

# 多様体の三角形分割の組合せ論と可換環論

村井 聡 (大阪大学大学院情報科学研究科)

## 1. 序文

単体的複体の組合せ論の問題を、スタンレー・ライスナー環を用いて代数的なアプローチから研究する手法は1970年代にStanleyによって導入され、以後、様々な研究が進められて来た。本稿ではスタンレー・ライスナー環の理論の多様体の最小頂点三角形分割の研究への応用について紹介する。

スタンレー・ライスナー環の理論の多様体の三角形分割の研究への最初の応用は1981年にSchenzel [Sc]によってなされた。Schenzelは多様体の三角形分割のスタンレー・ライスナー環がBuchsbbaum環である事を示し、Buchsbbaum環の性質を用いて凸多面体論における重要な定理の一つである上限定理が多様体の三角形分割に一般化できるというKleeの予想を研究した。Schenzelの用いた手法は1998年にNovik [No]によりさらに研究が進められ、この二つの仕事によりKleeの予想のかなりの部分が解決された。一方、Novikのこの仕事以降、このトピックに関する大きな進展はしばらくなかったが、2009年のSwartz [Sw1]とNovik, Swartz [NS1]による研究を切っ掛けとし、ここ数年の間にスタンレー・ライスナー環を用いた多様体の三角形分割の研究が大きく進展している。これら最近の進展については、Swartz及びKleeとNovikによって書かれた二つの素晴らしいサーベイ [Sw2, KN] に主要な結果が良く纏まっているので詳細は其方を参照してもらうこととし、本稿では、少しマイナーなトピックとなるが、[Sw2, KN]ではあまり扱われていない最小頂点三角形分割に関する話題について紹介したい。

本稿の構成は以下の通りである。次の§2では、単体的複体やスタンレー・ライスナー環に関する基本的な事項について述べる。§3では、最小頂点三角形分割について、閉曲面の場合に関する話題を中心に、問題意識と既知の結果を紹介する。§4では、可換環論がどのように最小頂点三角形分割の研究に応用されたのかを紹介する。

## 2. スタンレー・ライスナー環

初めに単体的複体に関する基本的な用語の準備を行う。  $\Delta$  を  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  を頂点集合とする(有限抽象)単体的複体とする。即ち、  $\Delta$  は  $[n]$  の部分集合の族であって、  $F \in \Delta$  かつ  $G \subset F$  なら  $G \in \Delta$  という条件を満たすものである。単体的複体  $\Delta$  に対しその自然な幾何学的実現を  $|\Delta|$  で表すことにする。  $\Delta$  の幾何学的実現が位相空間  $X$  と同相となる時、  $\Delta$  を  $X$  の三角形分割と呼ぶ。単体的複体  $\Delta$  の元であって、要素の個数が  $i+1$  であるものを  $\Delta$  の  $i$  次元面と呼び、  $\Delta$  の持つ面の次元の最大値を  $\Delta$  の次元と呼ぶ。また、  $f_i(\Delta)$  で  $\Delta$  の持つ  $i$  次元面の個数を表す。単体的複体  $\Delta$  の面  $F \in \Delta$  に対し

$$\text{lk}_\Delta(F) = \{G \setminus F : F \subseteq G \in \Delta\}$$

を  $\Delta$  上の  $F$  の link と呼ぶ。  $\tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{F})$  で体  $\mathbb{F}$  を係数とする  $\Delta$  の  $i$  番目の被約ホモロジー群を表すとし、  $\beta_i(\Delta) = \beta_i(\Delta; \mathbb{F}) = \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{F})$  で  $\Delta$  の  $i$  番目のベッチ数を表す。

次にスタンレー・ライスナー環と単体的複体の Buchsbaum 性について述べる.  $S = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$  を体  $\mathbb{F}$  を係数とする多項式環とする.  $[n]$  上の単体的複体  $\Delta$  に対し, 環

$$\mathbb{F}[\Delta] = S/(x_{i_1} \cdots x_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [n], \{i_1, \dots, i_k\} \notin \Delta)$$

を (体  $\mathbb{F}$  を係数とする)  $\Delta$  のスタンレー・ライスナー環という.  $d$  次元単体的複体  $\Delta$  が ( $\mathbb{F}$  上) **Cohen–Macaulay** であるとは, 任意の  $F \in \Delta$  (空集合の場合も含む) に対し, 全ての  $i \neq d - \#F$  に対し  $\beta_i(\text{lk}_\Delta(F); \mathbb{F}) = 0$  となる時に言う, 但し  $\#X$  は  $X$  の要素の個数を表す. また,  $d$  次元単体的複体  $\Delta$  が **Gorenstein\*** (又は  **$\mathbb{F}$ -homology  $d$ -sphere**) であるとは,  $\Delta$  が Cohen–Macaulay で, かつ任意の  $F \in \Delta$  に対し  $\beta_{d-\#F}(\Delta; \mathbb{F}) = 1$  が成り立つ時に言う. 単体的複体の極大面の次元が全て同じである時, その単体的複体は **pure** であるという. pure な単体的複体が ( $\mathbb{F}$  上) **Buchsbaum** であるとは, その頂点に関する link が全て ( $\mathbb{F}$  上) Cohen–Macaulay となる時に言う. ここではホモロジーに関する条件で Cohen–Macaulay 性や Buchsbaum 性を定義したが, 上の定義は  $\mathbb{F}[\Delta]$  が Cohen–Macaulay 環や Buchsbaum 環となる事と同値である. (詳しくは, [St] を見よ.)

最後に, 本稿で取り扱う多様体の三角形分割に関連する幾つかの単体的複体のクラスについて述べる. 多様体の三角形分割の組合せ論的な性質の研究では一般の三角形分割を扱う事は少なく, 組合せ三角形分割と呼ばれる特別な条件を満たす対象か, homology manifold と呼ばれる一般化された対象を扱う事が多い. pure な  $d$  次元単体的複体  $\Delta$  が境界のない  **$\mathbb{F}$ -homology  $d$ -manifold** であるとは, 任意の  $F \in \Delta$  (但し,  $F \neq \emptyset$ ) に対して,  $\text{lk}_\Delta(F)$  が Gorenstein\* となる時に言う. また, pure な  $d$  次元単体的複体  $\Delta$  が境界を持つ  **$\mathbb{F}$ -homology  $d$ -manifold** であるとは次の三つの条件を満たす時に言う: (i)  $\Delta$  は Buchsbaum, (ii) 任意の  $F \in \Delta$  (但し,  $F \neq \emptyset$ ) について,  $\beta_{d-\#F}(\text{lk}_\Delta(F); \mathbb{F}) \in \{0, 1\}$ , (iii)  $\Delta$  の境界  $\partial\Delta = \{F \in \Delta : \beta_{d-\#F}(\text{lk}_\Delta(F); \mathbb{F}) = 0\}$  が境界のない  $\mathbb{F}$ -homology  $(d-1)$ -manifold となる. 一方, 単体的複体  $\Delta$  が  $d$  次元閉多様体  $M$  の三角形分割であり, かつ  $\Delta$  の任意の頂点  $\{v\} \in \Delta$  について  $|\text{lk}_\Delta(v)|$  が  $d$ -単体の境界又は  $(d-1)$ -単体と PL 同相である時,  $\Delta$  を  $M$  の組合せ三角形分割という. 多様体の組合せ三角形分割は明らかに多様体の三角形分割であり, 多様体の三角形分割は任意の体  $\mathbb{F}$  に関して  $\mathbb{F}$ -homology manifold となる. また, 任意の  $\mathbb{F}$ -homology manifold は  $\mathbb{F}$  上 Buchsbaum である.

### 3. 最小頂点三角形分割

多様体の三角形分割の研究において, 最も基本的な問題の一つは次の問題である.

**問題 3.1.** 与えられた (有限三角形分割可能な) 閉多様体  $M$  に対し,  $M$  の三角形分割の頂点数の最小値を求めよ.

言い換えると, 与えられた閉多様体を三角形分割する為には最低何個の頂点が必要か? というのが問題 3.1 の聞いていることである. 簡単な例を挙げると,  $S^1$  を三角形分割するのに必要な頂点数は 3 である. 実際, 三角形 (の境界) は  $S^1$  の 3 頂点三角形分割を与え, かつ 2 頂点で  $S^1$  を三角形分割するのが不可能であることは明らかである. (セル複体との違いに注意せよ. セル複体のレベルで  $S^1$  を 2 頂点で単体分割することは可能である.) 問題 3.1 は問題自体は素朴であるが, 与えられた  $M$  について実際に最小値を求めるのは大変難しい. ここでは一番簡単な場合である閉曲面の場合に知られている結果を紹介しよう. 最小頂点三角形分割について詳しいことが知りたい場合は, Lutz による既知の結果が良く纏められているサーベイ [Lu] があるのでそちらを参照して欲しい.

良く知られているように, 連結な閉曲面 (2次元閉多様体) の位相型は閉曲面の分類定理によって完全に分類されており, 種数  $g$  の向付け可能な閉曲面  $S_g$  と種数  $g$  の向付け不可能な閉曲面  $N_g$  に分けられる. ( $S_0$  が球面  $S^2$ ,  $S_1$  がトーラス  $S^1 \times S^1$ ,  $N_1$  が射影平面  $\mathbb{R}P^2$ ,  $N_2$  がクラインの壺である.) 連結な閉曲面を三角形分割する為に必要な頂点数の下限として, Heawood の不等式と呼ばれる以下の結果が知られている.

**定理 3.2** (Heawood の不等式 [He]).  $\Delta$  が連結な閉曲面  $M$  の  $n$  頂点三角形分割なら,

$$(1) \quad \binom{n-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M))$$

が成り立つ. 但し,  $\chi(M)$  は  $M$  のオイラー数である.

*Proof.* 簡単なので証明も紹介しておく. オイラー関係式より,

$$(2) \quad n - f_1(\Delta) + f_2(\Delta) = \chi(\Delta)$$

である. また,  $\Delta$  の各辺は丁度 2 つの 2次元面に含まれ, かつ  $\Delta$  の各 2次元面は丁度 3本の辺を含むので,

$$(3) \quad 2f_1(\Delta) = 3f_2(\Delta)$$

という等式も成り立つ. 一方, 明らかに  $f_1(\Delta) \leq \binom{n}{2}$  であるので, (2), (3) より,

$$n - \chi(M) = \frac{1}{3}f_1(\Delta) \leq \frac{1}{3}\binom{n}{2}$$

が得られる. 上の式を変形すると, 求める不等式  $\binom{n-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M))$  を得る.  $\square$

Heawood の不等式は, 閉曲面を三角形分割する為に必要な頂点数の下限を与える. 例えば,  $\Delta$  がトーラス  $S^1 \times S^1$  の  $n$  頂点三角形分割なら  $\chi(S^1 \times S^1) = 0$  であることから,  $\binom{n-3}{2} \geq 6$ , 即ち,  $n \geq 7$  が成り立つことがわかる. また,  $\Delta$  が射影平面  $\mathbb{R}P^2$  の  $n$  頂点三角形分割なら  $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$  であるので,  $n \geq 6$  が成り立つ. (実際に 7 頂点のトーラスの三角形分割, 6 頂点の射影平面の三角形分割は存在する. 探してみよ!) 実は, 上の Heawood の不等式を満たす最小の  $n$  が, 殆どの場合で, 閉曲面を三角形分割する為に必要な最小の頂点数を与えることが知られている. 次の定理はグラフ理論における基本的な定理の一つである.

**定理 3.3** (Jungerman and Ringel [Ri, JR]).  $M$  が種数 2 の向付け可能な閉曲面, クラインの壺, 種数 3 の向付け不可能な閉曲面以外の連結な閉曲面である時, (1) を満たす任意の  $n$  に対し  $M$  の  $n$  頂点三角形分割が存在する.

上の定理より, Heawood の不等式を満たす最小の整数  $n$  が閉曲面の三角形分割の頂点数の最小値を与えることが分かる. 尚, 3 つある例外の場合は必要な頂点数は Heawood の不等式から導かれる値 +1 となる.

上で述べたことにより, 閉曲面の場合には問題 3.1 は解決していることがわかる. しかし, Jungerman と Ringel による結果の向付け可能な場合が 35 年前にようやく証明されたという事実を見ると, 閉曲面の場合にすらこの問題は簡単ではないことがわかる. 加えて述べると, Lutz のサーベイ [Lu] が書かれた時点では, 自明な場合である球面  $S^d$  と閉曲面の場合と  $S^1$  上の  $S^{d-1}$ -bundle の場合 [BD, CSS, Kü] を除くと問題 3.1 の答えが分かっている多様体は 11 個しかなかった (現在ではもう少し増えている [DS]) ことなどからも, 問題の難しさが伺える.

問題 3.1 が難しい理由は二つある. 難しい点の一つは, Heawood の不等式のような頂点数の下限を与える不等式を高次元多様体の場合に与えることが難しいという点である. 例えば,  $d$  次元トーラス  $T^d = S^1 \times \cdots \times S^1$  は  $2^{d+1} - 1$  個の頂点を持つ三角形分割の存在が知られており, この数  $2^{d+1} - 1$  が最小である事が予想されている [Lu, Conjecture 21] が,  $d = 3$  の場合にすらどのようにして頂点数の下限を求めれば良いのかわかっていない. 一方, もう一つの難しい点は, 多様体の三角形分割を具体的に構成することの難しさである. 例えば,  $S^i \times S^j$  (但し  $i \leq j$  とする) の三角形分割は少なくとも  $i + 2j + 4$  個の頂点を持つことが知られており [BK], 丁度  $i + 2j + 4$  個の頂点を持つ三角形分割を構成できれば  $S^i \times S^j$  に対して問題 3.1 が解けるのであるが,  $S^2 \times S^4$  の 14 頂点の三角形分割が存在するかや  $S^3 \times S^4$  の 15 頂点の三角形分割が存在するかなどさえ未解決である.

#### 4. 多様体の三角形分割の頂点数の下限と可換環論

さて, 前の章の最後に問題 3.1 が難しい二つの理由を挙げた. 実は, この二つの内, 前者の三角形分割の頂点数の下限を与える問題は可換環論を用いて研究することが出来る. この最後の章ではこの事について紹介する. 先ずは, Heawood の不等式の一般化に関する Kühnel の 3 つの予想 [Lu, Conjecture 16 and 18] を紹介する.

**予想 4.1** (Kühnel).  $\Delta$  が連結な  $2k$  次元閉多様体の  $n$  頂点組合せ三角形分割である時, 次が成り立つ

$$\binom{n-k-2}{k+1} \geq (-1)^k \binom{2k+1}{k+1} (\chi(\Delta) - 2).$$

上の予想は  $k = 1$  の場合は Heawood の不等式である. 上の予想の類似として, Kühnel は次のことも予想している.

**予想 4.2** (Kühnel).  $\Delta$  が連結な  $2k$  次元閉多様体の  $n$  頂点組合せ三角形分割である時, 次が成り立つ

$$\binom{n-k-2}{k+1} \geq \binom{2k+1}{k+1} \beta_k(\Delta; \mathbb{Q}).$$

**予想 4.3** (Kühnel).  $\Delta$  が連結な  $d$  次元閉多様体の  $n$  頂点組合せ三角形分割である時, 次が成り立つ

$$\binom{n-d+j-2}{j+1} \geq \binom{d+2}{j+1} \beta_j(\Delta; \mathbb{Q}) \quad (j = 1, 2, \dots, \lfloor (d-1)/2 \rfloor).$$

初見では予想に現れる二項係数が何を意味するのか分かりにくいだが, 今はこの予想が頂点数  $n$  の下限を与える予想であることのみ理解すれば十分である. 先に結論から述べるが, 上記の予想 4.1, 4.2 及び予想 4.3 の  $j = 1$  の場合は Novik と Swartz [NS1, NS2] によって予想が肯定的に解決されている. 後から分かったことも加え, 現在知られていることを纏めると次のようになる.

**定理 4.4** (Novik–Swartz [NS1, Theorem 4.4]).  $\Delta$  が丁度  $n$  個の頂点を持つ境界の無い連結な向付け可能な  $\mathbb{F}$ -homology  $d$ -manifold なら次が成り立つ

$$\binom{n-k-2}{k+1} \geq (-1)^k \binom{2k+1}{k+1} (\chi(\Delta) - 2).$$

**定理 4.5** (Novik–Swartz, M [Mu2, Theorem 5.2]).  $\Delta$  が丁度  $n$  個の頂点を持つ境界の無い連結な  $\mathbb{F}$ -homology  $2k$ -manifold なら次が成り立つ

$$\binom{n-k-2}{k+1} \geq \binom{2k+1}{k+1} \beta_k(\Delta; \mathbb{F}).$$

**定理 4.6** (Novik–Swartz, M [Mu2, Theorem 5.3]).  $\Delta$  が丁度  $n$  個の頂点を持つ境界の無い連結な  $\mathbb{F}$ -homology  $d$ -manifold なら次が成り立つ

$$\binom{n-d-1}{2} \geq \binom{d+2}{2} \beta_1(\Delta; \mathbb{F}).$$

尚, 定理 4.4 では向付け可能な仮定が入れられているが, 多様体の三角形分割は  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  上向付け可能な homology manifold となるので, 定理 4.4 から予想 4.1 が導かれる. また, 定理 4.5, 4.6 も, Novik と Swartz による最初の証明は向付け可能な仮定が入れられていたが, [Mu2] で向付けに依存しない証明が与えられた. (Kühnel の予想を示す際には  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  上で考えて良いので向付け可能性は仮定して問題ない.)

この章の残りで, Kühnel の予想の解決にどのような代数的な道具が使われたのか簡単に紹介しよう. 以後,  $\mathbb{F}$  は無限体であることを仮定する.  $d$  次元次数付き  $\mathbb{F}$ -代数  $R = S/I$  に対し,  $R/\Theta R$  が  $0$  次元環となるような一次式の列  $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_d$  を線形な巴系 (linear system of parameters) と呼ぶ.  $\mathbb{F}$  が無限体であることを仮定すると, 線形な巴系は必ず存在することが知られている. 単体的複体の次元が  $d$  である時, その Stanley–Reisner 環の次元は  $d+1$  である事を注意しておく. 多様体の三角形分割を代数的に研究する際には次の定理が基本的な道具となる.

**定理 4.7** (Novik–Swartz [NS1]).  $\Delta$  を  $(d-1)$  次元 Buchsbaum 単体的複体,  $R = \mathbb{F}[\Delta]$ ,  $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_d$  を  $R$  の線形な巴系とする. この時, 任意の  $i = 1, 2, \dots, d-1$  について次が成り立つ

$$\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta R)_i = \binom{d}{i} \beta_{i-1}(\Delta; \mathbb{F}).$$

但し,  $(R/\Theta R)_i$  は  $R/\Theta R$  の  $i$  次斉次成分を表すとする.

$\Delta$  が Buchsbaum である時,  $\beta_{i-1}(\Delta)$  は  $i \neq d$  の場合には極大イデアル  $\mathfrak{m} \subset S$  に関する局所コホモロジー  $H_{\mathfrak{m}}^i(\mathbb{F}[\Delta])$  の長さに一致する. また, 上の結果は局所環の場合には後藤 [Go] により本質的に証明されている事も補足しておく.

Novik と Swartz は上の定理を用いて Kühnel の予想を解決したのであるが, その話をする前に, 何故, 上の定理が頂点数の下限と関係するのか具体例を用いて解説しておこう.  $M$  をメビウスの帯とする. この時  $\beta_1(M) = 1$  であり, メビウスの帯を三角形分割する為には  $5$  個の頂点が必要であることが知られている.  $\Delta$  をメビウスの帯の  $n$  頂点三角形分割とし,  $n$  が  $5$  以上であることを定理 4.7 を用いて示してみよう.  $R = \mathbb{F}[\Delta]$  とし  $\Theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3$  を  $R$  の線形な巴系とする. 定理 4.7 より

$$\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta R)_2 \leq 3 \cdot \beta_1(M) = 3$$

という不等式を得る. 一方,  $R$  は  $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$  を割った環であるから,  $R$  を  $\Theta$  で割ることで実質的に変数が  $3$  つ減り,  $R/\Theta R$  は  $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_{n-3}]/J$  という形の  $\mathbb{F}$ -代数と同型になる. すると,

$$\binom{n-2}{2} = \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_1, \dots, x_{n-3}])_2 \leq \dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta R)_2 \leq 3$$

という一連の不等式を得るが、これが  $n \geq 5$  を導く。

メビウスの帯に関する上の議論を一般化すると、予想 4.3 に近い形の次の不等式が得られることが簡単にわかる。

**系 4.8.**  $\Delta$  が丁度  $n$  個の頂点を持つ  $d$  次元 Buchsbaum 単体的複体である時、次が成り立つ

$$\binom{n-d-1+j}{j+1} \geq \binom{d+1}{j+1} \beta_j(\Delta; \mathbb{F}) \quad (j = 1, 2, \dots, d-1).$$

残念ながら上の系から Kühnel の予想が導かれるわけではなく、Kühnel の予想の証明にはもう一工夫必要であるが、少なくとも上の議論から、定理 4.7 と頂点数の最小値の間に良い関係があることが見てとれる。定理 4.7 から定理 4.4, 4.5, 4.6 をどう導くかを説明するのは少し大変なので、本稿では定理 4.6 を導く次の定理を紹介するに止めておくことにする。

**定理 4.9** (M–Nevo [MN, Theorem 5.4]).  $\Delta$  を境界のない向付け可能な  $\mathbb{F}$ -homology  $d$ -manifold とし、 $R = \mathbb{F}[\Delta]$ ,  $\Theta^+ = \theta_1, \dots, \theta_{d+1}, \theta_{d+2}$  を十分一般的な一次式とする時、次が成り立つ

$$\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta^+R)_2 \geq \binom{d+2}{2} \beta_1(\Delta; \mathbb{F}).$$

上の定理は、大雑把に言うと、(十分一般的な) 線形な巴系にもう一つ一次式を追加して Stanley–Reisner 環を割る際にも、次数 2 の斉次成分において定理 4.7 と同等の性質が成り立つという結果である。尚、上の定理を認めると、向付け可能な場合には定理 4.6 は以下のように簡単に示せる。

$$\binom{n-d-1}{2} = \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_1, \dots, x_{n-d-2}])_2 \geq \dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta^+R)_2 \geq \binom{d+2}{2} \beta_1(\Delta; \mathbb{F}).$$

(向付け不可能な場合の証明はもう少し複雑な手順を取る。詳しくは [Mu2] を見よ。)

定理 4.9 を考えると、一般に次が成り立つことが予想される。

**予想 4.10.**  $\Delta$  を境界の無い (向付け可能な)  $\mathbb{F}$ -homology  $d$ -manifold とし、 $R = \mathbb{F}[\Delta]$  とする。ある一次独立な一次式の列  $\Theta^+ = \theta_1, \dots, \theta_{d+1}, \theta_{d+2}$  が存在し、次が成り立つ

$$\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta^+R)_{j+1} \geq \binom{d+2}{j+1} \beta_j(\Delta; \mathbb{F}) \quad (j = 1, 2, \dots, \lfloor (d-1)/2 \rfloor).$$

尚、上で書いた定理 4.6 の証明方法により、上の予想が正しければそこから予想 4.3 が導かれることもわかる。

最後に少し文献の紹介をしておく。本稿では最小頂点三角形分割に関する話題のみを扱ったが、定理 4.7 は多様体の三角形分割の面の個数の研究に様々な応用されている。この応用については、§2 で紹介した Swartz と Klee–Novik による素晴らしいサーベイ [Sw2, KN] に紹介されているので其方を参照してほしい。此方も本文中で既に述べたが、最小頂点三角形分割についてさらに詳しく知りたい場合は Lutz によるサーベイ [Lu] を読むことを勧める。また、定理 4.7 は単体的セル複体と呼ばれるセル複体のクラスに対して応用することもできる。この応用については第 56 回の代数学シンポジウムで報告させて頂いた [Mu1] のでそちらを参照してほしい。本稿とは違い [Mu1] には代数的なことももう少し詳細に解説している。

## REFERENCES

- [BD] B. Bagchi and B. Datta, Minimal triangulations of sphere bundles over the circle, *J. Combin. Theory, Ser. A* **115** (2008), 737–752.
- [BK] U. Brehm and W. Kühnel, Combinatorial manifolds with few vertices, *Topology* **26** (1987), 465–473.
- [CSS] J. Chestnut, J. Sapir and E. Swartz, Enumerative properties of triangulations of spherical bundles over  $S^1$ , *European J. Combin.* **29** (2008), 662–671.
- [DS] B. Datta and N. Singh, An infinite family of tight triangulations of manifolds, *J. Combin. Theory, Ser. A* **120** (2013), 2148–2163.
- [Go] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, *J. Alg.* **85** (1983), 490–534.
- [He] P.J. Heawood, Map-color theorem, *Quart. J. Pure Appl. Math.* (1890) **24**, 332–338.
- [Kü] W. Kühnel, Higher dimensional analogues of Császár’s torus, *Results. Math.* **9** (1986), 95–106.
- [JR] M. Jungerman and G. Ringel, Minimal triangulations on orientable surfaces, *Acta. Math.* **145** (1980), 121–154.
- [KN] S. Klee and I. Novik, Face enumeration on simplicial complexes, arXiv:1505.06380, 2015.
- [Lu] F. Lutz, Triangulated Manifolds with Few Vertices: Combinatorial Manifolds, arXiv:math/0506372.
- [Mu1] 村井 聡, 単体的セル複体の面の数え上げの話, 第 56 回代数学シンポジウム報告集.
- [Mu2] S. Murai, Tight combinatorial manifolds and graded Betti numbers, *Collect. Math.* **66** (2015), 367–386.
- [MN] S. Murai and E. Nevo, On  $r$ -stacked triangulated manifolds, *J. Algebraic Combin.* **39** (2014), 373–388.
- [No] I. Novik, Upper bound theorems for homology manifolds, *Israel J. Math.* **108** (1998), 45–82.
- [NS1] I. Novik and E. Swartz, Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets, *Adv. Math.* **222** (2009), 2059–2084.
- [NS2] I. Novik and E. Swartz, Applications of Klee’s Dehn-Sommerville relations, *Discrete Comput. Geom.* **42** (2009), 261–276.
- [Ri] G. Ringel, Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann, *Math. Ann.* **130** (1955), 314–326.
- [Sc] P. Schenzel, On the number of faces of simplicial complexes and the purity of Frobenius, *Math. Z.* **178** (1981), 125–142.
- [St] R.P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, Second edition, Progr. Math., vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [Sw1] E. Swartz, Face enumeration: from spheres to manifolds, *J. Eur. Math. Soc.* **11** (2009), 449–485
- [Sw2] E. Swartz, Thirty-five years and counting, arXiv1411.0987, 2014.

SATOSHI MURAI, DEPARTMENT OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY, OSAKA UNIVERSITY, SUITA, OSAKA, 565-0871, JAPAN