ユニタリ型表現のモデルの変換公式について

森本　和輝
(京都大学大学院理学研究科)

概 要

本稿では p 進簡約代数群の表現の実現であるモデルについて、その変換公式を考察する。特に、F を標数 0 の非アルキメデス局所体、E をその二次拡大とした時に、$\mathrm{GL}_{2n}(E)$ の緩増加な表現に対して、Whittaker モデルと $(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})$-モデルの間の同型写像とその逆写像を積分を用いて明示的に構成する。

1　p 進簡約代数群の表現とそのモデル

本稿を通して、F は標数 0 の非アルキメデス局所体、E は F の二次拡大とする。また、$\underline{G}$ を F 上定義された簡約代数群とし、G を $\underline{G}$ の F-有理点のなす群とする。

1.1　Preliminaries

p 進簡約代数群の表現に関して基本的な定義を与える（Casselman [1] 参照）。

Definition 1.1. $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V と準同型 $\pi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ からなる組 (π, V) が条件

- 任意のベクトル $v \in V$ に対して、その固定部分群 $\{g \in G : \pi(g)v = v\}$ が開集合

を満たす時、(π, V) を G の滑らかな表現と呼ぶ。表現空間に言及しない場面では、しばしば (π, V) を単に π と書く。特に $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ の場合には、π を指標と呼ぶ。

Definition 1.2. (π, V) を G の滑らかな既約表現とする。この時、π は G の中心 Z_G 上ではスカラー倍で作用する。このようにして定まる Z_G の指標を ω_π と書き、中心指標と呼ぶ。

Definition 1.3. (π, V) を G の滑らかな表現とする。$V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ と定め、$\pi^* : G \to V^*$ を

$$\langle \pi^*(g)v^*, v\rangle = \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle \quad g \in G, v \in V, v^* \in V^*$$

で定めると、(π^*, V^*) は G の（滑らかとは限らない）表現になる。$V^\vee$ を π^* の作用に関して滑らかな V^* のベクトル全体とする。また、$V^\vee$ への作用 $\pi^\vee$ を π^* の $V^\vee$ への制限により定める。このようにして定義された G の滑らかな表現 $(\pi^\vee, V^\vee)$ を反傾表現と呼ぶ。

Remark 1.1. (π, V) が既約ならば、$(\pi^\vee, V^\vee)$ も既約。また、この時

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \pi^\vee, \mathbf{1}) \simeq \mathbb{C}$$

が成り立つ。

A を G の任意の閉部分群、(σ, V_σ) を滑らかな A の表現とする。この時、G の滑らかな表現 $\mathrm{Ind}_A^G\sigma$ を次のように定義する：G 上の V_σ-値函数で次の二つの条件を満たすもののなす空間を $\mathrm{Ind}_A^G\sigma$ の表現空間として取る。

1. $f(ag) = \sigma(a)f(g) \quad a \in A,\, g \in G.$
2. ある G の開部分群 K に対して、$f(gk) = f(g) \quad g \in G,\, k \in K.$

また、$\mathrm{Ind}_A^G\sigma$ の作用は右移動、つまり $(g \cdot f)(x) = f(xg)$ $(x, g \in G)$ によって定める

1.2 p 進簡約代数群の表現のモデル

Definition 1.4. H を G の閉部分群とし、χ を H の指標とする。G の滑らかな既約表現 (π, V_π) が

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_H^G\chi) = 1$$

を満たすとき 、$\mathrm{Ind}_H^G\chi$ の G-不変な部分空間 $\mathfrak{M}^{(H,\chi)}(\pi)$ で

$$V_\pi \simeq \mathfrak{M}^{(H,\chi)}(\pi)$$

となるものが一意的に存在する。この時、$\mathfrak{M}^{(H,\chi)}(\pi)$ のことを π の (H, χ)-モデルとよぶ。

いくつかモデルの例をあげておく。

1. G は F 上分裂であるとする。B を G の Borel 部分群とし、その Levi 分解を $B = TN$ と書く。ψ_N を N の指標とする。$t \in T$ に対して $\psi_N(t \cdot t^{-1}) = \psi_N$ となるのは、t が G の中心の元である場合に限る時、ψ_N は非退化であると言う。ψ_N を非退化な指標とした時、G の任意の滑らかな既約表現 π に対して、

   $$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_N^G\psi_N) \leq 1 \tag{1.2.1}$$

   が成り立つ (Rodier [9] 参照)。このモデルは特に Whittaker モデルと呼ばれる。

2. $G = \mathrm{GL}_m(E)$ の場合には上の例のデータは次のようにして具体的に与えられる。N として上三角ユニポテント行列全体のなす群 N_m がとれる。また、F の非自明な指標 ψ に対して N_m の指標 ψ_{N_m} を

   $$\psi_{N_m}(n) := \psi\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{E/F}(n_{1,2} + \cdots + n_{m-1,m})\right)$$

   で定義すれば、これは非退化な指標である。さらに、次の場合には (1.2.1) の次元が 1 になる事が知られている。

   (π, V) を $\mathrm{GL}_m(E)$ の滑らかな既約表現で、中心指標 ω_π は $|\omega_\pi| = 1$ を満たすとする。$0 \neq (\cdot,\cdot) \in \mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \pi^\vee, \mathbb{C})$ をとる。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$[g \mapsto (\pi(g)v, v^\vee)] \in L^{2+\varepsilon}(Z_{\mathrm{GL}_m(E)} \backslash \mathrm{GL}_m(E))$ である時、π は緩増加であるという。π が緩増加である時、

   $$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(E)}(\pi, \mathrm{Ind}_{N_m}^{\mathrm{GL}_m(E)}\psi_{N_m}) = 1$$

   が成り立つ。

3. $\mathrm{GL}_m(E)$ の任意の滑らかな既約表現 π に対して、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(E)}(\pi, \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_m(F)}^{\mathrm{GL}_m(E)} \mathbf{1}) \leq 1$$

が成り立つ (Flicker [3] 参照)。ここで、$\mathbf{1}$ は $\mathrm{GL}_m(F)$ の自明表現。π が $(\mathrm{GL}_m(F), \mathbf{1})$-モデルを持つとき、$\pi$ はユニタリ型であると呼ぶ。

4. ユニタリ群 $\mathrm{U}_{4m}(F)$ を次のように定義する。

$$\left\{ g \in \mathrm{GL}_{4m}(E) : {}^t\bar{g} J_{2m} g = J_{2m} \right\}$$

ここで、$\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元を $x \mapsto \bar{x}$ と書き、J_{2m} は次で定義される $\mathrm{GL}_{4m}(E)$ の歪対称行列:

$$J_{2m} = \begin{pmatrix} & w_{2m} \\ -w_{2m} & \end{pmatrix}, w_1 = (1), w_m = \begin{pmatrix} & w_{m-1} \\ 1 & \end{pmatrix}$$

π を $\mathrm{GL}_{2m}(E)$ のユニタリ型の滑らかな既約表現とする。P をその Levi 成分 M_P が $\mathrm{GL}_{2m}(E)$ と同型な $\mathrm{U}_{4m}(E)$ の標準的な放物型部分群とする。$\pi \otimes |\det|^{\frac{1}{2}}$ を M_P と表現とみなした時、P の冪単根基 (unipotent radical) U_P 上自明な表現として $\pi \otimes |\det|^{\frac{1}{2}}$ は P の表現にのばせる。この時、誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{P(F)}^{\mathrm{U}_{4m}(F)}(\pi \otimes |\det|^{\frac{1}{2}} \delta_P^{\frac{1}{2}})$$

を考える (ここで、δ_P を P のモジュラス函数)。この誘導表現は可約であることがわかり、また Langlands の結果からこの誘導表現は唯一の既約商 (Langlands 商) をもつ。その既約商を $\mathrm{LQ}(\pi)$ と書く。

N_U を $\mathrm{U}_{4m}(F)$ の上三角ユニポテント行列のなす部分群とする。このとき、

$$N_U = \left\{ \begin{pmatrix} n & \\ & w_{2m} {}^t\bar{n}^{-1} w_{2m} \end{pmatrix} : n \in N_{2m} \right\} U_P$$

と書ける。N_{2m} の指標 $\psi_{N_{2m}}$ を U_P 上自明になるように N_U にのばし、$\psi_{N_{2m}}$ を N_U の指標とみなす。$\psi_{N_{2m}}$ は N_U の指標として非退化ではないに注意しておく。この時、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}_{4m}(F)}(\mathrm{LQ}(\pi), \mathrm{Ind}_{N_U}^{\mathrm{U}_{4m}(F)} \psi_{N_{2m}}) = 1$$

(Morimoto [7] 参照)。しかし、一般には $\mathrm{U}_{4m}(F)$ の滑らかな既約表現 Π に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}_{4m}(F)}(\Pi, \mathrm{Ind}_{N}^{\mathrm{U}_{4m}(F)} \psi_{N_{2m}}) \leq 1$$

とは限らない。

1.3 モデルの変換

与えられた一つの既約表現が異なる二つのモデルを場合がしばしばある。それらは、表現の実現であるため同型であるが、より詳しい関係を見るために次の問題を考えたい。この問題のことをモデルの変換と呼ぶ。

問題 1. (π, V_π) を G の滑らかな既約表現とする。$i = 1, 2$ に対して、H_i を G の閉部分群、χ_i を H_i の指標とする。また、$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_{H_i}^G \chi_i) = 1$ とする。この時、同型写像

$$\mathfrak{M}^{(H_1, \chi_1)}(\pi) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}^{(H_2, \chi_2)}(\pi)$$

と、その逆写像を明示的に表すことが出来るだろうか?

この問題については、次の場合に Lapid と Mao [6] による結果がある。

1. $G = \mathrm{GL}_{2m}(F)$
2. $H_1 = \mathrm{GL}_m(F) \times \mathrm{GL}_m(F)$, $\chi_1 = \mathbf{1}$ (自明な指標)
3. $H_2 = N_{2m} \cap \mathrm{GL}_{2m}(F)$, $\chi_2 = \psi_{N_{2m}}|_{H_2}$
4. π は緩増加 (条件 2 より $\omega_\pi = \mathbf{1}$ に注意)

実際、Lapid と Mao はこの場合に、適当な積分を用いることで、二つのモデルの間の同型写像とその逆写像を明示的に構成した。

本稿では次の場合に、モデルの変換について考察する。

1. $G = \mathrm{GL}_{2n}(E)$
2. $H_1 = \mathrm{GL}_{2n}(F)$, $\chi_1 = \mathbf{1}$
3. $H_2 = N_{2n}$, $\chi_2 = \psi_{N_{2n}}$
4. π は緩増加 (条件 2 により $|\omega_\pi| = 1$ に注意)

Remark 1.2. $G = \mathrm{GL}_{2n+1}(E)$ の場合にも、類似の状況でモデルの変換が考察出来るが、本稿では簡単のために、上の状況のみ考える。

2 $\mathrm{GL}_{2n}(E)$ の表現のモデルの変換公式

2.1 記号

いくつか記号の準備をする。ψ は F の非自明な指標とする。また、$\tau \in E$ を $\bar{\tau} = -\tau$ をみたす元とする。以下、τ は固定する。この τ に対して、$\mathrm{GL}_{2n}(E)$ の元 t_τ を

$$t_\tau = \begin{pmatrix} \tau & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \tau & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

で定める。N_{2n} の指標 $\psi_{N_{2n},\tau}$ を

$$\psi_{N_{2n},\tau}(n) = \psi_{N_{2n}}(t_\tau n t_\tau^{-1})$$

により定める。この時、$\psi_{N_{2n},\tau}$ は $N_{2n} \cap \mathrm{GL}_{2n}(F)$ 上で自明である。

$\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_{2n}$ の Lie 環を $\mathfrak{M}$ とすると、$\mathfrak{M}$ は E 上の $2n \times 2n$ 行列全体からなる。$\mathfrak{M}_{\mathcal{O}}$ を $\mathfrak{M}$ の整行列のなす格子とする。任意の $\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_{2n}$ の F 上定義された部分代数群 $\underline{Q}$ に対して、その Lie 環を $\mathfrak{q}$ と書く。この時、$\mathfrak{q}$ の格子 $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{M}_{\mathcal{O}}$ は $\underline{Q}$ のゲージ形式を与える。このゲージ形式と ψ から、与えられる測度（Kneser [4] 参照）を $Q = \underline{Q}(F)$ の測度として採用する。

以下では、モデルの変換公式について考察するので、π は $(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})$-モデル、$(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})$-モデルをもつ $\mathrm{GL}_{2n}(E)$ の滑らかな緩増加既約表現とする（前章で注意したように、緩増加であることから $(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})$-モデルをもつことは従う）。

2.2 $\mathfrak{M}^{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}(\pi) \to \mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F),\mathbf{1})}(\pi)$

この章では、$\mathfrak{M}^{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}(\pi)$ から $\mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F),\mathbf{1})}(\pi)$ への同型写像を積分により構成する。

$\mathcal{P}_n$ を $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ の（標準的な）mirabolic 部分群、つまり

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \begin{pmatrix} g & * \\ & 1 \end{pmatrix} : g \in \mathrm{GL}_{2n-1}(F) \right\} \subset \mathrm{GL}_{2n}(F)$$

とする。$W \in \mathfrak{M}^{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}(\pi)$ に対して、次の積分を考える。

$$L_W(g) := \int_{(N_{2n}\cap \mathrm{GL}_{2n}(F))\backslash \mathcal{P}_n} W(t_\tau p g)\, dp \tag{2.2.1}$$

この積分に関しては次の事が知られている。

Theorem 2.1 (Flicker [2], Offen [8])**.** 任意の $W \in \mathfrak{M}^{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}(\pi)$ に対して、積分 (2.2.1) は絶対収束する。また、L_W は V_π 上で恒等的にゼロではない。(2.2.1) が絶対収束することから、L_W は $\mathcal{P}_n$-不変であるが、さらに $\mathrm{GL}_{2n}(F)$-不変である。

上の定理から、

$$\mathcal{T}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F),\mathbf{1})}_{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}(W) = L_W$$

により $\mathfrak{M}^{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}(\pi)$ から $\mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F),\mathbf{1})}(\pi)$ への同型写像が定義できる。

2.3 $\mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F),\mathbf{1})}(\pi) \to \mathfrak{M}^{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}(\pi)$

この章では、前章で構成した写像の逆写像を積分により構成する。そのために、$L \in \mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F),\mathbf{1})}(\pi)$ に対して、

$$\int_{(N_{2n}\cap \mathrm{GL}_{2n}(F))\backslash N_{2n}} L(n t_\tau^{-1} g) \psi_{N,\tau}^{-1}(n)\, dn, \quad g \in \mathrm{GL}_{2n}(E)$$

を考察したい。しかし、この積分は絶対収束しない。以降では、この積分が適当な意味で収束し、$(N_{2n},\psi_{N_{2n}})$-モデルを与える事を説明する。実際、この積分は regularized intergal（Lemma 2.1 参照）として定義できる。

2.3.1 stable integral, reguralized integral

regularized intergal を定義するための準備として、stable integral を定義する。これらの積分は任意の簡約代数群に対して定義する事が出来るので、この章では、G を F 上定義された簡約代数群の F-有理点のなす群とする。

Definition 2.1. U を G のユニポテント部分群、A を U に連続的に作用するコンパクト群とする。この時、U 上の連続函数 f に対して、U の開コンパクト部分群 U_0 で次の性質を満たすものが存在するとき、f は $(\#, A)$-*stale integral* を持つという*:* U_0 を含む任意の U の開コンパクト部分群 U' に対して、

$$\int_{U_0} f(u)\, du = \int_{U'} f(u)\, du.$$

f が $(\#, A)$-*stale integral* を持つ時、上の条件をみたす異なる U_0' が存在した場合、

$$\int_{U_0} f(u)\, du = \int_{U_0'} f(u)\, du$$

となることがわかる。従って、上記の積分は U_0 の取り方によらず等しく、その値を

$$\int_U^{(\#,A)} f(u)\,du$$

と書く。

Remark 2.1. *f が $(\#,A)$-stale integral を持つとき、任意の $u_0 \in U$ に対して、*

$$\int_U^{(\#,A)} f(uu_0)\,du$$

が定義でき、

$$\int_U^{(\#,A)} f(u)\,du$$

と等しい事がわかる。

Example 1. G は F 上分裂であるとし、(π, V_π) を G の滑らかな既約表現とする。ψ_N を G の極大ユニポテント群 N の非退化指標とする。

この時、$0 \neq (\cdot,\cdot) \in \mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \pi^\vee, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ と、$v \in V_\pi, v^\vee \in V_{\pi^\vee}$ に対して、N 上の滑らかな函数を

$$n \mapsto \psi_N^{-1}(n)(\pi(n)v, v^\vee)$$

で定義する。この函数は $(\#,1)$-*stable integral* をもつ *(Lapid–Mao [5])*。従って、G 上の滑らかな函数

$$W_{v,v^\vee}(g) := \int_N^{(\sharp,1)} \psi_N^{-1}(n)(\pi(ng)v, v^\vee)\,dg$$

が定義出来る。この時、*Remark 2.1* から $W_{v,v^\vee}(g)$ は

$$W_{v,v^\vee}(ng) = \psi_N(n) W_{v,v^\vee}(g), \quad n \in N, g \in G$$

を満たす。

Definition 2.2. *U を G のユニポテント部分群、A を U に連続的に作用する局所コンパクト完全不連結群とする。f を U 上の連続函数とする。A の任意の開コンパクト部分群 A' に対して、f が $(\#,A')$-stable integral を持つとき、f は U 上の A-stable integral を持つという。この時その共通の値を*

$$\int_U^{st,A} f(u)\,du$$

と書く。

Remark 2.2. *$(\#,A)$-stable integral と同様に、f が U 上の A-stable integral を持つ時、任意の $u_0 \in U$ に対して*

$$\int_U^{st,A} f(uu_0)\,du$$

が定義でき、

$$\int_U^{st,A} f(uu_0)\,du = \int_U^{st,A} f(u)\,du.$$

Remark 2.3. *Example 1 で挙げた函数は、1-stable intergal を持つ。*

つぎの Lemma により regularized intergal を定義する。

Lemma 2.1 (Lapid–Mao [6]). U_0 を G のユニポテント部分群、f を U_0 上の連続函数とする。U_1, U_2 を U_0 の部分群、T を G のトーラス、ψ_{U_0} を U_0 の指標で次の条件を満たすものとする。

- U_1 は U_0 の正規部分群で $U_1 \backslash U_0$ は可換
- T は共役による作用で U_0 と U_1 を保つ
- $\psi_{U_0}(tut^{-1}) = \psi_{U_0}(u)$, $u \in U_1, t \in T$.
- U_2 は T-不変な U_1 の部分群で、$\psi_{U_0}|_{U_2} = \mathbf{1}$
- $T \to (\widehat{U_1 \backslash U_0}) : t \mapsto \psi_U(t \cdot t^{-1}) \cdot \psi_U^{-1}$ は開写像。ここで、$(\widehat{U_1 \backslash U_0})$ は U_1 上自明な U_0 の指標からなる群。

また、f を G 上の滑らかな函数で次の *3* つの条件を満たすとする。

1. 左 U_2-不変、つまり $f(ug) = f(g)$, $g \in G, u \in U_2$.
2. T の適当な開コンパクト部分群 T' に対して、f は左 T'-不変
3. 任意の $g \in G$ に対して、$f(\cdot g) \in L^1(U_2 \backslash U_1)$

この時、次の積分が定義出来る

$$\int_{U_1 \backslash U_0}^{st,T} \left(\int_{U_2 \backslash U_1} f(ung)\psi_{U_0}(u)^{-1} \, du \right) \psi_{U_0}^{-1}(n) \, dn.$$

この積分を $U_2 \backslash U_0$ 上の *regularized integral* と呼び、

$$\int_{U_2 \backslash U_0}^{reg} f(ng)\psi_{U_0}^{-1}(n) \, dn$$

と書く。

2.4 main result

Lemma 2.2 (Morimoto [7]). $G = \mathrm{GL}_{2n}(E)$ とする。ユニポテント群 U_i、指標 ψ_{U_0}、函数 f を次のようにとる。

1. $U_0 = N_{2n}$
2. $U_1 = \langle N_{2n}^{der}, N_{2n} \cap \mathrm{GL}_{2n}(F) \rangle$。ここで、$N_{2n}^{der}$ は N_{2n} の交換子部分群。
3. $U_2 = N_{2n} \cap \mathrm{GL}_{2n}(F)$
4. $\psi_{U_0} = \psi_{N_{2n}}$
5. $f = L \in \mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}(\pi)$

これらは *Lemma 2.1* の条件を満たす。従って、

$$W_L(g) := \int^{reg}_{(N_{2n}\cap \mathrm{GL}_{2n}(F))\backslash N_{2n}} L(nt_\tau^{-1}g)\psi_{N,\tau}(n)^{-1}\,dn, \quad g\in G$$

が定義出来る。

Remark 2.2 から、$W_L(g)$ は次の invariance をもつ:

$$W_L(ng) = \psi_{N_{2n}}(n)W_L(g), \quad n\in N_{2n},\, g\in \mathrm{GL}_{2n}(E)$$

(Example 1 参照)。従って、

$$\mathcal{T}^{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}_{(\mathrm{GL}_{2n}(F),\mathbf{1})}(L) = |\tau|^{\frac{n}{2}}\cdot W_L$$

により、$\mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F),\mathbf{1})}(\pi)$ から $\mathfrak{M}^{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}(\pi)$ への準同型写像が構成できた。この時、次のモデルの変換公式が得られる。

Theorem 2.2 (Morimoto [7])**.** 任意の $W\in\mathfrak{M}^{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}(\pi)$ に対して、

$$\mathcal{T}^{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}_{(\mathrm{GL}_{2n}(F),\mathbf{1})}\circ\mathcal{T}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F),\mathbf{1})}_{(N_{2n},\psi_{N_{2n}})}(W) = W.$$

References

[1] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups.* unpublished manuscript.

[2] Y. Flicker, *Twisted tensors and Euler products.* Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 295–313.

[3] Y. Flicker, *On distinguished representations,* J. Reine Angew. Math. **418** (1991), 139–172.

[4] M. Kneser, *Semi-Simple Algebraic Groups.* In Algebraic Number. Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965), 250–65. Washington, DC: Thompson, 1967.

[5] E. Lapid and Z. Mao, *A conjecture on Whittaker-Fourier coefficients of cusp forms.* J. Number Theory 146 (2015), 448–505.

[6] E. Lapid and Z. Mao, *Model transition for representations of metaplectic type.* International Mathematics Research Notices, 84 pages. doi:10.1093/imrn/rnu225,

[7] K. Morimoto, *Model transition for representations of unitary type,* preprint.

[8] O. Offen, *On local root numbers and distinction.* J. Reine Angew. Math. **652** (2011), 165–205.

[9] F. Rodier, *Whittaker models for admissible representations of reductive p-adic split groups.* Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math. **26**, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972), pp. 425–430. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.