対称群の一般バーンサイド環のユニット元

近畿大学・理工学部　小田文仁 (Fumihito Oda)*
Faculty of Science and Engineering, Kindai University
室蘭工業大学大学院・工学研究科　竹ヶ原裕元 (Yugen Takegahara)
Muroran Institute of Technology
北星学園大学・経済学部　吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)†
Graduate School of Economics, Hokusei Gakuen University

1 はじめに

G は有限群，$C(G)$ は G のすべての部分群の族の G 共役類の集合とする．部分群 $H \le G$ に対し，G/H は H の G におけるすべての左剰余類 gH，ただし，$g \in G$，の集合とする．G の Burnside 環 $\Omega(G)$ は，G/H，ただし，$(H) \in C(G)$，に対応するシンボル $[G/H]$ の形式的 $\mathbb{Z}$ 線形結合全体に

$$[G/H] \cdot [G/U] = \sum_{HgU \in [H\backslash G/U]} [G/(H \cap {}^gU)]$$

ただし，$(H), (U) \in C(G)$，${}^gU = gUg^{-1}$，$[G/(H \cap {}^gU)] = [G/K]$，$(K) = (H \cap {}^gU) \in C(G)$，で与えられる積が定義された可換環である (たとえば，[CR81, §80], [Yo90b, §2.1] を参照)．$\Omega(G)$ の単位元は $[G/G]$ である．簡略のため $1 = [G/G]$ と書く．$\Omega(G)$ の単元群は可換 2 群 (cf. §2) であり，$\Omega(G)$ の単元の解析は非常に興味深い問題である．

S_n は n 文字の集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の対称群，$\mathfrak{Y}_n$ は S_n の Young 部分群全体の族とする．シンボル $[S_n/Y]$，ただし，$Y \in \mathfrak{Y}_n$，の $\mathbb{Z}$ 線形結合全体を $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ ([BBTH92] 参照) と書く．$\mathfrak{Y}_n$ は共役と共通部分をとる操作で閉じているので，$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ は $\Omega(S_n)$ の部分環である (簡略のため，その部分環は対称群の Young 部分群に関する partial Burnside 環と呼ばれている)．S_n の指標環を $R(S_n)$ と書く．このとき環同型 $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n) \cong R(S_n)$ が成立すること (たとえば，[Yo90b, Proposition 7.2] を参照)，また，$R(S_n)$ の単元群が $\pm 1_{S_n}$，$\pm\nu_n$，ただし，1_{S_n} は S_n の自明な指標，ν_n は交代指標である (たとえば，[Ya91] を参照)，で構成されることがよく知られている．特に，$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元群は，Klien の 4 群と同型である．

最近，[IO15] で Idei と Oda は，$\mathfrak{Y}_n$ の包含関係 $\le$ に関するポセット $(\mathfrak{Y}_n, \le)$ の Möbius 関数 $\mu_{\mathfrak{Y}_n}$ を用いて $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の非自明な単元の公式を与えた．そのような単元は，また，$\Omega(S_n)$ の単元でもあり，$\Omega(S_n)$ の単元の何らかの特徴付けを与えているようである．しかしながら，一般に，$\Omega(S_n)$ の単元はもっとたくさん存在する ([BP07])．本稿の目的は，$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の非自明な単元の tom Dieck 準同型 (詳細は §2 を参照) を用いた特徴付けを与えた論文 [OTY] の要旨を報告することである．結果的に，我々は，その論文で $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元群が tom Dieck 準同型の像に含まれることを証明することに成功した．ν_n は，S_n 集合 S_n/Y，ただし，$Y \in \mathfrak{Y}_n$，が与える置換指標の $\mathbb{Z}$ 線形結合として具体的に表される (cf. Theorem 4.4)．それらの事実を証明するために，任意の左 G 集合が与える置換指標の tom Dieck 準同型による像が，G ポセットの被約 Lefschetz 不変量であること，それは，本質的に [Th87] で与えられた，がわかる．

2 tom Dieck 準同型

部分群 $H \le G$ と有限左 G 集合 X に対し，

$$\mathrm{inv}_H(X) = \{x \in X \mid hx = x \text{ for all } h \in H\}$$

とおく．[Di79, Proposition 1.2.2] により，

$$[G/U] \mapsto (\sharp\mathrm{inv}_H(G/U))_{(H) \in C(G)}$$

* supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400003.
† supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400001.

で与えられる写像 $\varphi : \Omega(G) \to \widetilde{\Omega}(G) := \prod_{(H)\in C(G)} \mathbb{Z}$，ただし，$(U) \in C(G)$，は単射環準同型であり，Burnside 準同型，または，マーク準同型と呼ばれている．明らかに $\widetilde{\Omega}(G)$ の単元群は $\prod_{(H)\in C(G)}\langle -1\rangle$ であり，したがって，$\Omega(G)$ の単元群は基本可換 2 群である．

$R_{\mathbb{R}}(G)$ は G の実表現環，$\Omega(G)^\times$ は $\Omega(G)$ の単元群とする．任意の元 $x \in \Omega(G)$ は，$\varphi(x) = (x_H)_{(H)\in C(G)}$ であるとき，$x = \varphi^{-1}((x_H)_{(H)\in C(G)})$ と書く．[Di79, Proposition 5.5.9] により，任意の左 $\mathbb{R}G$ 加群 M に対し，群準同型 $u = u_G : R_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^\times$ で

$$M \mapsto \varphi^{-1}(((-1)^{\dim M^H})_{(H)\in C(G)})$$

ただし，M^H は M の H 不変部分空間，をみたすものが存在する．

$H \le G$ とする．$W_G(H) = N_G(H)/H$，ただし，$N_G(H)$ は H の G における正規化群，とおく．有限生成左 $\mathbb{C}G$ 加群 M は，$\mathbb{C}$ 指標 χ を与えるとする．部分群 $H \le G$ に対し，M^H は $\mathbb{C}W_G(H)$ 加群とみなすことが可能であり，任意の $gH \in W_G(H)$ に対し

$$\overline{\chi}(gH) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi(gh)$$

で定義される $W_G(H)$ の $\mathbb{C}$ 指標 $\overline{\chi}$ を与える (たとえば，[ACNT13, Lemma 3.1] を参照)．特に，$\dim M^H$ は，$\mathbb{C}$ 指標 χ の H への制限 $\chi|_H$ と H の自明な指標 1_H との H における内積 $\langle \chi|_H, 1_H\rangle_H$ に等しい．

[Yo90b, Corollary 4.3] より任意の $\chi \in \overline{R}_{\mathbb{R}}(G)$ に対し

$$\overline{u}(\chi) = \sum_{(U)\in C(G)} \frac{1}{|W_G(U)|}\left(\sum_{H\le G}\mu(U,H)(-1)^{\langle \chi|_H, 1_H\rangle_H}\right)[G/U], \tag{2.1}$$

ただし，μ は G のすべての部分群の族 $S(G)$ の包含関係 $\le$ に関するポセット $(S(G), \le)$ の Möbius 関数，を得る．

Example 1. 明らかに，$\overline{u}(1_G) = -1$ が成り立つ．

Example 2. A_n は $[n]$ 上の交代群とする．$1 - [S_n/A_n]$ は $\Omega(S_n)$ の単元であり，ν_n の tom Dieck 準同型による像である．

Remark 1. G が可解でないならば，[Ma82, Theorem 5.4] により $u : R_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^\times$ は全射ではない．特に，$n \ge 4$ ならば $\overline{u} : \overline{R}_{\mathbb{R}}(S_n) \to \Omega(S_n)^\times$ は全射ではない：しかし，$\overline{u_{S_2}}$，$\overline{u_{S_3}}$ は全射である ([Ma82] を参照) ($2|\mathrm{Im}\overline{u_{S_4}}| = |\Omega(S_4)^\times| = 2^6$ が成り立つことを注意する)．

3 $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元

$R(G)$ は G の指標環とする．左 G 集合 X が与える置換指標 π_X は，任意の元 $g \in G$ に対し

$$\pi_X(g) = \sharp\{x \in X \mid gx = x\}$$

で定義される．環準同型 $\mathrm{char}_G : \Omega(G) \to R(G)$ を，任意の左 G 集合に対し

$$[X] \mapsto \pi_X$$

で定める (cf. [Yo90a, §6])．[Yo90b, Proposition 7.2] により，環準同型 $\mathrm{char}_{S_n} : \Omega(S_n) \to R(S_n)$ は環同型写像

$$\overline{\mathrm{char}}_{S_n} : \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n) \to R(S_n)$$

([JK81, 2.3] 参照) を誘導する．従って，$\overline{\mathrm{char}}_{S_n}(\alpha) = \nu_n$ を満たすただ一つの元 $\alpha \in \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ が存在する．$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元群のすべての元は，± 1, $\pm\alpha$ であり，また，$\Omega(S_n)$ の単元でもある．

部分群 $H \le S_n$ に対し，Young 部分群 Y_H を，H を保存する S_n のすべての Young 部分群の共通部分として定める．n の分割 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ に対応する Young 部分群 $Y \le S_n$ は，互いに非交和な n_i サイクル，ただし，$i = 1, 2, \ldots, r$，の積 σ_Y で $Y = Y_{\langle \sigma_Y\rangle}$ を満たすものを含む．以下の補題 (cf. [Yo90b, §7.1]) を示す．

Lemma 3.1. *If* $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H)\in C(S_n)}$, *then* $\alpha_H = \alpha_{Y_H}$, $(H) \in C(S_n)$ *and* $\alpha_Y = \nu_n(\sigma_Y)$, $Y \in \mathfrak{Y}_n$, *where* $\sigma_Y \in S_n$ *with* $Y = Y_{\langle\sigma_Y\rangle}$.

[Yo90b, Corollary 4.3] と Lemma 3.1 を用いて α は

$$\alpha = \sum_{(Y)\in C(\mathfrak{Y}_n)} \frac{1}{|W_{S_n}(Y)|} \left(\sum_{H\in\mathfrak{Y}_n} \mu_{\mathfrak{Y}_n}(Y,H)\nu_n(\sigma_H) \right) [S_n/Y], \tag{3.1}$$

ただし，$\sigma_H \in S_n$，$Y = Y_{\langle\sigma_H\rangle}$，$C(\mathfrak{Y}_n)$ は $\mathfrak{Y}_n$ の S_n 共役類，と表される．この公式は，[IO15, Corollary 5.2] で表されている．

α が，tom Dieck 準同型像に含まれることを示す．S_n 集合 $[n]$ が与える置換指標 $\pi_{[n]}$ は，任意の $\sigma \in S_n$ に対し，

$$\sigma \mapsto \sharp\{k \in [n] \mid \sigma(k) = k\}$$

として定義される．部分群 $H \leq S_n$ に対し，$\mathrm{Orb}_H([n])$ を $[n]$ の H-軌道とする．Cauchy-Frobenius の補題 (たとえば，[Yo90b, Lemma 2.7] 参照) により，任意の部分群 $H \leq S_n$ に対し，$\langle \pi_{[n]}|_H, 1_H\rangle_H = \sharp\mathrm{Orb}_H([n])$ である．$\chi_n = \pi_{[n]} - 1_{S_n}$ とおく．このとき，χ_n は S_n の既約 $\mathbb{C}$ 指標であることがわかる．明らかに，$\chi_n \in \overline{R}_{\mathbb{R}}(G)$ が成り立つ．$\Omega(S_n)$ の単元 β を

$$\varphi(\beta) = ((-1)^{\sharp\mathrm{Orb}_H([n])})_{(H)\in C(S_n)} = ((-1)^{\langle\pi_{[n]}|_H,1_H\rangle_H})_{(H)\in C(S_n)} = -((-1)^{\langle\chi_{[n]}|_H,1_H\rangle_H})_{(H)\in C(S_n)},$$

と定めると，β は $\pi_{[n]}$ の tom Dieck 準同型による像である．$\alpha = (-1)^n\beta$ (cf. Theorem 3.4) が，Lemma 3.1 と次の補題を組み合わせる事により得られる．

Lemma 3.2. *For each* $H \leq S_n$, $\sharp\mathrm{Orb}_H([n]) = \sharp\mathrm{Orb}_Y([n])$. *In particular, for each* $Y \in \mathfrak{Y}_n$, $\sharp\mathrm{Orb}_Y([n]) = \sharp\mathrm{Orb}_{\sigma_Y}([n])$, *where* $\sigma_Y \in S_n$ *with* $Y = Y_{\langle\sigma_Y\rangle}$.

Lemma 3.3. *For each* $\sigma \in S_n$, $(-1)^{\sharp\mathrm{Orb}_\sigma([n])} = (-1)^n\nu_n(\sigma)$.

以下の定理が，$\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元の tom Dieck 準同型による特徴付けである．

Theorem 3.4. *The unit group of* $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ *is included in the image by the tom Dieck homomorphism. In particular,* $\alpha = (-1)^n\beta$.

Proof. $-1 = \overline{u}(1_{S_n})$ が成り立つから，$\alpha = (-1)^n\beta$ が成り立つことを示せば十分である．$\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H)\in C(S_n)}$ と $\varphi(\beta) = (\beta_H)_{(H)\in C(S_n)}$ が成り立つと仮定する．$\alpha_Y = (-1)^n\beta_Y$，$Y \in \mathfrak{Y}_n$，とすると Lemma 3.1 と Lemma 3.2 により任意の部分群 $H \leq S_n$ に対し $\alpha_H = (-1)^n\beta_H$ が成り立つから，$\alpha = (-1)^n\beta$ を得る．$Y \in \mathfrak{Y}_n$ とする．このとき，Lemma 3.1 より，$Y = Y_{\langle\sigma_Y\rangle}$ を満たす $\sigma_Y \in S_n$ に対し $\alpha_Y = \nu_n(\sigma_Y)$ が成り立つ．従って Lemma 3.2 と Lemma 3.3 より

$$\alpha_Y = (-1)^{\mathrm{Orb}_{\langle\sigma_Y\rangle}([n])+n} = (-1)^{\mathrm{Orb}_Y([n])+n} = (-1)^n\beta_Y$$

が従う． □

4 The reduced Lefschetz invariant of a G-poset

Theorem 3.4 のよい応用がある．ν_n の置換指標 $\pi_{S_n/Y}$，ただし，$Y \in \mathfrak{Y}_n$，の $\mathbb{Z}$ 線形結合としての表現は，非明示的に等式 (3.1) で表されているが，一方，明示的に表す事は価値のあることである．

順序 $\leq$ が定められた任意の有限左 G 集合 P は，$\leq$ が G の作用で不変であるとき G **ポセット**と呼ばれる．P を G ポセット，$Sd_i[P]$ を基数 $i+1$ の P の元からなる鎖 $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_i$ 全体の集合とする．P の **Lefschetz 不変量** Λ_P は

$$\Lambda_P = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i[Sd_i(P)] \in \Omega(G),$$

P の**被約 Lefschetz 不変量** $\widetilde{\Lambda}_P$ は $\widetilde{\Lambda}_P = \Lambda_P - 1$ と定める (cf. [Bo00], [Th87])．有限左 G 集合 X に対し，$\overline{P}(X)$ は包含関係に関する X のすべての部分集合の G ポセットとする．$P(X)$ は G ポセット $\overline{P}(X) - \{\emptyset, X\}$

とする．このとき，部分群 $K \le G$ に対し，$\varphi(\widetilde{\Lambda}_{P(X)})$ の (K) 成分は，$P(X)^K(=\mathrm{inv}_K(P(X)))$ の被約 Euler-Poincaré 標数に等しい：

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i|Sd_i(P(X)^K)|-1.$$

次に，本質的には [Th87, Proposition 5.1] で証明された以下の命題の組合せ論的な証明を与える．

Proposition 4.1. *Let X be a finite left G-set. The reduced Lefschetz invariant $\widetilde{\Lambda}_{P(X)}$ of $P(X)$ is the image of π_X by the tom Dieck homomorphism.*

Proposition 4.1 の組合せ論的な証明のためには，以下の補題が必要である．

Lemma 4.2. *For each positive integer j, set*

$$c_j=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_i)\in A(i,j)}\binom{j}{n_1,n_2,\ldots,n_i},$$

where $A(i,j)=\{(n_1,n_2,\ldots,n_i)\mid\sum_k n_k=j$ and $n_1,n_2,\ldots,n_i\in\mathbb{N}\}$ and

$$\binom{j}{n_1,n_2,\ldots,n_i}=\frac{j!}{n_1!n_2!\cdots n_i!}\quad (\textit{multinomial coefficients}).$$

Then $c_j=(-1)^j$ for any positive integers j.

β の明示的な表現の計算に戻る (cf. 等式 (4.1))．

Corollary 4.3. *The reduced Lefschetz invariant $\widetilde{\Lambda}_{P([n])}$ of $P([n])$ coincides with β.*

与えられた部分群 $H\le G$ に対し，H の自明な指標 1_H を G に誘導した $\mathbb{C}$ 指標を 1_H^G と書く．1_H^G は置換指標 $\pi_{G/H}$ と同値である．

$[n]$ の任意の置換のサイクル型 $\lambda=(1^{m_1},\ldots,n^{m_n})$ に対し，$S_1^{(m_1)}\times\cdots\times S_n^{(m_n)}$，ただし，各 $S_j^{(m_j)}$ は対称群 S_j の m_j 個の直積，と同型な S_n の Young 部分群を S_λ と書く．ν_n を $1_Y^{S_n}$，ただし，$Y\in\mathfrak{Y}_n$，の $\mathbb{Z}$ 線形結合として詳細に表す準備が整った．この結果は，[JK81, Theorem 2.3.15] における ν_n の表現の簡易化である．

Theorem 4.4. *The alternating character ν_n of S_n is expressed explicitly in the form*

$$\nu_n=\sum_{\lambda=(1^{m_1},\ldots,n^{m_n})}(-1)^{n+m_1+\cdots+m_n}\frac{(m_1+\cdots+m_n)!}{m_1!\cdots m_n!}1_{S_\lambda}^{S_n},$$

where the sum runs over all cycle types of permutations on n-letters.

Proof. Theorem 3.4 より $\beta=(-1)^n\alpha$ が示され $\nu_n=\overline{\mathrm{char}}_{S_n}(\alpha)$ が成り立つから，定理の主張は等式

$$((-1)^n\alpha)=\beta=\sum_{\lambda=(1^{m_1},\ldots,n^{m_n})}(-1)^{n+m_1+\cdots+m_n}\frac{(m_1+\cdots+m_n)!}{m_1!\cdots m_n!}[S_n/S_\lambda]\tag{4.1}$$

と同値である．i を非負整数とする．このとき，$[Sd_i(P([n]))]=\sum_t[O_t]$，ただし，$O_t$ は $Sd_i(P([n]))$ の S_n 軌道，となる．S_n 軌道 O_t の任意の代表 $x_0\le x_1\le\cdots\le x_i$ は，部分集合 $\{y_0,y_1,\ldots,y_i,y_{i+1}\}\subset P([n])$ で，$k=0,1,\ldots,i$ に対し $x_k=\dot\cup_{j=0}^k y_j$ と $[n]=\dot\cup_{j=0}^{i+1}y_j$ を満たすもの，— それは，$\ell=1,\ldots,n$ に対し，$m_\ell=\sharp\{k\mid y_k=\ell\}$ を満たすサイクル型 $(1^{m_1},\ldots,n^{m_n})$ に対応する —, を定める．逆に，$\lambda=(1^{m_1},\ldots,n^{m_n})$ が，$\sum_\ell m_\ell=i+2\ge 2$ を満たす $[n]$ の置換のサイクル型であるならば，$Sd_i(P([n]))$ の

$$\frac{(m_1+\cdots+m_n)!}{m_1!\cdots m_n!}$$

個の S_n 軌道，それは，S_n/S_λ と同型な S_n 集合である，を構成することができる．ゆえに，等式 (4.1) は Corollary 4.3 より従う． $\square$

Remark 2. Frobenius の相互律 (たとえば，[CR81, (10.9)] 参照) により，任意の部分群 $H \leq G$ に対し，$\langle 1_H^G, 1_G \rangle_G = \langle 1_H, 1_H \rangle_H = 1$ を得る．Theorem 4.4 から，等式

$$\sum_{\lambda=(1^{m_1},\ldots,n^{m_n})} (-1)^{m_1+\cdots+m_n} \frac{(m_1+\cdots+m_n)!}{m_1!\cdots m_n!} = (-1)^n \langle \nu_n, 1_{S_n} \rangle_{S_n} = 0$$

が従う．

Example 3. 等式 (4.1) により，$G = S_n$ かつ $\chi = \pi_{[n]}$ のとき，等式 (2.1) の $[S_n/U]$ の係数と等式 (3.1) における $[S_n/Y]$ の係数は完全に決定される．$n = 3$ のときは,

$$\alpha = [S_3/S_{(1^3)}] - 2[S_3/S_{(1^1,2^1)}] + [S_3/S_{(3^1)}].$$

([JK81, pp. 41–42 and Theorem 2.3.15] も参照)．$n = 4$ のときは,

$$\alpha = [S_4/S_{(1^4)}] - 3[S_4/S_{(1^2,2^1)}] + [S_4/S_{(2^2)}] + 2[S_4/S_{(1^1,3^1)}] - [S_4/S_{(4^1)}]$$

が成り立つ．

5 Concluding remarks

e が，$2e \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ を満たす $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ のべき等元であるならば，$1 - 2e$ と $-1 + 2e$ は $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元である．α は $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元だから $(1-\alpha)/2$ は $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ のべき等元である．しかし，$(1_{S_n} - \nu_n)/2 \notin R(S_n)$ だから，$(1-\alpha)/2 \notin \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ である．したがって，以下の命題を得る．

Proposition 5.1. *The idempotents of* $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ *are only* 0，1.

Proposition 5.1 の S_n 集合を用いた *Proof* はどうなるだろうか? もちろん，等式 (4.1) において，$[S_n/S_{(1^n)}]$ の係数はいつでも $(-1)^n$ だから，$(1-\alpha)/2 \notin \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ である．この事実は，Theorem 3.4 の結論でもある．なぜなら，それは [Ma82, (5.4.1)] — e が非自明なべき等元，すなわち，$e \neq 0, 1$ である $\Omega(S_n)$ のべき等元，ならば，単元 $1 - 2e$ は tom Dieck 準同型による像には含まれない — から従うからである．

以下の補題は，[Yo90a, Lemma 2.1] (また，[Di79, Proposition 1.3.5] 参照) であり，[Yo90a] において tom Dieck 準同型の存在性の証明に用いられた．

Lemma 5.2. *An element* $(x_H)_{(H)\in C(G)}$ *of* $\widetilde{\Omega}(G)$ *is included in the image* $\mathrm{Im}\varphi$ *by the Burnside homomorphism if and only if*

$$\sum_{gU \in W_G(U)} x_{\langle g \rangle U} \equiv 0 \pmod{|W_G(U)|}$$

for all $(U) \in C(G)$.

$(1-\alpha)/2 \notin \Omega(S_n)$ の直接的な証明を与えてこの報告を終える．

Proof of Proposition 5.1 $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H)\in C(G)}$ とする．Lemma 3.3 および Theorem 3.4 (あるいは，α の定義) より

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{1 - \alpha_{\langle\sigma\rangle}}{2} = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1 - \nu_n(\sigma)}{2} = |A_n| \not\equiv 0 \pmod{|S_n|},$$

ここで，σ が $\tau \in S_n$ と共役で $(\langle\tau\rangle) \in C(G)$ を満たすならば，$\alpha_{\langle\sigma\rangle} = \alpha_{\langle\tau\rangle}$ である，が成り立つ．これと，Lemma 5.2 は，$((1-\alpha_H)/2)_{(H)\in C(S_n)} \notin \mathrm{Im}\varphi$ を示す．ゆえに，$(1-\alpha)/2 \notin \Omega(S_n)$ を得る． □

参考文献

[ACNT13] Asai, T.; Chigira, N.; Niwasaki, T.; Takegahara, Y.: *On a theorem of P. Hall*, J. Group Theory **16** (2013), 69–80.

[BBTH92] Bergeron, F.; Bergeron, N.; Howlett, R.B.; Taylor, D.E.: *A Decomposition of the Descent Algebra of a Finite Coxeter Group*, J. Algebraic Combinatorics **1** (1992) 23–44.

[BP07] Boltje, R.; Pfeiffer, G.: *An algorithm for the unit group of the Burnside ring of a finite group* In: Groups St. Andrews 2005. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press (2007).

[Bo00] Bouc, S.: Burnside rings, Handbook of algebra, **2**, 739–804, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[CR81] Curtis, C.W.; Reiner, I.: Methods of Representation Theory, **I**, **II**, Wiley- Interscience, New York, 1981, 1987.

[Di79] tom Dieck, T.: Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, **766**, Springer, Berlin, 1979.

[IO15] Idei, H.; Oda, F.: *The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group*, J. Algebra **429** (2015), 318–323.

[JK81] James, G.D.; Kerber, A.: The Representation Theory of the Symmetric Group, Encyclopedia of mathematics and its applications, **16**, Addison–Wesley, Reading, MA, 1981.

[Ma82] Matsuda, T.: *On the unit groups of Burnside rings*, Japan. J. Math. (N.S.) **8** (1982), 71–93.

[OTY] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T.:*The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group*, submitted.

[Th87] Thévenaz, J.:*Permutation representations arising from simplicial complexes*, J. Combin. Theory Ser. A **46** (1987), 121–155.

[Ya91] Yamauchi, K.: *On the units in a character ring*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 477–479.

[Yo90a] Yoshida, T.: *On the unit groups of Burnside rings*. J. Math. Soc. Japan **42** (1990) no. 1, 31–64.

[Yo90b] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.