符号，格子と頂点作用素代数

一橋大学大学院経済学研究科　山田裕理 [1]

1　はじめに

レベルが整数 $k \geq 2$ の sl_2 の可積分表現 $L_{\widehat{sl}_2}(k,0)$ は，基本的な頂点作用素代数のひとつである．$L_{\widehat{sl}_2}(k,0)$ の内部には sl_2 のカルタン部分代数から生成されるハイゼンベルグ代数が含まれるが，このハイゼンベルグ代数によるコミュタント $K(sl_2,k)$ は，パラフェルミオン頂点作用素代数と呼ばれる頂点作用素代数である．$K(sl_2,k)$ の既約加群の同型類は $k(k+1)/2$ 個あるが，このうち単純カレントは k 個あり，それらは M^j, $j \in \mathbb{Z}_k$ と $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ で添字付けられる．

単純カレントの間のフュージョン規則には $\mathbb{Z}_k$ の対称性がある．単純カレント M^j, $j \in \mathbb{Z}_k$ を，長さ n の $\mathbb{Z}_k$-符号 D を用いて組み合わせることにより，新しい頂点作用素代数あるいは頂点作用素超代数 M_D が得られる．ここで長さ n の $\mathbb{Z}_k$-符号とは，$\mathbb{Z}_k$ の n 個の直積 $(\mathbb{Z}_k)^n$ のなす加法群の部分群を意味する．最初に符号 D から格子 Γ_D を作り，Γ_D から定義される頂点作用素代数あるいは頂点作用素超代数 V_{Γ_D} におけるある部分代数のコミュタントとして，V_{Γ_D} の内部に具体的に M_D を構成する．$k=2$ と $k=3$ の場合の M_D は，[10] および [8] で研究されている．

M_D の構成は，既に [12] で紹介されている．本稿の第 2 節と第 3 節は [12] と重複する内容が多いが，パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ の性質および M_D の構成法について説明する．第 4 節では簡単な M_D の例をいくつか提示する．格子 Γ_D は，一般には有理格子である．第 5 節では Γ_D が整格子になるための条件を考察し，その条件を満たす符号 D の例を紹介する．

本稿は荒川知幸氏，山内博氏との共同研究に基づくものである．Ching Hung Lam 氏には，様々なアドバイスをいただいた．また，島倉裕樹氏，原田昌晃氏，宗政昭弘氏には，符号に関して有益なアドバイスをいただいた．

2　$K(sl_2,k)$ に関する基本的な事項

パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ およびその既約加群については，[1], [2], [3], [4], [5], [6] 等で研究されている．この節では，後で必要になる基本的な事項をまとめておく．

[1]本研究は学術研究助成基金助成金 基盤研究 (C) 23540009 の助成を受けたものである．

$\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を基底とする階数 k の格子 $L=\mathbb{Z}\alpha_1+\cdots+\mathbb{Z}\alpha_k$ から出発する．$\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ は互いに直交する長さ $\sqrt{2}$ の元である．$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=2\delta_{ij}$．ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は格子における内積を表す．格子 L は，A_1 型ルート格子の k 個の直交和 $A_1^{\oplus k}$ にほかならない．$\gamma=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ とし，$N=\sum_{p=1}^{k-1}\mathbb{Z}(\alpha_p-\alpha_{p+1})\cong\sqrt{2}A_{k-1}$ とおく．N は，γ と直交する L の元全体であり，A_{k-1} 型ルート格子を $\sqrt{2}$ 倍したものと同型である．

格子 L から定義される頂点作用素代数 V_L には，次のように sl_2 のレベル k の可積分表現 $L_{\widehat{sl}_2}(k,0)$ が含まれる．V_L の 3 つの元

$$H=\gamma(-1)\mathbf{1},\qquad E=e^{\alpha_1}+\cdots+e^{\alpha_k},\qquad F=e^{-\alpha_1}+\cdots+e^{-\alpha_k} \tag{2.1}$$

を考える．これらで生成される V_L の部分頂点作用素代数を V^{aff} とおくと，$V^{\mathrm{aff}}\cong L_{\widehat{sl}_2}(k,0)$ となる．さらに，V^{aff} は e^{γ} と $e^{-\gamma}$ で生成される部分頂点作用素代数 V^{γ} を含む．V^{γ} は，γ で生成される階数 1 の格子 $\mathbb{Z}\gamma$ から定義される頂点作用素代数 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ に同型である．パラフェルミオン頂点作用素 $K(sl_2,k)$ は，V^{γ} の V^{aff} におけるコミュタントである．

$$K(sl_2,k)=\mathrm{Com}_{V^{\mathrm{aff}}}(V^{\gamma}).$$

$K(sl_2,k)\otimes V^{\gamma}$ は $V^{\mathrm{aff}}\cong L_{\widehat{sl}_2}(k,0)$ の部分頂点作用素代数なので，V^{aff} は $K(sl_2,k)\otimes V^{\gamma}$ の加群となるが，この加群として次のように既約分解される．

$$V^{\mathrm{aff}}\cong\bigoplus_{j=0}^{k-1}M^j\otimes V_{\mathbb{Z}\gamma-j\gamma/k}. \tag{2.2}$$

ここで，

$$M^j=\{v\in V^{\mathrm{aff}}\,|\,H_{(m)}v=-2j\delta_{m,0}v,\ m\geq 0\}$$

は，既約 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$-加群 $V_{\mathbb{Z}\gamma-j\gamma/k}$ の V^{aff} における重複度である．特に $j=0$ のときの M^0 は，V^{γ} の V^{aff} におけるコミュタント $K(sl_2,k)$ である．M^j, $0\leq j\leq k-1$ は既約 M^0-加群になる．なお，$\mathbb{Z}\gamma-j\gamma/k$ は $j\pmod{k}$ により定まるので，M^j の j は $(\mathrm{mod}\ k)$ で考える．

一般に格子 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して，その双対格子を X° で表す．

$$X^{\circ}=\{\alpha\in\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}X\,|\,\langle\alpha,X\rangle\subset\mathbb{Z}\}.$$

L の双対格子は $L^{\circ}=\frac{1}{2}L$ であるが，それから定義される一般化された頂点代数 $V_{L^{\circ}}$ の内部に，$L_{\widehat{sl}_2}(k,0)$ の既約加群 $L_{\widehat{sl}_2}(k,i)$, $0\leq i\leq k$ が構成できる．$L_{\widehat{sl}_2}(k,i)$ は，次のように $K(sl_2,k)\otimes V^{\gamma}$ の既約加群の直和に分解する．

$$L_{\widehat{sl}_2}(k,i)=\bigoplus_{j=0}^{k-1}M^{i,j}\otimes V_{\mathbb{Z}\gamma+(i-2j)\gamma/2k} \tag{2.3}$$

ここで，

$$M^{i,j}=\{v\in L_{\widehat{sl}_2}(k,i)\,|\,H_{(m)}v=(i-2j)\delta_{m,0}v,\ m\geq 0\}$$

は，既約 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$-加群 $V_{\mathbb{Z}\gamma+(i-2j)\gamma/2k}$ の $L_{\widehat{sl}_2}(k,i)$ における重複度である．$M^{i,j}$, $0 \le i \le k$, $0 \le j \le k-1$ は既約 M^0-加群になる．$\mathbb{Z}\gamma + (i-2j)\gamma/2k$ は $j \pmod k$ により定まるので，$M^{i,j}$ の j は $\pmod k$ で考える．$i=0$ のときは (2.3) 式は (2.2) 式に一致するので，$M^j = M^{0,j}$ であることに注意する．

$\alpha \in L$ に $-\alpha \in L$ を対応させることは格子 L の等長変換であるが，これにより引き起こされる頂点作用素代数 V_L の位数 2 の自己同型を θ で表す．(2.1) 式の H, E, F は θ により次のように写される．$\theta(H) = -H$, $\theta(E) = F$, $\theta(F) = E$．M^0 は θ により不変で，θ を M^0 に制限したものは，M^0 の位数 2 の自己同型になる．

頂点作用素代数 V は，その任意の加群が完全可約であるとき有理的であるという．また $\{a_{(-2)}b \,|\, a, b \in V\}$ で張られる V の部分空間を $C_2(V)$ で表したとき，$V/C_2(V)$ が有限次元ならば頂点作用素代数 V は C_2-余有限であるという．頂点作用素代数 V が CFT 型であるとは，$V = \bigoplus_{n \ge 0} V_{(n)}$ で $V_{(0)} = \mathbb{C}\mathbf{1}$ であることを意味する．

M^0, $M^{i,j}$, $0 \le i \le k$, $0 \le j \le k-1$, θ について，次のことが知られている ([1], [2], [3], [4], [6])．

(i) $M^0 = K(sl_2, k)$ は有理的かつ C_2-余有限な CFT 型の単純頂点作用素代数で，中心電荷は $2(k-1)/(k+2)$ である．

(ii) $M^{i,j} \cong M^{k-i,k-i+j}$ である．

(iii) $M^{i,j}$, $0 \le j < i \le k$ は既約 M^0-加群の同型類の完全代表系である．特に，既約 M^0-加群の同型類の個数は $k(k+1)/2$ である．

(iv) $M^{i,j}$, $0 \le j < i \le k$ のトップレベルは 1 次元で，そのウエイトは

$$\frac{1}{2k(k+2)}\Big(k(i-2j) - (i-2j)^2 + 2k(i-j+1)j\Big).$$

(v) M^0 の自己同型群は $\mathrm{Aut}\, M^0 = \langle \theta \rangle$ で位数 2 である．

(vi) θ は既約 M^0-加群たちに次の置換を引き起こす．

$$M^{i,j} \circ \theta \cong M^{i,i-j}, \quad 0 \le i \le k, 0 \le j \le k-1.$$

特に，$M^j \circ \theta \cong M^{-j}$, $0 \le j \le k-1$ である．

(vii) M^j, $0 \le j \le k-1$ は単純カレントで，M^p と $M^{i,j}$ のフュージョン規則は $M^p \times M^{i,j} = M^{i,p+j}$, $0 \le p, j \le k-1$, $0 \le i \le k$ である．特に，$M^p \times M^j = M^{p+j}$ である．

(ii) により $M^j = M^{0,j} = M^{k,j}$, $0 \le j \le k$ であること，したがって (iv) により M^j のトップレベルは 1 次元で，そのウエイトは $j(k-j)/k$ であることに注意する．

(ii) と ((vii) により，$M^p \times M^{i,j} = M^{i,j}$ が成り立つのは k が偶数で $p = i = k/2$ のときに限ることがわかる．

パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ は，sl_k 型のアフィン W-代数 $\mathcal{W}(sl_k)$ であることが知られている (cf. [2])．$K(sl_2,k)$ は，$k=2$ のとき中心電荷 $1/2$ の Virasoro 頂点作用素代数 $L(1/2,0)$ と同型である．$k=3$ のときの $K(sl_2,k)$ は，中心電荷 $4/5$ の Virasoro 頂点作用素代数 $L(4/5,0)$ とその最高ウエイト 3 の既約加群 $L(4/5,3)$ の直和に同型である．また $k=4$ のとき，$K(sl_2,k)$ は $V_{\mathbb{Z}\beta}^+$ に同型である．ここで，$\langle\beta,\beta\rangle=6$ である．$k\geq 5$ のとき，$K(sl_2,k)$ の strong generator として $\{W^2,W^3,W^4,W^5\}$ をとることができる．ここで W^2 は $K(sl_2,k)$ の共形元で，W^3, W^4, W^5 はそれぞれウエイトが $3,4,5$ の Virasoro primary である．頂点作用素代数としては，$K(sl_2,k)$ は W^2 と W^3 の 2 つの元で生成される．なお $k\leq 4$ のときは退化しており，$k=2$ ならば $W^3=W^4=W^5=0$, $k=3$ ならば $W^4=W^5=0$, $k=4$ ならば $W^5=0$ である．

(2.2) 式では M^j が $M^j\otimes V_{\mathbb{Z}\gamma-j\gamma/k}$ の形でテンソル積の成分として現れるが，以下のように M^j と同型な既約 M^0-加群を単独で取り出すことができる．[2]

格子 N から定義される頂点作用素代数 V_N は，$V_{\mathbb{Z}\gamma}$ の V_L におけるコミュタント $V_N=\mathrm{Com}_{V_L}(V_{\mathbb{Z}\gamma})$ である．よって，$M^0=\mathrm{Com}_{V^{\mathrm{aff}}}(V_{\mathbb{Z}\gamma})$ は V_N に含まれる．M^0 の V_N におけるコミュタントを

$$T=\mathrm{Com}_{V_N}(M^0) \tag{2.4}$$

とおく．T は V^{aff} の V_L におけるコミュタントでもある．T については，既約加群の分類および有理的であることが [7] により知られている．T の共形元を ω_T で表す．

T の V_N におけるコミュタントは M^0 に一致し，次のことが成り立つ．

$$M^0=\mathrm{Com}_{V_N}(T)=\{v\in V_N\,|\,(\omega_T)_{(1)}v=0\}. \tag{2.5}$$

N の双対格子 N° における N のコセット

$$N^j=N-j\alpha_1+j\gamma/k \tag{2.6}$$

を考える．N° から定義される一般化された頂点代数 (generalized vertex algebra) V_{N° において，V_{N^j} は頂点作用素代数 V_N の既約加群であるが，その部分空間 $M^{(j)}$ を

$$M^{(j)}=\{v\in V_{N^j}\,|\,(\omega_T)_{(1)}v=0\},\quad 0\leq j\leq k-1 \tag{2.7}$$

と定義する．この $M^{(j)}$ は，M^j に同型な既約 M^0-加群である ([12, 定理 2.3])．$j=0$ のときの $M^{(0)}$ は，パラフェルミオン頂点作用素代数 M^0 に一致する．

N の N° におけるコセット N^j が $j \pmod k$ により定まることに対応して，$M^{(j)}$ の添字 j は $\pmod k$ で扱う．

[2] これに関する詳しい議論は [12, 第 2 節] にある．

3　M_D の構成

D を $\mathbb{Z}_k$ 上の長さ n の符号，すなわち $\mathbb{Z}_k$ の n 個の直積 $(\mathbb{Z}_k)^n$ のなす加法群の部分群とする．この節では，D を用いて前節で導入した既約 M^0-加群 $M^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}_k$ を組み合わせることにより，M_D を構成する．

$\xi = (i_1, \ldots, i_n)$, $\eta = (j_1, \ldots, j_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して，

$$(\xi|\eta) = \sum_{s=1}^{n} i_s j_s \in \mathbb{Z}_k \tag{3.1}$$

として標準的に $(\mathbb{Z}_k)^n$ 上の内積を定義する．

$\xi = (i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して，N° の n 個の直交和 $(N^\circ)^{\oplus n}$ における $N^{\oplus n}$ のコセット N_ξ を，(2.6) 式の N^j を用いて

$$N_\xi = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_s \in N^{i_s},\, 1 \le s \le n\} \subset (N^\circ)^{\oplus n} \tag{3.2}$$

と定める．さらに，ξ が D 全体をわたるときの N_ξ の和集合を Γ_D とおく．

$$\Gamma_D = \textstyle\bigcup_{\xi \in D} N_\xi. \tag{3.3}$$

$\xi, \eta \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して $N_\xi + N_\eta = N_{\xi+\eta}$ だから，D が加法群 $(\mathbb{Z}_k)^n$ の部分群であることから，Γ_D は加法群 $(N^\circ)^{\oplus n}$ の部分群になる．

N の双対格子 N° には，N における内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が自然に拡張できる．$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は，N° において有理数値の正定値内積である．この N° における内積から得られる N° の n 個の直交和 $(N^\circ)^{\oplus n}$ における内積を，同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す．これも有理数値の正定値内積である．この内積に関して，$\alpha \in N_\xi$, $\beta \in N_\eta$ ならば

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in -\frac{2}{k}(\xi|\eta) + 2\mathbb{Z} \tag{3.4}$$

が成り立つことが，N_ξ の定義からわかる．

$\mathbb{Z}_k$-符号 D に関して，次の 2 通りの場合を考える．

Case 1. すべての $\xi \in D$ について $(\xi|\xi) = 0$ である．

Case 2. k は偶数で，すべての $\xi, \eta \in D$ について $(\xi|\eta) \in \{0, k/2\}$ であり，$(\xi|\xi) = k/2$ となる $\xi \in D$ が存在する．

(3.4) 式により，符号 D が Case 1 の条件を満たすことは，格子 Γ_D が正定値偶格子であるための必要十分条件である．また k が偶数のとき，符号 D が Case 2 の条件を満たすことは，格子 Γ_D が正定値奇格子であるための必要十分条件である．

双対格子 N° の n 個の直交和 $(N^\circ)^{\oplus n}$ から定義される一般化された頂点代数 $V_{(N^\circ)^{\oplus n}}$ において，$V_{N^{\oplus n}} = (V_N)^{\otimes n}$ および (2.4) 式で定義された T の n 個のテンソル積 $T^{\otimes n}$ は部分頂点作用素代数になる．

$\xi = (i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して，(3.2) 式で $N^{\oplus n}$ の $(N^\circ)^{\oplus n}$ におけるコセット N_ξ を定義したが，このコセットにより頂点作用素代数 $V_{N^{\oplus n}} = (V_N)^{\otimes n}$ の既約加群

$$V_{N_\xi} = V_{N^{i_1}} \otimes \cdots \otimes V_{N^{i_n}} \subset V_{(N^\circ)^{\oplus n}} \tag{3.5}$$

が得られる．$(V_N)^{\otimes n}$ の加群として，V_{Γ_D} はこれらの既約加群の直和になる．

$$V_{\Gamma_D} = \bigoplus\nolimits_{\xi \in D} V_{N_\xi}. \tag{3.6}$$

$\xi = (i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して，

$$M_\xi = \{v \in V_{N_\xi} \mid (\omega_{T^{\otimes n}})_{(1)} v = 0\} \tag{3.7}$$

として M_ξ を定義する．ここで，$\omega_{T^{\otimes n}}$ は $(V_N)^{\otimes n}$ の部分頂点作用素代数 $T^{\otimes n}$ の共形元を表す．ξ がゼロ符号語 $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ のときは，(2.5) 式から $M_{\mathbf{0}}$ が M^0 の n 個のテンソル積に同型な $(V_N)^{\otimes n}$ の部分頂点作用素代数であることがわかる．

$$M_{\mathbf{0}} = (M^0)^{\otimes n}. \tag{3.8}$$

(2.7) 式により，M_ξ は $M^{(i_s)}$, $1 \le s \le n$ のテンソル積に同型な既約 $M_{\mathbf{0}}$-加群である．

$$M_\xi = M^{(i_1)} \otimes \cdots \otimes M^{(i_n)}. \tag{3.9}$$

M^j のトップレベルが 1 次元でそのウエイトが $j(k-j)/k$ であることから，$\xi = (i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ について，M_ξ のトップレベルが 1 次元であること，またそのウエイトが

$$\sum_{1 \le s \le n} \frac{i_s(k - i_s)}{k} = \sum_{1 \le s \le n} i_s - \frac{(\xi|\xi)}{k} \tag{3.10}$$

であることがわかる．

格子 Γ_D から定義される一般化された頂点代数 V_{Γ_D} は，Γ_D が正定値偶格子ならば頂点作用素代数であり，Γ_D が正定値奇格子であれば頂点作用素超代数である．V_{Γ_D} における $T^{\otimes n}$ のコミュタントを M_D で表す．(3.5) 式と (3.6) 式から次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned} M_D &= \mathrm{Com}_{V_{\Gamma_D}}(T^{\otimes n}) \\ &= \{v \in V_{\Gamma_D} \mid (\omega_{T^{\otimes n}})_{(1)} v = 0\} \\ &= \bigoplus\nolimits_{\xi \in D} M_\xi. \end{aligned} \tag{3.11}$$

次の定理は [12, 定理 3.3] で既知である．

定理 3.1 D を長さ n の $\mathbb{Z}_k$-符号とする．

(1) 符号 D が Case1 の条件を満たせば，M_D は有理的かつ C_2-余有限な CFT 型の単純頂点作用素代数で，中心電荷は $2(k-1)n/(k+2)$ である．

(2) k が偶数のとき，D が Case2 の条件を満たせば，$M_D = M_D^{\bar{0}} \oplus M_D^{\bar{1}}$ は単純頂点作用素超代数で，偶部分 $M_D^{\bar{0}}$ と奇部分 $M_D^{\bar{1}}$ はそれぞれ

$$M_D^{\bar{0}} = \bigoplus_{\substack{\xi \in D \\ (\xi|\xi)=0}} M_\xi, \qquad M_D^{\bar{1}} = \bigoplus_{\substack{\xi \in D \\ (\xi|\xi)=k/2}} M_\xi$$

で与えられる．偶部分 $M_D^{\bar{0}}$ は有理的かつ C_2-余有限な CFT 型の単純頂点作用素代数である．奇部分 $M_D^{\bar{1}}$ のウエイトは $1/2+\mathbb{Z}$ に属する．

符号 D は Case 1 または Case 2 の条件を満たすとする．このとき，頂点作用素代数あるいは頂点作用素超代数 M_D の自己同型を考察する．前節で述べたように，パラフェルミオン頂点作用素代数 M^0 の自己同型群は $\mathrm{Aut}\, M^0 = \langle\theta\rangle$ で位数 2 であり，$M^j \circ \theta \cong M^{-j}$, $0 \le j \le k-1$ が成り立つ．符号 D がゼロ符号，すなわちゼロ符号語 $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$ だけからなる場合，$M_D = M_{\mathbf{0}}$ は M^0 の n 個のテンソル積 $(M^0)^{\otimes n}$ だから，n 個のテンソル成分の置換は頂点作用素代数 $M_{\mathbf{0}}$ の自己同型である．ひとつのテンソル成分の M^0 に θ として作用し，他の $n-1$ 個のテンソル成分には恒等写像として作用するものも $M_{\mathbf{0}}$ の自己同型である．実は，$M_{\mathbf{0}}$ の自己同型はこれらを組み合わせたものに限ることがわかる．すなわち，$M_{\mathbf{0}}$ の自己同型群は θ と n 次対称群 Sym_n の wreath product である．

$$\mathrm{Aut}\, M_{\mathbf{0}} = \langle\theta\rangle \wr \mathrm{Sym}_n.$$

2 つの長さ n の $\mathbb{Z}_k$-符号 D と D' について，(i) 成分を一斉に置換する，(ii) 第 s 成分に -1 をかける $(1 \le s \le n)$ の 2 つの操作を繰り返すことで一方から他方に変形できるとき，2 つの符号 D と D' は同値であるといい $D \cong D'$ と書く．符号の同値と頂点作用素代数あるいは頂点作用素超代数の同型に関して，次の補題が成り立つ．

補題 3.2 (1) 符号 D と D' が同値ならば，M_D と $M_{D'}$ は同型である．

(2) $f(M_{\mathbf{0}}) = M_{\mathbf{0}}$ を満たす同型 $f : M_D \to M_{D'}$ が存在するならば，符号 D と D' は同値である．

4 M_D の例

$k=2$ のときの M_D の性質およびその表現論は，[10], [11] で詳しく研究されている．$k=3$ のときの M_D は，[8] で考察されている．

このほかにも，k と n が小さい場合の M_D がいくつか知られている．たとえば，$k=5$, $n=2$, $D=\{(00),(12),(24),(31),(43)\}$ のときの

$$M_D = M_{(00)} \oplus M_{(12)} \oplus M_{(24)} \oplus M_{(31)} \oplus M_{(43)}$$

は，[9] の記号で U_{5A} と表されるモンスター単純群の $5A$ 元と関係する頂点作用素代数である．また $k=9$, $n=1$, $D=\{(0),(3),(6)\}$ のときの

$$M_D = M^{(0)} \oplus M^{(3)} \oplus M^{(6)}$$

は，[9] の記号で U_{3C} と表されるモンスター単純群の $3C$ 元と関係する頂点作用素代数である．

次の例は，今までに知られていない新しいものである．$k=6, n=1, D=\{(0),(3)\}$ のとき，

$$M_D = M^{(0)} \oplus M^{(3)} \cong L_{NS}(5/4,0) \oplus L_{NS}(5/4,3)$$

という同型が成り立つ．ここで $L_{NS}(5/4,0)$ は，中心電荷 $5/4$ の単純な $N=1$ 超共形代数 (superconformal algebra, Neveu-Schwarz algebra) で，$L_{NS}(5/4,3)$ はその最高ウエイト 3 の既約最高ウエイト加群である．実際，v を $M^{(3)}$ のトップレベルの元で $v_{(2)}v=(5/6)\mathbf{1}$ を満たすものとする．$M^{(3)}$ のトップレベルは 1 次元で，ウエイトは $3/2$ だから，v のウエイトは $3/2$ である．この v について，$v_{(n)}v \in M^{(0)}$ が任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つ．特に，$M^{(0)}$ のウエイト 1 の部分空間が 0 であることより，$v_{(1)}v=0$ が得られる．さらに，簡単な計算で $v_{(0)}v=2\omega$ がわかる．ただし，ω は $M^{(0)}$ の共形元である．以上により，

$$L_n = \omega_{(n+1)}, \quad G_{n-1/2} = v_{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

とおくと，L_n, $G_{n-1/2}$, $n \in \mathbb{Z}$ が Neveu-Schwarz algebra の生成元の関係式を満たすことがわかる．格子 Γ_D から定義される頂点作用素超代数 V_{Γ_D} の中で考えているので，ω と v で生成される M_D の部分代数は単純な Neveu-Schwarz algebra $L_{NS}(5/4,0)$ に同型である．

M^0 の strong generator $\{W^2, W^3, W^4, W^5\}$ に含まれるウエイト 3 の Virasoro primary W^3 は，ω と v で生成される $L_{NS}(5/4,0)$ の最高ウエイトベクトルで，V_{Γ_D} において W^3 で生成される既約 $L_{NS}(5/4,0)$-加群は $L_{NS}(5/4,3)$ に同型である．

k を偶数とすると，$n=1$, $D=\{(0),(k/2)\}$ のときの $M_D = M^{(0)} \oplus M^{(k/2)}$ は，$k \equiv 0 \pmod 4$ ならば頂点作用素代数で，$k \equiv 2 \pmod 4$ ならば頂点作用素超代数である．たとえば $k=2$ のとき，

$$M_D = M^{(0)} \oplus M^{(1)} \cong L(1/2,0) \oplus L(1/2,1/2)$$

となり，$k=4$ のときは

$$M_D = M^{(0)} \oplus M^{(2)} \cong V_{\mathbb{Z}\beta}^{+} \oplus V_{\mathbb{Z}\beta}^{-} = V_{\mathbb{Z}\beta}$$

(ただし $\langle\beta,\beta\rangle = 6$) となる．

また一般に $k = r^2$ が平方数ならば，$n = 1$, $D = \{(0), (r), \ldots, ((r-1)r)\}$ のときの

$$M_D = M^{(0)} \oplus M^{(r)} \oplus \cdots \oplus M^{((r-1)r)}$$

は頂点作用素代数である．

5　符号 D

この節では，Case 1 あるいは Case 2 の条件を満たす長さ n の $\mathbb{Z}_k$-符号，すなわち加法群 $(\mathbb{Z}_k)^n$ の部分群 D について考察する．D が Case 1 ならばその部分群も Case 1 であり，D が Case 2 ならばその部分群は Case 1 または Case 2 である．一般に D の部分群は多数あるので，条件を満たす D のなかで極大なものに注目する．

最初に用語の復習をする．D の元を符号語と呼ぶ．$(\cdot|\cdot)$ を (3.1) 式で定義された D 上の標準内積とする．すべての $\xi, \eta \in D$ について $(\xi|\eta) = 0$ が成り立つとき，D は自己直交 (self orthogonal) であるという．$\xi = (i_1, \ldots, i_n) \in D$ に対して，0 でない成分の個数を ξ のハミングウエイト (Hamming weight) といい，$\mathrm{wt}\,\xi$ で表す．$\mathrm{wt}\,\xi$ が偶数のとき，ξ は偶符号語であるという．D のすべての元が偶符号語のとき，D は偶符号であるという．$\mathrm{wt}\,\xi$ が 4 の倍数のとき，ξ は 2 重偶符号語であるという．D のすべての元が 2 重偶符号語のとき，D は 2 重偶符号 (doubly even code) であるという．$\xi_1, \ldots, \xi_m$ が符号 D の加法群としての生成系のとき，第 i 行が ξ_i の $m \times n$ 行列を D の生成行列という．具体的な符号は，その生成行列を用いて表す．生成行列は，符号 D に対して一通りではない．

符号 D が自己直交ならば，Case 1 の条件を満たすことは明らかである．k が奇数のときは，$(\xi+\eta|\xi+\eta) = (\xi|\xi)+2(\xi|\eta)+(\eta|\eta)$ において $(\xi|\xi) = (\eta|\eta) = (\xi+\eta|\xi+\eta) = 0$ ならば $(\xi|\eta) = 0$ が得られるので，Case 1 の条件は D が自己直交であることと同値である．

例　$k = 3$, $n = 4$ のとき，Case 1 の符号のなかで極大なものは，符号の同値を除いて $[4, 2, 3]$ ternary tetra code だけである．その生成行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

である．

自己直交という条件は符号を扱う上で標準的な条件なので，以下では k が偶数と仮定する．

$k = 2$ のときは D は 2 元体 $GF(2)$ 上の通常のバイナリー符号で，任意の D は Case 1 と Case 2 のいずれか一方の条件を満たす．$k = 2$ のときの Case 1 の条件は，D が偶符号であることと同値である．

k が 2 以上の一般の偶数の場合を扱うために，少し準備をする．最初に，Case 1 と Case 2 の両方を含む $\mathbb{Z}_k$-符号 D に関する次の条件を考える．

(∗) すべての $\xi, \eta \in D$ について $(\xi|\eta) \in \{0, k/2\}$ である．

(3.4) 式から，次の補題が得られる．

補題 5.1 格子 Γ_D が整格子 (integral lattice) であるための必要十分条件は，符号 D が条件 (∗) を満たすことである．

符号 D が条件 (∗) を満たすならば，写像

$$\rho : D \to \{0, k/2\}; \quad \xi \mapsto (\xi|\xi) \tag{5.1}$$

は加法群の準同型であることに注意する．

$\xi = (i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ の各成分 i_s を $i_s + (k/2)\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{k/2}$ で置き換えることにより得られる $(\mathbb{Z}_{k/2})^n$ の元を $\overline{\xi}$ で表し，写像 $\varphi : (\mathbb{Z}_k)^n \to (\mathbb{Z}_{k/2})^n$ を $\varphi(\xi) = \overline{\xi}$ により定義する．

$$\varphi : (\mathbb{Z}_k)^n \to (\mathbb{Z}_{k/2})^n; \quad \xi \mapsto \overline{\xi}. \tag{5.2}$$

φ による D の像を $\overline{D} = \varphi(D)$ とおく．D が条件 (∗) を満たすための必要十分条件は，$\overline{D}$ が自己直交 $\mathbb{Z}_{k/2}$-符号であることである．

φ は加法群の準同型だからその核 $\operatorname{Ker}\varphi$ は長さ n の $\mathbb{Z}_k$-符号であり，その元の成分は 0 と $k/2$ だけである．特に，$\operatorname{Ker}\varphi$ は $k \equiv 0 \pmod 4$ ならば Case 1 であり，$k \equiv 2 \pmod 4$ ならば Case 2 である．

$\lambda \in \operatorname{Ker}\varphi$ ならば，任意の $\eta \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して $(\lambda|\eta) \in \{0, k/2\}$ だから，D が条件 (∗) を満たすならば $D + \operatorname{Ker}\varphi$ も条件 (∗) を満たす．よって，条件 (∗) を満たす符号のうち極大なものは $\operatorname{Ker}\varphi$ を含む．

$\xi = (i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ の各成分 i_s を $i_s + 2\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_2$ で置き換えることにより得られる $(\mathbb{Z}_2)^n$ の元を $\widetilde{\xi}$ で表し，写像 $(\mathbb{Z}_k)^n \to (\mathbb{Z}_2)^n$; $\xi \mapsto \widetilde{\xi}$ による D の像を $\widetilde{D}$ で表す．

$k \geq 4$ が偶数のとき，$k \equiv 2 \pmod 4$ と $k \equiv 0 \pmod 4$ の 2 つの場合に分かれる．

補題 5.2 $k \equiv 2 \pmod 4$, $k \geq 6$ とする．

(1) D が Case 1 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は，$\overline{D}$ が $\mathbb{Z}_{k/2}$-符号として極大自己直交符号であり $\widetilde{D}$ が $\mathbb{Z}_2$-符号として極大偶符号であることである．

(2) D が Case 2 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は，極大自己直交 $\mathbb{Z}_{k/2}$-符号 C が存在して $D = \varphi^{-1}(C)$ となることである．

この補題により，$k \equiv 2 \pmod 4$ で $k \geq 6$ のときは $\mathbb{Z}_{k/2}$-符号と $\mathbb{Z}_2$-符号を調べることに帰着する．

例　$k=6,\ n=4$ のとき，次の生成行列で定まる符号は，それぞれ Case 1 および Case 2 の符号のなかで極大であり，どちらも符号の同値を除いて一意的である．

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$k \equiv 0 \pmod 4$ のときは，$k=4$ の場合と $k \geq 8$ の場合に分ける．$k=4$ のときは $\overline{D} = \widetilde{D}$ であることに注意する．

補題 5.3　$k=4$ とする．
(1) D が Case 1 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は，極大 2 重偶 $\mathbb{Z}_2$-符号 C が存在して $D = \varphi^{-1}(C)$ となることである．
(2) D が Case 2 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は，極大自己直交 $\mathbb{Z}_2$-符号で 2 重偶符号ではない C が存在して $D = \varphi^{-1}(C)$ となることである．

この補題により，$k=4$ のときは $\mathbb{Z}_2$-符号を調べることに帰着する．

例　$k=4,\ n=4$ のとき，次の生成行列で定まる符号は，それぞれ Case 1 および Case 2 の符号のなかで極大であり，どちらも符号の同値を除いて一意的である．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

例　$k=4,\ n=8$ のとき，次の生成行列で定まる符号は，Case 1 の符号のなかで極大であり，符号の同値を除いて一意的である．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

この生成行列の最初の 4 行は，$\mathbb{Z}_2$-符号の元と見做すと $[8,4,4]$-ハミング符号の生成行列になっている．$[8,4,4]$-ハミング符号は長さ 8 の自己双対なバイナリー符号と

して符号の同値を除いて一意的である．このことから，上記の $\mathbb{Z}_4$-符号の一意性がわかる．

$k \equiv 0 \pmod 4$ を満たす一般の k の場合を扱うためにユークリッドウエイト (Euclidean weight) $\mathrm{wt_E}$ を導入する．$x \in \mathbb{Z}_{k/2}$ を $0 \le x \le k/2-1$ の範囲の整数と見做して，$x \in \mathbb{Z}_{k/2}$ に対して

$$\mathrm{wt_E}(x) = \min\{x^2, (k/2-x)^2\} \in \mathbb{Z}$$

により整数 $\mathrm{wt_E}(x)$ を定義する．$\lambda = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{Z}_{k/2})^n$ に対して，

$$\mathrm{wt_E}(\lambda) = \textstyle\sum_{s=1}^n \mathrm{wt_E}(x_s) \in \mathbb{Z}$$

を λ のユークリッドウエイトという．

$\mathbb{Z}_{k/2}$-符号 C に関する次の条件を考える．

$(**)$ すべての $\lambda \in C$ について $\mathrm{wt_E}(\lambda) \equiv 0 \pmod k$ である．

補題 5.4 $k \equiv 0 \pmod 4$, $k \ge 8$ とする．

(1) D が Case 1 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は，条件 $(**)$ を満たす $\mathbb{Z}_{k/2}$-符号のなかで極大な符号 C が存在して $D = \varphi^{-1}(C)$ となることである．

(2) D が Case 2 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は，自己直交 $\mathbb{Z}_{k/2}$-符号 C で条件 $(**)$ を満たさない $\mathbb{Z}_{k/2}$-符号のなかで極大なものが存在して $D = \varphi^{-1}(C)$ となることである．

条件 $(**)$ は $\pmod k$ に係わるものなので，上記の補題は $\mathbb{Z}_k$-符号 D に関する条件を k がより小さいときの符号に関するものに帰着するわけではない．

k を $k = 2^r m$ のように 2 のベキ 2^r と奇数 m の積として表す．ユークリッドウエイトを定義したときのように，$\xi = (i_1, \ldots, i_s) \in (\mathbb{Z}_k)$ の各成分 $i_s \in \mathbb{Z}_k$ を $0 \le i_s \le k-1$ の範囲の整数と見做して，$\xi, \eta \in D$ に対して $(\xi|\eta)$ の値を整数として扱う．このようにすると，$(\xi|\eta) \equiv 0 \pmod k$ は，$(\xi|\eta) \equiv 0 \pmod{2^r}$ かつ $(\xi|\eta) \equiv 0 \pmod m$ と同値である．したがって，$\mathbb{Z}_k$-符号 D が Case 1 の条件を満たすことは，D の元の各成分を $\pmod{2^r}$ で考えることにより得られる $\mathbb{Z}_{2^r}$-符号と $\pmod m$ で考えることにより得られる $\mathbb{Z}_m$-符号の両方が Case 1 の条件を満たすことと同値になる．このように，k を 2 のベキの部分と奇数の部分に分けて議論することも可能である．

参考文献

[1] T. Arakawa, C.H. Lam and H. Yamada, Zhu's algebra, C_2-algebra and C_2-cofiniteness of parafermion vertex operator algebras, *Adv. Math.* **264** (2014), 261–295.

[2] T. Arakawa, C.H. Lam and H. Yamada, in preparation.

[3] C. Dong, C.H. Lam, Q. Wang and H. Yamada, The structure of parafermion vertex operator algebras, *J. Algebra* **323** (2010), 371–381.

[4] C. Dong, C.H. Lam and H. Yamada, W-algebras related to parafermion algebras, *J. Algebra* **322** (2009), 2366–2403.

[5] C. Dong and J. Lepowsky, *Generalized Vertex Algebras and RelativeVertex Operators*, Progress in Math., Vol. 112, Birkhäuser, Boston, 1993.

[6] C. Dong and Q. Wang, Quantum dimensions and fusion rules for parafermion vertex operator algebras, arXiv:1411.7429.

[7] C. Jiang and Z. Lin, The commutant of $L_{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}(n,0)$ in the vertex operator algebra $L_{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}(1,0)^{\otimes n}$, arXiv:1311.0608.

[8] M. Kitazume, M. Miyamoto and H. Yamada, Ternary codes and vertex operator algebras, *J. Algebra* **223** (2000), 379–395.

[9] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, McKay's observation and vertex operator algebras generated by two conformal vectors of central charge 1/2, *Internat. Math. Research Papers*, **2005:3** (2005), 117–181.

[10] M. Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras, *J. Algebra* **181** (1996), 207–222.

[11] M. Miyamoto, Representation theory of code vertex operator algebra, *J. Algebra* **201** (1998), 115–150.

[12] 山田裕理, Vertex operator algebras associated with $\mathbb{Z}_k$-codes, 数理解析研究所講究録 **1926** (2014), 88–97.