Association schemes and their standard modules

花木 章秀 * (信州大学・理学部)

第 60 回代数学シンポジウム
静岡大学 2015 年 9 月 3 日

アソシエーション・スキームとは代数的組合せ論の研究対象であり、その定義が簡単であるため、多くの数学的な対象から自然に得られるものである。それは、アソシエーション・スキームがその特別な場合として有限群を含んでいることからも分かる。例えば、有限群を正規部分群でない部分群で割るとそれは有限群にはならないが、それはある見方をすればアソシエーション・スキームの構造をもつ。アソシエーション・スキームが誰によって何時頃から考えられているのかは不勉強のためはっきりとは分からないが、Delsarte [3], 坂内-伊藤 [1] が研究を発展させる大きな力になったことは間違いない。有限単純群の分類が完成した 1980 年代頃に、多くの研究者がアソシエーション・スキームや関連する内容の研究に移ってきているようである。Delsarte [3], 坂内-伊藤 [1] などで扱っているアソシエーション・スキームはほとんど "可換" あるいは "対称" なもののみであり、このままでは有限群を含んでいるとはいえない。非可換を含むものは Higman [7] にある coherent configuration のうち "homogenious" といわれるものである。非可換の場合も含めて扱っているテキストは少なく Zieschang [13], [14] ぐらいであるが、これは初学者にとって読みやすいものとはいえないであろう。最近ではアソシエーション・スキームを何らかの研究に応用することが多くなっているが、私は応用面については詳しくないのでここでは触れない。残念ながら、応用を意識しないアソシエーション・スキームそのものの研究は少なくなってきている。

私はもともと有限群の表現を研究していたが、坂内英一先生らの影響によってアソシエーション・スキームの研究をするようになった。その頃はアソシエーション・スキームの研究が盛んで、分からないことがたくさんあり非常に魅力的な研究対象に思えた。先の述べたように、この分野にはもともと有限単純群を扱っていた人が多いため、私は環論、表現論的な立場からアソシエーション・スキームを研究し、現在もその方針は変わっていない。ここでは私の立場からアソシエーション・スキームの定義やそれに関する問題を解説し、最近の一つの結果を紹介する。

1　アソシエーション・スキーム

まず定義を与えよう。X を有限集合とし $X \times X$ の分割 $X \times X = \bigcup_{s \in S} s$ を考える。組 (X, S) が**アソシエーション・スキーム** (association scheme) であるとは

* 〒 390-8621 長野県松本市旭 3–1–1 信州大学理学部, hanaki@shinshu-u.ac.jp

(1) $1 := \{(x,x) \mid x \in X\} \in S$

(2) $s \in S$ ならば $s^* := \{(y,x) \mid (x,y) \in s\} \in S$

(3) $s,t,u \in S$ に対して、ある非負整数 p_{st}^u が存在して、$(x,y) \in u$ であるならば (x,y) の取り方に依らず $\sharp\{z \in X \mid (x,z) \in s,\ (z,y) \in t\} = p_{st}^u$

が成り立つことである。理解しにくいので行列を使った定義に書きなおしておく。行、列、ともに集合 X の要素で添字付けられた可換環 R 上の行列の全体のなす環を $M_X(R)$ と表す。一般に $s \subset X \times X$ に対して、その**隣接行列** $\sigma_s \in M_X(\mathbb{Z})$ を

$$(\sigma_s)_{xy} = \begin{cases} 1, & (x,y) \in s \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

で定める。アソシエーション・スキームの定義は隣接行列を使って以下のように書き換えられる。

(0)' $\sum_{s \in S} \sigma_s = J$ (すべての成分が 1 の行列)

(1)' ある $1 \in S$ があって $\sigma_1 = E$ (単位行列)

(2)' $s \in S$ に対して、ある $s^* \in S$ があって ${}^t\sigma_s = \sigma_{s^*}$ (${}^t\sigma_s$ は σ_s の転置行列)

(3)' $s,t,u \in S$ に対して、ある非負整数 p_{st}^u が存在して、$\sigma_s\sigma_t = \sum_{u \in S} p_{st}^u \sigma_u$

条件 (0)' は S が分割であることを表している。条件 (3)' より $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}\sigma_s$ は環となる。任意の単位元をもつ可換環 R 上で**隣接代数** $RS = R \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}\sigma_s\right)$ が定義される。$\mathbb{Z}S$ が可換であるとき、アソシエーション・スキーム (X,S) は**可換**であるという。条件 (2) で $s = s^*$ (すなわち σ_s が対称行列) が任意の $s \in S$ に対して成り立つとき、(X,S) は**対称**であるという。対称ならば可換であることがすぐに分かる。(3) の p_{st}^u を**交叉数** (intersection number) という。すぐに分かるように交叉数は隣接代数の基底 $\{\sigma_s \mid \sigma \in S\}$ に関する構造定数である。

アソシエーション・スキームの典型的な例は以下のように有限可移置換群から得られる。

例 1.1 (Schur 的スキーム). G を有限集合 X 上の可移置換群とする。G は $X \times X$ にも $(x,y)g = (xg, yg)$ によって自然に作用する。この軌道の集合を S とすると (X,S) はアソシエーション・スキームとなる。このようにして得られるアソシエーション・スキームを **Schur 的**であるという。

G の G への正則な作用を考えれば、それによって得られるアソシエーション・スキームは G そのものであると考えることができる。このようにして有限群はアソシエーション・スキームの特別なものとみなすことができる。このときの隣接代数は群代数に一致する。

アソシエーション・スキームに関する大きな問題の一つは、

問題. (ある性質をもつ) アソシエーション・スキームを分類せよ

である。対称、可換など、色々な性質をもつものが考えられているが分類のための有効な方法は得られておらず、基礎となる有限集合 X の大きさでいえば $|X| = 30$ までしか分類は済んでいない [5]。$|X| = 31$ には $100,000$ 個以上の非同型なものが存在することが分かっている (計算機によって構成されたが分類は完成していない)。しかし $|X| = 31$ の場合の交叉数 (構造定数) は Schur 的なものと同じものに限り、それは完全に分かっている。交叉数が等しい非同型なものがたくさん存在するのである。このように交叉数が同じ、すなわち代数としては完全に一致しているもので、組合せ論的に異なるものがたくさんあることが、その分類を困難にしている一つの要因である。

交叉数の一致する二つのアソシエーション・スキームは**代数的に同型**であると言われる。きちんと定義しておこう。(X,S), (Y,T) をアソシエーション・スキームとする。(X,S) と (Y,T) が**同型**であるとは、全単射 $\varphi : X \to Y$, $\psi : S \to T$ があって $(x,x') \in s$ と $(\varphi(x), \varphi(x')) \in \psi(s)$ が同値となることである。(X,S) と (Y,T) が**代数的に同型**であるとは、全単射 $\psi : S \to T$ があって $p^u_{st} = p^{\psi(u)}_{\psi(s)\psi(t)}$ となることである。例えば、パラメータの等しい 2-デザインや強正則グラフは代数的に同型なアソシエーション・スキームを定める。一般に代数的に同型なアソシエーション・スキームが同型かどうかを判定することは難しく、統一的な良い方法は知られていない。体 F 上の多項式 $f(x)$ に対して $f(\sigma_s)$ と $f(\sigma_{\psi(s)})$ の F 上の行列としてのランクを調べることで、代数的に同型なものを区別できることがあるということが [2, 8, 9] などで扱われている。この際、標数 0 の体上ではランクに差がないことが分かっており、正標数の体上で差が生じる場合がある。このランクの差が表現論的に説明できることを示したのが [6] である。

表現について説明しよう。アソシエーション・スキーム (X,S) に対して、先に述べたように隣接代数 RS が定義される。RS の (行列) 表現、すなわち全行列環 $M_n(R)$ への代数準同型、を (X,S) の**表現**という。RS は行列環の部分代数として定義されているので、その埋め込みは表現である。これを**標準表現**という。代数的に同型なアソシエーション・スキームは同型な隣接代数をもつので、その表現を考えても区別は出来ないが、標準表現には差が生じる可能性がある。簡単な例を見てみよう。係数環として代数閉体を考え、隣接代数は一つの元で生成されるものと仮定する。代数は生成元の最小多項式で決定されるが、それを表現する行列の Jordan 標準形には自由度があり、行列のランクは定まらない。一元生成とは限らない、より一般の場合には表現 (加群) の直既約分解を考えることになる。直既約分解を考えるには、その前に隣接代数の構造を決める必要もある。係数環が標数 0 の代数閉体である場合には隣接代数は半単純であり、その標準加群にも違いがないことが分かっている。正標数の場合には隣接代数の構造もあまり分かっていない。(隣接代数が半単純になるための条件は [4] で決定されてはいるが、使いやすい結果ではない。改良が期待される。) アソシエーション・スキームは有限群も含むので、その場合には多くの研究があるが、それ以外には

- 3 次元の隣接代数 (花木-吉川 [6])
- Hamming scheme (吉川 [12])
- Grasmann scheme (一部のパラメータのみ、島袋-吉川 [11])
- dual polar scheme (一部のパラメータのみ、島袋 [10])

などがある。正標数の場合の標準加群の様子はほとんど研究されていない。ここではサイクロトミック・スキームというアソシエーション・スキームに対して、その隣接代数

と標準加群の様子を調べ、さらにそれらと代数的に同型なものとの比較をしたので、それを紹介したい。

2 サイクロトミック・スキームとその隣接代数

サイクロトミック・スキームを定義する前に、若干一般的な議論をする。N を有限群、H を $\mathrm{Aut}(N)$ の部分群とする。N の正則置換表現を考え、H-軌道で和をとれば、それはアソシエーション・スキームとなる。F を体とする。H は群環 FN にも代数自己同型として作用し、その H による固定点の集合 $(FN)^H$ が隣接代数となる。このとき標準加群は FN である。(この設定では問題は不変式環の言葉で理解され、色々な結果が適用できると思われるが、不勉強のため私には分からない。)

p を素数とし $\mathbb{F}_{p^a}$ を p^a 個の元をもつ有限体とする。ζ を $\mathbb{F}_{p^a}$ の原始元とする。N を位数 p^a の基本可換 p-群とし、アーベル群としての同型 $\mathbb{F}_{p^a} \to N$ $(\alpha \mapsto [\alpha])$ を一つ固定しておく。$H = \langle h_0 \rangle$ を位数 $p^a - 1$ の巡回群とし N への作用を $[\alpha]^{h_0} = [\zeta\alpha]$ で定める。$d \mid p^a - 1$ に対して $H_d = \langle h_0^{(p^a-1)/d} \rangle$ とおく。H_d は $|H : H_d| = d$ なる H の部分群である。H_d の N への作用によって定まるアソシエーション・スキームを**サイクロトミック・スキーム**といい $\mathrm{Cyc}(p^a, d)$ と表す。

以下では F を標数 p の代数閉体とし、F 上の隣接代数と標準加群の構造を求める。決定の手法はパラメータに依らない一般的なものであるが、その構造を一般的に記述することは難しいと思われ、また加群の直既約性を決定することも容易ではない。ここでは手法の説明と特殊なパラメータの場合のその構造を完全に記述する。上で説明したように、$\mathrm{Cyc}(p^a, d)$ の隣接代数は $(FN)^{H_d}$ であり、標準加群は FN である。

N は位数 p^a の基本可換 p-群なので、その生成元を $n_1, \cdots, n_a$ とし $x_i = n_i - 1$ $(i = 1, \cdots, a)$ とおけば $FN = F[x_1, \cdots, x_n]$ であり、関係式 ${x_i}^p = 0$ $(i = 1, \cdots, a)$ をもつ。FN は局所環であって Jacobson 根基は $J(FN) = \{\sum_{n\in N} c_n n \mid \sum_{n\in N} c_n = 0\}$ である。$H = \langle h_0 \rangle$ の作用を考える。H は群の自己同型として N に作用するから、代数自己同型として FN に作用する。したがって $J(FN)$ は H-不変であり $J(FN)/J^2(FN)$ は FH-加群である。$J(FN)/J^2(FN)$ への h_0 の作用を計算することによって次の補題を得る。

補題 2.1. H の $J(FN)/J^2(FN)$ 上の表現は $\mathbb{F}_{p^a}^{\times} = \mathbb{F}_{p^a} \setminus \{0\} = \langle \zeta \rangle$ の $\mathbb{F}_p$ 上の正則表現に一致する。

ζ の $\mathbb{F}_p$ 上の正則表現は ζ とその代数共役 $\zeta^p, \zeta^{p^2}, \cdots, \zeta^{p^{a-1}}$ を固有値にもつ。H はアーベル p'-群なので、その表現は完全可約である。したがって、ある $v_1, \cdots, v_a \in J(FN)$ が存在して

$$J(FN) = \left(\bigoplus_{i=1}^{a} F v_i \right) \oplus J^2(FN), \quad v_i^{h_0} = \zeta^{p^{i-1}} v_i$$

となる。FN は基底 $\{{v_1}^{e_1} \cdots {v_a}^{e_a} \mid 0 \le e_i < p \ (1 \le i \le a)\}$ をもち、基底への h_0 の作用は

$$({v_1}^{e_1} \cdots {v_a}^{e_a})^{h_0} = \zeta^{\left(\sum_{i=1}^{a} e_i p^{i-1}\right)} {v_1}^{e_1} \cdots {v_a}^{e_a}$$

となる。特に FN は FH-加群として $F{v_1}^{e_1} \cdots {v_a}^{e_a}$ の直和となる。したがって FH_d 加群としても同様に分解する。隣接代数 $(FN)^{H_d}$ はこの分解において、自明な加群の直和

となる。$e=(p^a-1)/d$ とおくと

$$v_1{}^{e_1}\cdots v_a{}^{e_a}\in(FN)^{H_d}\quad\Longleftrightarrow\quad e\ \Bigg|\ \sum_{i=1}^{a}e_ip^{i-1}$$

である。隣接代数の構造を記述しやすくするために、一つの記号を定義しよう。$0\leq f<p^a$ に対して、その p 進法表示を

$$f=\sum_{i=0}^{a-1}f_ip^{i-1}\quad(0\leq f_i<p)$$

とするとき

$$\boldsymbol{v}^{(f)}=v_1^{f_1}\cdots v_a^{f_a}$$

と定める。このとき $v_i{}^p=0$ であるから

$$\boldsymbol{v}^{(f)}\boldsymbol{v}^{(g)}=\begin{cases}\boldsymbol{v}^{(f+g)}, & \text{すべての } i \text{ について } f_i+g_i<p \text{ のとき}\\ 0, & \text{そうでないとき}\end{cases}\tag{$*$}$$

が成り立つ。これらのことをまとめて次の定理が成り立つ。サイクロトミック・スキーム $\mathrm{Cyc}(p^a,d)$ の F の隣接代数を簡単のため $F\mathrm{Cyc}(p^a,d)$ と表す。

定理 2.2. F を標数 p の代数閉体とする。$d\mid(p^a-1)$ とし $e=(p^a-1)/d$ とおく。このとき $F\mathrm{Cyc}(p^a,d)$ は基底 $\{\boldsymbol{v}^{(ie)}\mid i=0,1,\cdots,d\}$ をもち、基底の積は $(*)$ で定まる。

簡単な考察から次の系が得られる。

系 2.3. F を標数 p の代数閉体とする。$d\mid(p^a-1)$, $d\mid(p^b-1)$ とする。このとき $F\mathrm{Cyc}(p^a,d)\cong F\mathrm{Cyc}(p^b,d)$ である。(一般に $\mathrm{Cyc}(p^a,d)$ と $\mathrm{Cyc}(p^b,d)$ の構造定数が p を法として合同になるわけではない。)

$(*)$ で基底の積は決まるが、その代数構造を一般的に記述することは簡単ではないように思われる。$\boldsymbol{v}^{(ie)}\boldsymbol{v}^{(je)}\neq0$ のとき (i,j)-成分を 1 に、そうでないとき 0 として行列を書けば

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\\ \vdots & * & \iddots & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\tag{$**$}$$

となることが分かる。ここで、左上三角形のふちはすべて 1 で、内部 ($*$ の部分) は状況によって変わる。右下はすべて 0 である。

命題 2.4. (1) $p\equiv1\pmod d$ のとき、上の三角形の内部はすべて 1 であり $F\mathrm{Cyc}(p^a,d)\cong F[x]/(x^{d+1})$ である。($F\mathrm{Cyc}(p^a,d)\cong F[x]/(x^{d+1})$ となるのは、このときに限る。)

(2) $d\neq2, p\equiv-1\pmod d$ のとき、上の三角形の内部はすべて 0 であり $F\mathrm{Cyc}(p^a,d)\cong F[x_1\cdots,x_{d-1}]/I$ である。ただし、ここで I は

$$x_ix_j\ (i+j\neq d),\quad x_ix_j-x_kx_\ell\ (i+j=k+\ell=d)$$

で生成されるイデアルである。(他のパラメータでもこの形になることはある。)

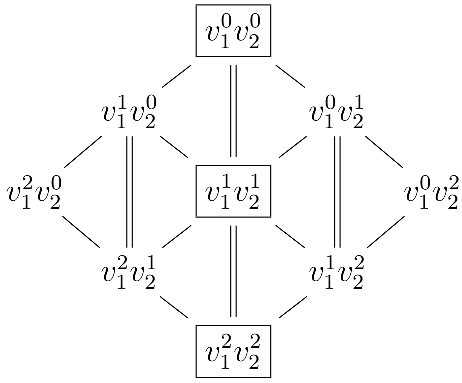
注意. 一般論から $F\mathrm{Cyc}(p^a,d)$ は対称代数かつ局所環になることが分かっている。

3　サイクロトミック・スキームの標準加群

前節でサイクロトミック・スキームの隣接代数の構造を記述したが、それを用いて、ここでは標準加群の構造を考える。隣接代数を定理 2.2 のように記述することで、標準加群の様子もある程度、場合によっては完全に、決定できる。命題 2.4 で扱った $p \equiv 1 \pmod d$ の場合と $d = 3$ の場合には直既約分解が完全に記述できるので、それを紹介する。また、この場合に加群の構造から行列のランクが決まることを示し、更にサイクロトミック・スキームと代数的に同型であるアソシエーション・スキームとランクに違いがあることを小さな例で紹介する。一般の場合にも同様の分解が可能であるが、そこに現れる加群が直既約かどうかは私には分からない。

3.1　$p \equiv 1 \pmod d$ のとき

まず簡単な例を見る。$\mathrm{Cyc}(3^2, 2)$ を考える。



四角で囲った元が隣接代数の基底である。縦の二重線で結んだものが直既約加群となる。すなわちこの場合には、長さ 3 のものが 1 個、長さ 2 のものが 2 個、長さ 1 のものが 2 個、と直和分解することが分かる。(長さ n の加群はサイズ n の Jordan ブロックに対応すると思ってよい。)

この例と同様に $F\mathrm{Cyc}(p^a, d) \cong F[x]/(x^{d+1})$ であれば、標準加群の直既約分解を簡単に求めることが出来る。長さ j の単列加群を U_j と表すことにすれば、一般に次の定理が成り立つ。

定理 3.1. $p \equiv 1 \pmod d$ であるとき、$F\mathrm{Cyc}(p^a, d) \cong F[x]/(x^{d+1})$ であって、$F\mathrm{Cyc}(p^a, d)$ の標準加群の直既約分解を $\bigoplus_{j=1}^{d+1} m_j U_j$ と表わせば、重複度 m_j は連立方程式

$$\left(p - \frac{i(p-1)}{d}\right)^a = \sum_{j=i+1}^{d+1} (j-i) m_j \quad (i = 1, \cdots, d)$$

の解として定まる。

これを用いて隣接行列のランクが定まる。

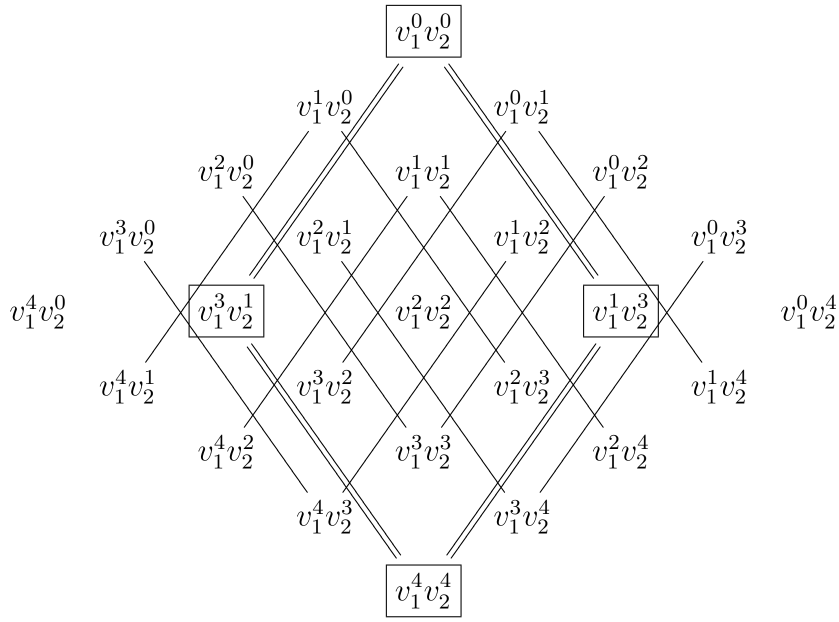
系 3.2. $p \equiv 1 \pmod d$ とし $(X, S) = \mathrm{Cyc}(p^a, d)$ とする。$s \in S \setminus \{1\}$ と $0 \le i \le d$ に対して $(\sigma_s - n_s \sigma_1)^i$ の標数 p でのランクは $(p - i(p-1)/d)^a$ である。

この系で $d=2$ のときは [2, Proposition 4.2] である。ここでサイクロトミック・スキームと代数的に同型なものと比較してみるが、$a=1$ かつ $d=2$ のときにはそのランクに違いがないことが [8, Corollary 3.1] で示されている。

例 3.3. $\mathrm{Cyc}(5^2,2)$ と代数的に同型なものは 8 個ある。[5] の位数 25 の No. 4 から 11 である。$\sigma_s-12\sigma_1$ の標数 5 でのランクは、順に $12,12,12,12,12,11,10,9$ である。$\mathrm{Cyc}(5^2,2)$ に対しては系 3.2 より 9 になるので、それは No. 11 であり、この場合にはランクだけで $\mathrm{Cyc}(5^2,2)$ が特徴付けられることが分かる。

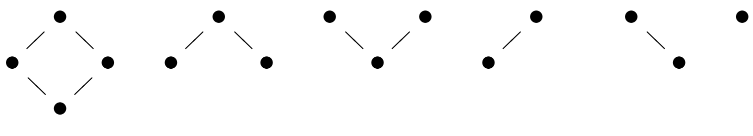
3.2 $d=3$ のとき

$d=3$ の場合を考える。$p\equiv 1 \pmod 3$ ならば前の節で考えた場合になるので $p\equiv 2 \pmod 3$ のときを考える。このとき $a\equiv 2 \pmod 3$ であって、隣接代数は $F[x,y]/(x^2,y^2)$ である。今度も簡単な例を見よう。$\mathrm{Cyc}(5^2,3)$ を考える



分かりにくいが、この図が標準加群の直既約分解を表している。前と同じように四角で囲ったものが隣接代数の基底であり、線で結ばれたものが直既約因子を表している。一般にこのような図の分解が標準加群の直和分解となることはすぐに分かるが、それが本当に直既約分解であるかどうかは私には分からない。しかし $d=3$ の場合は隣接代数が $F[x,y]/(x^2,y^2)$ であり、その直既約加群はすべて分かっているので、これが本当に直既約分解であることが分かる。

$\mathrm{Cyc}(p^a,3)$ の場合、簡単な考察から分解に現れる直既約加群は



の 6 通りしかないことが分かる ($a>2$ のときは平面的な図で考えることは出来ないので、やや面倒であるが難しくはない)。左から順に $M_1,\cdots,M_6$ とする。

定理 3.4. $p \equiv 2 \pmod 3$ であるとき、$F\mathrm{Cyc}(p^a, 3)$ の標準加群の直既約分解を $\bigoplus_{j=1}^{6} m_j M_j$ と表わせば、

$$
\begin{aligned}
m_1 &= 1, \quad m_2 = m_3 = \frac{(p+1)^a}{3^a} - 1, \\
m_4 &= m_5 = \frac{(2^{a/2}-2)(p+1)^a}{3^a}, \quad m_6 = p^a + 2 - \frac{(2^{a/2+2}-2)(p+1)^a}{3^a}.
\end{aligned}
$$

である。

やや議論が必要であるが行列のランクも決定できる。基底を代数的に都合よく取り直しているために $\boldsymbol{v}^{(ie)}$ は組合せ論的に扱いやすい元ではないことに注意が必要である。

系 3.5. $p \equiv 2 \pmod 3$ とし $(X, S) = \mathrm{Cyc}(p^a, 3)$ とする。$s \in S \setminus \{1\}$ に対して $\sigma_s - \frac{p^a-1}{d}\sigma_1$ の標数 p でのランクは $2^{a/2}(p+1)^a/3^a$ である。

最後に代数的に同型なものと比較してみよう。

例 3.6. [5] の位数 16 の No. 20 は $\mathrm{Cyc}(2^4, 3)$ であり、No. 21 はそれと代数的に同型である。いずれの場合も $s \in S \setminus \{1\}$ に対して $\sigma_s - 5\sigma_1$ のランクは 6 である。しかし $(FX)J(FS)$ の次元、すなわち $\{\sigma_s - 5\sigma_1 \mid s \in S \setminus \{1\}\}$ のすべての行の張る空間、には 7, 8 と差がある。サイクロトミック・スキームの場合のこの次元は、標準加群の直既約分解から得られるものである。(このことから、標準加群の構造は行列のランクだけを考えるよりも多くの情報を含むことが確認できる。)

例 3.7. [5] の位数 25 の No. 18 は $\mathrm{Cyc}(5^2, 3)$ であり、No. 17 はそれと代数的に同型である。いずれの場合も $s \in S \setminus \{1\}$ に対して $\sigma_s - 8\sigma_1$ のランクは 8 である。しかし $\dim_F(\bigcap_{s \in S\setminus\{1\}} FX(\sigma_s - 8\sigma_1))$ は、それぞれ 4, 3 となり、やはり差が生じる。サイクロトミック・スキームの場合のこの次元も標準加群の構造から計算できる。

4 今後考えたいこと

標準加群の構造についてある族について調べたものは、今回の結果が初めてのもので、一般論を考えるためにももっと多くの具体例を計算してみたい。サイクロトミック・スキームについても、その構造を完全に記述できているわけではないので、これを考えてみたい。また、アーベル群にアーベル群が作用している場合には同様の方法が通用するので、それも考えてみたい。

ハミング・スキームについては隣接代数は完全に分かっている。そして 2 元体上のハミング・スキーム $H(n, 2)$ は位数 2^n の基本可換 2-群への対称群 S_n の自然な作用によって得られるため、類似の考察が出来る。2 元体上のハミング・スキーム $H(n, 2)$ は応用上も極めて重要なものであるから、その標準加群の構造を決定することは意義のあることであろう。

References

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics. I*, The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., Menlo Park, CA, 1984.

[2] A. E. Brouwer and C. A. van Eijl, *On the p-rank of the adjacency matrices of strongly regular graphs*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), no. 4, 329–346.

[3] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. (1973), no. 10, vi+97.

[4] A. Hanaki, *Semisimplicity of adjacency algebras of association schemes*, J. Algebra **225** (2000), no. 1, 124–129.

[5] A. Hanaki and I. Miyamoto, *Classification of association schemes with small vertices*, published on web (http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/as/).

[6] A. Hanaki and M. Yoshikawa, *On modular standard modules of association schemes*, J. Algebraic Combin. **21** (2005), no. 3, 269–279.

[7] D. G. Higman, *Coherent configurations. I. Ordinary representation theory*, Geometriae Dedicata **4** (1975), no. 1, 1–32.

[8] R. Peeters, *Uniqueness of strongly regular graphs having minimal p-rank*, Linear Algebra Appl. **226/228** (1995), 9–31.

[9] ———, *On the p-ranks of the adjacency matrices of distance-regular graphs*, J. Algebraic Combin. **15** (2002), no. 2, 127–149.

[10] O. Shimabukuro, *Modular adjacency algebras of dual polar schemes*, preprint.

[11] O. Shimabukuro and M. Yoshikawa, *Modular adjacency algebras of Grassmann graphs*, Linear Algebra Appl. **466** (2015), 208–217.

[12] M. Yoshikawa, *Modular adjacency algebras of Hamming schemes*, J. Algebraic Combin. **20** (2004), no. 3, 331–340.

[13] P.-H. Zieschang, *An algebraic approach to association schemes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1628, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[14] ———, *Theory of association schemes*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.