Rankin-Selberg L 関数の特殊値に関する Beilinson 予想について

千田雅隆

この論説では François Brunault 氏との共同研究によって得られた Rankin-Selberg L 関数の特殊値に関する Beilinson 予想についての結果を紹介する．前半では L 関数の特殊値に関する Beilinson の予想について解説し, 後半では今回得られた結果とその背景について説明する．

1 Dedekind ζ 関数の特殊値

1.1 Riemann ζ 関数の整数点での値

n を正の偶数とする．Riemann ζ 関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ の $s=n$ での特殊値に関して, Euler は

$$\zeta(n)=-(2\pi i)^n\frac{B_n}{2\cdot(n!)}$$

となることを示した．ここで B_n は Bernoulli 数であり, $\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ によって定義されるのであった．関数等式 $\pi^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$ を用いると $\zeta(1-n)=-\frac{B_n}{n}$ となることもわかる．それでは n が 3 以上の奇数の場合は $\zeta(n)$ の値はどうなるのであろうか? 関数等式と $\Gamma(s)$ の性質から $\zeta(1-n)=0$ となり, $\zeta(n)$ の値は $\zeta(s)$ の $s=1-n$ での一階微分値 $\zeta'(1-n)$ と結びついていることがわかる．n が 3 以上の場合, 実は $\zeta(n)$ の値は (高次) regulator と呼ばれるものを用いて表せることが知られている．以下では, まずはじめに代数体の Dedekind ζ 関数の特殊値と regulator の関係について知られている結果を復習しよう．

1.2 Dedekind ζ 関数の値と regulator

F を判別式 D_F を持つ代数体とし, $\mathcal{O}_F$ を F の整数環とする．r_1 を F の実素点の個数, r_2 を複素素点の個数とする．F の Dedekind ζ 関数は

$$\zeta_F(s)=\sum_{0\neq\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}_F:\,\mathrm{ideal}}\frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

と定義され, $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束するのであった．Dedekind ζ 関数の Euler 積表示

$$\zeta_F(s)=\prod_{\mathfrak{p}:\,\mathcal{O}_F\text{の素 ideal}}\left(1-N\mathfrak{p}^{-s}\right)^{-1}$$

により $\mathrm{Re}(s)>1$ で極も零点も持たないことがわかる．さらに $\zeta_F(s)$ は $s=1$ で 1 位の極を持ち, $s=1$ 以外で正則な関数に解析接続される．$\zeta_F(s)$ の $s=1$ での留数が代数体 F に関する数論的

に重要な量を用いて表せることを主張するのが類数公式であった. h_F を F の類数, w_F を F に含まれる 1 の冪根の個数とし, R_F を F の regulator とする. このとき類数公式は次のように述べられる:

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_F(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}h_F R_F}{w_F|D_F|^{1/2}}.$$

Dedekind ζ 関数に対する関数等式を用いることで

$$\lim_{s\to 0} s^{-(r_1+r_2-1)}\zeta_F(s) = -\frac{h_F R_F}{w_F}$$

という等式も得られる. 関数等式の形から $s=0$ での零点の位数は r_1+r_2-1 であることがわかるので, この値は $\zeta_F(s)$ の $s=0$ での Taylor 展開の先頭項になっている. 類数公式に現れる regulator R_F についてもう少し思い出すことにしよう. Dirichlet の regulator 写像

$$r_F : \mathcal{O}_F^\times = K_1(\mathcal{O}_F) \to \prod_{\tau:F\hookrightarrow\mathbb{C}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

は $x\in\mathcal{O}_F$ に対して τ 成分を $\log(|\tau(x)|^{n_\tau})$ と定めることによって定義される写像であった. 但し, n_τ は τ が実素点のとき $n_\tau=1$, τ が複素素点のとき $n_\tau=2$ とする. これを少し修正した写像

$$\widetilde{r}_F : \mathcal{O}_F^\times \oplus \mathbb{Z} \to \prod_{\tau:F\hookrightarrow\mathbb{C}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

を考える (ここで, $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ に対角的に埋め込む). すると Dirichlet の単数定理により $\widetilde{r}_F\otimes\mathbb{R}$ は同型であることがわかり, $\mathrm{Im}(\widetilde{r}_F)$ はその中の格子を定める. このとき regulator R_F はその格子の基本領域の体積として定義されるのであった. 類数公式に現れる h_F や w_F は整数であることから, 特に

$$\lim_{s\to 0}\zeta_F(s)s^{r_1+r_2-1} \equiv R_F \mod \mathbb{Q}^\times$$

となることがわかる. 高次 K 群からの (高次) regulator 写像を用いて, この結果を他の整数点の場合にも拡張したのが Borel [7, 8] である. $n>1$ に対し, $\mathbb{R}(n)=(2\pi i)^n\mathbb{R}$ とおき, 整数 $d_{F,n}$ を

$$d_{F,n} = \mathrm{ord}_{s=1-n}\,\zeta_F(s) = \begin{cases} r_2 & n \text{ が偶数のとき}, \\ r_1+r_2 & n \text{ が奇数のとき}, \end{cases}$$

によって定める. このとき Borel は Borel regulator 写像

$$r_{F,n}^{\mathrm{Borel}} : K_{2n-1}(\mathcal{O}_F) \to (\mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})}\otimes\mathbb{R}(n-1))^+ \cong \mathbb{R}^{d_{F,n}}$$

(ここで $+$ は複素共役の作用で不変な部分を表す) を定義し, $r_{F,n}^{\mathrm{Borel}}\otimes\mathbb{R}$ が同型になることを示した. さらに Borel は $\mathrm{Im}(r_{F,n}^{\mathrm{Borel}})$ が $\mathbb{R}^{d_{F,n}}$ の格子になり, この格子の基本領域の面積を $R_{F,n}$ と書いたとき

$$\lim_{s\to 1-n} s^{-d_{F,n}}\zeta_F(s) \equiv R_{F,n} \mod \mathbb{Q}^\times$$

となることも証明した. この式と関数等式を使うことで

$$\zeta_F(n) \equiv \frac{\pi^{n([F:\mathbb{Q}]-d_{F,n})}R_{F,n}}{|D_F|^{1/2}} \mod \mathbb{Q}^\times$$

となることがわかる. 特に, $F=\mathbb{Q}$ で n を 3 以上の奇数とするとき, $\zeta(n)\equiv R_{\mathbb{Q},n} \mod \mathbb{Q}^\times$ となり, Riemann ζ 関数の 3 以上の奇数での値が (有理数倍の曖昧さを除き) regulator によって記述されていることがわかる.

Lichtenbaum, Borel, Bloch や Deligne らの先駆的な仕事の後, Beilinson [2] は代数多様体の L 関数の整数点での特殊値に対してこの一般化にあたる公式を予想した. 次の章では Beilinson による予想の定式化について述べる.

2 Beilinson 予想

Beilinson は論文 [2] の中で代数多様体, より一般に Chow motive に対して定まる L 関数の整数点での値に関する予想を提出した. 考えている整数点が (Deligne の意味で) critical な場合には Deligne [10] による予想があり, Beilinson 予想は Deligne の予想の critical とは限らない場合への拡張になっている. 以下では Beilinson 予想の定式化を簡単に復習しよう. なお, Beilinson 予想については既に様々な紹介記事 ([16], [12], [15] など) が書かれているので, より詳細な定義や性質などについてはそちらを参考にして頂きたい.

X を $\mathbb{Q}$ 上の滑らかな射影的代数多様体とし, $d = \dim X$ とおく. ここでは簡単のため, $h^i(X)$ の形になっている motive のみを考えることにする (i は $0 \leqq i \leqq 2d$ を満たす整数). X の $\overline{\mathbb{Q}}$ への基底変換を $X_{\overline{\mathbb{Q}}}$ と書く. $L(h^i(X), s)$ を X の étale cohomology $H^i_{ét}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の作用から定まる L 関数とする. Deligne によって証明された Weil 予想により, この L 関数は $\mathrm{Re}(s) > \frac{i}{2} + 1$ で絶対収束し, この領域では極や零点を持たないことがわかる. この場合, 対応する Γ 因子は次のように定めることができる. まず,

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$$

とおき, de Rham cohomology $H^i_{dR}(X)$ の Hodge filtration を $F^pH^i_{dR}(X)$ と書くことにしよう. $p + q = i$ となる整数 $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ に対して

$$H^{p,q}(X) = F^pH^i_{dR}(X) \cap \overline{F^qH^i_{dR}(X)}$$

とおき, Hodge 数 $h^{p,q}$ を $h^{p,q} = \dim H^{p,q}(X)$ と定める. さらに i が偶数のときは

$$h^{\frac{i}{2},\pm} = \dim H^{\frac{i}{2},\frac{i}{2}}(X)^{\pm(-1)^{i/2}}$$

とおく. このとき $M = h^i(X)$ に対する無限素点での L 因子を

$$L_\infty(h^i(X), s) = \begin{cases} \prod_{p<q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}} & i\text{ が奇数のとき}, \\ \prod_{p<q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}}\Gamma_{\mathbb{R}}(s-\frac{i}{2})^{h^{\frac{i}{2},+}}\Gamma_{\mathbb{R}}(s-\frac{i}{2}+1)^{h^{\frac{i}{2},-}} & i\text{ が偶数のとき}, \end{cases}$$

によって定める. $\Lambda(h^i(X), s) = L_\infty(h^i(X))L(h^i(X), s)$ とおけば, $\Lambda(h^i(X), s)$ は $\mathbb{C}$ 上に正則に解析接続され, 関数等式

$$\Lambda(h^i(X), s) = \varepsilon(h^i(X), s)\Lambda(h^i(X), i+1-s)$$

を満たすと予想されている. ただし, $\varepsilon(h^i(X), s)$ は Galois 表現 $H^i_{ét}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ に対して定まる ε 因子を表す. 以下, $L(h^i(X), s)$ が解析接続を持つという仮定の下で $s = j$ での $L(h^i(X), s)$ の Taylor 展開の先頭項を $L^*(h^i(X), j)$ と書くことにする.

一般の場合の regulator 写像は motivic cohomology から Deligne cohomology への写像として与えられる. X の motivic cohomology は代数的 K 群を用いて

$$H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) = (K_{2j-i}(X)_{\mathbb{Q}})^{(j)}$$

と定義することができる. motivic cohomology は高次 Chow 群や Voevodsky の motive の圏を用いて定義することもできるが, それらは (我々の考えている代数多様体の範囲では) 一致するこ

とが証明されている. motivic cohomology $H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(j))$ の中に integral part と呼ばれる部分空間 $H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}$ が定まる. 例えば, X が $\mathbb{Z}$ 上の regular, proper flat な model $\mathscr{X}$ を持つ場合は

$$H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Im}\left((K_{2j-i}(\mathscr{X})_{\mathbb{Q}})^{(j)} \to (K_{2j-i}(X)_{\mathbb{Q}})^{(j)}\right)$$

となる. Scholl [18] により, X が regular model を持たない場合でも alteration を使うことで部分空間 $H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}$ が定義されている. これが §1 で述べた Dirichlet の regulator 写像における単数群の一般化にあたる対象である.

また, 代数体の場合の (少し修正した) regulator の定義にあらわれた $\mathbb{R}$ 線形空間 $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ の一般化にあたるものとして Deligne cohomology $H^i_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(j))$ を考えることができる. まず, (一時的に設定を変えて) X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影的代数多様体とする. j を整数とし, X_{an} 上の層の複体

$$\mathbb{R}(j)_{\mathcal{D}} = \left(\mathbb{R}(j) \to \mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}} \xrightarrow{d} \Omega^1_{X_{\mathrm{an}}} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{j-1}_{X_{\mathrm{an}}}\right)$$

($\mathbb{R}(j)$ は次数 0, $\Omega^{j-1}_{X_{\mathrm{an}}}$ は次数 j のところにおく) を考える. このとき,

$$H^i_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{R}(j)) = H^i(X_{\mathrm{an}},\mathbb{R}(j)_{\mathcal{D}})$$

とおき, X が $\mathbb{R}$ 上の滑らかな射影的代数多様体のときは

$$H^i_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{R}(j)) = H^i_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{C}},\mathbb{R}(j))^+$$

とおく. ただし, $+$ は複素共役による固定部分である. この cohomology を Deligne cohomology とよぶ. Deligne cohomology を定義するときに用いた複体 $\mathbb{R}(j)_{\mathcal{D}}$ について

$$\mathrm{Cone}\left(\Omega^{\geq j}_{X_{\mathrm{an}}} \oplus \mathbb{R}(j) \to \Omega^{\bullet}_{X_{\mathrm{an}}}\right)[-1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}(j)_{\mathcal{D}}$$

という擬同型が存在するので, このことより長完全系列

$$\cdots \to H^i_B(X_{\mathbb{C}},\mathbb{R}(j)) \to H^i_{dR}(X_{\mathbb{C}})/F^jH^i_{dR}(X_{\mathbb{C}}) \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{C}},\mathbb{R}(j)) \to \cdots$$

を得る. ここで $H^i_B(X,\mathbb{R}(j))$ は X の Betti cohomology を表す. もし $i-2j \leqq -1$ なら上の長完全系列から短完全系列

$$0 \to H^i_B(X_{\mathbb{C}},\mathbb{R}(j)) \to H^i_{dR}(X_{\mathbb{C}})/F^jH^i_{dR}(X_{\mathbb{C}}) \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{C}},\mathbb{R}(j)) \to 0$$

が得られ, さらに複素共役の作用をみることで

$$0 \to H^i_B(X_{\mathbb{C}},\mathbb{R}(j))^+ \xrightarrow{\alpha} H^i_{dR}(X)/F^jH^i_{dR}(X) \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{R}(j)) \to 0 \tag{1}$$

という短完全系列が得られる. この短完全系列にあらわれる写像 α は比較定理から得られる写像と一致することに注意する.

元の設定に戻って, X を $\mathbb{Q}$ 上の滑らかな射影的代数多様体とする. $M = h^i(X)(j)$ の Betti cohomology $M_B = H^i_B(X_{\mathbb{C}},\mathbb{Q}(j))$ と de Rham cohomology $M_{dR} = H^i_{dR}(X)$ を考える. M_{dR} は Hodge filtration $F^pM_{dR} = F^{p+j}H^i_{dR}(X)$ を持つ. 比較同型 $I_\infty : M_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の determinant を $\delta(M) \in \mathbb{C}^\times/\mathbb{Q}^\times$ と書くことにする. 比較同型により Deligne の period 写像

$$\alpha_M : M_B^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to (M_{dR}/F^0M_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

が得られる. 短完全系列 (1) により, $i-2j \leqq -1$ のとき $\mathrm{Coker}(\alpha_M)$ は $H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ と同型になるので $L_\infty(h^i(X), s)$ の整数点における零点の位数を計算することにより, 関数等式が成り立つという仮定の下で

$$\dim_{\mathbb{R}} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j)) = \mathrm{ord}_{s=i+1-j} L(h^i(X), s) - \mathrm{ord}_{s=j} L(h^i(X), s)$$

となることもわかる. さらに $M_B^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, $(M_{dR}/F^0 M_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 有理構造 M_B^+, $M_{dR}/F^0 M_{dR}$ を用いることで $\det_{\mathbb{R}} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ に $\mathbb{Q}$ 有理構造を入れることができる. これを $\mathcal{D}(M)$ と書くことにする. α_M が同型となるとき, M は critical であるといい, このとき Deligne の周期 $c^+(M)$ を $c^+(M) = \det(\alpha_M) \in \mathbb{C}^\times/\mathbb{Q}^\times$ によって定める. この場合は $\mathrm{Coker}(\alpha_M)$ は 0 になるので $\det_{\mathbb{R}} \mathrm{Coker}(\alpha_M)$ は canonical に $\mathbb{R}$ に同型となり, $\mathcal{D}(M) = c^+(M)^{-1} \cdot \mathbb{Q}$ となる. また $\mathcal{B}(M) = (2\pi i)^{-\dim M_B^-} \delta(M) \mathcal{D}(M)$ とおく. 関数等式及び rank が 1 の motive の分類に関する予想 ([10, Conjecture 6.6]) の仮定の下で, この $\mathbb{Q}$ 有理構造は $M^\vee(1)$ に対応する $\mathbb{Q}$ 有理構造になっていることがわかる.

さらに Beilinson は一般化された Chern 指標を用いて regulator 写像

$$r_{\mathcal{D}} : H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) \to H^i_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$$

を定義した. regulator 写像の構成について説明するにはさらなる準備が必要になってしまうので, ここでは詳細は割愛させて頂くことにするが, 興味のある方は Beilinson の原論文 [2] 及び Beilinson 予想に関する紹介記事 [15, 16] などを参照して頂きたい. 以上の準備の下で Beilinson による予想は次のように述べられる.

予想 2.1 (Beilinson)**.** $j > \frac{i}{2} + 1$ と仮定する.

(1) $r_{\mathcal{D}} \otimes \mathbb{R}$ を $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ に制限した写像

$$r_{\mathcal{D},\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} : H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$$

は同型になる.

(2) $\det_{\mathbb{R}} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ の中での等式

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{D},\mathbb{Z}}(\det_{\mathbb{Q}} H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}) &= L(h^i(X), j)\mathcal{D}(h^i(X)(j)) \\ &= L^*(h^i(X), i+1-j)\mathcal{B}(h^i(X)(j)) \end{aligned}$$

が成立する.

$j = \frac{i}{2} + 1$ のときは予想を少し修正する必要がある. 例えば, 類数公式はこの場合にあたり, Dirichlet の regulator 写像を修正したものを考えたのであった. 同様の修正をこの場合に行う必要性がある. まず, $CH^{j-1}(X)_{\mathrm{hom}}$ を余次元が $j-1$ の X 上の代数的 cycle のなす群を homological equivalence で割った群とし, $N^{j-1}(X) = CH^{j-1}(X)_{\mathrm{hom}} \otimes \mathbb{Q}$ とおく. $N^{j-1}(X)$ から Betti cohomology への cycle 写像と比較同型を用いることで, 修正した regulator 写像

$$\widetilde{r}_{\mathcal{D}} : H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) \oplus N^{j-1}(X) \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$$

が定まる. このとき $j = \frac{i}{2} + 1$ の場合の Beilinson の予想は次のように述べられる.

予想 2.2 (Beilinson)**.** $j = \frac{i}{2} + 1$ と仮定する.

(1) $\widetilde{r}_{\mathcal{D}} \otimes \mathbb{R}$ を $(H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X)) \otimes \mathbb{R}$ に制限した写像

$$\widetilde{r}_{\mathcal{D},\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} : (H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X)) \otimes \mathbb{R} \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$$

は同型になる.

(2) $\det_{\mathbb{R}} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ の中での等式

$$\begin{aligned}\widetilde{r}_{\mathcal{D},\mathbb{Z}}(\det_{\mathbb{Q}} H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X)) &= L(h^i(X), j)\mathcal{D}(h^i(X)(j)) \\ &= L^*(h^i(X), i+1-j)\mathcal{B}(h^i(X)(j))\end{aligned}$$

が成立する.

ここでは扱わなかったが, $j = \frac{i}{2} + 2$ のときは BSD 予想の一般化にあたる場合であり, その場合には予想の定式化に height pairing を使う必要がある. さらに残りの有理数の部分を決定する予想として Bloch-加藤の玉河数予想 (または単に Bloch-加藤予想とも呼ばれることもある) がある (Bloch-Kato [5]). これらの予想は Chow motive の場合にも自然に拡張される.

F を代数体とするとき, $X = \operatorname{Spec} F$, $i = 0$, $j = 1$ の場合の Beilinson 予想は類数公式から従い, j が一般の場合も Borel の結果及び Borel regulator と Beilinson regulator の比較から予想が成立していることが確かめられる. X の次元が 1 以上の場合, 予想 2.1, 2.2 の (1) の主張の一部となっている $r_{\mathcal{D},\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ または $\widetilde{r}_{\mathcal{D},\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ の単射性は非常に難しい問題であり, ほとんど何も結果が知られていない. その場合は $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}$ や $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X)$ の代わりに, これらの部分空間を用いて定式化される弱い形の Beilinson 予想を考えることができる. また, Chow motive の代わりに (homological equivalence を用いて定義される) Grothendieck motive に対しても予想を定式化することができる. 例えば, あとで考察する重さが 2 よりも大きい楕円保型形式に伴う motive は一般には Grothendiek motive としてしか構成されていないが, そのような場合でも Beilinson 予想が定式化される (重さが 2 の場合は Chow motive が構成できる).

Beilinson は予想を提出した論文 [2] の中で, 重さが 2 の楕円保型形式 f に伴う Chow motive $M(f)$ に対し, $i = 1$, $j = 2$ のときに弱い形の Beilinson 予想を証明している. さらに Beilinson [3] はこの結果を $j > 2$ の場合にも拡張している. この結果の重さ $k \geqq 2$ の楕円保型形式の場合への拡張は Deninger-Scholl [12] で解説されている. また, Beilinson は重さが 2 の楕円保型形式 f, g で f が g の指標 χ による twist になっていないときに Rankin-Selberg 積 $f \otimes g$ に対応する Chow motive $M(f \otimes g) = M(f) \otimes M(g)$ に対して, $i = j = 2$ の場合の弱い形の Beilinson 予想を証明している. この場合, 予想に現れる L 関数として, Rankin-Selberg L 関数 $L(f \otimes g, s)$ を考えることになる. 後半ではこの Beilinson の結果の一般化について説明したい.

3 Rankin-Selberg 積に対する Beilinson 予想

保型形式に対応する motive は久賀 · 佐藤多様体を用いて構成される. まず久賀 · 佐藤多様体の構成について簡単に復習しよう. N を 3 以上の整数として $Y = Y(N)$ を $\mathbb{Q}$ 上の modular 曲線とする. このとき Y の $\mathbb{C}$ 値点は

$$Y(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash (\mathfrak{H} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$$

と記述することができる. ここで $\mathfrak{H}$ は上半平面を表す. E を Y 上の普遍楕円曲線とし, E の Y 上の k 重 fiber 積

$$E^k = E \times_Y \cdots \times_Y E$$

を考える. このとき E^k の $\mathbb{C}$ 値点は

$$E^k(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{Z}^{2k} \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))\backslash\left(\mathfrak{H} \times \mathbb{C}^k \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\right)$$

と記述することができる. $\nu_k : \mathfrak{H} \times \mathbb{C}^k \to E^k(\mathbb{C})$ を

$$(\tau; z_1, \ldots, z_k) \mapsto \left[\left(\tau; z_1, \ldots, z_k; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]$$

によって定める.

Beilinson 予想は滑らかな射影的代数多様体に対する予想であったが, E^k は射影的ではない. そこで $X = X(N)$ を Y のコンパクト化として, $\overline{E}$ を X 上の普遍広義楕円曲線とし, 先ほどと同様に $\overline{E}$ の X 上の k 重 fiber 積 $\overline{E}^k = \overline{E} \times_X \cdots \times_X \overline{E}$ を考える. しかし k が 2 以上のときは $\overline{E}^k$ は滑らかになっていないので, さらに Deligne による特異点解消 $\overline{\overline{E}}^k \to \overline{E}^k$ を考えることで $\mathbb{Q}$ 上の滑らかな射影的代数多様体 $\overline{\overline{E}}^k$ が得られる.

k_1, k_2, j を $0 \leqq j \leqq k_1 \leqq k_2$ を満たす整数とする.

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n \in S_{k_1+2}(\Gamma_0(N_f), \chi_f)^{\mathrm{new}}, \quad g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) q^n \in S_{k_2+2}(\Gamma_0(N_g), \chi_g)^{\mathrm{new}}$$

を正規化された固有形式とし, $K_{f,g} = \mathbb{Q}(\{a_n(f), a_n(g)\})$ とおく. このとき $K_{f,g}$ は $\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大体になる. 以下, 簡単のため N_f と N_g は素であると仮定する. $f^*(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n(f)} q^n$, $g^*(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n(g)} q^n$ とおく. ℓ を素数とし, $\overline{\mathbb{Q}}$ から $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ への埋め込みを一つ固定する. $E_{f,g} = \mathbb{Q}_\ell(\{a_n(f), a_n(g)\})$ とおき, V_f, V_g をそれぞれ f, g に伴う $E_{f,g}$ 係数の ℓ 進 Galois 表現とする ($E_{f,g}$ 上の 2 次元線形空間になる). $L(f \otimes g, s)$ を Galois 表現 $V(f \otimes g) = V_f \otimes_{E_{f,g}} V_g$ に伴う L 関数とすると, $L(f \otimes g, s)$ は不分岐な素点では 4 次の Euler 因子を持ち, $\mathrm{Re}(s) > \frac{k_1+k_2+4}{2}$ で絶対収束する. また, Γ 因子は $L_\infty(f \otimes g, s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k_1-1)$ で与えられ, $\Lambda(f \otimes g, s) = L_\infty(f \otimes g, s) L(f \otimes g, s)$ とおくとき,

$$\Lambda(f \otimes g, s) = \varepsilon(f \otimes g, s)\Lambda(f^* \otimes g^*, k_1 + k_2 + 3 - s)$$

という形の関数等式が成り立つことが知られている (Jacquet [13]). さらに, 関数等式に現れる ε 因子 $\varepsilon(f \otimes g, s)$ は Galois 表現から定まる ε 因子に一致することも知られている. この関数等式の形から $L(f^* \otimes g^*, s)$ は $s = j+1$ $(0 \leqq j \leqq k_1)$ でちょうど 1 位の零点を持つことがわかる. 以下, $N = N_f N_g$ とおき, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の部分群 G_1 を

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \right\}$$

によって定める. このとき, $E^{k_1}(\mathbb{C})$ および $E^{k_2}(\mathbb{C})$ 上の G_1 不変な正則微分形式 ω_{f^*}, ω_g で

$$\nu_{k_1}^* \omega_{f^*} = (2\pi i)^{k_1+1} f^*(\tau_1) d\tau_1 \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{k_1}, \ \nu_{k_2}^* \omega_g = (2\pi i)^{k_2+1} g(\tau_2) d\tau_2 \wedge dz_{k_1+1} \wedge \cdots \wedge dz_{k_1+k_2}$$

を満たすものが唯一つ存在する. $\omega_{f^*} \otimes \overline{\omega_g}$ は $E^{k_1}(\mathbb{C}) \times E^{k_2}(\mathbb{C})$ 上の微分形式を定め, この微分形式は $\overline{\overline{E}}^{k_1}(\mathbb{C}) \times \overline{\overline{E}}^{k_2}(\mathbb{C})$ 上に滑らかに延びる. それを $\Omega_{f,g}$ と書くことにする. $M(f)$, $M(g)$ を Scholl [17] によって構成された f, g に対応する $K_{f,g}$ 係数の (Grothendieck) motive とする. 例えば $M(f)$ は $\overline{\overline{E}}^{k_1}$ と f に対応する projector pr_f の組によって与えられる. $M = M(f \otimes g) = M(f) \otimes M(g)$

とおくと, これが Rankin-Selberg 積 $f \otimes g$ に対応する motive となる．このとき M は $\overline{\overline{E}}^{k_1} \times \overline{\overline{E}}^{k_2}$ と $\mathrm{pr}_{f,g} = \mathrm{pr}_f \otimes \mathrm{pr}_g$ の組によって与えられる．$n = k_1 + k_2 + 2 - j$ とおく．$\mathrm{pr}_{f,g}$ は $\overline{\overline{E}}^{k_1} \times \overline{\overline{E}}^{k_2}$ の Deligne cohomology から $f \otimes g$ 部分への射影

$$\mathrm{pr}_{f,g} : H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(\overline{\overline{E}}_{\mathbb{R}}^{k_1} \times \overline{\overline{E}}_{\mathbb{R}}^{k_2}, \mathbb{R}(n)) \otimes K_{f,g} \to H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$$

を与える．さらに, (1) と比較同型により

$$0 \to F^n H_{dR}^{k_1+k_2+2}(M) \otimes \mathbb{R} \to H_B^{k_1+k_2+2}(M(n-1))^+ \otimes \mathbb{R} \to H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n)) \to 0$$

という短完全系列が得られ, Deligne cohomology $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$ は rank 1 の $K_{f,g} \otimes \mathbb{R}$ 加群となる．この短完全系列によって $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$ に $K_{f,g}$ 有理構造が入る．この $K_{f,g}$ 有理構造は §2 で定義した $\mathcal{B}(M(n))$ に一致する．その $K_{f,g}$ 基底 t を一つ固定する．

同型 $M(f \otimes g)(n-1)^\vee \cong M(f^* \otimes g^*)(j+1)$ と比較同型を使うと $\Omega_{f,g}$ は $H_B^{k_1+k_2+2}(M(n-1)^\vee) \otimes \mathbb{C}$ の元とみなすことができる．このことと Poincaré duality を用いることで $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$ の元 α と $\Omega_{f,g}$ の間に well-defined な pairing $\langle \alpha, \Omega_{f,g} \rangle$ が定まる．このとき次が成立する:

$$\langle t, \Omega_{f,g} \rangle \equiv (2\pi i)^{k_1+k_2-2j} \mod K_{f,g}^\times. \tag{2}$$

以上の準備のもとで主結果は次のように述べられる．

定理 3.1 (Brunault-Chida [6])**.** $0 \leqq j \leqq k_1 \leqq k_2$ とする．$k_1 = k_2 = j$ の場合は $g \neq f^*$ で $N > 1$ と仮定する．このとき $H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+3}(\overline{\overline{E}}^{k_1} \times \overline{\overline{E}}^{k_2}, \mathbb{Q}(k_1+k_2+2-j)) \otimes K_{f,g}$ の元 ξ が存在して,

$$\langle \mathrm{pr}_{f,g} \circ r_{\mathcal{D}}(\xi), \Omega_{f,g} \rangle \equiv (2\pi i)^{k_1+k_2-2j} L'(f^* \otimes g^*, j+1) \mod K_{f,g}^\times$$

が成り立つ．

注意. 同様の結果は Scholl (unpublished), Kings-Loeffler-Zerbes [14] でも与えられている．[14] では $H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+3}(E^{k_1} \times E^{k_2}, \mathbb{Q}(k_1+k_2+2-j)) \otimes K_{f,g}$ に元を構成しており, 我々の場合は boundary まで元を拡張している点が異なる．また, [14] では Beilinson 予想の p 進類似 (Perrin-Riou の予想) についても結果を与えている．

定理 3.1 と (2) を合わせると $H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+3}(\overline{\overline{E}}^{k_1} \times \overline{\overline{E}}^{k_2}, \mathbb{Q}(k_1+k_2+2-j)) \otimes K_{f,g}$ の元 ξ が存在して

$$\mathrm{pr}_{f,g} \circ r_{\mathcal{D}}(\xi) \equiv L'(f^* \otimes g^*, j+1) \cdot t \mod K_{f,g}^\times$$

となることがわかる．つまり, ある motivic cohomology の元から定まる $K_{f,g}$ 有理構造と Hodge 理論により定まる $K_{f,g}$ 有理構造のずれに Rankin-Selberg L 関数の微分値が現れることがわかり, 主定理が Beilinson 予想の evidence を与えていることがわかる．ただし, 構成された元が integral part に属しているかどうかはまだわかっていない．

証明は大きく分けて三つの部分 (motivic cohomology の元の構成とその regulator の計算, boundary への拡張) からなる．元の構成は Beilinson [3] によって導入された Eisenstein symbol の理論と対角埋め込みをうまく用いることで行われる．この論説の残りの部分では元の構成と regulator の計算方法について主に紹介する．

4 Eisenstein symbol と Beilinson-Flach 元

4.1 Eisenstein symbol

ここでは Beilinson [3] によって導入された Eisenstein symbol について紹介する．$k \geqq 0$, $N \geqq 3$ を整数とし, modular 曲線 $Y = Y(N)$ の関数体を F_N と書く．E を level 構造

$$\alpha : E[N] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$$

を持つ F_N 上の普遍楕円曲線とする．以下, α を通して $E[N]$ と $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ を同一視する．§2 と同様に普遍楕円曲線 E の k 重 fiber 積 E^k を考える．以下, E^k を $\Sigma : E^{k+1} \to E$ の kernel と同一視し, これにより E^k への対称群 $\mathfrak{S}_{k+1}$ の作用を定める．$i = 0, \ldots, k$ に対して, 合成写像 $E^k \hookrightarrow E^{k+1} \overset{\mathrm{pr}_i}{\to} E$ を q_i によって表し, $U_N = \bigcap_{i=0}^{k} q_i^{-1}(E \setminus E[N]) \subset E^k$ とおく．$f_0, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(E \setminus E[N])^\times$ を選び, $f = q_0^*(f_0) \cup \cdots \cup q_k^*(f_k) \in H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))$ と書くことにする．$G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2k} \rtimes \mathfrak{S}_{k+1}$ とおき,

$$\varepsilon_k : G \to \{\pm 1\}$$

を $g = (t, \sigma) \in G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2k} \rtimes \mathfrak{S}_{k+1}$ に対し, $\varepsilon_k(g) = \varepsilon_k(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ とおくことによって定める．いま, $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2k} \cong E[N]^k$ は U_N に translation によって作用するので, G も U_N に作用する．これにより G の $H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))$ への作用が定まる．ε_k に対応する projector を e_k と書くことにする．e_k による像を $H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))^{e_k}$ と書き, 対応する射影を

$$\mathrm{pr}_{e_k} : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1)) \to H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))^{e_k}, \quad x \mapsto |G|^{-1} \sum_{g \in G} \varepsilon_k(g) g \cdot x$$

とする．補助的に正の整数 M を取って, 一つ固定する．$j : U_{MN} \hookrightarrow U_N$ を自然な包含関係から定まる写像, $[\times M] : U_{MN} \to U_N$ を M 倍写像とするとき, j と $[\times M]$ はそれぞれ

$$j^* : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1)) \to H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_{MN}, \mathbb{Q}(k+1))^{(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{2k}}$$

及び

$$[\times M]^* : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1)) \xrightarrow{\sim} H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_{MN}, \mathbb{Q}(k+1))^{(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{2k}}$$

を定める．これらを用いて $[\times M^{-1}] = ([\times M]^*)^{-1} \circ j^*$ と定義する．$H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U'_N, \mathbb{Q}(k+1))_k^{e_k}$ を任意の $M \geqq 1$ に対して $[\times M^{-1}]$ が M^{-k} 倍で作用するような $H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))^{e_k}$ の最大の商とする．これから定まる自然な写像を

$$\overline{\mathrm{pr}}_{e_k} : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1)) \to H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))_k^{e_k}$$

と書くことにする．このとき, 自然な埋め込み $\alpha : U_N \hookrightarrow E^k$ は同型

$$\alpha^* : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(E^k, \mathbb{Q}(k+1))^{e_k} \xrightarrow{\sim} H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))_k^{e_k}$$

を与えることが証明できる．$f_0, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(E \setminus E[N])^\times$ に対して

$$\widetilde{\mathrm{Eis}}^k(f_0, \ldots, f_k) = (\alpha^*)^{-1}(\overline{\mathrm{pr}}_{e_k}(f)) \in H_{\mathcal{M}}^{k+1}(E^k, \mathbb{Q}(k+1))$$

とおく. このとき, $\widetilde{\mathrm{Eis}}^k$ は次数が 0 の因子群 $\mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]^0$ を経由する. つまり次のような可換図式が存在する:

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{i=0}^k \mathcal{O}(E \setminus E[N])^\times \arrow[r, "\widetilde{\mathrm{Eis}}^k"] \arrow[d, "\mathrm{Div}"'] & H_{\mathcal{M}}^{k+1}(E^k, \mathbb{Q}(k+1)) \\
\left(\bigotimes_{i=0}^k \mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]^0\right)^{e_k} \arrow[ur, dotted] & \mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]^0. \arrow[l, "\simeq"', "\theta"] \arrow[u, dotted, "\mathrm{Eis}^k"']
\end{tikzcd}$$

上の図式で θ は $\beta \mapsto [\beta \otimes \alpha \otimes \cdots \otimes \alpha]$ により定まる写像である (但し $\alpha = N^2[0] - \sum_{x \in (Z/N\mathbb{Z})^2}[x]$ とおいた). 上で構成された写像

$$\mathrm{Eis}^k : \mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]^0 \to H_{\mathcal{M}}^{k+1}(E^k, \mathbb{Q}(k+1))^{e_k}$$

を Eisenstein symbol と呼ぶ. $k \geqq 1$ のときは Eis^k は $\mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]$ まで拡張することができる. 以下, $k \geqq 1$ の場合は $\beta \in \mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]$ とし, $k = 0$ の場合は β は $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 - \{0\}$ に support を持つと仮定する.

Eisenstein 級数を用いて Eisenstein symbol の regulator 写像

$$r_{\mathcal{D}} : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(E^k, \mathbb{Q}(k+1))^{e_k} \to H_{\mathcal{D}}^{k+1}(E_{\mathbb{R}}^k, \mathbb{R}(k+1))^{e_k}$$

の下での像の具体的な記述を与えることができる (E^k は射影的な代数多様体ではないが, この場合にも Deligne cohomology や regulator 写像を定義することができる). この場合, Deligne cohomology は

$$H_{\mathcal{D}}^{k+1}(E_{\mathbb{R}}^k, \mathbb{R}(k+1)) \cong \frac{\{\varphi \in H^0(E_{\mathbb{R},\mathrm{an}}^k, \mathcal{A}^k \otimes \mathbb{R}(k)) \,|\, d\varphi = \frac{1}{2}(\omega + (-1)^k\overline{\omega}), \omega \in \Omega^{k+1}(\overline{\overline{E}}^k)(\log D)\}}{dH^0(E_{\mathbb{R},\mathrm{an}}^k, \mathcal{A}^{k-1} \otimes \mathbb{R}(k))}$$

と記述することができる. ここで $\mathcal{A}^\bullet$ は $\mathbb{R}$ 値 C^∞ 級微分形式の de Rham 複体であり, $D = \overline{\overline{E}}^k(\mathbb{C}) \setminus E^k(\mathbb{C})$ とおいた. $0 \leqq j \leqq k$ に対して

$$\psi_{k,j} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) d\overline{z}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{\sigma(j)} \wedge dz_{\sigma(j+1)} \wedge \cdots \wedge dz_{\sigma(k)}$$

とおく. このとき, $r_{\mathcal{D}}(\mathrm{Eis}^k(\beta))$ は上で述べた Deligne cohomology の記述の下で

$$\Phi^k(\beta) = -\frac{k!(k+2)}{N(2\pi i)} \cdot \frac{\tau - \overline{\tau}}{2} \sum_{a=0}^k \psi_{k,a} \cdot \left(\sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2}{}' \sum_{v \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \frac{\beta(h^{-1}v) \cdot e^{\frac{2\pi i(cv_1 + dv_2)}{N}}}{(c\tau + d)^{k+1-a}(c\overline{\tau} + d)^{a+1}} \right) \mod d\tau, d\overline{\tau}$$

の定める類として与えられる (Deninger [11]). ここで $\sum'$ は $(c,d) = (0,0)$ を除いた全ての整数の組 (c,d) に関する和を表す.

4.2 Beilinson-Flach 元の一般化

整数 k_1, k_2, j を $0 \leqq j \leqq k_1 \leqq k_2$ となるように取り, $k_1' = k_1 - j \geqq 0$, $k_2' = k_2 - j \geqq 0$ とおく. このとき, 次のような 3 つの写像を考える:

$$\begin{tikzcd}
E^{k_1'+j+k_2'} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "p"] & E^{k_1'+2j+k_2'} = E^{k_1+k_2} \arrow[r, "i"] & E^{k_1} \times E^{k_2} \\
E^{k_1'+k_2'}. & &
\end{tikzcd}$$

これらの写像は次のようにして与えられるものである.

(1) $p : E^{k_1'+j+k_2'} \to E^{k_1'+k_2'}$ は中央の j 個の成分を忘れる写像.

(2) $\Delta : E^{k_1'+j+k_2'} \to E^{k_1'+2j+k_2'} = E^{k_1+k_2}$ は中央の j 個の成分を対角に埋め込む写像.

(3) $i : E^{k_1'+2j+k_2'} = E^{k_1+k_2} \to E^{k_1} \times E^{k_2}$ は X 上の fiber 構造を一カ所だけ忘れる写像.

これにより次のような写像の合成を考えることができる:

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{M}}^{k_1'+k_2'+1}(E^{k_1'+k_2'}, \mathbb{Q}(k_1'+k_2'+1)) &\xrightarrow{p^*} H_{\mathcal{M}}^{k_1'+k_2'+1}(E^{k_1'+j+k_2'}, \mathbb{Q}(k_2'+k_2'+1)) \\ &\xrightarrow{\Delta_*} H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+1}(E^{k_1+k_2}, \mathbb{Q}(k_1+k_2-j+1)) \\ &\xrightarrow{i_*} H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+3}(E^{k_1} \times E^{k_2}, \mathbb{Q}(k_1+k_2-j+2)). \end{aligned}$$

$\beta \in \mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]$ とする. $j = k_1 = k_2$ のときは, β は $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \setminus \{0\}$ に support を持つと仮定する. このとき上の合成写像の下での $\mathrm{Eis}^{k_1'+k_2'}(\beta)$ の像を $\Xi^{k_1,k_2,j}(\beta)$ と書くことにする.

ここでは詳しく述べられないが, motivic cohomology の residue 写像の計算や Voevodsky によって定義された motive の圏を用いた motivic cohomology の記述などを使うことにより $\Xi^{k_1,k_2,j}(\beta)$ は $\overline{\overline{E}}^{k_1} \times \overline{\overline{E}}^{k_2}$ の boundary まで拡張することができる.

$k_1 = k_2 = j = 0$ の場合, boundary まで拡張された元は Beilinson [2] が重さ 2 の保型形式の場合の証明に用いた Beilinson-Flach 元と呼ばれるものに一致する. その意味で我々の構成した元は Beilinson-Flach 元の一般化になっている.

5 Rankin-Selberg 積分と regulator

5.1 Rankin-Selberg 積分

$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $\chi_f \chi_g$ から定まる Dirichlet 指標とし,

$$D(f, g, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f) a_n(g)}{n^s}$$

とおく. このとき Shimura [19] の結果によって

$$L(\chi, 2s - k_1 - k_2 - 2) D(f, g, s) = R_{f,g,N}(s) L(f \otimes g, s) \tag{3}$$

となることが知られている. ただし, $R_{f,g,N}(s)$ は

$$R_{f,g,N}(s) = \left(\prod_{p|N} P_p(f \otimes g, s) \right) \sum_{n \in S(N)} \frac{a_n(f) a_n(g)}{n^s}$$

で与えられる関数であり, $R_{f,g,N}(s)$ は $p \mid N$ となる素数 p についての p^{-s} たちの多項式になる. ここで $S(N)$ は N を割る素数のみを素因子としてもつような正の整数全体の集合を表す.

Dirichlet 指標 $\omega : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して Eisenstein 級数 $E_{k_2-k_1,N}(\tau, s, \omega)$ を

$$E_{k_2-k_1,N}(\tau, s, \omega) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}}{}' \frac{\omega(n)}{(Nm\tau + n)^{k_2-k_1} |Nm\tau + n|^{2s}}$$

と定義する. このとき Rankin-Selberg 法によって次のことが証明される.

定理 5.1 (Shimura [19]).

$$\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} f(\tau)g(-\overline{\tau})E_{k_2-k_1,N}(\tau,s-1-k_2,\chi)y^{s-1}dxdy = 2(4\pi)^{-s}\Gamma(s)L(\chi,2s-k_1-k_2-2)D(f,g,s).$$

この結果が以下の regulator の計算に必要となる.

5.2 Regulator の計算

$\beta_\chi \in \mathbb{Q}(\chi)[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]$ を

$$\beta_\chi(v_1,v_2) = \begin{cases} \overline{\chi}(-v_2) & v_1 = 0 \text{ の場合}, \\ 0 & v_1 \neq 0 \text{ の場合}, \end{cases}$$

によって定める.

Deligne cohomology の元は current を用いて表すことができる. current を用いた Deligne cohomology $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(E_{\mathbb{R}}^{k_1} \times E_{\mathbb{R}}^{k_2}, \mathbb{R}(k_1+k_2-j+2))$ の元の表示により, 微分形式 $\Omega_{f,g}$ との pairing を積分を使って自然に定めることができる. この pairing は §2 で定めた pairing と一致することが積分表示の比較からわかる. さらに Burgos Gil-Kramer-Kühn [9] の結果を使うことで次の式が得られる:

$$\langle r_{\mathcal{D}}(\Xi^{k_1,k_2,j}(\beta_\chi)), \Omega_{f,g}\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^{k_1'+j+k_2'+1}} \int_{E^{k_1'+j+k_2'}(\mathbb{C})} \Delta^* i^* \Omega_{f,g} \wedge p^* \Phi^{k_1'+k_2'}(\beta_\chi).$$

§3 で見たように $\Phi^{k_1'+k_2'}(\beta_\chi)$ はある種の Eisenstein 級数を用いて記述される微分形式であった. その表示をもとに上の式の右辺の計算を行うと

$$\begin{aligned}&\langle r_{\mathcal{D}}(\Xi^{k_1,k_2,j}(\beta_\chi)), \Omega_{f,g}\rangle \\ &= C \cdot (2\pi i)^{k_1+k_2-j+1} \lim_{s\to -k_2'} \Gamma(s+k_2-k_1) \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} f^*(\tau)g^*(-\overline{\tau})E_{k_2-k_1,N}(\tau,s,\overline{\chi})y^{s+k_2}dxdy\end{aligned}$$

という結果が得られる. ここで C は具体的に書き下すことのできる有理数である. これに定理 5.1 と (3) を用いることで最終的に次のような計算結果を得ることができる.

命題 5.2. $K_{f,g} \otimes \mathbb{C}$ の元としての等式

$$\langle r_{\mathcal{D}}(\Xi^{k_1,k_2,j}(\beta_\chi)), \Omega_{f,g}\rangle = \pm(2\pi i)^{k_1'+k_2'} \cdot \frac{(k_1'+k_2'+2)\cdot j! \cdot \phi(N)^2}{2\cdot N^{k_1'+k_2'}} \cdot R_{f^*,g^*,N}(j+1) \cdot L'(f^* \otimes g^*, j+1)$$

が成り立つ (符号も具体的に記述することができる).

注意. (1) $k_1 = k_2 = 0$ のとき, 同様の結果は Baba-Sreekantan [1] や Bertolini-Darmon-Rotger [4] でも与えられている.

(2) $(N_f, N_g) \neq 1$ の場合は $R_{f^*,g^*,N}(j+1) = 0$ となってしまうこともある.

参考文献

[1] S. Baba and R. Sreekantan, *An analogue of circular units for products of elliptic curves*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **47** (2004), no. 1, 35–51.

[2] A. A. Beĭlinson, *Higher regulators and values of L-functions*, J. Soviet Math. **30** (1985), 2036–2070.

[3] A. A. Beĭlinson, *Higher regulators of modular curves*, In: Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), 1–34, Contemp. Math., 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[4] M. Bertolini, H. Darmon and V. Rotger, *Beilinson-Flach elements and Euler systems I: syntomic regulators and p-adic Rankin L-series*, J. Algebraic Geom. **24** (2015), 355–378.

[5] S. Bloch and K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, In: The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math., 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[6] F. Brunault and M. Chida, *Regulators for Rankin-Selberg products of modular forms*, to appear in Ann. Sci. Math. Québec, Special issue marking the 60th birthday of Glenn Stevens.

[7] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) **7** (1974), 235–272.

[8] A. Borel, *Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta aux points entiers*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4) **4** (1977), 613–636.

[9] J. I. Burgos Gil, J. Kramer and U. Kühn, *Cohomological arithmetic Chow rings*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (1) (2007), 1–172.

[10] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, In: Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33, Automorphic Forms, Representations and L-functions (Oregon State Univ. Corvallis. 1977), Part 2, Amer. Math. Soc. Providence. R.I., 1979, pp. 313–346.

[11] C. Deninger, *Extensions of motives associated to symmetric powers of elliptic curves and to Hecke characters of imaginary quadratic fields*, In: Arithmetic geometry (Cortona, 1994), 99–137, Sympos. Math., XXXVII, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[12] C. Deninger and A. Scholl, *The Beĭlinson conjectures*, In: L-functions and arithmetic (Durham, 1989), 173–209, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 153, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[13] H. Jacquet, *Automorphic forms on* GL(2). *Part II*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 278, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. xiii+142 pp.

[14] G. Kings, D. Loeffler and S. L. Zerbes, *Rankin-Eisenstein classes for modular forms*, preprint.

[15] J. Nekovář, *Beĭlinson's conjectures*, In: Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Symp. Pure Math., **55** Part I, 537–570, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[16] P. Schneider, *Introduction to the Beĭlinson conjectures*, In: Beĭlinson's conjectures on special values of L-functions, 1–35, Perspect. Math., 4, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[17] A. J. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), 419–430.

[18] A. J. Scholl, *Integral elements in K-theory and products of modular curves*, In: The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 467–489, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[19] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), no. 6, 783–804.