Biset functors and cohomology of finite groups

飛田明彦 (埼玉大学教育学部)

1　はじめに

有限群 G 上の Mackey 関手は, G の部分群に関する, 制限・誘導・共役等の作用を圏論的に扱う枠組みです。一方, ひとつの有限群だけではなく, すべての有限群を扱う大域的な枠組みとして, global Mackey 関手が定義されます。さらに, 有限群の部分群や準同型写像などは, 群が左右から作用する集合, biset の枠組みで捉えることができ, biset 圏が定義され, biset 圏上の関手として biset 関手が定義されます。そこでは, 部分群や, 共役あるいは単射準同型写像のみならず, inflation, deflation, という二つの作用も取り込まれます。しかし, 本稿での対象である群の表現や cohomology は, deflation に対応する作用を持たず, inflation のみを取り入れた右自由な biset が対象となります。

一方, 有限群 G の biset 圏での自己準同型環 $B(G,G)$ は両側 Burnside 環と呼ばれ, $B(G,G)$ の表現と biset 関手は密接な関係にあります。両側 Burnside 環や biset 関手は有限群の cohomology 環, Burnside 環, 表現環, Dade 群, 等の様々な分野と関連しています。このような, 有限群とその表現論の方面からの集大成が S. Bouc [4] にまとめられています。また, 小田文仁・中岡宏行氏の論説 [20] もご参照ください。他方, Mackey 関手, biset 関手などは, 代数的位相幾何学, homotopy 論の立場からも多くの研究がなされてきています。

本稿の目的は, biset 関手と両側 Burnside 環について概略を述べ, 位数が p^3 の extraspecial p-群の cohomology に関する柳田伸顕氏 (茨城大学) との共同研究 [14, 15] の結果を紹介することです。これらは mod-p cohomology 環を両側 Burnside 環上の加群として考えその構造や組成因子などを調べたものですが, cohomology を biset 関手として見る立場からの考察が有効に用いられました。また, これらの研究には安定 homotopy 論からの背景と動機があり, [14, 15] の結果は, 分類空間の stable splitting とその cohomology についての結果に翻訳することができます。

以下の第 2 章, 第 3 章では, 有限群の biset, biset 圏, biset 関手, 両側 Burnside 環について概略を述べます。第 4 章では homotopy 論からの背景について述べます。第 5 章では [14, 15] の主結果を紹介し, 第 6 章では rank が 2 の p-群の cohomology に関する [16] の結果を紹介します。この部分はまだ未完成の部分もあるのですが, 多少希望的な展望も述べさせていただきます。

今回の講演の機会を与えていただき, 様々にお世話になりました関係の方々に深く感謝します。

2　有限群と biset

本章では, [4] の第 1 章に従って, 有限群の biset がどのような場面で現われてくるか, 概略を紹介する。k を体とし, G, H を有限群とする。kG-mod を有限生成左 kG-加群の圏とし, 次の基本的な完全関手を考える。

- 部分群 $H \leq G$ に対して,

$$\mathrm{Ind}_H^G : kH\text{-mod} \longrightarrow kG\text{-mod}$$

$$\mathrm{Ind}_H^G = kG \otimes_{kH} -$$

- 群準同型写像 $\varphi : G \longrightarrow H$ に対して,

$$\varphi^* : kH\text{-mod} \longrightarrow kG\text{-mod}$$

$$\varphi^* = {}_{\varphi}kH \otimes_{kH} -$$

ただし, ${}_{\varphi}kH$ は kH に G, H の作用を

$$g \cdot x \cdot h = \varphi(g)xh \ (g \in G, x \in kH, h \in H)$$

と定義して得られる (kG, kH)-両側加群である。

これらは (kG, kH)-両側加群 kG 及びに ${}_{\varphi}kH$ により誘導されている。さらに kG, ${}_{\varphi}kH$ は置換加群であり, H の右からの作用は自由な作用である。この状況を一般化して, 右からの作用が自由である両側置換加群によって引き起こされる完全関手を考える。

有限集合 X に左から G が, 右から H が作用し,

$$(gx)h = g(xh) \quad (g \in G, x \in X, h \in H)$$

をみたすとき, X を (G, H)-biset と呼ぶ。さらに, $xh = x$ ならば $h = 1$ であるとき, この作用は右自由であるという。右自由な biset X に対して, X を基底とする k-ベクトル空間を kX とする。kX には左右から自然に G, H が作用し, kX は (kG, kH)-両側加群となる。X への H の作用が右自由であることから kX は右 kH-加群として自由加群となり, 関手

$$X \otimes_{kH} : kH\text{-mod} \longrightarrow kG\text{-mod}$$

は完全関手となる。

$R_k(G)$ を kG の表現環とする。つまり $R_k(G)$ は有限生成 kG-加群の圏の Grothendieck 群であり, 単純 kG-加群の同型類を基底とする自由アーベル群である。$X \otimes_{kH} -$ は完全関手であり完全列を保つことより対応

$$R_k(H) \longrightarrow R_k(G)$$

が引き起こされる。

次に biset の合成について考える。G, H, K を有限群とする。(G, H)-biset X と (H, K)-biset Y に対して,

$$X \times_H Y = X \times Y / \sim$$

とおく。ただし, $h \in H$ に対して $(xh, y) \sim (x, hy)$ である。$X \times_H Y$ は (G, K)-biset であり, X, Y がともに右自由であるならば $X \times_H Y$ も右自由である。対応する置換加群については自然に

$$k(X \times_H Y) \cong kX \otimes_{kH} kY$$

となり, kY, kX により誘導される関手の合成は $k(X \times_H Y)$ により誘導される関手となる。このことから, 上であげた表現環 $R_k(-)$ は, 適当な係数体上で考えるならば, 次章で述べる biset 関手となっている。例えば, [33] では, k を正標数 p の体として, 標数 0 の体上での biset 関手 $R_k(-)$ について研究している。

(G, H)-biset は可移な (G, H)-biset の和に分解するが, 可移な右自由 biset は部分群と準同型写像を用いて具体的に表示することができる。$G \geq H$ と準同型写像 $\varphi : H \longrightarrow K$ に対して, ${}_G G_H$ と ${}_H({}_\varphi K)_K$ の合成

$$G \times_H ({}_\varphi K)$$

を考えると次が成り立つ。

命題 2.1. 任意の可移右自由 (G, K)-biset は, 適当な $G \geq H$, $\varphi : H \longrightarrow K$ に対して $G \times_H ({}_\varphi K)$ と同型である。

この命題は, 非常におおまかにいうならば,

$$\boxed{\text{右自由な biset} \longleftrightarrow \text{部分群} + \text{準同型写像}}$$

ということを意味している。

次に biset の cohomology への作用を見る。$H^n(G, k) = \mathrm{Ext}^n_{kG}(k, k)$ を k-係数の n 次の cohomology 群とし, $H^*(G, k) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(G, k)$ を cohomology 環とする。部分群 $G \geq H$ に対して, transfer 写像

$$\mathrm{Tr}_H^G : H^*(H, k) \longrightarrow H^*(G, k)$$

が定義され, 準同型写像 $\varphi : H \longrightarrow K$ に対して,

$$\varphi^* : H^*(K, k) \longrightarrow H^*(H, k)$$

が定義される。これらを利用して, (G, K)-biset $G \times_H ({}_\varphi K)$ の作用を

$$H^*(K, k) \xrightarrow{\varphi^*} H^*(H, k) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_H^G} H^*(G, k)$$

として定義する。この作用により, $H^*(-, k)$ は次章で定義する biset 関手となっている。

3 Biset 圏と biset 関手

G, H を有限群とする。(G,H)-biset の圏の Grothendieck 群を $B_{\mathbb{Z}}(G,H)$ とおく。さらに体 k に対して,

$$B(G,H) = k \otimes B_{\mathbb{Z}}(G,H)$$

とおく。これは可移 (G,H)-biset の同型類を基底とする k-ベクトル空間である。ここでは, 必ずしもすべての (G,H)-biset を考えるのではなく, 次の 3 種類の biset について考察する。

- すべての biset を対象とする場合：$B^{\mathrm{all}}(G,H)$ と表記する。
- 右自由な biset のみを対象とする場合：$B^{\mathrm{r}}(G,H)$ と表記する。
- 右自由かつ左自由となる biset のみを対象とする場合：$B^{\mathrm{lr}}(G,H)$ と表記する。

定義 3.1. (1) $\Box = \mathrm{all}, \mathrm{r}, \mathrm{lr}$ に対して, biset 圏 $\mathcal{C}_k^{\Box}$ を次のように定義する。

- 対象はすべての有限群
- 射は

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k^{\Box}}(H,G) = B^{\Box}(G,H)$$

- 射の合成は ${}_GX_H$, ${}_HY_K$ に対して,

$$[X] \circ [Y] = [X \times_H Y]$$

(2) $\mathcal{C}_k^{\Box}$ における G の自己準同型環

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_k^{\Box}}(G) = B^{\Box}(G,G)$$

を両側 Burnside 環と呼ぶ。

$B^{\Box}(G,G)$ は可移 ($\Box$ に応じて, すべての, 右自由, 左右自由な) biset の同型類を基底として持つ k 上の有限次元多元環である。その単位元は G 自身を (G,G)-biset としてみたものの同型類 $[G]$ である。実際, (G,G)-biset X に対して

$$G \times_G X \cong X \times_G G \cong X$$

が成り立つ。両側 Burnside 環は G の外部自己同型群の群環と密接な関係にある。

命題 3.2. 分裂する全射

$$B^{\Box}(G,G) \longrightarrow k\,\mathrm{Out}(G)$$

が存在する。$k\,\mathrm{Out}(G)$ は $B^{\Box}(G,G)$ の剰余環であると同時に部分環である。$\varphi : G \longrightarrow G$ に対しては $[G_{\varphi}]$ が対応する。

例として, 位数が 2 の巡回群の場合を詳しく見てみることにする。

例 3.3. G を位数 2 の巡回群とする。可移 (G,G)-biset は次の 5 種類である。

$$\{*\},\ G_\varepsilon,\ \overbrace{{}_\varepsilon G,\ \underbrace{G,\ G\times G}_{\text{左・右自由}}}^{\text{右自由}}$$

ただし, $\varepsilon : G \longrightarrow G$ は $\varepsilon(G)=1$ となる準同型写像である。また $\{*\}$ は G が自明に作用する 1 点集合である。よって, 両側 Burnside 多元環の基底と次元は次のようになる。

	基底	次元
$B^{\mathrm{all}}(G,G)$	$[\{*\}], [G_\varepsilon], [{}_\varepsilon G], [G], [G\times G]$	5
$B^{\mathrm{r}}(G,G)$	$[{}_\varepsilon G], [G], [G\times G]$	3
$B^{\mathrm{lr}}(G,G)$	$[G], [G\times G]$	2

その構造は,

$$[G\times G \times_G G\times G] = [G\times G\times G] = 2[G\times G]$$

となることから

$$B^{\mathrm{lr}}(G,G) \cong \begin{cases} k\oplus k & (\mathrm{char}\ k\neq 2) \\ k[x]/(x^2) & (\mathrm{char}\ k = 2) \end{cases}$$

がわかる。一方, $B^{\mathrm{all}}(G,G)$ は体 k に依存せず semisimple であり,

$$B^{\mathrm{all}}(G,G) \cong k\oplus \mathrm{Mat}_2(k)$$

となる。ただし $\mathrm{Mat}_2(k)$ は 2 次の行列環である。また, $B^{\mathrm{r}}(G,G)$ も体 k に依存せず,

$$B^{\mathrm{r}}(G,G) \cong \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

$B^{\square}(G,G)$ の semisimplicity については, 次が成り立つ。

命題 3.4. (1) $\mathrm{char}\ k=0$ ならば $B^{\mathrm{lr}}(G,G)$ は semisimple である [30] 。
(2) $B^{\mathrm{lr}}(G,G)$ が semisimple ならば $\mathrm{char}\ k \nmid |G||\mathrm{Out}(G)|$ である。
(3) $B^{\mathrm{all}}(G,G)$ について, 次は同値である [4]。
 (i) $B^{\mathrm{all}}(G,G)$ は semisimple
 (ii) G は巡回群で $\mathrm{char}\ k \nmid |\mathrm{Out}(G)|$
(4) $B^{\mathrm{r}}(G,G)$ について, 次は同値である。
 (iii) $B^{\mathrm{r}}(G,G)$ が semisimple
 (iv) $G=1$

以下では, 右自由な biset のみを扱うこととして,

$$\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_k^{\mathrm{r}},\ B(G,H) = B^{\mathrm{r}}(G,H)$$

とおく。

定義 3.5. k-線形関手

$$\mathcal{C}_k \longrightarrow k\text{-mod}$$

を biset 関手と呼ぶ。biset 関手 $F \neq 0$ の部分関手が F と 0 のみであるとき F は biset 関手として単純である (simple biset functor) という。

注意 3.6. ここでいう biset 関手は inflation 関手とも呼ばれる ([29])。全射準同型 $\varphi : G \longrightarrow H$ に対して, ${}_{\varphi}H$ は右自由な (G,H)-biset となり, $B(G,H) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k}(H,G)$ の射を与える。よって, biset 関手 F は inflation 写像

$$F(H) \longrightarrow F(G)$$

を引き起こす。前章でみた, 表現環 $R_k(-)$ や, cohomology $H^*(-,k)$ は inflation 関手, つまりここでいう意味での biset 関手である。

左右ともに自由な biset を考えた場合は, 準同型写像として単射であるものだけを考えることに相当し, この場合の k-線形関手 $\mathcal{C}_k^{\mathrm{rl}} \longrightarrow k\text{-mod}$ を global Mackey 関手と呼ぶこともある。また, 一般的には k-線形関手 $\mathcal{C}_k^{\mathrm{all}} \longrightarrow k\text{-mod}$ を biset 関手と呼ぶ。いずれにしても, 以下では右自由な場合のみを扱うことにする。

biset 関手 F に対し, $F(G)$ は $B(G,G)$-加群であり, S が単純関手ならば $S(G)$ は 0 または単純 $B(G,G)$-加群である。任意の単純 $B(G,G)$-加群はこのようにして単純関手の G での値として得られる。一方, 単純関手は有限群 H と単純 $k\,\mathrm{Out}(H)$-加群の組 (H,V) で parametrize される。組 (H,V) に対応する単純関手を $S_{H,V}$ と表す。

cohomology $H^*(-,k)$ は, biset 関手である。厳密には $H^*(G,k)$ は有限次元ベクトル空間ではないが, 各次数部分 $H^n(G,k)$ は有限次元ベクトル空間であり, これらを同時に考えていることに相当する。biset 関手について, 組成列や組成因子を考えることができ, $H^*(-,k)$ はある意味で (有限の長さではないが) 組成列を持っている。[29] では $k = \mathbb{F}_2$ の場合, $H^*(-,\mathbb{F}_2)$ の組成列を計算し, 単純関手 $S_{H,V}$ の組成因子としての重複度を H が小さい場合 (巡回群, $C_2 \times C_2$, 二面体群や四元数群) に決定している。

$H^*(-,k)$ の組成列, あるいは, 単純関手の $H^*(-,k)$ の組成因子としての重複度を考察したいのであるが, biset 関手 F の部分剰余関手として現われる単純関手と, 両側 Burnside 環との関係は次のようになる。

補題 3.7. F を biset 関手, S が単純関手で $S(G) \neq 0$ であるとする。このとき S が F の組成因子であることと $S(G)$ が $B(G,G)$-加群として $F(G)$ の組成因子であることは, 同値である。

これより, $B(G,G)$-加群としての $H^*(G,k)$ の構造を調べることが重要となり, まず, 次が目標となる。

3.8. 単純 $B(G,G)$-加群の $H(G,k)$ における組成因子としての重複度を求めること。

p を素数とし, 有限 p-群 P の cohomology について考える。係数体 k は, 有限体 $\mathbb{F}_p$ とする。$H^*(-,\mathbb{F}_p)$ の, あるいは, $H^*(P,\mathbb{F}_p)$ の単純組成因子について, 次章で述べる homotopy 論における深い結果の帰結として, 次が知られている。

命題 3.9 ([12])**.** 任意の単純関手は $H^*(-,\mathbb{F}_p)$ の組成因子となる。また, 任意の単純 $B(P,P)$-加群は $H^*(P,\mathbb{F}_p)$ の組成因子となる。

[27] では, この命題は, 群の cohomology と p-fusion に関する次の Mislin の定理を導くことが示されている。

定理 3.10 ([22])**.** G を有限群, H は G の部分群で G の Sylow p-部分群を含むものとする。このとき, 次は同値である。
(1) H は G の p-fusion を支配する。
(2) 制限写像 $H^*(G,\mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(H,\mathbb{F}_p)$ は同型写像である。

この Mislin の定理については, homotopy 論を経由することなく, モデュラー表現を利用した代数的な証明が知られている [13, 21]。一方, 定理 3.10 は fusion system の cohomology 環 ([3]) に関する主張として, 一般化した形に述べることができる。[24] では, fusion system に一般化された Mislin の定理も, やはり, 命題 3.9 から導かれることが証明されている。[24] で述べられているように, もし, 命題 3.9 の代数的な証明が得られれば, fusion system 版の Mislin の定理についても, 代数的な証明が得られることになる。

4 分類空間の stable splitting

本章では, homotopy 論からの背景について触れる。ここでの説明には, 非常に不正確な部分があることをご容赦願いたい。p を素数とし, $BG = (BG_+)\hat{}_p$ を (p-完備化した) 分類空間 (の suspension spectrum) とする。安定 homotopy に関連して次の問題を考える。

- wedge 和への分解 $BG = X_0 \vee X_1 \vee \cdots \vee X_m$ を決定する。
- 各 X_i と同値な因子の重複度を決定する。
- 上記の分解に対応して, コホモロジーの分解

  $$H^*(BG;\mathbb{F}_p) = \bigoplus H^*(X_i,\mathbb{F}_p)$$

  を決定する。

p-群の場合, これらの問題は, Segal 予想 (Carlsson の定理 [6]) の帰結として, 両側 Burnside 環の表現という代数的な問題に帰着される。P を p-群とすると, 環準同型 $B_{\mathbb{Z}}(P,P) \longrightarrow \{BP, BP\}$ が存在し, 適当な完備化の下ではほぼ同型となる。係数体を p 元体 $\mathbb{F}_p$ として, $B(P,P)$ を $\mathbb{F}_p$ 上の両側 Burnside 環とする。先の自己準同型環の同型対応より, BP の stable splitting $BP = \vee X_i$ は $\mathbb{F}_p$ 多元環 $B(P,P)$ における 1 の直交冪等元分解 $1 = \sum e_i$ と対応していることがわかる。詳しくは [1, 2, 23, 25] 等を参照していただきたい。

一方, $B(P,P)$ の原始冪等元は単純 $B(P,P)$-加群と対応する。各原始冪等元 e_i に対応する単純加群を S_i とおく。 以下簡単のため, $\mathbb{F}_p$ は $B(P,P)$ の分解体であると仮定する。このとき, 1 の原始冪等元分解 $1 = \sum e_i$ において e_i と同値な冪等元の重複度は $\dim S_i$ である。また, $\dim_{\mathbb{F}_p} S_i e_i = 1$ であり, 右 $B(P,P)$-加群 M に対して, M での組成因子としての S_i の重複度は Me_i のベクトル空間としての $\mathbb{F}_p$ 上の次元に等しい。よって次の対応,

- 因子 X_i は単純 $B(P,P)$-加群 S_i と対応する。
- X_i と同値な因子の重複度は $\dim S_i$ に等しい。
- $H^*(X_i, \mathbb{F}_p) \cong H^*(P, \mathbb{F}_p)e_i$

を経由して, stable splitting の問題は次の問題に置き換わる。

- 単純 $B(P,P)$-加群を分類し, その次元を決定する。
- $B(P,P)$ の原始冪等元 e_i に対して, $H^*(P, \mathbb{F}_p)e_i$ を決定する。

$\dim H^n(P, \mathbb{F}_p)e_i$ は $H^n(P, \mathbb{F}_p)$ における単純組成因子としての S_i の重複度であるから, これは前章での目標 3.8 「$H^*(P, \mathbb{F}_p)$ における単純 $B(P,P)$-加群の重複度」を求めることと合致している。

5 Extraspecial p-群の cohomology

p を素数とする。p 群の stable splitting に関していくつかの結果が知られている。例えば, 可換群の場合 [12], metacyclic 群の場合 [8, 9], p-rank が 2 の群の場合 [10] などがある。本章では, p を奇素数とし, 位数が p^3 の extraspecial p-群

$$E = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = [a,c] = [b,c] = 1, [a,b] = c \rangle$$

について考察する。これは位数が p^3 の非可換群で exponent が p となる群である。[10] において, BE の stable splitting での因子の重複度 (つまり, 単純 $B(E,E)$-加群の次元) が求められている。また, [32] では, E を Sylow p-部分群に持つ有限群, さらに E 上の saturated fusion system の stable splitting とその cohomology について調べられている。E を Sylow p-部分群とする単純群は非常に豊富にあり ([28]), また E 上の saturated fusion system も興味深いものが存在する ([26])。[14], [15] においては $\mathbb{F}_p$ 係数 cohomology の $B(E,E)$-加群としての構造に焦点を絞り, その詳細を調べることにより次の結果を得た。

定理 5.1 ([14],[15])**.** $B(E,E)$ の原始冪等元 e に対して, 次数付きベクトル空間 $H^*(E,\mathbb{F}_p)e$ を記述することができる。また, その過程において [10] とは独立に単純加群を分類し, その次元を決定した。

$H^*(E,\mathbb{F}_p)$ の構造は知られている [18]。しかし, その構造は非常に複雑であるため, まず, その部分剰余環である $(\mathbb{F}_p\otimes H^*(E,\mathbb{Z}))/\sqrt{0}$ の構造を調べ, その結果と整係数 cohomology についての結果を, Milnor 作用素を利用して結びつけることにより $H^*(E,\mathbb{F}_p)e$ についての結果が得られた。

$$H^*(E)=(\mathbb{F}_p\otimes H^*(E,\mathbb{Z}))/\sqrt{0}$$

とおく。以下では $H^*(E)$ に関する [14] の主結果を紹介する。$H^*(E)$ の構造は比較的わかりやすく, $p\geq 5$ ならば $H^*(E)=H^*(E,\mathbb{F}_p)/\sqrt{0}$ となることが知られている。$H^*(E)$ は生成元

$$y_1,y_2,C,v\ (\deg y_i=2,\deg C=2p-2,\ \deg v=2p)$$

と関係式

$$y_1^py_2-y_1y_2^p=0,\ Cy_i=y_i^p,\ C^2=y_1^{2p-2}+y_2^{2p-2}-y_1^{p-1}y_2^{p-1}$$

により得られる可換環である [17, 19]。

S を単純 $B(E,E)$-加群とする。冪等元 $e\in B(E,E)$ で $Se=S$ をみたし, 一方, S と非同型な単純加群 S' に対しては $S'e=0$ となるものを, S に対する冪等元と呼ぶことにする。これは必ずしも原始冪等元ではないが, 原始冪等元よりも扱いやすい面がある。$\mathbb{F}_p$ は $B(E,E)$ の分解体であり, 上記の冪等元は単純加群に対応する原始冪等元 $\dim S$ 個の和に分解し, $H^n(E)$ での単純加群 S の組成因子としての重複度は

$$\frac{\dim H^n(E)e}{\dim S}$$

で与えられる。

E の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(E)$ は 2 次一般線形群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ と同型である。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の $H^*(E)$ への作用を考える。y_1,y_2 で生成される部分多元環 $\mathbb{F}_p[y_1,y_2]$ の $2i$ 次斉次部分を S^i とおく。$\mathbb{F}_p[y_1,y_2]$ への $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の作用は多項式環への作用から誘導される標準的なものであり, v への作用は行列式 det で与えられる。よって

$$\{S^iv^q\cong S^i\otimes\det{}^q\ (0\leq i\leq p-1,1\leq q\leq p-2)\}$$

は単純 $\mathbb{F}_p\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-加群の同型類の代表を与える。さらに, $1\leq i\leq p-2$ に対して, CS^i は S^{p-1+i} の $\mathbb{F}_p\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-部分加群であり,

$$S^{p-1+i}/CS^i\cong S^{p-1-i}\otimes\det{}^i$$

となる。S^{p-1+i} での CS^i のベクトル空間としての補空間を T^i とおく。これは $\mathbb{F}_p\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-部分加群とはならない。

次に, $B(E,E)$ の $H^*(E)$ への作用を考える。単純 $\mathbb{F}_p\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-加群は Proposition 3.2 の全射

$$B(E,E) \longrightarrow \mathbb{F}_p\,\mathrm{Out}(E) = \mathbb{F}_p\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$$

により自然に $B(E,E)$-加群とみなすことができるが, このようにして得られる単純加群を支配的単純加群と呼ぶ。単純 $B(E,E)$-加群には, 支配的加群の他に, E の真部分群に対応するものが存在する。例えば上記の S^i $(1 \leq i \leq p-2)$ は支配的単純加群ではなく, 位数が p の部分群に対応する単純加群である。

以下では支配的単純加群に対応する冪等元 e について, $H^*(E)e$ の記述を与える。これらは, [5] による biset 関手 と Burnside 多元環上の単純加群に関する基本的な補題を用い, 組成列の中で, 支配的でない単純加群がどのように現われてくるかを計算することにより証明される。記号を何点か定義する。

$$V = v^{p-1},\ \mathbb{CA} = \mathbb{F}_p[C,V]$$

$$\mathbb{DA} = \mathbb{F}_p[C^p + V, CV]$$

とおく。$\mathbb{CA}$ と $\mathbb{DA}$ は $H^*(E)$ の部分環で, $\mathbb{CA}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の作用による不変環である。また, 単純 $\mathbb{F}_p\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-加群 S に対して, 対応する支配的単純 $B(E,E)$-加群は, 単純関手 $S_{(E,S)}$ の E での値 $S_{(E,S)}(E)$ となる。

定理 5.2 ([14, Theorem 10.4])**.** e を支配的単純加群 $S_{(E,S)}(E)$ に対応する冪等元とする。
(1) S が自明な加群のとき,

$$H^*(E)e \cong \mathbb{DA}^+$$

(2) $S = \det^q$, $1 \leq q \leq p-2$ のとき,

$$H^*(E)e \cong \mathbb{CA}\{v^q\}$$

(3) $S = S^{p-1}$ つまり $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の Steinberg 加群のとき,

$$H^*(E)e \cong \mathbb{DA}\{VS^{p-1}\}$$

(4) $S = S^{p-1} \otimes \det^q$, $1 \leq q \leq p-2$ のとき,

$$H^*(E)e \cong \mathbb{CA}\{v^q S^{p-1}\}$$

定理 5.3 ([14, Theorem 10.5])**.** $1 \leq i \leq p-2$, $0 \leq q \leq p-2$, $S = S^i v^q$, $T = T^{p-i-1}v^s$, $s \equiv i + q \bmod p-1$, $0 \leq s \leq p-2$ とおく。e を支配的単純加群 $S_{(E,S)}(E)$ に対応する冪等元とすると, 次数付きベクトル空間として $H^*(E)e$ は次と同型となる。

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{CA}\{VS\} \oplus \mathbb{DA}\{VT\} & (q \equiv 2i \equiv 0 \bmod p-1) \\
\mathbb{CA}\{VS\} \oplus \mathbb{CA}\{T\} & (q \equiv 0, 2i \not\equiv 0) \\
\mathbb{DA}\{S\} \oplus \mathbb{DA}\{VT\} & (i = q, 3i \equiv 0) \\
\mathbb{DA}\{S\} \oplus \mathbb{CA}\{T\} & (i = q, 3i \not\equiv 0) \\
\mathbb{CA}\{S\} \oplus \mathbb{DA}\{VT\} & (q \neq 0, i \neq q, q + 2i \equiv 0) \\
\mathbb{CA}\{S\} \oplus \mathbb{CA}\{T\} & (q \neq 0, i \neq q, q + 2i \not\equiv 0)
\end{array}$$

支配的単純加群ではない, 真部分群に対応する単純加群についても同様の記述をすることができる。

これらの結果は stable splitting での因子の cohomology に関する結果を与える。例えば, $X(\mathbb{F}_p)$ を自明な $B(E,E)$-加群に対応する BE の因子とする (主支配的因子と呼ばれる) 。$X(\mathbb{F}_p)$ の cohomology においては冪零部分が定義されないので, 対応する冪等元 e_0 を用いて $H^*(X(\mathbb{F}_p)) = H^*(E)e_0$ と定義することにより, 次の系を得る。

系 5.4 ([14, Corollary 10.7])**.** $X(\mathbb{F}_p)$ を BE の主支配的因子とすると, 同型

$$H^*(X(\mathbb{F}_p)) \cong \mathbb{DA}$$

が成り立つ。

[32] では, E を Sylow p-部分群に持つ有限群の stable splitting について研究されている。特に, E を Sylow p-部分群として持つ散在型有限単純群の stable splitting とその cohomology について調べ, それらを利用して BE の stable splitting の因子の cohomology の情報を得ている。例えば $p=3$ の場合, [32] では系 5.4 を Janko 単純群 J_4 の cohomology ([11]) を利用して証明している。一方 [14] では, 単純群を用いることなく $B(E,E)$-加群構造を調べることにより, すべての p について統一的に証明している。

さらに [15] では, $H^*(E)$ の $B(E,E)$-加群構造を利用して, [32] において欠けていたいくつかの場合, 3 次の線形群に関連した場合を扱うことができた。特に, $p=7$ の場合には, $L_3(7)$ の拡大群の stable splitting と, 散在型単純群 $O'N$, Fi'_{24} や Ruiz-Viruel の exotic fusion system ([26]) の stable splitting との間の関係を決定した。

定理 5.2, 5.3 の証明のために, $H^*(E)$ の加群構造の情報が必要となるが, その出発点となるのは次の結果である。

定理 5.5 ([14, Theorem 7.8])**.** $B(E,E)$-加群として, $H^*(E)$ は次の 4 種類の部分加群の直和である。

$$\mathbb{CA}\{\mathbb{F}_p + S^{p-1}\}$$
$$\mathbb{CA}\{S^i + T^i + \mathbb{F}_p v^i + v^i S^{p-1}\}\ (1 \le i \le p-2)$$
$$\mathbb{CA}\{v^i(S^i + T^i)\}\ (1 \le i \le p-2)$$
$$\sum_{1 \le i \ne q \le p-2} \mathbb{CA}\{v^q(S^i + T^i)\}$$

ただし, ここに現われた加群は直既約加群という訳ではない。$H^*(E)$ の $B(E,E)$-加群としての直既約加群分解は得られていない。一般に, 両側 Burnside 環上の加群としての cohomology の直和分解が何を意味しているのかは不明であり, この点は今後の課題である。

6 Rank 2 の p-biset 圏

本章では p を 5 以上の素数とし, rank が 2 の p-群の cohomology について考察する。奇素数 p について, rank が 2 の p-群の分類は知られている。詳細は, 例えば [7, Appendix A] に述べられている。rank 2 の p-群は次のように分類される。

命題 6.1. $p \geq 5$ のとき, rank 2 の p-群は次のように分類される。
(1) $C(r)$, $r \geq 3$
(2) $G(r,e)$, $r \geq 4$, $e \in \mathbb{F}_p^\times$
(3) 巡回群ではない metacyclic p-群

個々の群の定義は次のようになっている。

(1) $C(r), (r \geq 3)$

$$C(r) = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^{p^{r-2}} = 1,\ [a,b] = c^{p^{r-3}},\ [a,c] = [b,c] = 1 \rangle$$

$|C(r)| = p^r$ であり, $E = C(3)(= \langle a, b \rangle)$ は $C(r)$ の部分群となっている。

(2) $G(r,e), (r \geq 4)$

$$G(r,e) = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^{p^{r-2}} = 1,\ [b,c] = 1,\ [a, b^{-1}] = c^{ep^{r-3}},\ [a,c] = b \rangle$$

$G(r,e)$ は e が平方剰余であるか, 平方非剰余であるかにより二つの同型類に分かれる。また, $E(\cong \langle a, b \rangle)$ は $G(r,e)$ の部分群となっている。

(3) 完全列

$$1 \longrightarrow C_{p^m} \longrightarrow P \longrightarrow C_{p^n} \longrightarrow 1$$

が存在するとき, P を metacyclic 群と呼ぶ。ただし C_{p^m} は位数が p^m の巡回群である。例えば, 位数が p^3 の非可換群で E と同型でない群は metacyclic となっている。

以下では $p \geq 5$, P は rank 2 の p-群とする。前章と同様に

$$H^*(P) = (\mathbb{F}_p \otimes H^*(P, \mathbb{Z}))/\sqrt{0}$$

とおく。単純 $B(P,P)$-加群の情報は [10] にあり, また, $H^*(P)$ に関する情報は [31] にある。

定理 6.2 ([16])**.** P を rank 2 の p-群とする。任意の原始冪等元 $e \in B(P,P)$ に対して, 次数付きベクトル空間 $H(P)^*e$ を記述することができる。

この結果を得る過程で我々は

P に関する結果はすべて E の情報から得ることができるのではないか

と考えた。次の様な群の間の関係を考える。ただし $r \geq 4$ とする。

$$\begin{array}{ccccc} \text{meta cyclic} & & C(r) & \longrightarrow & G(r+1,e) \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ (C_p \times C_p) & \twoheadleftarrow & E & \longrightarrow & G(4,e) \end{array}$$

図で $C_p \times C_p \twoheadleftarrow E$ は全射, つまり E の剰余群として $C_p \times C_p$ を考えている。他は単射, つまり部分群であることを示している。E の結果から $G(4,e)$ と $C(r)$ の結果が得られ, $C(r)$ の結果から $G(r,e)$ の結果が得られる, のではないだろうかと予想される。

なお, 当然のことながら $C_p \times C_p$ は E の部分群であり, E の情報はその極大部分群である $C_p \times C_p$ の情報から得られるものではあるが, 逆に E の剰余群として $H^*(E)$ の構造から $H^*(C_p \times C_p)$ を見ることも非常に有効である ([14, section 5])。図式の右側については次が成り立つ。

定理 6.3 ([16])**.** $P = C(r)$ または $G(r,e)$, $r \geq 4$ とする。$B(P,P)$ の原始冪等元 e に対して,

$$H^*(P)e \cong H^*(E)f$$

となる $B(E,E)$ の冪等元 f が存在する。

f は必ずしも原始冪等元ではなく, $B(E,E)$ の中では原始冪等元の和に分解する場合もある。これは, stable splitting を考えたときに, これらの群の中で BE がもっとも細かく分解するということを示している。定理 6.3 での同型は単にベクトル空間の同型であり, 今のところ現象として確認できているだけであるが, 対応は自然なものであり, 何らかの構造的な説明ができるはずである。言い換えるならば, 「$H^*(P)$ の $B(P,P)$-加群構造を $H^*(E)$ の $B(E,E)$-加群構造に結び付けて理解したい」ということになる。

具体的には次の方向で考えたい。まず, $B(P,P)$ は $B(E,E)$ に直接含まれている訳ではない。しかし, $B(P,P)$ の適当な部分多元環で, $B(E,E)$ の部分多元環と同型になるものを構成して利用することで, 定理 6.3 は統一的に証明できると予想している。

また, rank 2 の p-群 P に対して, 両側加群

$$_{B(E,E)}B(E,P)_{B(P,P)}, \quad _{B(P,P)}B(P,E)_{B(E,E)}$$

を考え, 関手

$$- \otimes_{B(E,E)} B(E,P) : \text{mod-}B(E,E) \longrightarrow \text{mod-}B(P,P)$$

$$- \otimes_{B(P,P)} B(P,E) : \text{mod-}B(P,P) \longrightarrow \text{mod-}B(E,E)$$

を考察する。これらの関手を単純加群へ施したときの状況や, cohomology への作用,

$$H^*(E) \xrightarrow{B(E,P)} H^*(P), \qquad H^*(P) \xrightarrow{B(P,E)} H^*(E)$$

を見ていくことにより, さらに構造的な説明が得られると思われる。これに関しては, 定理 5.5 など [14] で得られた $H^*(E)$ の詳細な $B(E,E)$-加群構造が有効に利用できるはずである。

さらに, biset 圏の観点から見るために, rank 2 の p-群を対象とする $\mathcal{C}$ の充満部分圏を $\mathcal{C}_{p,2}$ とおき, biset 関手 $H^*(-)$ のこの部分圏への制限, つまり, rank 2 の p-biset 関手

$$H^*(-) : \mathcal{C}_{p,2} \longrightarrow k\text{-mod}$$

を考察する。その biset 関手としての組成列や直和分解を調べることにより, rank 2 の p-群の cohomology を一望のもとに眺め, その中心に E がある状況を理解できるようになると期待したい。

参考文献

[1] D. J. Benson, Stably splitting BG, Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1996), 189-198.

[2] D. J. Benson and M. Feshbach, Stable splittings of classifying spaces of finite groups, Topology 31 (1992), 157-176.

[3] C. Broto, R. Levi and B. Oliver, The homotopy theory of fusion systems, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 779-856.

[4] S. Bouc, Biset functor for finite groups, Lecture Notes in Mathematics 1990, Springer (2010).

[5] S. Bouc, R. Stancu and J. Thévenaz, Simple biset functors and double Burnside ring, J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), 546-566.

[6] G. Carlsson, Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring conjecture, Annals of Math. 120 (1984), 189-224.

[7] A. Díaz, A. Ruiz and A. Viruel, All p-local finite groups of rank two for odd prime p, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2006), 1725-1764.

[8] J. Dietz, Stable splittings of classifying spaces of metacyclic p-groups, p odd, J. Pure Appl. Algebra 90 (1993), 115-136.

[9] J. Dietz, Stable splittings of classifying spaces of metacyclic 2-groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1994), 285-299.

[10] J. Dietz and S. Priddy, The stable homotopy type of rank two p-groups, *Homotopy theory and its applications*, Contemp. Math. 188, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1995), 93-103.

[11] D. J. Green, On the cohomology of the sporadic simple group J_4, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 113 (1993), 253-266.

[12] J. Harris and N. J. Kuhn, Stable decomposition of classifying spaces of finite abelian p-groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 103 (1988), 427-449.

[13] A. Hida, Control of fusion and cohomology of trivial source modules, J. Algebra 317 (2007), 462-470.

[14] A. Hida and N. Yagita, Representations of the double Burnside algebra and cohomology of the extraspecial p-group, J. Algebra 409 (2014), 265-319.

[15] A. Hida and N. Yagita, Representations of the double Burnside algebra and cohomology of the extraspecial p-group II, J. Algebra 451 (2016), 461-493.

[16] A. Hida and N. Yagita, The splitting of cohomology of p-group with rank 2, arXiv:1502.02790v2 (2016).

[17] I. J. Leary, The integral cohomology rings of some p-groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 110 (1991), 25-32.

[18] I. J. Leary, The mod-p cohomology rings of some p-groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 112 (1992), 63-75.

[19] G. Lewis, The integral cohomology rings of groups of order p^3, Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), 501-529.

[20] 小田文仁, 中岡宏行, 有限群に関連した圏論的構成, 数学 67 (2015), 55-81.

[21] T. Okuyama, On a theorem of Mislin on cohomology isomorphism and control of fusion, 有限群のコホモロジー論とその周辺, 数理解析研究所講究録 1466 (2006), 86-92.

[22] G. Mislin, On group homomorphisms inducing mod-p cohomology isomorphisms, Comment. Math. Helvetici 65 (1990), 454-461.

[23] J. Martino and S. Priddy, The complete stable splitting for the classifying space of a finite group, Topology 31 (1992), 143-156.

[24] S. Park, Mislin's theorem for fusion systems via Mackey functors, arXiv:1401.0208v2 (2014).

[25] S. Priddy, Lectures on the stable homotopy of BG, Geometry and Topology Monographs 11 (2007), 289-308.

[26] A. Ruiz and A. Viruel, The classification of p-local finite groups over the extraspecial group of order p^3 and exponent p, Math. Z. 248 (2004), 45-65.

[27] P. Symonds, Mackey functors and control of fusion, Bull. London Math. Soc. 36 (2004), 623-632.

[28] M. Tezuka and N. Yagita, On odd prime components of cohomologies of sporadic simple groups and the rings of universal stable elements, J. Algebra 183 (1996), 483-513.

[29] P. Webb, Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces, J. Pure Appl. Algebra 88 (1993), 265-304.

[30] P. Webb, Stratifications and Mackey functors II: globally defined Mackey functors, J. K-Theory 6 (2010), 99-170.

[31] N. Yagita, Cohomology for groups of $\mathrm{rank}_p G = 2$ and Brown-Peterson cohomology, J. Math. Soc. Japan, 45 (1993), 627-644.

[32] N. Yagita, Stable splitting and cohomology of p-local finite groups over the extraspecial p-group of order p^3 and exponent p, Geometry and Topology Monographs 11 (2007), 399-434.

[33] E. Yaraneri, A filtration of the modular representation functor, J.Algebra 318 (2007), 140-179.