代数学シンポジウム報告集

阿部拓郎 *

平成 28 年 12 月 27 日

1 序文

本文は佐賀大学にて開催された, 第 61 回代数学シンポジウムの講演に関する報告集である. 本文の中心的話題は超平面配置とその代数構造, 特に自由性と呼ばれる性質である. 自由性は代数幾何的にいうと, 射影空間上のベクトル束が直線束の直和に分解する, いわゆる分裂（splitting）を意味する. このような代数幾何的構造が, 超平面配置の交わり方という組み合わせ論的性質から決定されるだろうか, という問題が寺尾予想であり, 筆者が超平面配置の研究に興味を持ったきっかけでもある. 昔, 筆者はハーツホーン予想という, 七次元以上の標数 0 の代数的閉体上の階数 2 のベクトル束は必ず分裂する, という予想に興味を持っていた. 当時はこの予想に研究するという段階までは到底至らなかったし, 現在でも自分で何かできるとは思えない. そんなとき, 超平面配置とそれに付随して簡単に構成できる対数的ベクトル場という反射層の存在, およびなんとなく似た感じがする寺尾予想を知り, 興味を惹かれて超平面配置の自由性の研究を開始してから, ようやく 10 年になる.

超平面配置を代数幾何的に研究するメリットはいくつかあるが, まず一つは対応する幾何学が極めて具体的かつシンプルな超平面の有限族であるという点がある. 同時に元の幾何構造たる超平面配置の包含関係を用いて, 対応するベクトル束の遠近が容易に定義でき, それを用いて帰納的, あるいは構成的な議論を行うことができるのも大きなメリットである. このような視点から得られたもっとも最近の定理が, 剰余定理（定理 3.6) であり, この結果の説明をすることを, 本報告の最初の目的とする. 剰余定

*九州大学マス・フォア・インダストリ研究所. email:abe@imi.kyushu-u.ac.jp

理は, 代数幾何と超平面配置の交差点にあるような定理である. 後ほど説明するが, 超平面配置には二種類の制限がある. つまり超平面配置の元 H を一つ固定した場合, そこに交わる他の超平面たちが, H の上に新しい超平面配置を作る. これに重複度を考えない制限が, 長い間超平面配置の制限であった. 代数幾何的には, 重複度を考えないというのはいささか不思議な気もするが, 実際この制限で代数幾何・位相幾何・組合せ論的に話はかなりうまく回っていた. 他方, 重複度を考える制限に関する代数幾何的アプローチが, 吉永正彦による最初の定式化以降この十年急速に発展してきた. 剰余定理は, この二つの制限をどちらも使うことで, 代数幾何的手法を陰に隠しつつ組合せ論的議論を行うことを可能にする定理である. 換言すれば剰余定理は, 代数幾何の古典的理論と, 超平面配置の代数学の近年の進展をどちらも併せ持つ, まさに交差点的定理である. 以下の章で超平面配置の自由性の基本性質・歴史を見ながら, 本定理を説明してゆくことを試みる. さらに, 筆者の最近の共同研究である, 超平面配置を用いたある多様体のコホモロジー環の表示についても言及したい.

2　超平面配置とその自由性

$\mathbb{K}$ を任意の体とし, $V = \mathbb{K}^\ell,\ S = \mathrm{Sym}^*(V^*) \simeq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_\ell]$ とおく. V 中の超平面配置 $\mathcal{A}$ とは, V 中の原点を通る超平面の有限族のことである. $H \in \mathcal{A}$ に対して, $\ker \alpha_H = H$ となる $\alpha_H \in V^*$ を一つ選び固定しておく. $\mathbb{K}$ 線型な S 導分加群 $\mathrm{Der}\, S := \oplus_{i=1}^{\ell} S\partial_{x_i}$ の部分加群として, $\mathcal{A}$ の代数たる対数的ベクトル場 $D(\mathcal{A})$ が以下のように定義される.

定義 2.1

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \mathrm{Der}\, S \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H\ (\forall H \in \mathcal{A})\}.$$

$D(\mathcal{A})$ は一般に自由化群にならず, 反射加群になる. つまり自然な写像 $D(\mathcal{A}) \to (D(\mathcal{A})^*)^*$ が同型になっている. よって自由加群となる場合に以下のように名前を付ける.

定義 2.2
$\mathcal{A}$ が自由で指数 $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ であるとは, ある斉次な $\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A})$ が存在して, $D(\mathcal{A}) = \oplus_{i=1}^{\ell} S\theta_i$ となっているときにいう. ここで $\theta = \sum_{i=1}^{\ell} f_i \partial_{x_i} \in \mathrm{Der}\, S$ が斉次で次数 d とは, $f_i = 0$ もしくは f_i が d 次の斉次式という条件が任意の i で成り立っているきにいう.

極めて簡単な例として, 自由配置と自由でない配置が構成できる.

例 2.3
(1) $\mathcal{A}$ が $\prod_{i=1}^{\ell} x_i = 0$ で定義される座標平面配置のとき, これは指数が $(1, \ldots, 1)$ となる自由配置である. 実際 $\theta_i := x_i \partial_{x_i} \in D(\mathcal{A})$ は容易にチェックでき, かつこれらが $D(\mathcal{A})$ の自由基底となることもほぼ明らかである.

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\ell = 3$ とし $\mathcal{B}$ を $x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 0$ で定義されるような平面配置とすると,

$$\widetilde{D(\mathcal{A})} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1) \oplus T_{\mathbf{P}^2}(-3)$$

となることがわかる. よって $D(\mathcal{A})$ は局所自由配置であるが, 自由配置ではない.

(3) $\ell = 2$ とすると, 全ての二次元配置は自由. これは, 二次元配置の対数的ベクトル場が射影直線上の反射層を与えることからもわかるが, 具体的に基底を以下のように与えることでもチェックできる. 即ち $\mathcal{A}$ を, $x_1 = 0$ を含むような二次元配置とすれば,

$$\theta_1 = x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2},\ \theta_2 = (\prod_{H \in \mathcal{A} \setminus \{x_1 = 0\}} \alpha_H) \partial_{x_2}$$

が $D(\mathcal{A})$ の基底を与えることはほぼ自明. 例えば以下に与える斎藤の判定法などを参照. よって空でない二次元配置の指数は $(1, |\mathcal{A}| - 1)$ である.

上の例 2.3 (2) より一般に, generic な配置はすべて自由ではないことが簡単にわかる. ゆえに自由配置というのは, 極めて特殊なものであり, それゆえ特殊で面白い性質がいろいろ成り立つ.

自由配置の意味付けはいろいろあるが, もっともわかりやすくて美しいそれは, ワイル群の鏡映面全体を集めたワイル配置の一般化, という意味付けである. ワイル群やそのルート系には様々な良い性質があるが, その一つとして, ワイル配置の補空間の複素化のベッチ数が, ワイル群の指数を用いて記述できる, という事実がある. この結果は自由配置のカテゴリーでも以下のように完全に一般化される.

定理 2.4 ([16], 寺尾の分解定理)
$\mathcal{A}$ が $V = \mathbb{C}^\ell$ 中の自由配置で $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ であるとする. このとき

$$Poin(V \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H; t) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + d_i t).$$

すなわち, 位相幾何的に意味のある指数を, 代数を用いて定義できる配置が自由配置である, ということができる. 実は複素ベクトル空間中の超平面配置の補空間のベッチ数は, 配置がどのように交わっているかという情報のみから（自由配置でなくとも）計算できるのだが（定理 2.8), 本数が多かったり次元が高かったりするとこの方法で計算することは現実的ではない. 対して, 自由配置であれば, 代数的な方法を使って指数さえ計算できれば, そこからベッチ数が確定される. 特にワイル群が関係する配置に対しては, 吉永による Edelman-Reiner 予想の解決（[18]）などにもあるように, この手法が強烈に威力を発揮することがある.

このように良い配置である自由配置であるが, その判定は一般には極めて難しい. 判定法として最も基礎的なものは齋藤恭司による以下の定理である.

定理 2.5 ([14], 齋藤の判定法)
$\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A})$ が $D(\mathcal{A})$ の基底となるための必要十分条件は,

$$\det(\theta_i(x_j)) = cQ(\mathcal{A})$$

となることである. ここで c はゼロでないスカラー, $Q(\mathcal{A}) := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$ である. またこの条件は, *(i)* $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ が S 上一次独立かつ, *(ii)* $\sum_{i=1}^{\ell} \deg \theta_i = |\mathcal{A}|$ の二条件とも同値.

齋藤の判定法は必要十分条件を与えており, 極めて基本的な結果であるが, これを実際に適用する際に難しいのは $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ を具体的に構成し, かつそれらが $D(\mathcal{A})$ に含まれることを調べることである. しかしながら, 以後現れる様々な自由性判定法や条件は, すべてこの齋藤の判定法を基礎としており, 理論的にも極めて重要な定理である.

この齋藤の判定法を用いて得られる, 自由性判定の手段として最も汎用的といえるのが, 寺尾宏明による以下の加除定理である.

定理 2.6 ([15], 寺尾の加除定理)
$\mathcal{A}$ を空でない超平面配置とし, $H \in \mathcal{A}$ を固定する. $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$, $\mathcal{A}^H := \{H \cap L \mid L \in \mathcal{A}'\}$ とおく. この時以下の三条件のうち, 二つが成立すれば残りの一つも成立する：

(1) $\mathcal{A}$ は自由配置で $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_{\ell-1}, d_\ell)$.
(2) $\mathcal{A}'$ は自由配置で $\exp(\mathcal{A}') = (d_1, \ldots, d_{\ell-1}, d_\ell - 1)$.
(3) $\mathcal{A}^H$ は自由配置で $\exp(\mathcal{A}^H) = (d_1, \ldots, d_{\ell-1})$.

特に $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ がともに自由なら, 上の三つはすべて成立.

加除定理は, 自由配置構成及び自由配置か否かのチェックを帰納的に可能とする, 極めて使いやすい定理である. さらに言うと, 自由でないことのチェックにも非常に有効に働くことも多く, 実はこの使い方がとても重要だと思う. 例えば $\mathcal{A}$ が自由でないことを言いたいとき, 無論ポアンカレ多項式が分解しないことを言えば, 定理 2.4 から出ることは出るが, 実際ポアンカレ多項式の計算はかなりしんどい. そこで, $H \in \mathcal{A}$ で, $\mathcal{A}'$ が自由だが $\mathcal{A}^H$ が自由でないものを見つければ, 最後に書いた主張から $\mathcal{A}$ は自由とはなりえないことがわかる. 特に $\ell = 3$ であれば, これは $\exp(\mathcal{A}') = (1, d_1, d_2)$ である場合に, $|\mathcal{A}^H|$ が $d_1 + 1,\ d_2 + 1$ のいずれにもならない, という条件と合致するため, 極めて使いやすい. 実際今知られている自由配置のほとんどは, 加除定理 2.6 を用いて構成あるいはチェックされたものだと思う.

さて, ここで少しだけわき道にそれる. 自由性は, 超平面配置の組み合わせ論と極めて深い関係がある. それを説明するため, いくつか用語を準備する.

定義 2.7

$$L(\mathcal{A}) := \{\cap_{H\in\mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}$$

を $\mathcal{A}$ の交差格子という. 交差格子上のメビウス関数 $\mu : L(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ を, $\mu(V) = 1$ 及び

$$\mu(X) := -\sum_{X \subsetneq Y \subset V,\ Y \in L(\mathcal{A})} \mu(Y)$$

で定義する. さらに $\mathcal{A}$ のポアンカレ多項式 $\pi(\mathcal{A}; t)$ を,

$$\pi(\mathcal{A}; t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X)(-t)^{\operatorname{codim} X}$$

で定める.

ポアンカレ多項式という名前から想像がつくかもしれないが, Brieskorn 及び Orlik-Solomon より, 以下の結果が知られている,

定理 2.8
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ であれば, $\pi(\mathcal{A}; t) = Poin(V \setminus \cup_{H\in\mathcal{A}} H; t)$ が成立. さらに $V \setminus \cup_{H\in\mathcal{A}} H$ のコホモロジー環の構造は, $L(\mathcal{A})$ にのみ依存して決定される. さらに定理 *2.4* は, $\mathcal{A}$ が自由で $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ ならば,

$$\pi(\mathcal{A}; t) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + d_i t)$$

たる主張に, 任意の体上で定式化される.

この, コホモロジー環の構造が $L(\mathcal{A})$ から決定されるという定理は極めて衝撃的である. よってこれ以降, 超平面配置にまつわる様々な構造や不変量が, $L(\mathcal{A})$ にのみ依存するかどうか, という問題がたくさん現れた. 例えば基本群は $L(\mathcal{A})$ だけからは決まらないことが知られているが, 筆者の印象としては, ほとんどの場合にはどちらなのかよくわからない, というのが実情だと思う. その中で, 35 年にわたり未解決の有名な予想がある.

予想 2.9 (寺尾予想)
$\mathcal{A}$ が自由か否かは, $L(\mathcal{A})$ にのみ依存してきまる.

例でみたように, 寺尾予想が明らかに正しいクラスは二次元配置だけある. 寺尾の分解定理は寺尾予想の有力な傍証であるが, ポアンカレ多項式が整数係数上で分解していても自由でない配置は存在する. もともと寺尾予想は, 寺尾により予想ではなく問題として出されたものであったが, 結果として 35 年間本質的な進展はほとんどないまま来てしまった. 昨今これだけ計算機が発達したのに, まだ反例が見つからないところを見ると, 予想と呼んでも差し支えないように思われる. しかしながら正しいとしても証明方法が全く見当もつかないことから, 計算機を用いて不意に反例が見つかっても全くおかしくない予想だと思われる.

ともあれ, 寺尾予想を忘れたとしても, 自由性がどれくらい組み合わせ論的に決定されるかという問題は自然であり面白いものだと思う. それに関連した話を一つ紹介する.

定義 2.10 (帰納的自由配置)
$\mathcal{IF}_1,\ \mathcal{IF}_2$ をそれぞれ一次元, 二次元のすべての配置からなる集合とし, $\mathcal{IF}_\ell$ $(\ell \geq 3)$ を, 以下の条件を満たすような ℓ 次元配置の集合とする. すなわち $\mathcal{A} \in \mathcal{IF}_\ell$ となるためには, $\mathcal{A} = \emptyset$ か, もしくはある $H \in \mathcal{A}$ が存在して, $\mathcal{A} \setminus \{H\} \in \mathcal{IF}_\ell,\ \mathcal{A}^H \in \mathcal{IF}_{\ell-1}, \exp(\mathcal{A}^H) \subset \exp(\mathcal{A} \setminus \{H\})$ を満たしていることが必要十分とする. $\mathcal{IF} := \cup_{\ell \geq 1} \mathcal{IF}_\ell$ とし, これに含まれる超平面配置を帰納的自由配置という.

定義の中に含まれてしまっているが, 加除定理を繰り返し用いることで, 帰納的自由配置は自由配置であることが直ちにわかる. 具体的には, 二次元以下の配置及び空集合たる配置が自由なので, 次元と本数に関する帰納法と組み合わせて加除定理をあてはめてゆけばよい. またこの構成から, 以下の主張が直ちに従う.

系 2.11
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を超平面配置, $\mathcal{A} \in \mathcal{IF}$ とする．もし半順序集合として $L(\mathcal{A}) \simeq L(\mathcal{B})$ であれば, $\mathcal{B}$ も自由.

即ち帰納的自由配置は寺尾予想が成立するような超平面配置のクラスを与えている．アルゴリズム的に構成されるクラスであるが, 寺尾による定義以来, これが最も広い寺尾予想の成立するクラスであった．また同時に, このクラスに入ることを示す以外には, なかなか自由性が組合せ論的に決定されることを示すのは難しかった．これに関する代数幾何的な進展を, 次の章で述べる.

3　自由配置に関する最近の進展

自由配置に関するここ 10 年余りの進展については, 吉永正彦による代数幾何的手法, より具体的には Horrocks の判定法的視点の自由配置理論への導入が極めて大きな役割を果たした．対数的ベクトル場は射影空間上の反射層を与えるので, それらの分裂に関する代数幾何の, 長い歴史を持つ深い知見を用いることは極めて有用であった.

それを述べるために, まず多重配置の概念を導入する.

定義 3.1 ([20])
多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ とは, 超平面配置 $\mathcal{A}$ と重複度 $m : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}_{>0}$ の組をいう．これに対して対数的ベクトル場

$$D(\mathcal{A}, m) := \{\theta \in \operatorname{Der} S \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H^{m(H)}\ (\forall H \in \mathcal{A})\}$$

が定義され（一般にはやはり反射層）, その自由性や指数も同様に定義される.

極めて人工的に見えるこの定義であるが, 以下のように超平面配置から自然に多重配置が構成される.

定義 3.2 ([20])
$\mathcal{A} \ni H$ に対して, $\mathcal{A}$ の H への *Ziegler* 制限 $(\mathcal{A}^H, m^H)$ は,

$$m^H(K) := \sharp\{L \in \mathcal{A} \setminus \{H\} \mid L \cap H = K\} \ \ (K \in \mathcal{A}^H)$$

で定義される.

定義から明らかなように, これは制限した場合の被約でないような多様体を考えよう, という代数幾何的には自然な設定の超平面配置バージョンである. 逆にいえば, これ以前には, 例えば加除定理を見ればわかるように, $\mathcal{A}^H$ という, 重複度を全く考えない, ゆえに代数幾何的にはよくわからない制限で話がいろいろうまくいっていたことになる. しかしながらこれまたやっぱり不思議なもので, この二つの制限ともに極めて重要である. 前者は代数幾何と明らかに相性がよいが, 後者はいわば組合せ論と相性が良い制限であるからである.

さて, 代数幾何との相性の良さを示す次の定理が多重配置に関してあげられる.

定理 3.3 ([20])
$\mathcal{A}$ が空でない自由配置で $\exp(\mathcal{A}) = (1, d_2, \ldots, d_\ell)$ であるならば, 任意の $H \in \mathcal{A}$ に対して $(\mathcal{A}^H, m^H)$ は自由で指数は $(d_2, \ldots, d_\ell)$.

これは, 射影空間上で分裂している層の超平面切断もやはり分裂していて, 同じ分裂型を持つ, という有名な結果の超平面配置版である. さて, 代数幾何における分裂理論に詳しい方ならば, この逆はどうなのか, というところが気になるはずである. 即ち, 代数幾何においては射影空間上の層の分裂は, 射影平面より高い次元においては超平面切断における分裂と同値である. これが有名な Horrocks の判定法（厳密にはその系）であるが, 吉永はこれを超平面配置の自由性判定の枠組みに本格的に導入した. その場合重要な役割を果たすのは無論上記 Ziegler 制限とその自由性であるが, ここで問題となるのが, 対数的ベクトル場を層の言葉に直そうとした場合, 若干のずれが生じる点である. 以下, 具体的に説明しよう.

θ_E をオイラー微分とし, $D_H(\mathcal{A}) := \{\theta \in D(\mathcal{A}) \mid \theta(\alpha_H) = 0\}$ とすると, これは $D(\mathcal{A})/S\theta_E$ と同型であること, 及び

$$D(\mathcal{A}) \simeq S\theta_E \oplus D_H(\mathcal{A})$$

が簡単にわかる. よって $\mathcal{A}$ の自由性は, $D_H(\mathcal{A})$ の自由性と同じであり, これはまたその層化の分裂とも同値となる. これに対して Ziegler 制限射 $D_H(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}^H, m^H)$ が, α_H で modulo を取る, という操作で定義できる. この層化が射影空間上の層の間の写像となり, Horrocks の判定法と関連付けられるわけである. とすると問題となるのはただ一点,

$$D\widetilde{(\mathcal{A}^H, m^H)} \simeq \widetilde{D_H(\mathcal{A})}|_H$$

たる同型が存在するか, という点に尽きる．これが存在すれば, Horrocks の判定法は完全に機能する．しかし一般にはそうではない．吉永はこれを, 射影平面に対応する場合にも適用する形で以下のように定式化した.

定理 3.4 (吉永の判定法, [18], [19], [10])
(1) $\ell = 3$ とし, $\pi(\mathcal{A};t) = (1+t)(1+b_1t+b_2t^2)$ とおく．また $\exp(\mathcal{A}^H, m^H) = (d_1, d_2)$ とする． この時 $b_2 \ge d_1d_2$, かつ等号成立は, $\mathcal{A}$ が指数として $(1, d_1, d_2)$ を持つ自由配置となることと同値.

(2) $\ell \ge 4$ とする．この時 $\mathcal{A}$ が自由となることは, ある $H \in \mathcal{A}$ が存在して, $(\mathcal{A}^H, m^H)$ が自由であり, かつ局所化配置 $\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \mid H \supset X\}$ が, 任意の $X \in L(\mathcal{A}^H)$, $\operatorname{codim}_H X = 2$ で自由となることと同値.

この定理が, 自由配置研究に新しい視点を導入した．その理由は色々あるが, まず代数幾何的手法がやはり非常に強力であることが大きい．もう一つ, (1) にある不等式 $b_2 - d_1d_2 \ge 0$ をどう解釈するか, という視点も非常に重要であった．これについては例えば [2] をご参照頂きたい.

さて, 定理 3.4 は明らかに, 寺尾予想の解決に対する確実な, そして大きな進展であった．つまり, 吉永の判定法により, ある次元の自由性の判定は, それより一次元下にある多重配置の自由性の問題へと帰着されたのである．次元に関する帰納法の働きどころであった． ところが, ここで現れるのが, 代数幾何の特徴である, generic な情報という問題であった．例えば射影平面上のベクトル束の分裂型は, generic にはなにか, ということは色々な結果からわかることもあるが（例えば半安定束に対する Grauert-Mülich の定理など）, special な場合はいつでも分裂型のジャンプが起こりうるため, 一般に確定は難しい．それと同じことが, 多重化して代数幾何に近づいた結果, 起きてしまったのである.

詳述すると, 定理 2.8 から, b_2 は組合せ論で決まるため, また二次元多重配置は自由なため, 定理 3.4(1) を用いれば, 少なくとも三次元の寺尾予想は解決に非常に近くなったように見える．ところが, 以下のような例があるため, 壁がまだまだあることが分かってしまうのである.

例 3.5
$(\mathcal{A}, m)$ を,

$$x^3y^3(x-y)(x+ay) = 0$$

で定義される多重配置とする．すると a が *generic* な値を取る場合にはその指数は $(4, 4)$ であるが, 例えば $a = 1$ の場合には $(3, 5)$ となる.

例 3.5 のような現象はどのような配置でも起こりうるが, これは代数幾何的には, 与えられたベクトル束の分裂型は一般には差が最小となるが, 特殊なところではジャンプしますよ, という主張である. 自由配置は先述の通り基本的に特殊なところを見ているため, このギャップを正確に埋めないと, 三次元の場合であっても寺尾予想はまだ遠かったのである. ちなみにこのようなジャンプは, Ziegler 制限でない普通の制限 $\mathcal{A}^H$ に対しては起こっていない. これはつまり, 普通の制限は組み合わせ論と相性が良い, ということを補強している.

しかし, 明らかに強力な判定法である吉永の判定法を用いない手はない. これを用いて寺尾予想にアプローチするためには, 多重配置の自由性とその指数の解析が本質的に重要になってくる. そのため, 吉永の判定法発見からしばらくは, 多重配置の自由性に関する一般論の研究が進められることとなる. 詳細は煩雑になるため省くが, 大きな進展としては多重配置のポアンカレ多項式の定式化と応用 ([8]) 及び, 多重配置の自由性に関する加除定理の完成 ([9]) があげられる. これらにより, 多重配置の自由性解析はかなり進歩した.

これらの技術を用いて, 寺尾の加除定理を本質的に改良することに成功したのが, 以下の剰余定理である：

定理 3.6 (剰余定理, [3])
$\mathcal{A} \ni H$ に対して, $\pi(\mathcal{A}^H;t)$ が $\pi(\mathcal{A};t)$ を割り切り, かつ $\mathcal{A}^H$ が自由であるならば, $\mathcal{A}$ も自由.

寺尾の分解定理を思い出すと, 例えば加除定理 2.6 中の条件 (2) と (3) が成り立っている状況下においては, $\pi(\mathcal{A}^H;t) \mid \pi(\mathcal{A}';t)$ となっていることが, 寺尾の分解定理からわかる. ここでさらに, 除去制限定理という有名な結果を思い出そう（例えば [13] を参照）:

$$\pi(\mathcal{A};t) = \pi(\mathcal{A}';t) + t\pi(\mathcal{A}^H;t).$$

これにより, 加除定理 2.6 で仮定されている条件下においては $\pi(\mathcal{A}^H;t)$ が $\pi(\mathcal{A};t)$ を割り切っていることもわかる. よって, 加除定理に含まれている指数の包含関係という, 自由性がないと定式化できない条件が, これらの観察から, ポアンカレ多項式の剰余という組み合わせ論の言葉で述べられるとわかる. よって剰余定理はこの観点からの加除定理の一般化であり, 実は $\mathcal{A}$ の自由性を帰納的に述べるには, $\mathcal{A}'$ の情報は不要であったことが初めて判明した定理でもある.

証明を細かく述べることは避けて, ここではその概略のみを述べる．まず証明のために用いるのは吉永の判定法 (定理3.4) の (2) の主張である．すなわち, $(\mathcal{A}^H, m^H)$ が自由であること, および $\mathcal{A}_X$ が任意の $X \in L(\mathcal{A}),\ X \subset H,\ \operatorname{codim} X = 3$ に対して自由であることを言いたい．後者の主張は省略するとして, 前者に焦点を絞る．我々は $\mathcal{A}^H$ の自由性を仮定として持っている．よってこれから $(\mathcal{A}^H, m^H)$ の自由性を導出したい．そのための道具が多重配置の加除定理 ([9]) である．加除定理を適用するための鍵となるのが, 多重配置の特性多項式 ([8]) であり, さらにその適用がうまくゆくための条件として $\pi(\mathcal{A}^H; t) \mid \pi(\mathcal{A}; t)$ が活躍することとなる．よって剰余定理の主張の中には多重配置の言葉が全く出てきていないのに, 証明は多重配置の理論を徹底的に使う．また証明を見てゆくと, 組み合わせ論的情報と相性の良い $\mathcal{A}^H$ の対数的ベクトル場に, ポアンカレ多項式の剰余というやはり組み合わせ論的情報を組み合わせることで, 代数幾何的情報である $(\mathcal{A}^H, m^H)$ の対数的ベクトル場の情報が得られる, という構造もわかる．

剰余定理の恩恵はいろいろあるが, $\mathcal{A}'$ の情報を不要とした結果として, 自由性が次元に関する帰納法のみでチェックできうる, とわかったことが大きい．よって次のような定式化をすることは極めて自然である．

定理 3.7 (剰余旗, [3])
$\{X_i\}_{i=0}^{\ell}$ が超平面配置 $\mathcal{A}$ の旗であるとは, $X_i \in L(\mathcal{A}),\ \operatorname{codim} X_i = i,\ X_i \subset X_{i-1}\ (i = 1, \ldots, \ell)$ たる時に言う．$\{X_i\}$ が剰余旗であるとは, $\pi(\mathcal{A}^{X_i}; t) \mid \pi(\mathcal{A}^{X_{i-1}}; t)$ が $i = 1, \ldots, \ell - 2$ で成立しているときに言う．もし $\mathcal{A}$ が剰余旗を持てば, $\mathcal{A}$ は自由配置である．

主張の証明は簡単である．$\mathcal{A}^{X_{\ell-2}}$ は二次元の配置なので自由, $\pi(\mathcal{A}^{X_{\ell-2}}; t) \mid \pi(\mathcal{A}^{X_{\ell-3}}; t)$ から剰余定理より $\mathcal{A}^{X_{\ell-3}}$ も自由．以下繰り返し, というだけである．ここで注目すべきは, 剰余旗の条件は対応する制限配置たちの間のポアンカレ多項式の剰余関係であるため, 定義からこれらは組み合わせ論的条件である．よって以下の定義が自然にできる．

系 3.8 (剰余的自由配置, [3])
剰余旗を持つ配置からなる集合を $\mathcal{DF}$ と書き, $\mathcal{DF}$ に属する配置を剰余的自由配置という．もしある配置 $\mathcal{B}$ が, 剰余的自由配置 $\mathcal{A}$ と同型な交差格子を持てば, $\mathcal{B}$ も自由である．

証明は明らかであろう．さらに定義から剰余的自由配置は帰納的自由配置を含むことが明らかであるが, さらに強く

$$\mathcal{IF} \subsetneq \mathcal{DF}$$

であることも [3] で示されている．剰余的自由配置は現在知られている，寺尾予想の正しさが確認できる自由配置のクラスの中で最も大きなものである．しかしながら剰余的自由配置でない自由配置もいくつも見つかっているため，寺尾予想の解決にはほど遠い．

なお，さらっと書いているが実際上 $\pi(\mathcal{A};t)$ を計算することは非常に難しい．なので実用上は，$\mathcal{A}^H, \mathcal{A} \setminus \{H\}$ の自由性を示して，という過程を繰り返すことで剰余的自由配置であることを示す，ということが普通だと思う．なので剰余定理は理論的な定理とも言える．更に，自由性がその交差格子中のある旗の存在，もっと言えばメビウス関数たちがある特定の性質を満たすか，という数値的な情報で，かなりの場合に自由性が決定されることがチェックできる定理，という見方が正しいと思う．個人的に剰余定理が示す最も重要な哲学は，思っていた以上に簡単な組み合わせ論的構造から自由性が決定されることが多い，という事実であると思う．

さて，ここでちょっとだけ視点を変える．先に述べたように，$\mathcal{A}^H$ の対数的ベクトル場は，代数幾何的には $\mathcal{A}$ のそれと何ら関係がなく，$\mathcal{A}$ の自由性が $\mathcal{A}^H$ の自由性を導く必然性は何もない．しかしながら実際は，$\mathcal{A}$ が自由ならば $\mathcal{A}^H$ も自由であろう，という Orlik 予想がかなり長い間未解決であった．その否定的解決は，Edelman と Reiner による ([12])．しかし面白いことに，このようなケース，すなわち $\mathcal{A}$ が自由でありながら $\mathcal{A}^H$ が自由でないという例はほとんど知られていない．筆者が知る限り，本質的に二つだけである．これは，理由はよくわからないけれど，自由配置の制限は代数幾何とは異なった根拠から自由になりたがる傾向がある，ということである．あるいはこれにも代数幾何的な意味付けができるのかもしれない．とりあえずは，剰余定理をまねて，Orlik 予想の改訂版として [4] で以下の問題を提出している．

問題 3.9 ([4])
$\mathcal{A} \ni H$ に対して，$\pi(\mathcal{A}^H;t)$ が $\pi(\mathcal{A};t)$ を割り切り，かつ $\mathcal{A}$ が自由であるならば，$\mathcal{A}^H$ も自由となるか？

[4] において，ある条件下ではこの予想を示しているが，一般的には正しいかどうかは未解決である．個人的には，おそらくこの主張は正しくないだろう，と考えている．

4 自由配置と Hessenberg 多様体

この章では, 最近得られた結果を紹介する. その中で, 自由配置や対数的ベクトル場が, 代数的側面だけでなく, 幾何学的側面でも極めて重要な役割を果たす, ということを紹介したい.

G を階数 ℓ の複素半単純線型代数群とし, B をそのボレル部分群として固定し, T を B に含まれる極大トーラスとする. $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}$ をそれらのリー環とし, また T の極大実トーラスのリー環を $V \simeq \mathbb{R}^\ell$ とおく. また, これらから定まるルート系と正ルートを Φ, Φ^+ と書き, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ を単純ルート全体とする. この状況下, 任意の部分集合 $U \subset \Phi^+$ に対して V 中の超平面配置 $\mathcal{A}_U$ が,

$$\mathcal{A}_U := \{H_\alpha \mid \alpha \in U\}$$

で定義される. ここで $H_\alpha \subset V$ は, $\alpha \in \Phi^+$ に対応する鏡映 s_α が定める鏡映超平面である. 特に $\mathcal{A}_{\Phi^+}$ をワイル配置と呼ぶ. $\alpha \geq \beta$ $(\alpha,\ \beta \in \Phi^+)$ という順序を, $\alpha - \beta \in \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ で定義する. この順序について下に閉じている部分集合 $I \subset \Phi^+$ をイデアルという.

定義 4.1
$A \in \mathfrak{g}$ とイデアル $I \subset \Phi^+$ から定まる *Hessenberg* 多様体 $X(A, I)$ を,

$$X(A, I) := \{gB \in G/B \mid Ad(g^{-1})(A) \in \mathfrak{b} \bigoplus (\oplus_{\alpha \in I} \mathfrak{g}_{-\alpha})\}$$

で定義する. ここで $\mathfrak{g}_\alpha$ は α に対応するルート空間である.

$I = \Phi^+$ ならばこれは旗多様体 G/B であり, また A が nilpotent で $I = \emptyset$ ならば Springer fiber となる. これらを包括的に扱う多様体が Hessenberg 多様体であり, De Mari, Procesi, Shayman により [11] にて導入された. 特に A が regular nilpotent の場合に A を N と表し, regular nilpotent Hessenberg 多様体 $X(N, I)$ のコホモロジー環やベッチ数の構造が, 様々な観点から調べられている. しかし一般のタイプについてはベッチ数も特定の場合以外はわかっていなかったし, コホモロジー環の表示も A 型の場合がつい最近得られたばかりであった ([1]). ここで不思議なことに超平面配置が登場し, その対数的ベクトル場から $X(N, I)$ のコホモロジー環の表示が得られる, という結果を紹介したい.

そのために, 少し準備をする. まず不変式論に関する古典的な結果を思い出そう. $W = N(T)/T$ を階数 ℓ のワイル群とすると, 上の記号から W は V に作用している. この作用は双対空間や座標環への作用に自然に拡

張される．よって特に V の座標環 $S \simeq \mathbb{R}[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell]$ への作用に関する不変式環 S^W を考えることができる．ここで Chevalley の結果から,

$$S^W = \mathbb{R}[P_1, \ldots, P_\ell]$$

となるような, $\mathbb{R}$ 上で代数的独立な斉次多項式 $P_1, \ldots, P_\ell$ $(\deg P_1 < \deg P_2 \le \cdots \le \deg P_\ell)$ が存在する．これらを基本不変式と呼んだ．ここで $\deg P_1 = 2$ ということはよく知られている．さらに P_1 から定まる V 上の W 不変内積を I とおく．これにより V と V^* が自然に同一視される．また,

$$\operatorname{Der} S \simeq S \otimes V,\ \Omega_S \simeq S \otimes V^*$$

に注意すると, I^* により Ω_S と $\operatorname{Der} S$ は自然に同一視される．

さて, ここで超平面配置の代数として定式化した対数的ベクトル場の起源の話をしよう．それは齋藤恭司による以下の定理である：

定理 4.2 (cf. [14])
$\mathcal{A}_{\Phi^+}$ は自由配置であり, $D(\mathcal{A}_{\Phi^+})$ は基底として $I^*dP_1, \ldots, I^*dP_\ell$ を持つ．特に $\exp(\mathcal{A}_{\Phi^+}) = \exp(W)$ である．

すなわちワイル群の指数は, ワイル配置の自由配置としての指数と一致するのである．この観点から, 対数的ベクトル場を用いて超平面配置の指数が定義できる配置としてのワイル配置の一般化が自由配置であり, 実際その指数は, 寺尾の分解定理より位相幾何的意味を持つことが証明されている．よって定理 4.2 こそ, 対数的ベクトル場とその自由性研究の起源たる定理である．

さて, この観点を旗多様体の幾何学と関連付けることを考えよう．まず有名な事実として, $2 = \deg P_1 < \deg P_2$ を思い出しておく．空でない自由配置の基底は必ず次数 1 のオイラー微分 θ_E を含むので, 定理 4.2 においてこれに対応するものは I^*dP_1 しかありえない．よって $I^*dP_1 = \theta_E$ と仮定してよい．よって

$$I^*dP_i(P_1) = I^*(dP_i, dP_1) = I^*(dP_1, dP_i) = I^*(dP_1)(P_i) = \theta_E(P_i) = P_i$$

が, up to non-zero scalar で成立する．よって,

$$\mathfrak{a}(\Phi^+) := \{\theta(P_1) \mid \theta \in D(\mathcal{A}_{\Phi^+})\} = (P_1, \ldots, P_\ell)$$

が直ちにわかる．ゆえに, Borel の結果と合わせることで, 以下が直ちに従う．

系 4.3

$$S/\mathfrak{a}(\Phi^+) \simeq H^*(G/B, \mathbb{R})$$

つまり, 旗多様体のコホモロジー環の表示が余不変式環から得られる, という不変式論を用いた Borel の結果は, 超平面配置の対数的ベクトル場を用いれば不変式論なしで定式化できる. よって, 一般には不変式論が出てこないような対象に対しても, この同型を拡張できるのでは, という疑問が当然わいてくる. この設定では特に, $U \subset \Phi^+$ に対して,

$$\mathfrak{a}(U) := \{\theta(P_1) \mid \theta \in D(\mathcal{A}_U)\}$$

と定義した場合に, U からやはり定まる多様体 X_U が存在して,

$$S/\mathfrak{a}(U) \simeq H^*(X_U)$$

とならないだろうか, という問題といえる. これに対して肯定的な問いが, イデアルとイデアルに対応する配置, および Hessenberg 多様体について言える, というのがこの章の主定理である. そこでイデアルに $I \subset \Phi^+$ に対応するイデアル配置 $\mathcal{A}_I := \{H_\alpha \mid \alpha \in I\}$ の自由性についての以下の定理をまず紹介しておく：

定理 4.4 ([5])
任意のイデアル $I \subset \Phi^+$ に対して, $\mathcal{A}_I$ は自由配置であり, その指数は I に含まれる正ルートたちの高さ分布の双対分割と一致. ここで $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ たる単調非増加数列の双対分割とは,

$$((0)^{\ell-a_1}, (1)^{a_1-a_2}, \ldots, (s-1)^{a_{s-1}-a_s}, (s)^{a_s})$$

たる数列である. $\exp(\mathcal{A}_I) =: (d_1^I, \ldots, d_\ell^I)$ と表す.

これらを用いることで, 以下の定理が得られる.

定理 4.5 ([6])
(1) $I \subset \Phi^+$ *をイデアルとし,* $N \in \mathfrak{g}$ *を regular nilpotent とする. この時* $S \supset \Phi^+ \ni \alpha$ *を* $c_1(L_\alpha) \in H^*(G/B)$ *に送るという Borel の同型の自然な制限として,*

$$S/\mathfrak{a}(I) \simeq H^*(X(N, I))$$

が成立. 特に $H^*(X(N,I))$ は完全交差環であり,

$$Poin(X(N,I);x) = \prod_{i=1}^{\ell}(1+x+\cdots+x^{d_i^I})$$

が成立. さらに $H^*(G/B) \to H^*(X(N,I))$ は全射.

(2) $I \subset \Phi^+$ をイデアルとし, $s \in \mathfrak{g}$ を *regular semisimple* とする. この時

$$S/\mathfrak{a}(I) \simeq H^*(X(s,I))^W$$

が成立. ここでコホモロジー環への W の作用は, *Tymoczko* により定義された *dot action ([17]* 参照*)*. 特に $H^*(X(s,I))^W$ は完全交差環.

(3)

$$H^*(X(s,I))^W \simeq H^*(X(N,I)).$$

証明はかなり長いので触れられないが, 重要なポイントの一つとして, $H^*(X(N,I))$ の完全交差性とポアンカレ多項式の決定には, それぞれイデアル配置 $\mathcal{A}_I$ の自由性とその指数の情報が, 決定的な役割を果たしているという点があげられる. アルチン環 $S/\mathfrak{a}(I)$ は一般的な定義も可能で, 自由であればある程度の情報はわかるのだが ([7]), 自由でなければ完全交差性などは判定できないのが現状である. よって定理 4.4 は極めて重要であり, 自由配置の重要性は, 対数的ベクトル場の代数的構造にとどまらないことがわかる.

定理 4.5 は Hessenberg 多様体のコホモロジー環の構造論や, A が regular semisimple な場合のワイル群作用に関連した幾何学的表現論などにおいて重要な役割を果たすと期待されている（詳細は [1] などを参照）. しかし証明はイデアル $I \subset \Phi^+$ の元の数に関する帰納法であり, I に元を加えてもイデアルになる状況を帰納的に処理することで, Borel の同型にまで帰着させることが鍵となっている. ゆえに, なぜイデアル配置の対数的ベクトル場から構成されるイデアル $\mathfrak{a}(I)$ が, 同じイデアルに対応する Hessenberg 多様体のコホモロジー環の表示に重要な役割を果たすのかという理由は謎のままである. この辺りの本質的な構造を明らかにすることができれば, これらの研究はより深みを増すと期待される.

参考文献

[1] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi and M. Masuda, The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A. arXiv:1512.09072.

[2] T. Abe, Roots of characteristic polynomials and and intersection points of line arrangements. *J. Singularities*, **8** (2014), 100–117.

[3] T. Abe, Divisionally free arrangements of hyperplanes. *Invent. Math.* **204** (2016), no. 1, 317–346. DOI:10.1007/s00222-015-0615-7.

[4] T. Abe, Restrictions of free arrangements and the division theorem. Proceedings of the Intensive Period "Perspectives in Lie Theory", to appear. arXiv:arXiv:1502.07520v3.

[5] T. Abe, M. Barakat, M. Cuntz, T. Hoge and H. Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. *J. Eur. Math. Soc.*, **18** (2016). no. 6, 1339–1348.

[6] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai and T. Sato, Hessenberg varieties and hyperplane arrangements. arXiv:1611.00269.

[7] T. Abe, T. Maeno and Y. Numata, The theory of Solomon-Terao algebras. in preparation.

[8] T. Abe, H. Terao and M. Wakefield, The characteristic polynomial of a multiarrangement. *Adv. in Math.*, **215** (2007), 825–838.

[9] T. Abe, H. Terao and M. Wakefield, The Euler multiplicity and addition-deletion theorems for multiarrangements. *J. London Math. Soc.*, **77** (2008), no. 2, 335–348.

[10] T. Abe and M. Yoshinaga, Free arrangements and coefficients of characteristic polynomials. *Math. Z.*, **275** (2013), Issue 3, 911-919.

[11] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, Hessenberg varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), no. 2, 529–534.

[12] P. H. Edelman and V. Reiner, A counterexample to Orlik's conjecture. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118** (1993), 927–929.

[13] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[14] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **27** (1980), 265–291.

[15] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness I, II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **27** (1980), 293–320.

[16] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. *Invent. Math.* **63** (1981), 159–179.

[17] J. Tymoczko, Permutation actions on equivariant cohomology of flag varieties. *Contemp. Math.* **460** (2008), 365–384.

[18] M. Yoshinaga, Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner. *Invent. Math.* **157** (2004), no. 2, 449–454.

[19] M. Yoshinaga, On the freeness of 3-arrangements. *Bull. London Math. Soc.* **37** (2005), no. 1, 126–134.

[20] G. M. Ziegler, Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. Singularities (Iowa City, IA, 1986), 345–359, Contemp. Math., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.