以下は，$G = \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$（$p$ は素数）の場合の Burnside 関手の *Spec* を，各点の閉包を図示し表したものである（[N14]）.

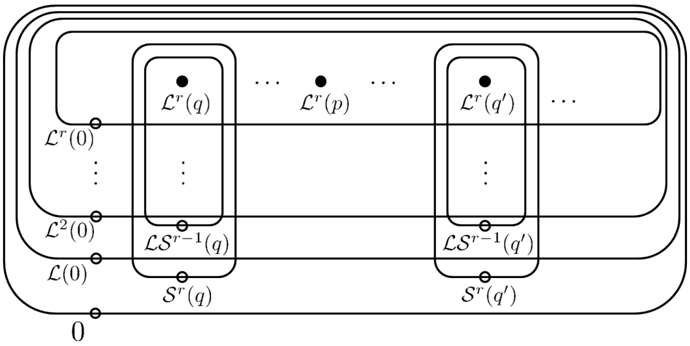

FIGURE 1. $\mathit{Spec}\,\Omega$ for $G = \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$

3. MACKEY 関手としての BISET 関手

G の部分群に限らない有限群とその間の包含準同型に対して定義 1.1 と同様の条件を課した族を，大域的 Mackey 関手という．さらに，群のあいだの任意の準同型を扱うのは自然である．実際には次の様に両側集合を用いて，Bouc により **biset 関手**という概念が定義された [Bo10].

定義 3.1. G, H を有限群とし，U を有限集合とする．U が左 H-作用と右 G-作用を持ち，

$$(hu)g = h(ug) \quad (\forall h \in H, g \in G, u \in U)$$

を満たすとき，U を ***H-G*-biset** とよぶ．このとき，${}_HU_G$ のように表す．U が H-G-biset であることは，有限 $H \times G^{\mathrm{op}}$-集合であることと同値である．

注 3.2. 有限群の準同型 $\varphi\colon G \to H$ から，biset として ${}_HG_G$ および ${}_GG_H$ が得られることに注意する．特に，次のような基本的な biset が得られる．

- 部分群の包含 $H \hookrightarrow G$ に対し，$\mathrm{Res}^G_H = {}_HG_G$ および $\mathrm{Ind}^G_H = {}_GG_H$.

- 正規部分群による剰余 $G \to G/N$ に対し，$\mathrm{Inf}^G_{(G/N)} = {}_G(G/N)_{(G/N)}$ および $\mathrm{Def}^G_{(G/N)} = {}_{(G/N)}(G/N)_G$.
- 群の同型 $\varphi\colon G \to G'$ に対し，$\mathrm{Iso}_\varphi = {}_{G'}G'_G$.

定義 3.3. 有限群の biset 圏 $\mathcal{B}$ を以下のように定義する（[Bo10]）.

(1) $\mathcal{B}$ の対象は有限群とする.
(2) 有限群 G, H に対し，射集合は $\mathcal{B}(G,H) = \Omega_{(H\times G^{\mathrm{op}})}$ とする.

${}_KV_H$ と ${}_HU_G$ の合成は商集合

$$V \times_H U = (V \times U)/(vh, u) \sim (v, hu)$$

で定め，$\mathcal{B}$ に加法的に延長する．$\mathcal{B}$ はプレ加法圏となる.

定義 3.4. $\mathcal{B}$ 上の加法関手 $F\colon \mathcal{B} \to Ab$ のことを，**biset 関手**と呼ぶ．自然変換を射とすることで，biset 関手の圏が得られる．この圏を $\mathcal{F}$ で表すこととする.

この定義は，Mackey 関手に対する Lindner の結果と通ずるものがある．Bouc により得られた，biset の次の様な分解に注意しよう（[Bo10]）.

事実 3.5. ${}_HU_G$ が既約ならば，有限群の包含・剰余・同型からなる準同型の列

$$H \hookleftarrow C \twoheadrightarrow C/D \xleftarrow[\cong]{f} B/A \twoheadleftarrow B \hookrightarrow G. \tag{3.1}$$

が存在して，必ず次の様に分解できる.

$$U \cong \mathrm{Ind}^H_C \underset{C}{\times} \mathrm{Inf}^C_{C/D} \underset{C/D}{\times} \mathrm{Iso}_f \underset{B/A}{\times} \mathrm{Def}^B_{B/A} \underset{B}{\times} \mathrm{Res}^G_B.$$

列 (3.1) はファイバー積をとることで，次の様に「折り返す」ことができる.

$$\begin{tikzcd}
 & & F \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
H & C \arrow[l] \arrow[dr] & \circlearrowleft & B \arrow[r] \arrow[dl] & G \\
 & & C/D \cong B/A & &
\end{tikzcd}$$

従って同型を除き，群準同型のスパン

$$H \xleftarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G$$

と見做せる．Lindner の結果との類似を追い「丹原 biset 関手」を定義するならば，まず biset 圏を「半分」にした圏上で Mackey 関手を考察する必要が生じる．実際には，これは以下の様な 2-圏で実現できる.

定義 3.6. 2-圏 $\mathbb{S}$ を次の様に定義する.（[N16c]）

(0) 0-セルは有限群 G と有限 G-集合 X の対とする．この対を $\frac{X}{G}$ で表す.
(1) 0-セル $\frac{X}{G}, \frac{Y}{H}$ に対し，1-セル $\frac{\alpha}{\theta}\colon \frac{X}{G} \to \frac{Y}{H}$ とは写像 $\alpha\colon X \to Y$ および写像の族 $\{\theta_x\colon G \to H\}_{x\in X}$ の対であって
  (i) $\alpha(gx) = \theta_x(g)\alpha(x)$
  (ii) $\theta_x(gg') = \theta_{g'x}(g)\theta_x(g')$
  を任意の $x \in X$ および $g, g' \in G$ に対して満たすものをいう．特に $G = H$ のとき，$\theta_x = \mathrm{id}$ を満たすような 1-セルを（G-）同変な 1-セルといい $\frac{\alpha}{G}\colon \frac{X}{G} \to \frac{Y}{G}$ のように表す.

(2) 1-セル $\frac{\alpha}{\theta},\frac{\alpha'}{\theta'}\colon\frac{X}{G}\to\frac{Y}{H}$ に対し，2-セル $\varepsilon\colon\frac{\alpha}{\theta}\Rightarrow\frac{\alpha'}{\theta'}$ とは H の元の族 $\{\varepsilon_x\in H\}_{x\in X}$ であって
 (i) $\alpha'(x)=\varepsilon_x\alpha(x)$,
 (ii) $\varepsilon_{gx}\theta_x(g)\varepsilon_x^{-1}=\theta'_x(g)$
を任意の $x\in X$ および $g\in G$ に対して満たすものをいう．

合成などの詳細は [N16c] を参照．次の様に有限亜群の 2-圏 finGpd との同値が存在するので，これで合成等を引き戻して与えてもよい．

命題 3.7. （[N16a]）以下の対応で *2*-関手 $\iota\colon\mathbb{S}\hookrightarrow\mathrm{finGpd}$ が得られ，*2*-圏の同値を与える．

(1) *0*-セル $\frac{X}{G}\in\mathbb{S}^0$ に対して，有限亜群 $\iota(\frac{X}{G})$ を
 - $\mathrm{Ob}(\iota(\frac{X}{G}))=X$.
 - 任意の対象 $x,x'\in X$ に対して，射集合は $\iota(\frac{X}{G})(x,x')=\{g\in G\mid gx=x'\}$.

と定める．

(2) *0*-セル $\frac{X}{G},\frac{Y}{H}$ に対して，*1*-セルのあいだの全単射
$$\iota\colon\mathbb{S}^1(\frac{X}{G},\frac{Y}{H})\xrightarrow{\cong}\mathrm{finGpd}^1(\iota(\frac{X}{G}),\iota(\frac{Y}{H}))$$
が存在．

(3) *1*-セル $\frac{\alpha}{\theta},\frac{\beta}{\tau}\colon\frac{X}{G}\to\frac{Y}{H}$ に対し，*2*-セルのあいだの全単射
$$\iota\colon\mathbb{S}^2(\frac{\alpha}{\theta},\frac{\beta}{\tau})\xrightarrow{\cong}\mathrm{finGpd}^2(\iota(\frac{\alpha}{\theta}),\iota(\frac{\beta}{\tau})),$$
が存在．

この同値の存在から，以下では $\mathbb{S}$ を finGpd で置き換えても本質的な差異は無い．

補題 3.8. *2*-圏 $\mathbb{S}$ は以下の性質を持つ．

(1) 任意の *0*-セル $\frac{X}{G},\frac{Y}{H}$ に対し *bicoproduct* $\frac{X}{G}\coprod\frac{Y}{H}$ が存在．これは ι で圏の直和にうつる．

(2) 任意の *1*-セル $\frac{\alpha}{\theta}\colon\frac{X}{G}\to\frac{Z}{K},\frac{\beta}{\tau}\colon\frac{Y}{H}\to\frac{Z}{K}$ に対し，*bipullback* $\frac{X}{G}\times_{\frac{Z}{K}}\frac{Y}{H}$ が存在．これは ι でコンマ図式にうつる．

これを用いて，$\mathbb{S}$ 上の Mackey 関手を次の様に定義する．

定義 3.9. $\mathbb{S}$ 上の **Mackey 関手**（resp. **半 Mackey 関手**）とは，$\mathbb{S}$ から Ab（resp. Set）への反変および共変的な 2-関手の対 $M=(M^*,M_*)$ であって以下を満たすものをいう．ただしここで，Ab（resp. Set）は自明な 2-セルを与えて 2-圏とみなす．従って，$\mathbb{S}$ の 2-セルは M^*,M_* により全て id にうつる．

(i) 任意の 0-セル $\frac{X}{G}$ に対して $M^*(\frac{X}{G})=M_*(\frac{X}{G})$ が成立．これを $M(\frac{X}{G})$ で表す．
(ii) M^* は bicoproduct を積にうつす．また，$M(\emptyset)$ は終対象．
(iii) 任意の bipullback
$$\begin{tikzcd}\frac{W}{L} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \frac{Y}{H} \arrow[d, "\beta"] \\ \frac{X}{G} \arrow[r, "\alpha"'] & \frac{Z}{K}\end{tikzcd}$$
に対して，$M^*(\alpha)M_*(\beta)=M_*(\gamma)M^*(\delta)$ が成立．

このとき，次が成り立つ．

定理 3.10. *Biset* 関手 $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{F})$ に対し，$M_F = i(F)$ を

- 有限群 G に対し $M_F(\frac{\mathbf{1}}{G}) = F(G)$．ここで，$\mathbf{1}$ は一点集合を表す.
- 群の準同型 $\varphi\colon G \to H$ に対し $M_F^*(\frac{\mathbf{1}}{\varphi}) = F({}_G H_H)$, $(M_F)_*(\frac{\mathbf{1}}{\varphi}) = F({}_H H_G)$. ここで，一点への定値写像を同じ記号で $\mathbf{1}$ と表す.

となるよう定めることができる．この対応は，以下を満たす関手 $i\colon \mathcal{F} \to \mathit{Mack}(\mathbb{S})$ を与える.

(1) $\ell \circ i \cong \mathrm{Id}$ となる左随伴関手 ℓ を持ち，i は忠実充満である.
(2) $M \in \mathrm{Ob}(\mathit{Mack}(\mathbb{S}))$ が i の本質的像に属することは，等式

$$M_*(\frac{\mathbf{1}}{\varphi})M^*(\frac{\mathbf{1}}{\varphi}) = \mathrm{id} \tag{3.2}$$

を任意の全射準同型 $\varphi\colon G \to H$ に対して満たすことに同値．ここで $\frac{\mathbf{1}}{\varphi}$ は $\frac{\mathbf{1}}{\varphi}\colon \frac{\mathbf{1}}{G} \to \frac{\mathbf{1}}{H}$ なる *1*-セル.

従って，(3.2) を満たす Mackey 関手が biset 関手との関係において重要となる.

定義 3.11. Mackey 関手 M が任意の全射準同型 $\varphi\colon G \to H$ に対して (3.2) を満たすとき，M は **deflative** であるという．Deflative Mackey 関手のなす充満部分圏を $\mathit{Mack}_{\mathrm{dfl}}(\mathbb{S}) \subseteq \mathit{Mack}(\mathbb{S})$ で表す.

定理 3.10 から，biset 関手の圏と deflative Mackey 関手の圏のあいだの圏同値が得られる．より精密には，次が成り立つ.

定理 3.12. 以下が成立する.

(1) 圏 $\mathit{Mack}(\mathbb{S})$ は対称モノイダル圏となる.
(2) (1) のモノイダル構造を $\mathit{Mack}_{\mathrm{dfl}}(\mathbb{S})$ に制限すると，$\mathit{Mack}_{\mathrm{dfl}}(\mathbb{S})$ も対称モノイダル圏となる.
(3) 関手 i はモノイダル同値 $i\colon \mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} \mathit{Mack}_{\mathrm{dfl}}(\mathbb{S})$ を与える.

また定理 3.10 から，$\mathbb{S}$ 上の Mackey 関手 M から biset 関手 $\ell(M)$ が得られる．さらに，Mackey 関手 M は例えば次のような形で得ることができる.

命題 3.13. finGpd 上の *prederivator*（[G13] を参照）$\mathbb{D}\colon \mathrm{finGpd}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$ が以下の条件を満たすとする．ただし $\mathscr{C}$ は *skeletally small* な圏のなす *2*-圏とする.

(i) finGpd の *0*-セルの任意の有限直和は，$\mathbb{D}$ により直積にうつる.
(ii) finGpd の任意の *1*-セル f に対し，$\mathbb{D}(f) = f^*$ は左随伴 f_+（*resp.* 右随伴 $f_\bullet$）を持つ.
(iii) finGpd における任意のコンマ図式

$$\begin{tikzcd} v/u \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & \mathscr{D} \arrow[d, "v"] \\ \mathscr{C} \arrow[r, "u"'] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

に対して，関手の同型 $q_+p^* \cong v^*u_+$（*resp.* $p_\bullet q^* \cong u^*v_\bullet$）が存在.

このとき，

- $\mathbb{S}$ の *0*-セル $\frac{X}{G}$ に対して，$M(\frac{X}{G}) = \mathrm{Ob}(\mathbb{D}(\iota(\frac{X}{G})))$ とする.
- $\mathbb{S}$ の *1*-セル $\frac{\alpha}{\theta}\colon \frac{X}{G} \to \frac{Y}{H}$ に対して，関手 $\iota(\frac{\alpha}{\theta})^*, \iota(\frac{\alpha}{\theta})_+$（*resp.* $\iota(\frac{\alpha}{\theta})_\bullet$）が誘導する写像をそれぞれ $M^*(\frac{\alpha}{\theta})\colon M(\frac{Y}{H}) \to M(\frac{X}{G})$ および $M_+(\frac{\alpha}{\theta})\colon M(\frac{X}{G}) \to M(\frac{Y}{H})$（*resp.* $M_\bullet(\frac{\alpha}{\theta})\colon M(\frac{X}{G}) \to M(\frac{Y}{H})$）とする.

と定めると，$M=(M^*,M_+)$（*resp.* $M=(M^*,M_\bullet)$）は $\mathbb{S}$ 上の半 *Mackey* 関手をなす（[N16a]）.

注 3.14. $\mathbb{D}$ が例えば有限な圏のなす 2-圏 finCat 上の derivator（[G13]）であれば，上記の条件は満たされ，$\mathbb{S}$ 上の 2-関手の 3 対 $(M_+,M^*,M_\bullet)$ であって

- (M^*,M_+) および $(M^*,M_\bullet)$ はそれぞれ半 Mackey 関手

を満たすものが得られる.

例 3.15. 有限集合のなす圏 *set* の表現する derivator に以上の構成を行うと，半 Burnside 環のなす $\mathbb{S}$ 上の半 Mackey 関手が得られる.

以上のことを踏まえると,「丹原 biset 関手」は,

(i) 加法的には $\mathbb{S}$ 上の（deflative）Mackey 関手
(ii) 乗法的には $\mathbb{S}$ 上の半 Mackey 関手
(iii) 何らかの「分配則」を満たす

と言う条件で定義するのが適切であろう．(3) の「分配則」の完全な形は未だ得られていないが，同変な 1-セル $\frac{\alpha}{G}\colon \frac{X}{G}\to\frac{Y}{G}$ に対しては bipullback を用いて得られる関手 $(\frac{\alpha}{\theta})^*\colon {}_Gset/Y\to {}_Gset/Y$ が左随伴および右随伴を持つことが確かめられ，これを用いて指数図式が定義できる．Burnside 関手は，この指数図式に関し定義 2.2(iii) と同様の分配則を満たすことが示されている（[N16b]）.

References

[Bo10] Bouc, S.: *Biset functors for finite groups*, Lecture Notes in Mathematics, 1990, Springer-Verlag, Berlin (2010).

[Bo97] Bouc, S.: *Green functors and G-sets*, Lecture Notes in Mathematics, 1671, Springer-Verlag, Berlin (1997).

[Br05] Brun, M.: *Witt vectors and Tambara functors*, Adv. Math. **193** (2005) 233–256.

[G13] Groth, M.: *Derivators, pointed derivators and stable derivators.* Algebr. Geom. Topol. **13** (2013) no. 1, 313–374.

[L76] Lindner, H.: *A remark on Mackey-functors*, Manuscripta math. **18** (1976), 273-278.

[N16a] Nakaoka, H.: *Biset functors as module Mackey functors and its relation to derivators*, Comm. Alg. **44** (2016) 5105–5148.

[N16b] Nakaoka, H.: *Partial Tambara structure on the Burnside biset functor, induced from a derivator-like system of adjoint triplets*, J. Algebra **451** (2016) 166–207.

[N16c] Nakaoka, H.: *A Mackey-functor theoretic interpretation of biset functors*, Adv. in Math. **289** (2016) 603–684.

[N14] Nakaoka, H.: *The spectrum of the Burnside Tambara functor on a finite cyclic p-group*, J. Algebra **398** (2014) 21–54.

[N13] Nakaoka, H.: *A generalization of the Dress construction for a Tambara functor, and its relation to polynomial Tambara functors.* Adv. in Math. **235** (2013) 237–260.

[N12a] Nakaoka, H.: *On the fractions of semi-Mackey and Tambara functors.* J. Algebra **352** (2012) 79–103.

[N12b] Nakaoka, H.: *Ideals of Tambara functors.* Adv. in Math. **230** (2012) 2295–2331.

[N11] Nakaoka, H.: *Tambarization of a Mackey functor and its application to the Witt-Burnside construction.* Adv. in Math. **227** (2011) 2107–2143.

[OY11] Oda, F.; Yoshida, T.: *The crossed Burnside rings III. The Dress construction for a Tambara functor*, J. Algebra **327** (2011) 31–49.

[Ta93] Tambara, D.: *On multiplicative transfer*, Comm. Algebra **21** (1993) 1393-1420.

[TW95] Thévenaz, J.; Webb, P.J.: *The structure of Mackey functors*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995) 1865–1961.

[W00] Webb, P.: *A guide to Mackey functor, Handbook of algebra*, Vol. 2, (2000) 805–836.

[Y06] 吉田 知行: 丹原ファンクター係数の多項式環（有限群のコホモロジー論とその周辺）, 数理解析研究所講究録 **1466** (2006) 21–34.

890-0065 鹿児島市郡元 1-21-35, 鹿児島大学学術研究院理工学域理学系
E-mail address: nakaoka@sci.kagoshima-u.ac.jp