Siegel modular 形式の合同について

長岡昇勇（近畿大学理工学部）

1 緒言

Serre は論文 [32] において，p 進 modular 形式の理論を展開し，その応用として総実代数体上の p 進 zeta 関数を構成した．p 進 modular 形式の幾何学的取り扱いは，Katz[14] によってなされたが，直接的な高次元化（多変数化）は十分に研究されたとは言い難い．この稿では，Serre の理論が Siegel modular 形式の場合にどのように拡張されるかを論ずる．このため，最初に Siegel modular 形式の基本的な事柄を復習し，そのあと mod p Siegel modular 形式や p 進 Siegel modular 形式の概念を定義する．後半では Serre の一変数の場合の結果が，Siegel modular 形式の場合にどのように拡張されるかを俯瞰する．最後に theta 作用素の mod p 核に関する最近の結果を紹介する．

2 準備

2.1 記号

まず本稿で使用する記号についてまとめておく．

$\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$ を n 次の Siegel modular 群とし，$\mathbb{H}_n$ を n 次の Siegel 上半空間とする．$\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$ の合同部分群 Γ に対して $M_k(\Gamma)$ で，Γ に対する weight k の Siegel modular 形式全体のなす $\mathbb{C}$-vector 空間，また $S_k(\Gamma)$ で cusp 形式のなす部分空間を表すものとする．(以下，扱う Γ は Γ_n 全体か Γ_0 型の合同部分群であるかいずれかであると仮定する．) $M_k(\Gamma)$ の任意の元 $F(Z)$ は，次の形の Fourier 展開をもつ：

$$F(Z) = \sum_{0 \leq T \in Sym_n^*(\mathbb{Z})} a(F;T)q^T, \quad q^T := \exp(2\pi i \mathrm{tr}(TZ)), \quad Z \in \mathbb{H}_n,$$

ここで

$$Sym_n^*(\mathbb{Z}) := \{T = (t_{lj}) \in Sym_n(\mathbb{Q}) \mid t_{ll},\ 2t_{lj} \in \mathbb{Z}\ \}.$$

すなわち，$T \in Sym_n^*(\mathbb{Z})$ に対応する Fourier 係数を $a(F;T)$ で表す．

また，$\mathbb{C}$ の部分環 R に対して，$M_k(\Gamma)_R \subset M_k(\Gamma)$ で全ての Fourier 係数が R に含まれるような $M_k(\Gamma_n)$ の元全体のなす R-加群を表すものとする．

2.2 形式的 Fourier 展開（q-展開）

$T = (t_{lj}) \in Sym_n^*(\mathbb{Z})$，$Z = (z_{lj}) \in \mathbb{H}_n$ に対して $q_{lj} := \exp(2\pi i z_{lj})$ と表す．すると

$$q^T = \exp(2\pi i \mathrm{tr}(TZ)) = \prod_{l<j} q_{lj}^{2t_{lj}} \prod_{l=1}^{n} q_{ll}^{t_{ll}}$$

と書ける．したがって $F \in M_k(\Gamma)_R$ は R 上の形式的ベキ級数環の元とみることができる：

$$F = \sum a(F;T)q^T \in R[q_{lj}, q_{lj}^{-1}][\![q_{11}, \ldots, q_{nn}]\!].$$

素数 p に対して，$\mathbb{Z}_{(p)}$ で p-整有理数のなす局所環を表すこととする．二つの元

$$F_i = \sum a(F_i;T)q^T \in \mathbb{Z}_{(p)}[q_{lj}, q_{lj}^{-1}][\![q_{11}, \ldots, q_{nn}]\!],\ (i = 1,\, 2)$$

に対して，合同式

$$a(F_1;T) \equiv a(F_2;T) \pmod{p}$$

が全ての $T \in Sym_n^*(\mathbb{Z})$ について成立するとき，$F_1 \equiv F_2 \pmod{p}$ と書くことにする．

2.3 modular 形式の構成

modular 形式の具体的な構成法としては，Eisenstein 級数によるものと theta 級数によるものが典型的である．それぞれについて簡単に復習する．

Eisenstein 級数

Γ_n の部分群 $\Gamma_{n,\infty}$ を

$$\Gamma_{n,\infty} := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \right\}$$

により定義する．

定義：$k > n+1$：偶数に対して

$$E_k^{(n)}(Z) := \sum_{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}\right) : \Gamma_{n,\infty}\backslash\Gamma_n} \det(CZ+D)^{-k}, \quad Z \in \mathbb{H}_n$$

と定義し，degree n ,weight k の **(Siegel) Eisenstein 級数**とよぶ.

注意： $k > n+1$ は級数の収束条件である.（この収束条件を満たさない、所謂 “weight の低い Eisenstein 級数” も Shimura[34] によって調べられているが，ここでは言及しない.）

次が証明されている：

定理 2.1 (Siegel[35]). k を $k > n+1$ なる偶数とする．すると

$$E_k^{(n)} \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Q}}$$

である.

注意： Fourier 係数 $a(E_k^{(n)};T)$ が有理数であるという部分が重要である．これは対応する modular 多様体が $\mathbb{Q}$ 上定義されることと関連している．驚くべきことに $a(E_k^{(n)};T)$ の明示公式が桂田氏によって与えられている（Katsurada [13]）.

Eisenstein 級数の q-展開
$n=1$ の場合：$E_k^{(1)}$ 収束条件は $k>2$ である．このときよく知られているように $E_k^{(1)}$ は次の形の q-展開を持つ：

$$E_k^{(1)} = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{t=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(t)q^t.$$

ここで B_m は m 番目の Bernoulli 数を表し，$\sigma_m(n) = \sum_{0<d|n} d^m$ である．定理 2.1 が主張するように，この場合確かに $a(E_k^{(1)};t)\in\mathbb{Q}$ となっている．以下に $E_4^{(1)}$ と $E_6^{(1)}$ の q-展開の "最初の部分" を与える：

$$E_4^{(1)} = 1 + 240\sum_{t=1}^{\infty}\sigma_3(t)q^t = 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + \cdots.$$

$$E_6^{(1)} = 1 - 504\sum_{t=1}^{\infty}\sigma_5(t)q^t = 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - 532827q^4 - \cdots.$$

注意： $E_4^{(1)}\in M_4(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}}$，$E_6^{(1)}\in M_6(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}}$.

$n=2$ の場合：

$$T = \begin{pmatrix} n & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & m \end{pmatrix} \in \Lambda_2 \quad \text{に対して} \quad q^T = q_{11}^n q_{12}^r q_{22}^m \ \text{である．}$$

この記法のもとで 2 次 Siegel modular 形式は $\mathbb{C}[q_{12}^{-1},q_{12}][\![q_{11},q_{22}]\!]$ の元と見ることができる．
Eisenstein 級数 $E_k^{(2)}$ $(k=4,\,6)$ の q-展開の初めの部分は以下のように与えられる：

$$\begin{aligned} E_4^{(2)} &= 1 + 240(q_{11}+q_{22}) + 2160(q^2+q_{22}^2) \\ &\quad +(240q_{12}^{-2} + 13440q_{12}^{-1} + 30240 + 13440q_{12} + 240q_{12}^2)q_{11}q_{22} + \cdots. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_6^{(2)} &= 1 - 504(q_{11}+q_{22}) - 16632(q_{11}^2+q_{22}^2) \\ &\quad +(-504q_{12}^{-2} + 44352q_{12}^{-1} + 166320 + 44352q_{12} - 504q_{12}^2)q_{11}q_{22} + \cdots. \end{aligned}$$

以上の Fouirer 係数の数値例は，例えば次の式を用いて計算される：

$$a\left(E_k^{(2)};\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\right) = q\zeta q' \text{の係数} = -\frac{4k\cdot B_{k-1,\chi_{-3}}}{B_k\cdot B_{2k-2}}.$$

$$a\left(E_k^{(2)};\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = q\,q' \text{の係数} = -\frac{4k\cdot B_{k-1,\chi_{-4}}}{B_k\cdot B_{2k-2}}.$$

ここで $B_{m,\chi}$ は指標 χ をもつ一般化された Bernoulli 数を表している．

注意： 次数 1 の場合と同様に $E_4^{(2)}\in M_4(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}$，$E_6^{(2)}\in M_6(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}$ が成り立つ，すなわち，これらの Eisenstein 級数は有理整 Fourier 係数をもっている．

次に theta 級数による構成法を紹介する．

theta 級数

$S \in \mathrm{Sym}_m(\mathbb{R})$ を正定値対称行列とする．$\mathbb{H}_n$ 上の級数

$$\vartheta_S^{(n)}(Z) = \sum_{X \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})} \exp(\pi i \mathrm{tr}(S[X]Z), \quad Z \in \mathbb{H}_n$$

を S に付随する **theta 級数**とよぶ．ここで $S[X] := {}^tXSX$ である．

次が成り立つ：

定理 2.2 S を正定値 even, unimodular 行列とする．すなわち，$0 < S \in 2\mathrm{Sym}_m^*(\mathbb{Z})$ かつ $\det(S) = 1$ とする．すると

$$\vartheta_S^{(n)} \in M_{\frac{m}{2}}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}}$$

が成り立つ．

よく知られているように，上記のような S が存在するための m の条件は $m \equiv 0 \pmod 8$ である．したがって $\vartheta_S^{(n)}$ の weghit $\frac{m}{2}$ は 4 の倍数であり，weight が 4 の倍数の空間には theta 級数で非自明な Siegel modular 形式が構成できるわけである．

2.4 modular 形式のなす環

この節ではモジュラー形式のなす環の構造定理をまとめておく．

$$M(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma)$$

を Γ 上の Siegel modular 形式のなす環（次数付き環）という．同様に部分環 $R \subset \mathbb{C}$ に対して次の様に表す：

$$M(\Gamma)_R := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma)_R$$

次の事実は古典的な結果である：

$$M(\Gamma_1) = \mathbb{C}[E_4^{(1)}, E_6^{(1)}]$$
$$M(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[E_4^{(1)}, E_6^{(1)}, \Delta]$$

ここで Δ は weight 12 の cusp 形式で次で定義されるものである：

$$\Delta = \frac{1}{1728}((E_4^{(1)})^3 - (E_6^{(1)})^2) = \sum_{t=1}^{\infty} \tau(t) q^t \in S_{12}(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}}.$$

ここで $\tau(t)$ は Ramanujan の τ-関数である．(以下 Ramanujan の Δ とよぶことにする.)

注意： (1) 良く知られているように（例えば Serre の教科書 [33] 参照），$E_4^{(1)}$ と $E_6^{(1)}$ は代数的独立であり，これは $M(\Gamma_1)$ は $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環と同型であることを示している．

(2) $M(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}}$ の生成元について，Δ はそれ自身整 Fourier 係数をもっているが，$E_4^{(1)}$ と

$E_6^{(1)}$ の整係数多項式では書けず，$\mathbb{Z}$ 上の生成元として必要であり，なおかつそれで十分であるということであることを示している．

$n = 2$ の場合:

定理 2.3 井草の構造定理[11] は次を主張する：

$$M(\Gamma_2) = \mathbb{C}[E_4^{(2)}, E_6^{(2)}, \chi_{10}, \chi_{12}, \chi_{35}]$$

ここで下添え字はそれぞれの weight を表す．

$E_k^{(2)}$ ($k = 4$, 6) は前に定義した 2 次の Siegel Eisenstein 級数で χ_k ($k = 10$, 12, 35) は**井草の cusp 形式**とよばれるものである（定義は井草 [11]）．最初の 4 個は代数的独立であり，χ_{35} についてはある多項式 $P \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ が存在して

$$\chi_{35}^2 = P(E_4^{(2)}, E_6^{(2)}, \chi_{10}, \chi_{12})$$

とかける．P は井草により具体的に計算されている（eg. cf. [11]）．

$\mathbb{Z}$ 上の場合

井草 [12] は環 $M(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}$ の極小生成系を theta 零値を用いて具体的に構成した．

定理 2.4 (**井草の$\mathbb{Z}$ 上の構造定理**)

$$M(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[X_4, X_6, X_{10}, X_{12}, Y_{12}, X_{16}, \ldots, X_{48}] \quad (15 \text{ 個})$$

$X_4 = E_4^{(2)}$，$X_6 =, E_6^{(2)}$，$X_{10} = \chi_{10}$，$X_{12} = \chi_{12}$ で Y_{12} は，Siegel 作用素 Φ に対して

$$\Phi(Y_{12}) = \Delta \quad (\Delta: \text{ Ramanujan の}\Delta)$$

なるものとして特徴付けられる．もちろん $\Phi(F) = \Delta$ なる modular 形式 F は複数存在するが，$\mathbb{Z}$ 上で考えれば一意的である．

注意："$\ldots$" の中には $X_{35} = \chi_{35}$ が含まれる．また，weight 12 のところだけが，生成元が 2 個存在している．

井草の cusp 形式のq-展開

Eisenstein 級数の場合に倣って，井草の cusp 形式 χ_{10}，χ_{12} の q-展開の初めの数項を与える．(χ_{35} については後述.)

$$\chi_{10} = (q_{12}^{-1} - 2 + q_{12})q_{11}q_{22} + (-2q_{12}^{-2} - 16q_{12}^{-1} + 36 - 16q_{12} - 2q_{12}^2)(q_{11}^2 q_{22} + q_{11}q_{22}^2) + \cdots,$$
$$\chi_{12} = (q_{12}^{-1} + 10 + q_{12})q_{11}q_{22} + (10q_{12}^{-2} - 88q_{12}^{-1} - 132 - 88q_{12} + 10q_{12}^2)(q_{11}^2 q_{22} + q_{11}q_{22}^2) + \cdots.$$

Witt 作用素$\boldsymbol{W}$：ここで Witt 作用素を導入しておく．
$F = F\left(\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix}\right) \in M_k(\Gamma_2)$ に対して次の様に定義する：

$$W(F)(z_{11}, z_{22}) := F\left(\begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ 0 & z_{22} \end{pmatrix}\right).$$

W は線形写像 $M_k(\Gamma_2) \longrightarrow M_k(\Gamma_1) \otimes M_k(\Gamma_1)$ を誘導する．

例：　井草の（偶数 weight）の生成元について Witt 作用素の像は次の様になる：

$$W(E_k^{(2)})(z_{11}, z_{22}) = E_k^{(1)}(z_{11}) E_k^{(1)}(z_{22}) \quad (k = 4,\, 6),$$
$$W(\chi_{10})(z_{11}, z_{22}) \equiv 0, \quad W(\chi_{12})(z_{11}, z_{22}) = 12\Delta(z_{11})\Delta(z_{22}).$$

ここで Δ は Ramanujan の Δ．Freitag は $W(F)(z_{11}, z_{22}) \equiv 0$ なる 2 次 Siegel modular 形式の特徴付け（W の核のなすイデアルが χ_{10} で生成される単項イデアルであること）を用いて，井草の構造定理の別証明を与えた（Freitag [8]）．

注意： もちろん Witt 作用素は一般の次数で定義される．

3　mod p modular 形式の algebra

これまで Siegel modular 形式について復習をしてきたが，この章から Serre 理論の拡張（の試み）を紹介する．

以前定義した様に，素数 p に対して $\mathbb{Z}_{(p)} := \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ を p における局所環とする．$F = \sum a(F;T) q^T \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ に対して

$$\widetilde{F} := \sum \widetilde{a(F;T)} q^T \in \mathbb{F}_p[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][\![q_{11}, \ldots, q_{nn}]\!]$$

と定義する．ここで $\widetilde{a(F;T)}$ は $a(F;T)$ の reduction mod p とする．さらに

$$\widetilde{M}_k(\Gamma_n)_p := \{\, \widetilde{F} \mid F \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}} \,\} \subset \mathbb{F}_p[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][\![q_{11}, \ldots, q_{nn}]\!]$$

とする．
定義：

$$\widetilde{M}(\Gamma_n)_p := \sum_k \widetilde{M}_k(\Gamma_n)_p \subset \mathbb{F}_p[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][\![q_{11}, \ldots, q_{nn}]\!]$$

を **mod p modular 形式の algebra** とよぶ．

algebra $\widetilde{M}(\Gamma_n)_p$ の構造定理

Swinnerton-Dyer は $\widetilde{M}(\Gamma_1)_p$ の構造を決定した．

定理 3.1 (Swinnerton-Dyer[36])　(1)　$p \geq 5$ のとき，

$$\widetilde{M}(\Gamma_1)_p \cong \mathbb{F}_p[x_1, x_2]/(\widetilde{A} - 1).$$

ここで A は $E_{p-1}^{(1)} = A(E_4^{(1)}, E_6^{(1)})$ を満たす $\mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2]$ の多項式で $\widetilde{A} \in \mathbb{F}_p[x_1, x_2]$ はその reduction mod p.

(2) $p = 2$ or 3 のとき

$$\widetilde{M}(\Gamma_1)_p = \mathbb{F}_p[\widetilde{\Delta}].$$

ここで Δ は Ramanujan の Δ.

上に現れた Eisenstein 級数 $E_{p-1}^{(1)}$ の性質について述べておく．その q-展開は

$$E_{p-1}^{(1)} = 1 - \frac{2(p-1)}{B_{p-1}} \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_{p-2}(t) q^t$$

で与えられる，von Staudt-Clausen の定理より $E_{p-1}^{(1)} \equiv 1 \pmod{p}$ が成立している．上記 Swinnerton-Dyer の結果の $p \geq 5$ のときの証明の概略を述べると，まず $\mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2]$ の多項式 $f(x_1, x_2)$ に対して，$\varphi(f) := f(E_4^{(1)}, E_6^{(1)})$ により，$\widetilde{M}(\Gamma_1)_p$ への準同型を定義する．まずこれが全射であることを示し，次に φ の核が

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = (\widetilde{A} - 1) \quad (\text{単項イデアル})$$

であることを示すわけである．この核の構造を決定するため，weight が $p-1$ で Fourier 展開の定数項が 1，それ以外の Fourier 係数が p で割り切れる（すなわち，reduction mod p が 1 となる）modular 形式の存在が鍵となるわけである．

構造定理の拡張のためにまず次の問題の解決が望まれる：

問題

$$F_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

を満たす modular 形式 $F_{p-1} \in M_{p-1}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ の存在を示せ．

さしあたり候補としては weight $p-1$ の Eisenstein 級数 $E_{p-1}^{(n)}$ が考えられるが，これは十分ではない．

定理 3.2 (Nagaoka [24]) 次を満たす素数 p が存在する．

$$E_{p-1}^{(n)} \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

実際 $n = 2$，$p = 16843$ がこれを満たしている．
Eisenstein 級数ではなく，theta 級数を用いることにより（p-special lattice に付随する theta 級数），次が示される．

定理 3.3 （Böcherer-Nagaoka [2]）$p > n + 3$ のとき，次を満たす modular 形式 $F_{p-1}^{(n)} \in M_{p-1}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ が存在する：

$$F_{p-1}^{(n)} \equiv 1 \pmod{p}.$$

注意： 素数 p が，$p \equiv 1 \pmod 4$ を満たすときは，条件 "$p > n+3$" は必要としない．
条件 "$p > n+3$" は p-special lattice の存在に関して必要とする条件である．

上記定理は，一般の n についての主張であるが，これを $n=2$ の場合に適用することにより，次の構造定理が証明される．

$n = 2$ のときの構造定理

Swinnerton-Dyer の構造定理の $n=2$ の場合への拡張を考える．まず $\widetilde{M}(\Gamma_2)_p$ の even-part のなす subalgebra を

$$\widetilde{M}^{(e)}(\Gamma_2)_p := \sum_{k:\text{even}} \widetilde{M}_k(\Gamma_2)_p$$

とおく．

定理 3.4 (Nagaoka [26])
(1) $p \geq 5$ のとき

$$\widetilde{M}^{(e)}(\Gamma_2)_p \cong \mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4]/(\widetilde{B} - 1).$$

ここで B は前定理で存在が示された $F^{(2)}_{p-1}$ に対して

$$F^{(2)}_{p-1} = B(E^{(2)}_4, E^{(2)}_6, \chi_{10}, \chi_{12})$$

を満たす $\mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ の多項式で $\widetilde{B} \in \mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4]$ はその reduction mod p.
(2) $p = 2$ or 3 のとき

$$\widetilde{M}^{(e)}(\Gamma_2)_p = \mathbb{F}_p[\widetilde{X}_{10}, \widetilde{Y}_{12}, \widetilde{X}_{16}].$$

ここで X_{10}, Y_{12}, X_{16} は井草の $\mathbb{Z}$ 上の生成系の中の modular 形式.

注意： (1) 上記多項式 B の取り方は一意的ではないが，その reduction mod p である $\mathbb{F}_p$ 上の多項式 $\widetilde{B}$ は一意的である．
(2) 全 algebra $\widetilde{M}(\Gamma_2)_p$ の構造では，odd weight X_{35} について，関係式 $X^2_{35} = P(X_4, X_6, X_{10}, X_{12})$ を考慮に入れればよい．$p \geq 5$ ならば，$P \in \mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ である．

系 3.5：$p \geq 5$ とし，$F \in M_k(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$，$F' \in M_{k'}(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ とする．(k, $k' \in 2\mathbb{Z}$.)

$$0 \not\equiv F \equiv F' \pmod p \implies k \equiv k' \pmod{p-1}.$$

注意：この weight に関する合同式が，"Serre の p 進 modular 形式" の理論の出発点と思われる．実際 Serre の論文では $f \in M_k(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$，$f' \in M_{k'}(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ について

$$f \not\equiv 0 \pmod p, \quad f \equiv f' \pmod{p^m} \implies k \equiv k' \pmod{p^{m-1}(p-1)}$$

なる事実の証明を目標としている．

この事実の Siegel modular 形式への拡張が成り立つ：

定理 3.6 (Ichikawa[10], Böcherer-Nagaoka[4]) p を奇素数とし．さらに $F \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$，$F' \in M_{k'}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ とする．$F \not\equiv 0 \pmod p$，$F \equiv F' \pmod{p^m}$ と仮定すると

$$k \equiv k' \pmod{p^{m-1}(p-1)}$$

が成り立つ．

注意：Ichikawa[10] は，代数幾何学的な手法でこの事実を証明している．

4　p 進 modular 形式

　緒言でも述べたように Serre は p 進 modular 形式の理論を構築し，p 進 zeta 関数の構成に応用した．p 進 modular 形式の概念はいくつかあり，ここで述べる定義は “Serre の p 進 modular 形式” である．

p 進 modular 形式の定義

p を素数，v_p を $\mathbb{Q}_p$ の valuation で $v_p(p)=1$ と正規化されたものとする．
$F=\sum_{0\le T\in\Lambda_n} a(F;T)q^T \in \mathbb{Q}_p[q_{ij}^{-1},q_{ij}][\![q_{11},\dots,q_{nn}]\!]$ に対して

$$v_p(F):=\inf_{0\le T\in\Lambda_n} v_p(a(F;T))$$

とおく．

定義：$\mathbb{Q}_p$ 上の形式的べき級数

$$F=\sum_{0\le T\in\Lambda_n} a(F;T)q^T \in \mathbb{Q}_p[q_{ij}^{-1},q_{ij}][\![q_{11},\dots,q_{nn}]\!]$$

が **p 進 (Siegel) modular 形式**であるとは有理係数の modular 形式の列 $\{F_m\}$ ($F_m\in M_{k_m}(\Gamma_n)_{\mathbb{Q}}$) が存在して

$$v_p(F_m-F)\longrightarrow +\infty \ \ (m\to\infty)$$

が成り立つときをいう．これを単に $\lim_{m\to\infty}F_m=F$ と書き表すこととする．

定理 3.6 より，p 進 modular 形式の “weight の空間” が定義される．

p を奇素数とする．$\{F_m\}$ ($F_m\in M_{k_m}(\Gamma_n)_{\mathbb{Q}}$) を p 進 modular 形式 F を定義する modular 形式の列とする：すると定理 3.6 より，数列 $\{k_m\}$ は

$$X:=\varprojlim \mathbb{Z}/p^{m-1}(p-1)\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$$

に極限をもつ．$\lim_m k_m =: \boldsymbol{k}\in X$ を p 進 modular 形式 F の **weight** と呼ぶ．

注意：(1)　p 進 modular 形式の weight は，modular 形式の列 $\{F_m\}$ のとり方によらず決まる．
(2)　$p=2$ のときは $X=\mathbb{Z}_2$ ととれることがわかっている．

p 進 Eisenstein 級数
p 進 modular 形式の例として，p 進 Eisenstein 級数が定義される．

$n=1$ の場合：　$k\ge 4$ なる偶数 k に対して

$$G_k:=\frac{1}{2}\zeta(1-k)\cdot E_k^{(1)}=\frac{1}{2}\zeta(1-k)+\sum_{t=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(t)q^t$$

とおく．ここでは，正規化された Eisenstein 級数 $E_k^{(1)}$ を定数倍したものを考えている．

定義： $\boldsymbol{k} \in X$ に対して，k_m：偶数で $\lim_m k_m = \boldsymbol{k}$，$k_m \geq 4$，$|k_m| \to +\infty$ なる数列 $\{k_m\}$ をとる．すると Eisenstein 級数の列 $\{G_{k_m}\}$ は一様収束し

$$G_{\boldsymbol{k}}^* := \lim_{m\to\infty} G_{k_m}$$

は p 進 modular 形式を定義する．これは **(Serre の) p 進 Eisenstein 級数**と呼ばれる．

$\boldsymbol{k} \in X$ に対して

$$G_{\boldsymbol{k}}^* = a_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_{\boldsymbol{k}-1}^*(t) q^t \in \mathbb{Q}_p[\![q]\!]$$

とおく．ここで $\sigma_{\boldsymbol{k}-1}^*(t) := \lim_{m\to\infty} \sigma_{k_m-1}(t)$，また

$$a_0 = \frac{1}{2}\zeta^*(1-\boldsymbol{k})$$

で X 上の関数 ζ^* を定義する．

定理 4.1（Serre [32]） p を奇素数とする．(s,u) を $X = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ の元とすると

$$\zeta^*(s,u) = L_p(s;\omega^{1-u}).$$

ここで，$L_p(s;\chi)$ は p 進 L 関数，ω は Teichmüller character.

この定理は，p 進 Eisenstein 級数の定数項に p 進 L 関数が現れることを示している．

p 進 Eisenstein 級数の例

Serre は，上記 p 進 Eisenstein 級数の例として次のものを挙げている．
p を $p \equiv 3 \pmod 4$，$p > 3$ なる素数，$\boldsymbol{k} = \left(1, \frac{p+1}{2}\right) \in X$ とすると

$$G_{\boldsymbol{k}}^* = \frac{1}{2}h(-p) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{0<d|t} \left(\frac{d}{p}\right) q^t.$$

ここで，$h(-p)$ は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数，$\left(\frac{*}{p}\right)$ は Legendre 記号である．

注意：右辺の q-展開をみると，群 $\Gamma_0(p)$ 上の weight 1 の Hecke Eisenstein 級数

$$G_1(z) = -\frac{1}{2}B_{1,\chi} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{0<d|t} \chi(d) q^t$$

の特別な場合（$\chi = \chi_p = \left(\frac{*}{p}\right)$）になっていることがわかる．すなわち上記 $G_{\boldsymbol{k}}^*$ は $\Gamma_0(p)$ 上の weight 1 の modular 形式となっている．

上記の結果の一般の次数の場合への拡張を考える．

定理 4.2（Nagaoka [25]） $E_k^{(n)}$ を次数 n，weight k の Siegel Eisenstein 級数とする．

また p を $p \equiv 3 \pmod 4$，$p > 3$ なる素数とし，数列 $\{k_m\}$ を $k_m := 1 + \dfrac{p-1}{2} \cdot p^{m-1}$ で定義する．すると

$$\lim_{m\to\infty} E_{k_m}^{(n)} = \mathrm{genus}\,\vartheta^{(n)}(S) \quad (p\text{-addically})$$

が成立する．ここで genus $\vartheta^{(n)}(S)$ は $\det S = p$ なる binary quadratic form S に対応する genus theta 級数である．すなわち $S_1, \ldots, S_h$ を S の含まれる genus の類の代表系としたとき

$$\mathrm{genus}\,\vartheta^{(n)}(S) := \left(\sum_{i=1}^{h} \frac{\vartheta_{S_i}^{(n)}(Z)}{E(S_i)}\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{E(S_i)}\right).$$

で定義される関数であり

$$\mathrm{genus}\,\vartheta^{(n)}(S) \in M_1(\Gamma_0^n(p), \chi_p)$$

が成立する．ここで $\chi_p = \left(\dfrac{*}{p}\right)$，$E(S_i) = |O_{\mathbb{Z}}(S_i)|$ は S_i の unit 群の位数を表す．

注意： (1) 上記数列 $\{k_m\}$ の極限は Serre の例にある $\left(1, \frac{p+1}{2}\right)$ となっている．

(2) genus theta 級数は theta 級数の "平均" であり，上記定理はある意味，Siegel の主定理の p 進版と考えられる．

(3) $n = 1$ の場合は，Serre の例に一致することがわかる．

次に，$n = 2$ の場合だけであるが上記定理のある種の "拡張" を紹介する．

定理 4.3（Kikuta-Nagaoka [16]） p を $p > 3$ なる素数とし，数列 $\{k_m\}$ を $k_m := 2 + p^{m-1}(p-1)$ で定義する．S を $\det(S) = p^2$，level p なる quaternary quadratic form とする．すると

$$\lim_{m\to\infty} E_{k_m}^{(2)} = \mathrm{genus}\,\vartheta^{(2)}(S) \quad (p\text{-addically})$$

が成立する．すなわち

$$\mathrm{genus}\,\vartheta^{(2)}(S) \in M_2(\Gamma_0^2(p))$$

が成り立つ．

この結果の次数 $n \geq 3$ の場合への拡張が期待される．singular modular 形式の理論より $n = 3, 4$ の場合に証明できれば，一般の次数で証明されたことになる．

5　$\Gamma_0(p)$ 上の modular 形式

Serre の p 進理論の結果のなかで重要なものとして，$\Gamma_0(p)$ 上の modular 形式が全て p 進 modular 形式であるという結果がある．Siegel modular 群 Γ_n の合同部分群

$$\Gamma_0^n(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid C \equiv 0 \pmod N \right\}$$

を考える．Serre の結果は次の様に述べられる．

定理 5.1（Serre [32]） p を素数とする．$f \in M_k(\Gamma_0^1(p))_{\mathbb{Q}}$ は p 進 modular 形式である．

この結果は vector 値 Siegel modular 形式の場合も込めて拡張されており，それを紹介する．そのため vector 値 Siegel modular 形式の定義を振り返る．

vector 値 Siegel modular 形式

(ρ, V_ρ) を $GL_n(\mathbb{C})$ の有限次多項式表現とする．

$\mathbb{H}_n$ 上の V_ρ-値関数 $F(Z)$ と $M = \binom{AB}{CD} \in Sp_n(\mathbb{R})$ に対して

$$(F|_{\rho,k}M)(Z) = \det(CZ+D)^{-k}\rho(CZ+D)^{-1}F(M\langle Z\rangle)$$

と書き表す．

$\Gamma \subset \Gamma_n$ を合同部分群とし，ν を Γ の character とする．$\mathbb{H}_n$ 上の（V_ρ-値関数）$F(Z)$ が character ν をもつ Γ 上の $\boldsymbol{\rho} \otimes \det^{\boldsymbol{k}}$ **型 Siegel modular 形式**であるとは

$$(F|_{\rho,k}M)(Z) = \nu(M)F(Z) \qquad (\forall M \in \Gamma)$$

を満たすときをいう．($n=1$ のときは cusp における有限性を仮定.）

上記 Siegel modular 形式全体のなす $\mathbb{C}$-vector 空間を $M_k(\Gamma, \rho, \nu)$ で表す．

注意：(1) $\Gamma = \Gamma_0^n(p)$ の場合は ν は通常の right lower block からくる mod p の Dirichlet character χ_p であると仮定する．

(2) vector 空間 V_ρ の基底を固定し，$V_\rho = \mathbb{C}^M$ とみた場合，$F \in M_k(\Gamma, \rho, \chi)$ の Fourier 係数は数 vector $a(F;T) = (a(F;T)^{(j)}) \in \mathbb{C}^M$ である．このとき部分環 $R \subset \mathbb{C}$ に対して $M_k(\Gamma, \rho, \chi)_R$ が scalar 値の場合と同様に定義される．

定理 5.2（Böcherer-Nagaoka [5]） p を奇素数，ρ を $\mathbb{Q}$-rational 表現 (i.e. ρ を定義する多項式がすべて有理数係数) とすると，$F \in M_k(\Gamma_0^n(p), \rho, \chi_p)_{\mathbb{Q}}$ は（vector 値の意味で）p-adic modular 形式である．

6　p 進 modular 形式に関連するその他の結果

p 進 modular 形式の応用として，ある場合 $\Gamma_0(p)$ 上の cusp 形式を具体的に構成できる．それを紹介しよう．
$H(r,N)$ を Cohen の関数とする．すなわち $(-1)^r N = Df^2$（D は基本判別式）なる (r,N) については

$$H(r,N) = L(1-r, \chi_D) \sum_{0<d|f} \mu(d)\chi_D(d)d^{r-1}\sigma_{2r-1}(\tfrac{f}{d})$$

で定義される関数である（[6] 参照）.
一方関数 $(s,N)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ 上の $G(s,N)$ を

$$G(S,N)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+|\chi_{-4}(N)|}(\sigma_{s,\chi_{-4}}(N)-\widetilde{\sigma}_{s,\chi_{-4}}(N)) & \text{if } N>0,\\ -\dfrac{B_{s+1,\chi_{-4}}}{2(s+1)} & \text{if } N=0\end{cases}$$

で定義する．ここで $B_{m,\chi}$ は一般化された Bernoulli 数，$\sigma_{s,\chi_{-4}}(N)$，$\widetilde{\sigma}_{s,\chi_{-4}}(N))$ は

$$\sigma_{s,\chi_{-4}}(N)=\sum_{0<d|N}\chi_{-4}(d)d^s,\quad \widetilde{\sigma}_{s,\chi_{-4}}(N))=\sum_{0<d|N}\chi_{-4}\left(\frac{N}{d}\right)d^s$$

で定義される関数である．$G(s,N)$ は虚 2 次体 $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ に関する 2 次の Hermitian Eisenstein 級数の Fourier 係数を記述する，いわゆる Krieg の関数とよばれるものである．

定理 6.1 (Nagaoka-Nakamura [30]) 次の Fourier 係数 $a(f_k;T)$ をもつ 2 次の Siegel cusp 形式 $f_k\in S_k(\Gamma_2)$ が存在する：

$$a(f_k;T)=\sum_{0<d|\varepsilon(T)}d^{k-1}\alpha_k\left(\frac{4\mathrm{det}(T)}{d^2}\right).$$

ここで

$$\alpha_k(N):=H(k-1,N)-\frac{B_{2k-2}}{B_{k-1,\chi_{-4}}}\sum_{\substack{s\in\mathbb{N}\\ s^2\leq N}}G(k-2,N-s^2)$$
$$\varepsilon(T):=\max\{\,\ell\in\mathbb{N}\mid \ell^{-1}T\in\Lambda_2\,\}.$$

次の結果は，上記の cusp 形式のある列の p 進極限が，$\Gamma_0^2(p)$ 上の cusp 形式となるというものである．

定理 6.2 (Kodama-Nagaoka-Nakamura [21]) p を $p\equiv 3 \pmod 4$ なる素数とし，数列 $\{k_m\}$ を

$$k_m=k_m(p):=2+(p-1)p^{m-1}$$

で定義される数列とする．すると対応する Siegel cusp 形式の列 $\{f_{k_m}\}$ は $m\longrightarrow\infty$ のとき p 進的な極限をもち

$$\lim_{m\to\infty}f_{k_m}=:f_p^*\in S_2(\Gamma_0^2(p))$$

である．

注意： $p=11$，すなわち $\Gamma_0^2(11)$ 上の cusp 形式の例として知られている，いわゆる weight 2，level 11 の吉田の cusp 形式は，上で構成した f_{11}^* と定数倍の違いで一致する．(吉田の cusp 形式については，Yoshida [37] を参照.)

7 theta 作用素

$F=\sum a(F;T)q^T\in M_k(\Gamma_n)$ に対して

$$\Theta(F):=\sum a(F;T)\cdot\det(T)q^T$$

を対応させる．この形式的べき級数環上の作用素 Θ を **theta 作用素**とよぶことにする（cf. [2]）.

注意： (1) $n=1$ のとき

$$\theta: f=\sum a(f;t)q^t\longmapsto\theta(f):=\sum a(f;t)\cdot t\,q^t$$

は古典的な Ramanujan 作用素に一致する．

(2) $\Theta(F)\equiv 0$ となる Siegel modular 形式 $F\in M_k(\Gamma_n)$ は特異モジュラー形式として調べられている (Freitag-Resnikoff).

$\Theta(F)$ は必ずしも Siegel modular 形式とはならないことに注意しておく．しかしながら次が成立する：

定理 7.1 (Böcherer-Nagaoka [2], Theorem 4). p を $p\geq n+3$ なる素数とする．すると任意の modular 形式 $F\in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ に対して cusp 形式 $G\in S_{k+p+1}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ で

$$\Theta(F)\equiv G \pmod p$$

となるものが存在する．ただし，合同は形式的ベキ級数として見たものである．

注意：この結果は，mod p Siegel modular 形式の algebra が作用素 Θ で stable であることを示している．

例： $n=2$, $p=5$, $F=E_6^{(2)}$ と仮定する：

$$\begin{aligned}\Theta(E_6^{(2)})&=(33264q_{12}^{-1}+166320+33264q_{12})q_{11}q_{22}+\cdots\\&\equiv(-q_{12}^{-1}-10-q_{12})q_{11}q_{22}+\cdots=-\chi_{12}\pmod 5\end{aligned}$$

したがって，G として $-\chi_{12}$ をとることができる．

定理 7.2（Böcherer-Nagaoka [5]） $p\geq n+3$ を素数．$F\in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Q}}$ に対して

$\Theta(F)$ は p 進 modular 形式となる．

注意：(1) 上記定理の群 Γ_n は一般に $\Gamma_0^n(p^r)\,(r\geq 0)$ で置き換えられる．

(2) vector 値 Siegel modular 形式の場合，作用素 Θ は vector 値微分作用素

$$\Theta_{k,\rho}$$

に拡張され，主張は “vector 値 Siegel modular 形式 $\Theta_{k,\rho}(F)$ は p 進（vector 値）Siegel modular 形式となる” と拡張される．(Böcherer-Nagaoka [5])

theta 作用素に関連する結果

theta 作用素に関連したいくつかの結果を紹介する．

定理 7.3（Kikuta-Kodama-Nagaoka [15]）　X_{35} を weight 35 の井草の cusp 形式とする．すると X_{35} の theta 作用素の像 $\Theta(X_{35})$ は次の合同式を満たす：

$$\Theta(X_{35}) \equiv 0 \pmod{23}.$$

X_{35} の q-展開の最初の数項を書き下すと以下の様になる：

$$\begin{aligned} & X_{35} \\ & = (q_{12}^{-1} - q_{12})(q_{11}^2 q_{22}^3 - q_{12}^3 q_{22}^2) + (-q_{12}^{-3} - 69q_{12}^{-1} + 69q_{12} + q_{12}^3)(q_{11}^2 q_{22}^4 - q_{11}^4 q_{22}^2) \\ & + (69q_{12}^{-3} + 2277q_{12}^{-1} - 2277q_{12} - 69q_{12}^3)(q_{11}^2 q_{22}^5 - q_{11}^5 q_{22}^2) + \cdots \end{aligned}$$

この例を見ると

$$\det(T) \not\equiv 0 \pmod{23} \quad \Longrightarrow \quad a(X_{35}; T) \equiv 0 \pmod{23}$$

の成立が予想される．定理はこれが全ての T に対して成立することを示している．証明に使う事実は，奇数 weight の場合の Sturm 型定理と定理 7.1 である．(Sturm の定理を適用するための X_{35} の Fourier 展開の数値データを後に与える（§ 9））.

$\Theta(F) \equiv 0 \pmod{p}$ を満たす modular 形式を **theta 作用素の mod p 核**の元と呼ぶ．定理は井草の cusp 形式 X_{35} が theta 作用素の mod 23 核の元になっていることを主張している．
その後の研究の中で theta 作用素の mod 23 核の元が見つかっている．それを紹介しよう．

その 1：$S = S_{\mathcal{L}}$ を Leech 格子に付随する 24 次正定値 unimodular 行列とすると $\vartheta_S^{(2)} \in M_{12}(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}$ で合同式

$$\Theta(\vartheta_S^{(2)}) \equiv 0 \pmod{23}$$

が成立する．24 次正定値 unimodular 行列は Niemeier によって調べられ，24 個の類に分けられることが示されている．Leech 格子はその一つであるが，他にもう一つの類に対応する theta 級数が theta 作用素の mod 23 核の元となることが確かめられている（§ 9 において，数値例を与える）.

その 2：$[\Delta]$：Ramanujan の Δ から構成される Klingen Eisenstein 級数とすると $[\Delta] \in M_{12}(\Gamma_2)_{\mathbb{Q}}$ で合同式

$$\Theta([\Delta]) \equiv 0 \pmod{23}$$

が成立する．この事実は，Böcherer の学位論文の一部（[1]）で既に得られていた．

その 3：$E_{12}^{(2)}$ を次数 2，weight 12 の Siegel Eisenstein 級数とすると

$$\Theta(E_{12}^{(2)}) \equiv 0 \pmod{23}$$

が成立する．

これらの例は次数が 2 の場合に限られているが，一般偶数次数の場合への拡張が得られている．

定理 7.4 (Nagaoka [29]) n を正の偶数とする．さらに p を $p > n+3$ かつ $p \equiv (-1)^{\frac{n}{2}} \pmod 4$ なる素数，$t \geq 1$ を奇数とする．すると Siegel modular 形式 $F \in M_{\frac{n}{2}+\frac{p-1}{2}\cdot t}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ で

$$\Theta(F) \equiv 0 \pmod p \quad \text{and} \quad F \not\equiv 0 \pmod p.$$

となるものが存在する．

注意： 上記の例は，$n=2$，$p=23$，$t=1$ の場合である．

8 Siegel modular 群以外の場合の結果

以上の議論においては，主に Siegel modular 群の場合を扱った。この section では他の modular 群，特に Hermite modular 群の場合の結果を紹介する．

$\mathbb{K}$ を虚 2 次体とし，$d_{\mathbb{K}}$ をその判別式，$\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ を整数環とする．Hermite modular 群を次のように定義する：

$$U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) := \{\ M \in M_{2n}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) \mid {}^t\overline{M} J_n M = J_n\ \},$$
$$SU_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) := U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) \cap SL_{2n}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}).$$

ここで $J_n := \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$ で，$\overline{M}$ は M の共役（成分の共役）を表す．Siegel modular 形式の場合と同様に

$$M_k(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}),\nu), \qquad (\text{resp. } M_k(SU_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}),\nu))$$

を $U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ (resp. $SU_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$) 上の character ν をもつ，weight k の Hermite modular 形式全体のなす $\mathbb{C}$-vector 空間を表すものとする．

F を Hermite modular 形式とすると，次の形の Fourier 展開をもつ：

$$F(Z) = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_{\mathbb{K}}} a(F;T)\exp(2\pi i \mathrm{tr}(TZ)).$$

ここで $\Lambda_{\mathbb{K}}$ は

$$\Lambda_{\mathbb{K}} := \{\ T = (t_{ij}) \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{K}) \,|\, t_{ii} \in \mathbb{Z}, \quad \sqrt{d_{\mathbb{K}}} t_{ij} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}\ \}$$

で定義される格子である．Siegel modular 形式の場合と同様に部分環 $R \subset \mathbb{C}$ に対して $M_k(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}),\nu)_R$ 等も定義される．

次に "$F_{p-1} \equiv 1 \pmod p$" を満たす modular 形式 F_{p-1} の存在に関する問題である（cf.

§3）．虚 2 次体 $\mathbb{K}$ が $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$(Gauss 数体) と $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$(Eisenstein 数体) の場合には次の結果が得られている：

定理 8.1(Kikuta-Nagaoka [17]) (1) $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ または $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ とする．p を $p\equiv 1 \pmod 4$ なる素数とすれば

$$F_{p-1}^{(n)} \equiv 1 \pmod p$$

を満たす modular 形式 $F_{p-1}^{(n)} \in M_{p-1}(SU(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}))_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ が存在する．

(2) $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ とする．素数 p に対して，$p\equiv 1 \pmod 4$ であることと

$$F_{p-1}^{(n)} \equiv 1 \pmod p$$

を満たす modular 形式 $F_{p-1}^{(n)} \in M_{p-1}(SU(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}))_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ が存在することとは同値である．

この結果は一般の虚 2 次体 $\mathbb{K}$ の場合に拡張されている（Hentschel-Nebe [9]）．

Hermitian mdular 形式の場合の mod p の modular 形式の algebra について，次数 2，$\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合だけであるが，Swinnerton-Dyer の結果の拡張が得られている．

Siegel modular 形式の場合と同様に $\mathbb{F}_p$-vector 空間

$$\widetilde{M}_k(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}),\nu_k)_p^{\mathrm{Sym}}$$

が定義できる．ここで "$(\cdot)^{\mathrm{Sym}}$" は symmetric な Hermitian modular 形式に制限して考えることを意味し，ν_k は，$\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合は次で定義される character である：

$$\nu_k := \begin{cases} \det^{k/2} & \text{if } \mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \\ \det^{k} & \text{if } \mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-3}). \end{cases}$$

上記 $\widetilde{M}_k(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}),\nu_k)_p^{\mathrm{Sym}}$ の even な k について和をとって algebra

$$\widetilde{M}^{(e)}(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}),\nu)_p^{\mathrm{Sym}} := \sum_{k:\mathrm{even}} \widetilde{M}_k(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}),\nu_k)_p^{\mathrm{Sym}}$$

を定義する．

定理 8.2 (Kikuta-Nagaoka [18]) (1) $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$，$p\geq 5$ とする．すると同型

$$\widetilde{M}^{(e)}(U_2(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}),\nu)_p^{\mathrm{Sym}} \cong \mathbb{F}_p[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]/(\widetilde{B}-1)$$

が得られる．ここで $B\in\mathbb{Z}_{(p)}[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$ は $F_{p-1}\equiv 1 \pmod p$ なる Hermitian modular 形式 F_{p-1} に対して

$$F_{p-1} = B(E_4,E_6,\chi_8,F_{10},F_{12})$$

で定義されるもので $\widetilde{B}$ はその reduction mod p である．$\{E_4,E_6,\chi_8,F_{10},F_{12}\}$ は $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の場合の Hermitian modular 形式のなす $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の生成系である（定義につい

ては [18] 参照）．
(2) $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$，$p \geq 5$ とする．すると同型

$$\widetilde{M}^{(e)}(U_2(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}),\nu)_p^{\mathrm{Sym}} \cong \mathbb{F}_p[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]/(\widetilde{C}-1)$$

が得られる．ここで $C \in \mathbb{Z}_{(p)}[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$ は $F_{p-1} \equiv 1 \pmod p$ なる Hermitian modular 形式 F_{p-1} に対して

$$F_{p-1}=B(E_4,E_6,F_{10},F_{12},\chi_{18})$$

で定義されるもので $\widetilde{C}$ はその reduction mod p である．$\{E_4,E_6,F_{10},F_{12},\chi_{18}\}$ は $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合の Hermitian modular 形式のなす $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の生成系である（定義については [18] 参照）．

Hermitian modular 形式の場合の p 進 modular 形式の理論

これも Siegel modular 形式の場合と同様に，p 進 modular 形式の概念が拡張される．ここでは Siegel modular 形式の場合の定理 4.2 の “Hermitian modular 版” の結果として次の定理を紹介する：

定理 8.3 (Munemoto-Nagaoka [23]) 虚 2 次体 $\mathbb{K}$ の類数は 1 であるものとする．p を $\chi_{\mathbb{K}}(p)=-1$ とする．ただし $\chi_{\mathbb{K}}$ は $\mathbb{K}$ の Kronecker 指標を表す.
数列 $\{k_m\}$ を

$$k_m := 2+(p-1)p^{2m}$$

で定義すると，対応する Hermite Eisenstein 級数の列 $\{E_{k_m,\mathbb{K}}\}_{m=1}^{\infty}$ は $m \longrightarrow \infty$ のときに p 進的に収束し

$$\lim_{m\to\infty} E_{k_m,\mathbb{K}} = \mathrm{genus}\vartheta^{(n)}(S_p)$$

ここで S_p は $S_p \in \Lambda_2(\mathbb{K})$ で $\mathit{\Delta}(S_p) := |d_{\mathbb{K}}| \cdot \det(S_p) = p$ を満たす Hermitian 形式である．

注意：同様の結果は [20] において，四元数上半空間上の Eisenstein 級数の場合にも拡張されている．ただし，weight 2 の場合は “超越的” な Fourier 係数が現れ興味深い.

9　いくつかの数値例

この節では，これ以前の節で述べた theta 作用素に関する結果の数値例を与える．

9.1　井草の cusp 形式 X_{35} の Fourier 展開

以下は井草の cusp 形式に X_{35} の Fourier 展開で，Sturm の定理を適用するに必要となる T の trace が 9 以下の部分を計算している：

$$
\begin{aligned}
X_{35} = {} & (q_{12}^{-1} - q_{12})q_{11}^2 q_{22}^3 + (-q_{12}^{-1} + q_{12})q_{11}^3 q_{22}^2 \\
& + (-q_{12}^{-3} - 69q_{12}^{-1} + 69q_{12} + q_{12}^3)q_{11}^2 q_{22}^4 + (q_{12}^{-3} + 69q_{12}^{-1} - 69q_{12} - q_{12}^3)q_{11}^4 q_{22}^2 \\
& + (69q_{12}^{-3} + 2277q_{12}^{-1} - 2277q_{12} - 69q_{12}^3)q_{11}^2 q_{22}^5 \\
& + (q_{12}^{-5} - 32384q_{12}^{-2} - 129421q_{12}^{-1} + 129421q_{12} + 32384q_{12}^2 - q_{12}^5)q_{11}^3 q_{22}^4 \\
& + (-q_{12}^{-5} + 32384q_{12}^{-2} + 129421q_{12}^{-1} - 129421q_{12} - 32384q_{12}^2 + q_{12}^5)q_{11}^4 q_{22}^3 \\
& + (-69q_{12}^{-3} - 2277q_{12}^{-1} + 2277q_{12} + 69q_{12}^3)q_{11}^5 q_{22}^2 \\
& + (q_{12}^{-5} - 2277q_{12}^{-3} - 47702q_{12}^{-1} + 47702q_{12} + 2277q_{12}^3 - q_{12}^5)q_{11}^2 q_{22}^6 \\
& + (32384q_{12}^{-4} - 2184448q_{12}^{-2} - 3203072q_{12}^{-1} + 3203072q_{12} + 2184448q_{12}^2 - 32384q_{12}^4)q_{11}^3 q_{22}^5 \\
& + (-32384q_{12}^{-4} + 2184448q_{12}^{-2} + 3203072q_{12}^{-1} - 3203072q_{12} - 2184448q_{12}^2 + 32384q_{12}^4)q_{11}^5 q_{22}^3 \\
& + (-q_{12}^{-5} + 2277q_{12}^{-3} + 47702q_{12}^{-1} - 47702q_{12} - 2277q_{12}^3 + q_{12}^5)q_{11}^6 q_{22}^2 \\
& + (-69q_{12}^{-5} + 47702q_{12}^{-3} + 709665q_{12}^{-1} - 709665q_{12} - 47702q_{12}^3 + 69q_{12}^5)q_{11}^2 q_{22}^7 \\
& + (-q_{12}^{-7} + 129421q_{12}^{-5} + 2184448q_{12}^{-4} + 41321984q_{12}^{-2} + 105235626q_{12}^{-1} \\
& \quad - 105235626q_{12} - 41321984q_{12}^2 - 2184448q_{12}^4 - 129421q_{12}^5 + q_{12}^7)q_{11}^3 q_{22}^6 \\
& + (-69q_{12}^{-7} - 32384q_{12}^{-6} + 107121810q_{12}^{-3} - 31380096q_{12}^{-2} + 759797709q_{12}^{-1} \\
& \quad - 759797709q_{12} + 31380096q_{12}^2 - 107121810q_{12}^3 + 32384q_{12}^6 + 69q_{12}^7)q_{11}^4 q_{22}^5 \\
& + (69q_{12}^{-7} + 32384q_{12}^{-6} - 107121810q_{12}^{-3} + 31380096q_{12}^{-2} - 759797709q_{12}^{-1} \\
& \quad + 759797709q_{12} - 31380096q_{12}^2 + 107121810q_{12}^3 - 32384q_{12}^6 - 69q_{12}^7)q_{11}^5 q_{22}^4 \\
& + (q_{12}^{-7} - 129421q_{12}^{-5} - 2184448q_{12}^{-4} - 41321984q_{12}^{-2} - 105235626q_{12}^{-1} \\
& \quad + 105235626q_{12} + 41321984q_{12}^2 + 2184448q_{12}^4 + 129421q_{12}^5 - q_{12}^7)q_{11}^6 q_{22}^3 \\
& + (69q_{12}^{-5} - 47702q_{12}^{-3} - 709665q_{12}^{-1} + 709665q_{12} + 47702q_{12}^3 - 69q_{12}^5)q_{11}^7 q_{22}^2 + \cdots .
\end{aligned}
$$

次は，上記 X_{35} の Fourier 係数で ± 1 とならないものについて素因数分解を具体的に与えたものである．素因数として 23 が現れているのが見てとれる．

$a(X_{35};[4,2,1]) = -69 = -3 \cdot \underline{23}, \quad a(X_{35};[5,2,1]) = 2277 = 3^2 \cdot 11 \cdot \underline{23},$

$a(X_{35};[4,3,1]) = -1294121 = -17 \cdot \underline{23} \cdot 331, \quad a(X_{35};[4,3,2]) = -32384 = -2^7 \cdot 11 \cdot \underline{23},$

$a(X_{35};[6,2,1]) = -47702 = -2 \cdot 17 \cdot \underline{23} \cdot 61, \quad a(X_{35};[5,3,1]) = -3203072 = -2^{13} \cdot 17 \cdot \underline{23},$

$a(X_{35} : [5,3,2]) = -2184448 = -2^8 \cdot 7 \cdot \underline{23} \cdot 53, \quad a(X_{35};[7,2,1]) = 709665 = 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot \underline{23},$

$a(X_{35};[6,3,1]) = 105235626 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{23} \cdot 762577, \quad a(X_{35};[6,3,2]) = 41321984 = 2^9 \cdot 11^2 \cdot \underline{23} \cdot 29,$

$a(X_{35};[5,4,1]) = 759797709 = 3 \cdot 11 \cdot \underline{23} \cdot 29 \cdot 34519,$

$a(X_{35};[5,4,2]) = -31380096 = -2^7 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \underline{23},$

$a(X_{35};[5,4,3]) = 107121810 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot \underline{23} \cdot 8171.$ ここで $T = \begin{pmatrix} m & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & n \end{pmatrix} = [m,r,n]$ なる略記号を用いている．

9.2 Niemeier 格子の theta 級数

前の章で Leech 格子の theta 級数が，theta 作用素の mod 23 核の元となっていることを紹介したがここでは，Niemeier 格子（Leech 格子はその 1 つ）の theta 級数について，その Fourier 係数の数値例を挙げる．次の表は，まず Conway-Sloane [7] (p.407, Table 16.1) に従って，24 個の Niemeier 格子に α, β, $\gamma, \cdots$ 等の名前を付け，その格子の theta 級数を井草の生成元（定理 2.4 参照）で表したものを，右端に表示したものである．その次に theta 作用素の mod 23 核に入っている 4 個の theta 級数 ϑ_α，ϑ_δ，ϑ_ψ，ϑ_ω の Fourier 係数の表を与える．ϑ_ω が Leech 格子 ω に付随する theta 級数である。

表 1: Niemeier 格子の theta 級数の井草生成元による表示

Name	Components	Theta series
α	D_{24}	$\vartheta_\alpha = X_4^3 + 12288X_{12} + 384Y_{12}$
β	$D_{16}E_8$	$\vartheta_\beta = X_4^3$
γ	E_8^3	$\vartheta_\gamma = \vartheta_\beta$
δ	A_{24}	$\vartheta_\delta = X_4^3 + 1200X_{12} - 120Y_{12}$
ϵ	D_{12}^2	$\vartheta_\epsilon = X_4^3 + 3072X_{12} - 192Y_{12}$
ζ	$A_{17}E_7$	$\vartheta_\zeta = X_4^3 + 6912X_{12} - 288Y_{12}$
η	$D_{10}E_7^2$	$\vartheta_\eta = \vartheta_\zeta$
θ	$A_{15}D_9$	$\vartheta_\theta = X_4^3 + 9408X_{12} - 336Y_{12}$
ι	D_8^3	$\vartheta_\iota = X_4^3 + 12288X_{12} - 384Y_{12}$
κ	A_{12}^2	$\vartheta_\kappa = X_4^3 + 13872X_{12} - 408Y_{12}$
λ	$A_{11}D_7E_6$	$\vartheta_\lambda = X_4^3 + 15552X_{12} - 432Y_{12}$
μ	E_6^4	$\vartheta_\mu = \vartheta_\lambda$
ν	$A_9^2D_6$	$\vartheta_\nu = X_4^3 + 19200X_{12} - 480Y_{12}$
ξ	D_6^4	$\vartheta_\xi = \vartheta_\nu$
o	A_8^3	$\vartheta_o = X_4^3 + 21168X_{12} - 504Y_{12}$
π	$A_7^2D_5^2$	$\vartheta_\pi = X_4^3 + 23232X_{12} - 528Y_{12}$
ρ	A_6^4	$\vartheta_\rho = X_4^3 + 25392X_{12} - 552Y_{12}$
σ	$A_5^4D_4$	$\vartheta_\sigma = X_4^3 + 27648X_{12} - 576Y_{12}$
τ	D_4^6	$\vartheta_\tau = \vartheta_\sigma$
υ	A_4^6	$\vartheta_\upsilon = X_4^3 + 30000X_{12} - 600Y_{12}$
ϕ	A_3^8	$\vartheta_\phi = X_4^3 + 32448X_{12} - 624Y_{12}$
χ	A_2^{12}	$\vartheta_\chi = X_4^3 + 34992X_{12} - 648Y_{12}$
ψ	A_1^{24}	$\vartheta_\psi = X_4^3 + 37632X_{12} - 672Y_{12}$
ω	Leech	$\vartheta_\omega = X_4^3 + 43200X_{12} - 720Y_{12}$

表 2: $\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)} = \vartheta_\alpha$ の Fourier 係数とその素因数分解

$\boldsymbol{T = [m, r, n]}$	$\mathbf{tr}(\boldsymbol{T})$	$\mathbf{4det}(\boldsymbol{T})$	$\boldsymbol{a(\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)}; T)}$
[0,0,0]	0	0	1
[1,0,0]	1	0	$1104 = 2^4 \cdot 3 \cdot 23$
[2,0,0]	2	0	$170064 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 1181$
[1,2,1]	2	0	$1104 = 2^4 \cdot 3 \cdot 23$
[1,1,1]	2	3	$97152 = 2^7 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
[1,0,1]	2	4	$1022304 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 463$
[3,0,0]	3	0	$17051328 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 4229$
[2,2,1]	3	4	$1022304 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 463$
[2,1,1]	3	7	$27202560 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[2,0,1]	3	8	$131300928 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 53$
[4,0,0]	4	0	$396408912 = 2^4 \cdot 3 \cdot 1619 \cdot 5101$
[3,3,1]	4	3	$97152 = 2^7 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
[3,2,1]	4	8	$131300928 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 53$
[3,1,1]	4	11	$4180088448 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1997$
[3,0,1]	4	12	$10201693056 = 2^7 \cdot 3 \cdot 23^2 \cdot 50221$
[2,4,2]	4	0	$170064 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 1181$
[2,3,2]	4	7	$27202560 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[2,2,2]	4	12	$777313152 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 127$
[2,1,2]	4	15	$6283791360 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 23$
[2,0,2]	4	16	$14744809824 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 6677903$
[5,0,0]	5	0	$4634713440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 19991$
[4,4,1]	5	0	$1104 = 2^4 \cdot 3 \cdot 23$
[4,3,1]	5	7	$27202560 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[4,2,1]	5	12	$10201693056 = 2^7 \cdot 3 \cdot 23^2 \cdot 50221$
[4,1,1]	5	15	$104826866688 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 23 \cdot 54949$
[4,0,1]	5	16	$207523912032 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 23 \cdot 1783 \cdot 5857$
[3,4,2]	5	8	$131300928 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 53$
[3,3,2]	5	15	$6283791360 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 23$
[3,2,2]	5	20	$169345554048 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 18743$
[3,1,2]	5	23	$713871369216 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 77460001$
[3,0,2]	5	24	$1120553013888 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 241$
[6,0,0]	6	0	$34410979008 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 1289 \cdot 2207$

表 3: $\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)} = \vartheta_\delta$ の Fourier 係数とその素因数分解

$\boldsymbol{T = [m, r, n]}$	$\mathbf{tr}(\boldsymbol{T})$	$\mathbf{4det}(\boldsymbol{T})$	$\boldsymbol{a(\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)}; T)}$
[0,0,0]	0	0	1
[1,0,0]	1	0	$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
[2,0,0]	2	0	$182160 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$
[1,2,1]	2	0	$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
[1,1,1]	2	3	$27600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23$
[1,0,1]	2	4	$303600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23$
[3,0,0]	3	0	$16924320 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 73$
[2,2,1]	3	4	$303600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23$
[2,1,1]	3	7	$17001600 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[2,0,1]	3	8	$74685600 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 41$
[4,0,0]	4	0	$397150800 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 139 \cdot 2381$
[3,3,1]	4	3	$27600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23$
[3,2,1]	4	8	$74685600 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 41$
[3,1,1]	4	11	$2239657200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2459$
[3,0,1]	4	12	$5525851200 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 50053$
[2,4,2]	4	0	$182160 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$
[2,3,2]	4	7	$17001600 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[2,2,2]	4	12	$765072000 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[2,1,2]	4	15	$7844538240 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 769$
[2,0,2]	4	16	$15928677600 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 709$
[5,0,0]	5	0	$4632279120 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 449$
[4,4,1]	5	0	$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
[4,3,1]	5	7	$17001600 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[4,2,1]	5	12	$5525851200 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 50053$
[4,1,1]	5	15	$57173731200 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 28771$
[4,0,1]	5	16	$112857310800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 34949$
[3,4,2]	5	8	$74685600 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 41$
[3,3,2]	5	15	$7844538240 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 769$
[3,2,2]	5	20	$177299242560 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 61 \cdot 3989$
[3,1,2]	5	23	$760474281600 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 104369$
[3,0,2]	5	24	$1191548635200 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 46723$
[6,0,0]	6	0	$34414027200 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 317 \cdot 359$

表 4: $\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)} = \vartheta_\psi$ の Fourier 係数とその素因数分解

$T = [m, r, n]$	$\mathrm{tr}(T)$	$4\det(T)$	$a(\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)}; T)$
[0,0,0]	0	0	1
[1,0,0]	1	0	$48 = 2^4 \cdot 3$
[2,0,0]	2	0	$195408 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 59$
[1,2,1]	2	0	$48 = 2^4 \cdot 3$
[1,1,1]	2	3	0
[1,0,1]	2	4	$2208 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23$
[3,0,0]	3	0	$16785216 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 181$
[2,2,1]	3	4	$2208 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23$
[2,1,1]	3	7	$1554432 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
[2,0,1]	3	8	$6266304 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 43$
[4,0,0]	4	0	$397963344 = 2^4 \cdot 3 \cdot 8290903$
[3,3,1]	4	3	0
[3,2,1]	4	8	$6266304 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 43$
[3,1,1]	4	11	$176357376 = 2^{16} \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 23$
[3,0,1]	4	12	$440443008 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 23 \cdot 1847$
[2,4,2]	4	0	$195408 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 59$
[2,3,2]	4	7	$1554432 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
[2,2,2]	4	12	$886900608 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 179$
[2,1,2]	4	15	$99163376640 = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 131$
[2,0,2]	4	16	$18080232288 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 167 \cdot 49033$
[5,0,0]	5	0	$4629612960 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 1051$
[4,4,1]	5	0	$48 = 2^4 \cdot 3$
[4,3,1]	5	7	$1554432 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
[4,2,1]	5	12	$440443008 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 23 \cdot 1847$
[4,1,1]	5	15	$4591650816 = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 10831$
[4,0,1]	5	16	$9034943904 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 64951$
[3,4,2]	5	8	$6266304 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 43$
[3,3,2]	5	15	$9163376640 = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 131$
[3,2,2]	5	20	$186645799296 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 151 \cdot 4241$
[3,1,2]	5	23	$810828896256 = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 1912621$
[3,0,2]	5	24	$1266676811136 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 283 \cdot 5119$
[6,0,0]	6	0	$34417365696 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 367 \cdot 7753$

表 5: $\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)} = \vartheta_\omega$ の Fourier 係数とその素因数分解

$\boldsymbol{T = [m, r, n]}$	$\mathbf{tr}(\boldsymbol{T})$	$\mathbf{4det}(\boldsymbol{T})$	$\boldsymbol{a(\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)}; T)}$
[0,0,0]	0	0	1
[1,0,0]	1	0	0
[2,0,0]	2	0	$196560 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
[1,2,1]	2	0	0
[1,1,1]	2	3	0
[1,0,1]	2	4	0
[3,0,0]	3	0	$16773120 = 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
[2,2,1]	3	4	0
[2,1,1]	3	7	0
[2,0,1]	3	8	0
[4,0,0]	4	0	$398034000 = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
[3,3,1]	4	3	0
[3,2,1]	4	8	0
[3,1,1]	4	11	0
[3,0,1]	4	12	0
[2,4,2]	4	0	$196560 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
[2,3,2]	4	7	0
[2,2,2]	4	12	$904176000 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[2,1,2]	4	15	$9258762240 = 2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[2,0,2]	4	16	$18309564000 = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[5,0,0]	5	0	$4629381120 = 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[4,4,1]	5	0	0
[4,3,1]	5	7	0
[4,2,1]	5	12	0
[4,1,1]	5	15	0
[4,0,1]	5	16	0
[3,4,2]	5	8	0
[3,3,2]	5	15	$9258762240 = 2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[3,2,2]	5	20	$187489935360 = 2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[3,1,2]	5	23	$815173632000 = 2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
[3,0,2]	5	24	$1273079808000 = 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
[6,0,0]	6	0	$34417656000 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 103$

参考文献

[1] S. Böcherer: Über gewisse Siegelsche Modulformen zweiten Grades. Math. Ann. **261**(1982), 23-41.

[2] S. Böcherer and S. Nagaoka: On mod p properties of Siegel modular forms. Math. Ann., **338**(2007), 421-433.

[3] S. Böcherer and S. Nagaoka: On Siegel modular forms of level p and their properties of mod p, manuscripta math., **132**(2010), 501-515.

[4] S. Böcherer and S. Nagaoka: Congruences for Siegel modular forms and their weights, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **80**(2010), 227-231.

[5] S. Böcherer and S. Nagaoka: On p-adic properties of Siegel modular forms. Automorphic Forms, Springer, Proceedings in Mathematic and Statistics (ed. Heim et al.) **115**(2014), 47-66.

[6] H. Cohen: Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters. Math. Ann. **217**(1975), 271-285.

[7] J. H. Conway and N. J. A. Sloane: *Sphere packings, lattices and groups.* Third edition. Springer, 1999.

[8] E. Freitag: Zur Theorie der Modulformen zweiten Grades. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II(1965), 151-157.

[9] M. Hentschel and G. Nebe: Hermitian modular forms congruent 1 modulo p. Arch. Math. **92**(2009), 251-256.

[10] T. Ichikawa: Cogruences between Siegel modular forms. Math. Ann. **342**(2008), 527-532.

[11] J. -I. Igusa: On Siegel modular forms of genus two. Am. J. Math. **84**(1962), 175-200; II, ibid. **86**(1964), 392-412.

[12] J. -I. Igusa: On the ring of modular forms degree two over $\boldsymbol{Z}$. Am. J. Math. **101**(1979), 149-183.

[13] H. Katsurada: An explicit formula for Siegel series. Amer. J. Math. **121**(1999), 415-452.

[14] N. M. Katz: p-adic properties of modular schemes and modular forms. Modular Functions of One Variables III. Lec. Notes in Math. Springer, **350**(1973), 69-190.

[15] T. Kikuta, H. Kodama and S. Nagaoka: Note on Igusa's cusp form of weight 35. Rocky Mountain J. of Math. **45**(2015), No.3, 963-972

[16] T. Kikuta and S. Nagaoka: On a correspondence between p-adic Siegel-Eisenstein series and genus theta series. Acta Arithmetica, **134**(2008), 111-126.

[17] T. Kikuta and S. Nagaoka: Congruence properties of Hermitian modular forms, Proc. Amer. Math. Soc., **137**(2009), 1179-1184.

[18] T. Kikuta and S. Nagaoka: On Hermitian modular forms mod p, J. Math. Soc. Japan, **63**(2011), 211-238.

[19] T. Kikuta and S. Nagaoka: Ramanujan type congruences for modular forms of several variables. Ramanujan J. **32**(2013),143-157.

[20] T. Kikuta and S. Nagaoka: On p-adic quaternionic Eisenstein series. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **83**(2013), 147-157.

[21] H. Kodama, S. Nagaoka and Y. Nakamura: On level p Siegel cusp forms of degree two. International J. of Mathematics and Mathematical Science. **2012**(2012), 1-9.

[22] Y. Mizuno and S. Nagaoka: Some congruences for Saito-Kurokawa lifts, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **80**(2010), 9-23.

[23] T. Munemoto and S. Nagaoka: Note on p-adic Hermitian Eisenstein series. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **76**(2006), 247-260.

[24] S. Nagaoka: Some congruence properties of Eisenstein series. Hokkaido Math. J. **8**(1979), 239-243.

[25] S. Nagaoka: A remark on Serre's example of p-adic Eisenstein series. Math. Zeitschrift **235**(2000), 227-250.

[26] S. Nagaoka: Note on mod p Siegel modular forms. Math. Zeitschrift **235**(2000),405-420, II ibid. **251**(2005), 821-826.

[27] S. Nagaoka: On p-adic Hermitian Eisenstein series. Proc. Amer. Math. Soc., **134**(2006), 2533-2540.

[28] S. Nagaoka: On Hilbert modular forms modulo p: explicit ring structure. Revista Math. Iberoamericana, **22**(2006), 357-368.

[29] S. Nagaoka: On the mod p kernel of the theta operator. Proc. Amer. Math. Soc., **143**(2015), 4237-4244.

[30] S. Nagaoka and Y. Nakamura: On the restriction of the Hermitian Eisenstein series and its applications. Proc. Amer. Math. Soc., **139**(2010), 1291-1298.

[31] S. Nagaoka and S. Takemori: Notes on theta series for Niemeier lattices. Ramanujan J. in press.

[32] J.-P. Serre: Formes modulaires et fonctions zêta p-aduques. Modular Functions of One Variables III. Lec. Notes in Math. Springer, **350**(1973), 191-268.

[33] J.-P. Serre: *Cours D'arithmétique*, Presses Universitaires de France, 1970.

[34] G. Shimura: On Eisenstein series. Duke Math. J. **50**(1983), 417-476. (全集 III 巻，455-476).

[35] C. L. Siegel: Einführung in die Theorie der Modulfuktionen n-ten Grades, Math. Ann. **116**(1939), 617-657. （全集 III 巻，97-137）

[36] H. P. F. Swinnerton-Dyer: On ℓ-adic representaitons and congruences for coefficients of modular forms. Modular Functions of One Variables III. Lec. Notes in Math. Springer, **350**(1973), 1-55.

[37] H. Yoshida: Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms. Inv. Math. **60**(1980), 193-248.