

第60回代数学シンポジウム報告集

於 静岡大学

2015年8月31日～9月3日

2015年度 第 60 回代数学シンポジウム 報告集

本書は平成 27 年 8,9 月に静岡大学で開催された第 60 回代数学シンポジウムの報告集です。このシンポジウムは

科学研究費補助金基盤研究(S) (研究代表者 齋藤政彦 課題番号 24224001),

基盤研究(S) (研究代表者 金銅 誠之 課題番号 15H05738),

基盤研究(A) (研究代表者 松本 眞 課題番号 23244002)

からの援助を受けました。

記

日時： 2015 年 8 月 31 日 (月) — 9 月 3 日 (木)

場所： 静岡大学共通教育 A 棟 A201

会場責任者： 毛利 出

プログラム責任者：

(環論) 浅芝 秀人・大杉 英史 (代数幾何) 小島 秀雄・福間 慶明

(数論) 木田 雅成・古澤 昌秋 (群論・表現論) 荒川 知幸・竹ヶ原裕元

シンポジウム責任者： 松本 眞

主催：日本数学会代数学分科会

共催：静岡大学

プログラム

8 月 31 日 (月) 環論

09:45 - 10:45 村井聡(大阪大学) 多様体の三角形分割の組合せ論と可換環論

11:00 - 12:00 伊山修(名古屋大学) 導来圏と Cohen-Macaulay 表現論

13:30 - 14:30 早坂太(北海道教育大学) Buchsbaum-Rim multiplicities of a direct sum of cyclic modules

14:45 - 15:45 東谷章弘 (京都産業大学) Ehrhart 多項式と Ehrhart 環

16:00 - 17:00 古賀寛尚 (東京電機大学) Derived equivalences and Gorenstein projective dimension (星野光男氏との共同研究)

9 月 1 日(火) 代数幾何

09:45 - 10:45 野間 淳(横浜国立大学) 特殊な線形射影を持つ射影多様体とその応用

- 11:00 - 12:00 今野一宏(大阪大学) 一般型代数曲面の多重標準写像と標準環
 13:30 - 14:30 岸本 崇(埼玉大学) *Cylinders in del Pezzo fibrations*
 14:45 - 15:45 深澤 知(山形大学) 平面曲線のガロア点配置と応用
 16:00 - 17:00 大橋久範(東京理科大学) エンリケス曲面の自己同型について

9月2日(水) 数論

- 09:45 - 10:45 長岡 昇勇 (近畿大学) *Siegel modular* 形式の合同について
 11:00 - 12:00 落合 理 (大阪大学) 岩澤理論の高次元化をとりまく風景
 13:30 - 14:30 松本 耕二 (名古屋大学) ルート系のゼータ関数について
 14:45 - 15:45 千田 雅隆 (東北大学) Rankin-Selberg L 関数の特殊値に関する Beilinson 予想について
 16:00 - 17:00 森本 和輝 (京都大学) ユニタリ型表現のモデルの変換公式について

9月3日(木) 群論・表現論

- 09:45 - 10:45 内藤聡 (東工大) 対称 Macdonald 多項式の $t = 0$ における特殊化と、アフィン量子群の有限次元表現
 11:00 - 12:00 花木章秀 (信州大) *Association schemes and their standard modules*
 13:30 - 14:30 山田裕理(一橋大) 符号, 格子と頂点作用素代数
 14:45 - 15:45 小田文仁 (近畿大) 対称群の一般バーンサイド環のユニット元
 16:00 - 17:00 疋田辰之(京大) *On an algebro-geometric realization of the cohomology ring of conical symplectic resolutions*

目次

村井聡	多様体の三角形分割の組合せ論と可換環論	1
伊山修	導来圏と Cohen-Macaulay 表現論	8
早坂太	Buchsbaum-Rim multiplicities of a direct sum of cyclic modules	23
東谷章	Ehrhart 多項式と Ehrhart 環	33
古賀寛尚	Derived equivalences and Gorenstein projective dimension (星野光男氏との共同研究)	45
野間 淳	特殊な線形射影を持つ射影多様体とその応用	50
今野一宏	一般型代数曲面の多重標準写像と標準環	65
岸本 崇	Cylinders in del Pezzo fibrations	79
深澤 知	平面曲線のガロア点配置と応用	89
大橋久範	エンリケス曲面の自己同型について	103
長岡 昇勇	Siegel modular 形式の合同について	110
落合 理	岩澤理論の高次元化をとりまく風景	137
松本 耕二	ルート系のゼータ関数について	162
千田 雅隆	Rankin-Selberg L 関数の特殊値に関する Beilinson 予想について	195
森本 和輝	ユニタリ型表現のモデルの変換公式について	209
内藤聡	対称 Macdonald 多項式の $t = 0$ での特殊化と、アフィン量子群上の extremal weight 加群	217
花木章秀	Association schemes and their standard modules	237
山田裕理	符号, 格子と頂点作用素代数	246
小田文仁	対称群の一般バーンサイド環のユニット元	259
疋田辰之	On an algebro-geometric realization of the cohomology ring of conical symplectic resolution	265

多様体の三角形分割の組合せ論と可換環論

村井 聡 (大阪大学大学院情報科学研究科)

1. 序文

単体的複体の組合せ論の問題を, スタンレー・ライスナー環を用いて代数的なアプローチから研究する手法は 1970 年代に Stanley によって導入され, 以後, 様々な研究が進められて来た. 本稿ではスタンレー・ライスナー環の理論の多様体の最小頂点三角形分割の研究への応用について紹介する.

スタンレー・ライスナー環の理論の多様体の三角形分割の研究への最初の応用は 1981 年に Schenzel [Sc] によってなされた. Schenzel は多様体の三角形分割のスタンレー・ライスナー環が Buchsbaum 環である事を示し, Buchsbaum 環の性質を用いて凸多面体論における重要な定理の一つである上限定理が多様体の三角形分割に一般化できるという Klee の予想を研究した. Schenzel の用いた手法は 1998 年に Novik [No] によりさらに研究が進められ, この二つの仕事により Klee の予想のかなりの部分が解決された. 一方, Novik のこの仕事以降, このトピックに関する大きな進展はしばらくなかったが, 2009 年の Swartz [Sw1] と Novik, Swartz [NS1] による研究を切っ掛けとし, ここ数年の間にスタンレー・ライスナー環を用いた多様体の三角形分割の研究が大きく進展している. これら最近の進展については, Swartz 及び Klee と Novik によって書かれた二つの素晴らしいサーベイ [Sw2, KN] に主要な結果が良く纏まっているので詳細は其方を参照してもらうこととし, 本稿では, 少しマイナーなトピックとなるが, [Sw2, KN] ではあまり扱われていない最小頂点三角形分割に関する話題について紹介したい.

本稿の構成は以下の通りである. 次の §2 では, 単体的複体やスタンレー・ライスナー環に関する基本的な事項について述べる. §3 では, 最小頂点三角形分割について, 閉曲面の場合に関する話題を中心に, 問題意識と既知の結果を紹介する. §4 では, 可換環論がどのように最小頂点三角形分割の研究に応用されたのかを紹介する.

2. スタンレー・ライスナー環

初めに単体的複体に関する基本的な用語の準備を行う. Δ を $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ を頂点集合とする (有限抽象) 単体的複体とする. 即ち, Δ は $[n]$ の部分集合の族であって, $F \in \Delta$ かつ $G \subset F$ なら $G \in \Delta$ という条件を満たすものである. 単体的複体 Δ に対しその自然な幾何学的実現を $|\Delta|$ で表すことにする. Δ の幾何学的実現が位相空間 X と同相となる時, Δ を X の三角形分割と呼ぶ. 単体的複体 Δ の元であって, 要素の個数が $i+1$ であるものを Δ の i 次元面と呼び, Δ の持つ面の次元の最大値を Δ の次元と呼ぶ. また, $f_i(\Delta)$ で Δ の持つ i 次元面の個数を表す. 単体的複体 Δ の面 $F \in \Delta$ に対し

$$\text{lk}_\Delta(F) = \{G \setminus F : F \subset G \in \Delta\}$$

を Δ 上の F の **link** と呼ぶ. $\tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{F})$ で体 \mathbb{F} を係数とする Δ の i 番目の被約ホモロジー群を表すとし, $\beta_i(\Delta) = \beta_i(\Delta; \mathbb{F}) = \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{F})$ で Δ の i 番目のベッチ数を表す.

次にスタンレー・ライスナー環と単体的複体の Buchsbaum 性について述べる. $S = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ を体 \mathbb{F} を係数とする多項式環とする. $[n]$ 上の単体的複体 Δ に対し, 環

$$\mathbb{F}[\Delta] = S/(x_{i_1} \cdots x_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [n], \{i_1, \dots, i_k\} \notin \Delta)$$

を (体 \mathbb{F} を係数とする) Δ のスタンレー・ライスナー環という. d 次元単体的複体 Δ が (\mathbb{F} 上) **Cohen–Macaulay** であるとは, 任意の $F \in \Delta$ (空集合の場合も含む) に対し, 全ての $i \neq d - \#F$ に対し $\beta_i(\text{lk}_\Delta(F); \mathbb{F}) = 0$ となる時に言う, 但し $\#X$ は X の要素の個数を表す. また, d 次元単体的複体 Δ が **Gorenstein*** (又は **\mathbb{F} -homology d -sphere**) であるとは, Δ が Cohen–Macaulay で, かつ任意の $F \in \Delta$ に対し $\beta_{d-\#F}(\Delta; \mathbb{F}) = 1$ が成り立つ時に言う. 単体的複体の極大面の次元が全て同じである時, その単体的複体は **pure** であるという. pure な単体的複体が (\mathbb{F} 上) **Buchsbaum** であるとは, その頂点に関する link が全て (\mathbb{F} 上) Cohen–Macaulay となる時に言う. ここではホモロジーに関する条件で Cohen–Macaulay 性や Buchsbaum 性を定義したが, 上の定義は $\mathbb{F}[\Delta]$ が Cohen–Macaulay 環や Buchsbaum 環となる事と同値である. (詳しくは, [St] を見よ.)

最後に, 本稿で取り扱う多様体の三角形分割に関連する幾つかの単体的複体のクラスについて述べる. 多様体の三角形分割の組合せ論的な性質の研究では一般の三角形分割を扱う事は少なく, 組合せ三角形分割と呼ばれる特別な条件を満たす対象か, homology manifold と呼ばれる一般化された対象を扱う事が多い. pure な d 次元単体的複体 Δ が **境界のない \mathbb{F} -homology d -manifold** であるとは, 任意の $F \in \Delta$ (但し, $F \neq \emptyset$) に対して, $\text{lk}_\Delta(F)$ が Gorenstein* となる時に言う. また, pure な d 次元単体的複体 Δ が **境界を持つ \mathbb{F} -homology d -manifold** であるとは次の三つの条件を満たす時に言う: (i) Δ は Buchsbaum, (ii) 任意の $F \in \Delta$ (但し, $F \neq \emptyset$) について, $\beta_{d-\#F}(\text{lk}_\Delta(F); \mathbb{F}) \in \{0, 1\}$, (iii) Δ の境界 $\partial\Delta = \{F \in \Delta : \beta_{d-\#F}(\text{lk}_\Delta(F); \mathbb{F}) = 0\}$ が境界のない \mathbb{F} -homology $(d-1)$ -manifold となる. 一方, 単体的複体 Δ が d 次元閉多様体 M の三角形分割であり, かつ Δ の任意の頂点 $\{v\} \in \Delta$ について $|\text{lk}_\Delta(v)|$ が d -単体の境界又は $(d-1)$ -単体と PL 同相である時, Δ を M の **組合せ三角形分割** という. 多様体の組合せ三角形分割は明らかに多様体の三角形分割であり, 多様体の三角形分割は任意の体 \mathbb{F} に関して \mathbb{F} -homology manifold となる. また, 任意の \mathbb{F} -homology manifold は \mathbb{F} 上 Buchsbaum である.

3. 最小頂点三角形分割

多様体の三角形分割の研究において, 最も基本的な問題の一つは次の問題である.

問題 3.1. 与えられた (有限三角形分割可能な) 閉多様体 M に対し, M の三角形分割の頂点数の最小値を求めよ.

言い換えると, 与えられた閉多様体を三角形分割する為には最低何個の頂点が必要か? というのが問題 3.1 の聞いていることである. 簡単な例を挙げると, S^1 を三角形分割するのに必要な頂点数は 3 である. 実際, 三角形 (の境界) は S^1 の 3 頂点三角形分割を与え, かつ 2 頂点で S^1 を三角形分割するのが不可能であることは明らかである. (セル複体との違いに注意せよ. セル複体のレベルで S^1 を 2 頂点で単体分割することは可能である.) 問題 3.1 は問題自体は素朴であるが, 与えられた M について実際に最小値を求めるのは大変難しい. ここでは一番簡単な場合である閉曲面の場合に知られている結果を紹介しよう. 最小頂点三角形分割について詳しいことが知りたい場合は, Lutz による既知の結果が良く纏められているサーベイ [Lu] があるのでそちらを参照して欲しい.

良く知られているように, 連結な閉曲面 (2次元閉多様体) の位相型は閉曲面の分類定理によって完全に分類されており, 種数 g の向付け可能な閉曲面 S_g と種数 g の向付け不可能な閉曲面 N_g に分けられる. (S_0 が球面 S^2 , S_1 がトーラス $S^1 \times S^1$, N_1 が射影平面 $\mathbb{R}P^2$, N_2 がクラインの壺である.) 連結な閉曲面を三角形分割する為に必要な頂点数の下限として, Heawood の不等式と呼ばれる以下の結果が知られている.

定理 3.2 (Heawood の不等式 [He]). Δ が連結な閉曲面 M の n 頂点三角形分割なら,

$$(1) \quad \binom{n-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M))$$

が成り立つ. 但し, $\chi(M)$ は M のオイラー数である.

Proof. 簡単なので証明も紹介しておく. オイラー関係式より,

$$(2) \quad n - f_1(\Delta) + f_2(\Delta) = \chi(\Delta)$$

である. また, Δ の各辺は丁度 2 つの 2次元面に含まれ, かつ Δ の各 2次元面は丁度 3本の辺を含むので,

$$(3) \quad 2f_1(\Delta) = 3f_2(\Delta)$$

という等式も成り立つ. 一方, 明らかに $f_1(\Delta) \leq \binom{n}{2}$ であるので, (2), (3) より,

$$n - \chi(M) = \frac{1}{3}f_1(\Delta) \leq \frac{1}{3}\binom{n}{2}$$

が得られる. 上の式を変形すると, 求める不等式 $\binom{n-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M))$ を得る. \square

Heawood の不等式は, 閉曲面を三角形分割する為に必要な頂点数の下限を与える. 例えば, Δ がトーラス $S^1 \times S^1$ の n 頂点三角形分割なら $\chi(S^1 \times S^1) = 0$ であることから, $\binom{n-3}{2} \geq 6$, 即ち, $n \geq 7$ が成り立つことがわかる. また, Δ が射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の n 頂点三角形分割なら $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ であるので, $n \geq 6$ が成り立つ. (実際に 7 頂点のトーラスの三角形分割, 6 頂点の射影平面の三角形分割は存在する. 探してみよ!) 実は, 上の Heawood の不等式を満たす最小の n が, 殆どの場合で, 閉曲面を三角形分割する為に必要な最小の頂点数を与えることが知られている. 次の定理はグラフ理論における基本的な定理の一つである.

定理 3.3 (Jungerman and Ringel [Ri, JR]). M が種数 2 の向付け可能な閉曲面, クラインの壺, 種数 3 の向付け不可能な閉曲面以外の連結な閉曲面である時, (1) を満たす任意の n に対し M の n 頂点三角形分割が存在する.

上の定理より, Heawood の不等式を満たす最小の整数 n が閉曲面の三角形分割の頂点数の最小値を与えることが分かる. 尚, 3 つある例外の場合は必要な頂点数は Heawood の不等式から導かれる値 +1 となる.

上で述べたことにより, 閉曲面の場合には問題 3.1 は解決していることがわかる. しかし, Jungerman と Ringel による結果の向付け可能な場合が 35 年前にようやく証明されたという事実を見ると, 閉曲面の場合にすらこの問題は簡単ではないことがわかる. 加えて述べると, Lutz のサーベイ [Lu] が書かれた時点では, 自明な場合である球面 S^d と閉曲面の場合と S^1 上の S^{d-1} -bundle の場合 [BD, CSS, Kü] を除くと問題 3.1 の答えが分かっている多様体は 11 個しかなかった (現在ではもう少し増えている [DS]) ことなどからも, 問題の難しさが伺える.

問題 3.1 が難しい理由は二つある. 難しい点の一つは, Heawood の不等式のような頂点数の下限を与える不等式を高次元多様体の場合に与えることが難しいという点である. 例えば, d 次元トーラス $T^d = S^1 \times \cdots \times S^1$ は $2^{d+1} - 1$ 個の頂点を持つ三角形分割の存在が知られており, この数 $2^{d+1} - 1$ が最小である事が予想されている [Lu, Conjecture 21] が, $d = 3$ の場合にすらどのようにして頂点数の下限を求めれば良いのかわかっていない. 一方, もう一つの難しい点は, 多様体の三角形分割を具体的に構成することの難しさである. 例えば, $S^i \times S^j$ (但し $i \leq j$ とする) の三角形分割は少なくとも $i + 2j + 4$ 個の頂点を持つことが知られており [BK], 丁度 $i + 2j + 4$ 個の頂点を持つ三角形分割を構成できれば $S^i \times S^j$ に対して問題 3.1 が解けるのであるが, $S^2 \times S^4$ の 14 頂点の三角形分割が存在するかや $S^3 \times S^4$ の 15 頂点の三角形分割が存在するかなどさえ未解決である.

4. 多様体の三角形分割の頂点数の下限と可換環論

さて, 前の章の最後に問題 3.1 が難しい二つの理由を挙げた. 実は, この二つの内, 前者の三角形分割の頂点数の下限を与える問題は可換環論を用いて研究することが出来る. この最後の章ではこの事について紹介する. 先ずは, Heawood の不等式の一般化に関する Kühnel の 3 つの予想 [Lu, Conjecture 16 and 18] を紹介する.

予想 4.1 (Kühnel). Δ が連結な $2k$ 次元閉多様体の n 頂点組合せ三角形分割である時, 次が成り立つ

$$\binom{n-k-2}{k+1} \geq (-1)^k \binom{2k+1}{k+1} (\chi(\Delta) - 2).$$

上の予想は $k = 1$ の場合は Heawood の不等式である. 上の予想の類似として, Kühnel は次のことも予想している.

予想 4.2 (Kühnel). Δ が連結な $2k$ 次元閉多様体の n 頂点組合せ三角形分割である時, 次が成り立つ

$$\binom{n-k-2}{k+1} \geq \binom{2k+1}{k+1} \beta_k(\Delta; \mathbb{Q}).$$

予想 4.3 (Kühnel). Δ が連結な d 次元閉多様体の n 頂点組合せ三角形分割である時, 次が成り立つ

$$\binom{n-d+j-2}{j+1} \geq \binom{d+2}{j+1} \beta_j(\Delta; \mathbb{Q}) \quad (j = 1, 2, \dots, \lfloor (d-1)/2 \rfloor).$$

初見では予想に現れる二項係数が何を意味するのか分かりにくいだが, 今はこの予想が頂点数 n の下限を与える予想であることのみ理解すれば十分である. 先に結論から述べるが, 上記の予想 4.1, 4.2 及び予想 4.3 の $j = 1$ の場合は Novik と Swartz [NS1, NS2] によって予想が肯定的に解決されている. 後から分かったことも加え, 現在知られていることを纏めると次のようになる.

定理 4.4 (Novik–Swartz [NS1, Theorem 4.4]). Δ が丁度 n 個の頂点を持つ境界の無い連結な向付け可能な \mathbb{F} -homology d -manifold なら次が成り立つ

$$\binom{n-k-2}{k+1} \geq (-1)^k \binom{2k+1}{k+1} (\chi(\Delta) - 2).$$

定理 4.5 (Novik–Swartz, M [Mu2, Theorem 5.2]). Δ が丁度 n 個の頂点を持つ境界の無い連結な \mathbb{F} -homology $2k$ -manifold なら次が成り立つ

$$\binom{n-k-2}{k+1} \geq \binom{2k+1}{k+1} \beta_k(\Delta; \mathbb{F}).$$

定理 4.6 (Novik–Swartz, M [Mu2, Theorem 5.3]). Δ が丁度 n 個の頂点を持つ境界の無い連結な \mathbb{F} -homology d -manifold なら次が成り立つ

$$\binom{n-d-1}{2} \geq \binom{d+2}{2} \beta_1(\Delta; \mathbb{F}).$$

尚, 定理 4.4 では向付け可能な仮定が入れられているが, 多様体の三角形分割は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上向付け可能な homology manifold となるので, 定理 4.4 から予想 4.1 が導かれる. また, 定理 4.5, 4.6 も, Novik と Swartz による最初の証明は向付け可能な仮定が入れられていたが, [Mu2] で向付けに依存しない証明が与えられた. (Kühnel の予想を示す際には $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上で考えて良いので向付け可能性は仮定して問題ない.)

この章の残りで, Kühnel の予想の解決にどのような代数的な道具が使われたのか簡単に紹介しよう. 以後, \mathbb{F} は無限体であることを仮定する. d 次元次数付き \mathbb{F} -代数 $R = S/I$ に対し, $R/\Theta R$ が 0 次元環となるような一次式の列 $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_d$ を線形な巴系 (linear system of parameters) と呼ぶ. \mathbb{F} が無限体であることを仮定すると, 線形な巴系は必ず存在することが知られている. 単体的複体の次元が d である時, その Stanley–Reisner 環の次元は $d+1$ である事を注意しておく. 多様体の三角形分割を代数的に研究する際には次の定理が基本的な道具となる.

定理 4.7 (Novik–Swartz [NS1]). Δ を $(d-1)$ 次元 Buchsbaum 単体的複体, $R = \mathbb{F}[\Delta]$, $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_d$ を R の線形な巴系とする. この時, 任意の $i = 1, 2, \dots, d-1$ について次が成り立つ

$$\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta R)_i = \binom{d}{i} \beta_{i-1}(\Delta; \mathbb{F}).$$

但し, $(R/\Theta R)_i$ は $R/\Theta R$ の i 次斉次成分を表すとする.

Δ が Buchsbaum である時, $\beta_{i-1}(\Delta)$ は $i \neq d$ の場合には極大イデアル $\mathfrak{m} \subset S$ に関する局所コホモロジー $H_{\mathfrak{m}}^i(\mathbb{F}[\Delta])$ の長さに一致する. また, 上の結果は局所環の場合には後藤 [Go] により本質的に証明されている事も補足しておく.

Novik と Swartz は上の定理を用いて Kühnel の予想を解決したのであるが, その話をする前に, 何故, 上の定理が頂点数の下限と関係するのか具体例を用いて解説しておこう. M をメビウスの帯とする. この時 $\beta_1(M) = 1$ であり, メビウスの帯を三角形分割する為には 5 個の頂点が必要であることが知られている. Δ をメビウスの帯の n 頂点三角形分割とし, n が 5 以上であることを定理 4.7 を用いて示してみよう. $R = \mathbb{F}[\Delta]$ とし $\Theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3$ を R の線形な巴系とする. 定理 4.7 より

$$\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta R)_2 \leq 3 \cdot \beta_1(M) = 3$$

という不等式を得る. 一方, R は $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ を割った環であるから, R を Θ で割ることで実質的に変数が 3 つ減り, $R/\Theta R$ は $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_{n-3}]/J$ という形の \mathbb{F} -代数と同型になる. すると,

$$\binom{n-2}{2} = \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_1, \dots, x_{n-3}])_2 \leq \dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta R)_2 \leq 3$$

という一連の不等式を得るが、これが $n \geq 5$ を導く。

メビウスの帯に関する上の議論を一般化すると、予想 4.3 に近い形の次の不等式が得られることが簡単にわかる。

系 4.8. Δ が丁度 n 個の頂点を持つ d 次元 Buchsbaum 単体的複体である時、次が成り立つ

$$\binom{n-d-1+j}{j+1} \geq \binom{d+1}{j+1} \beta_j(\Delta; \mathbb{F}) \quad (j = 1, 2, \dots, d-1).$$

残念ながら上の系から Kühnel の予想が導かれるわけではなく、Kühnel の予想の証明にはもう一工夫必要であるが、少なくとも上の議論から、定理 4.7 と頂点数の最小値の間に良い関係があることが見てとれる。定理 4.7 から定理 4.4, 4.5, 4.6 をどう導くかを説明するのは少し大変なので、本稿では定理 4.6 を導く次の定理を紹介するに止めておくことにする。

定理 4.9 (M–Nevo [MN, Theorem 5.4]). Δ を境界のない向付け可能な \mathbb{F} -homology d -manifold とし、 $R = \mathbb{F}[\Delta]$, $\Theta^+ = \theta_1, \dots, \theta_{d+1}, \theta_{d+2}$ を十分一般的な一次式とする時、次が成り立つ

$$\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta^+R)_2 \geq \binom{d+2}{2} \beta_1(\Delta; \mathbb{F}).$$

上の定理は、大雑把に言うと、(十分一般的な) 線形な巴系にもう一つ一次式を追加して Stanley–Reisner 環を割る際にも、次数 2 の斉次成分において定理 4.7 と同等の性質が成り立つという結果である。尚、上の定理を認めると、向付け可能な場合には定理 4.6 は以下のように簡単に示せる。

$$\binom{n-d-1}{2} = \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_1, \dots, x_{n-d-2}])_2 \geq \dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta^+R)_2 \geq \binom{d+2}{2} \beta_1(\Delta; \mathbb{F}).$$

(向付け不可能な場合の証明はもう少し複雑な手順を取る。詳しくは [Mu2] を見よ。)

定理 4.9 を考えると、一般に次が成り立つことが予想される。

予想 4.10. Δ を境界の無い (向付け可能な) \mathbb{F} -homology d -manifold とし、 $R = \mathbb{F}[\Delta]$ とする。ある一次独立な一次式の列 $\Theta^+ = \theta_1, \dots, \theta_{d+1}, \theta_{d+2}$ が存在し、次が成り立つ

$$\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta^+R)_{j+1} \geq \binom{d+2}{j+1} \beta_j(\Delta; \mathbb{F}) \quad (j = 1, 2, \dots, \lfloor (d-1)/2 \rfloor).$$

尚、上で書いた定理 4.6 の証明方法により、上の予想が正しければそこから予想 4.3 が導かれることもわかる。

最後に少し文献の紹介をしておく。本稿では最小頂点三角形分割に関する話題のみを扱ったが、定理 4.7 は多様体の三角形分割の面の個数の研究に様々な応用されている。この応用については、§2 で紹介した Swartz と Klee–Novik による素晴らしいサーベイ [Sw2, KN] に紹介されているので其方を参照してほしい。此方も本文中で既に述べたが、最小頂点三角形分割についてさらに詳しく知りたい場合は Lutz によるサーベイ [Lu] を読むことを勧める。また、定理 4.7 は単体的セル複体と呼ばれるセル複体のクラスに対して応用することもできる。この応用については第 56 回の代数学シンポジウムで報告させて頂いた [Mu1] のでそちらを参照してほしい。本稿とは違い [Mu1] には代数的なことももう少し詳細に解説している。

REFERENCES

- [BD] B. Bagchi and B. Datta, Minimal triangulations of sphere bundles over the circle, *J. Combin. Theory, Ser. A* **115** (2008), 737–752.
- [BK] U. Brehm and W. Kühnel, Combinatorial manifolds with few vertices, *Topology* **26** (1987), 465–473.
- [CSS] J. Chestnut, J. Sapir and E. Swartz, Enumerative properties of triangulations of spherical bundles over S^1 , *European J. Combin.* **29** (2008), 662–671.
- [DS] B. Datta and N. Singh, An infinite family of tight triangulations of manifolds, *J. Combin. Theory, Ser. A* **120** (2013), 2148–2163.
- [Go] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, *J. Alg.* **85** (1983), 490–534.
- [He] P.J. Heawood, Map-color theorem, *Quart. J. Pure Appl. Math.* (1890) **24**, 332–338.
- [Kü] W. Kühnel, Higher dimensional analogues of Császár’s torus, *Results. Math.* **9** (1986), 95–106.
- [JR] M. Jungerman and G. Ringel, Minimal triangulations on orientable surfaces, *Acta. Math.* **145** (1980), 121–154.
- [KN] S. Klee and I. Novik, Face enumeration on simplicial complexes, arXiv:1505.06380, 2015.
- [Lu] F. Lutz, Triangulated Manifolds with Few Vertices: Combinatorial Manifolds, arXiv:math/0506372.
- [Mu1] 村井 聡, 単体的セル複体の面の数え上げの話, 第 56 回代数学シンポジウム報告集.
- [Mu2] S. Murai, Tight combinatorial manifolds and graded Betti numbers, *Collect. Math.* **66** (2015), 367–386.
- [MN] S. Murai and E. Nevo, On r -stacked triangulated manifolds, *J. Algebraic Combin.* **39** (2014), 373–388.
- [No] I. Novik, Upper bound theorems for homology manifolds, *Israel J. Math.* **108** (1998), 45–82.
- [NS1] I. Novik and E. Swartz, Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets, *Adv. Math.* **222** (2009), 2059–2084.
- [NS2] I. Novik and E. Swartz, Applications of Klee’s Dehn-Sommerville relations, *Discrete Comput. Geom.* **42** (2009), 261–276.
- [Ri] G. Ringel, Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann, *Math. Ann.* **130** (1955), 314–326.
- [Sc] P. Schenzel, On the number of faces of simplicial complexes and the purity of Frobenius, *Math. Z.* **178** (1981), 125–142.
- [St] R.P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, Second edition, Progr. Math., vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [Sw1] E. Swartz, Face enumeration: from spheres to manifolds, *J. Eur. Math. Soc.* **11** (2009), 449–485
- [Sw2] E. Swartz, Thirty-five years and counting, arXiv1411.0987, 2014.

SATOSHI MURAI, DEPARTMENT OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY, OSAKA UNIVERSITY, SUITA, OSAKA, 565-0871, JAPAN

Derived category and Cohen-Macaulay representations

Osamu Iyama

Nagoya University

August 31, 2015

$$R := k[x]/(x^n)$$

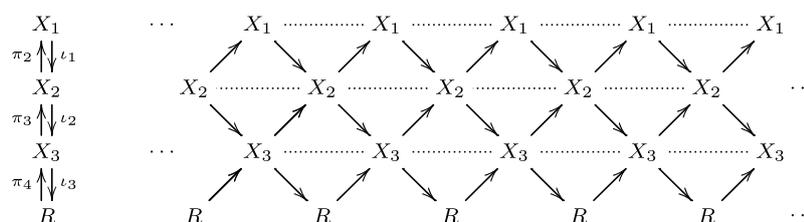
- Indecomposable R -modules are

$$X_i = k[x]/(x^i) \quad (1 \leq i \leq n)$$

- Irreducible morphisms are

$$\pi_i : X_i \twoheadrightarrow X_{i-1} \quad \text{and} \quad \iota_{i-1} : X_{i-1} \xrightarrow{x} X_i$$

- Auslander-Reiten quiver of $\text{mod } R$ is



Gluing Auslander-Reiten sequences

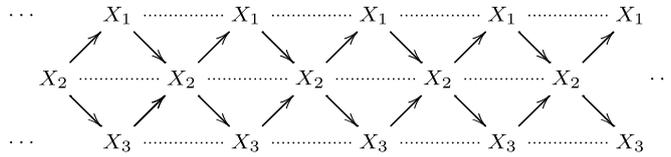
$$0 \rightarrow X_i \xrightarrow{(\pi_i \ \iota_i)} X_{i-1} \oplus X_{i+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \iota_{i-1} \\ -\pi_{i+1} \end{pmatrix}} X_i \rightarrow 0$$

Relations of $\text{mod } R$ are

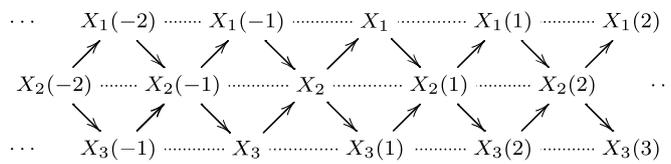
$$(X_i \xrightarrow{\pi_i} X_{i-1} \xrightarrow{\iota_{i-1}} X_i) = (X_i \xrightarrow{\iota_i} X_{i+1} \xrightarrow{\pi_{i+1}} X_i) \quad (1 \leq i < n)$$

$$0 = (X_1 \xrightarrow{\iota_1} X_2 \xrightarrow{\pi_2} X_1) \quad (R \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \xrightarrow{\iota_{n-1}} R) \neq 0$$

- $\text{mod } R := (\text{mod } R)/[R] : \text{stable category}$



- $\text{mod}^{\mathbb{Z}} R := (\text{mod}^{\mathbb{Z}} R)/[R] : \text{stable category}$



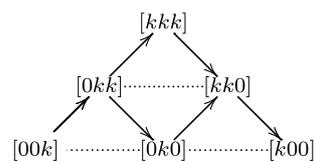
$$\mathbb{A}_n \quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

$$k\mathbb{A}_n = \begin{bmatrix} k & k & \dots & k \\ 0 & k & \dots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix} : \text{path algebra over a field } k$$

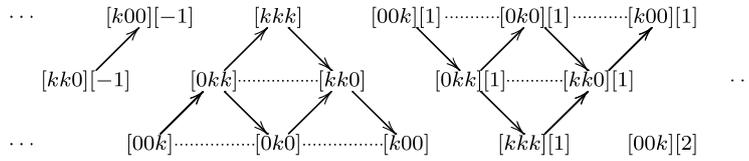
- Indecomposable $k\mathbb{A}_n$ -modules are

$$[0 \ \dots \ 0 \ k \ \dots \ k \ 0 \ \dots \ 0] \quad (1 \leq i \leq j \leq n)$$

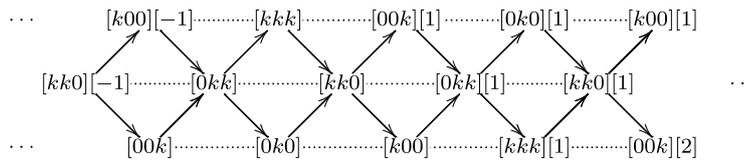
- Auslander-Reiten quiver of $\text{mod } k\mathbb{A}_3$ is



- Glueing



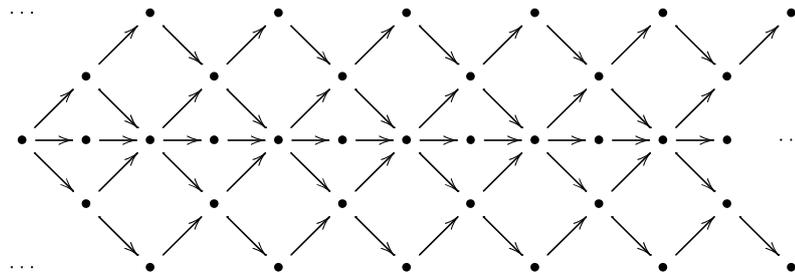
we obtain Auslander-Reiten quiver of $D^b(\text{mod } k\mathbb{A}_3)$



\exists equivalence of categories
 $\text{mod}^{\mathbb{Z}}(k[x]/(x^n)) \simeq D^b(\text{mod } \mathbb{A}_{n-1})$

- [Gabriel, Happel] Q : Dynkin quiver $(\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_{6,7,8})$
 \implies Auslander-Reiten quiver of $D^b(\text{mod } kQ)$ is $\mathbb{Z}Q$

Example : For $Q = \mathbb{E}_6$, $\mathbb{Z}Q$ is



Cohen-Macaulay representation

$T = k[[T_1, \dots, T_d]]$: formal power series ring

R : module-finite T -algebra

$\text{mod } R$: category of finitely generated R -modules

- No duality $\text{mod } R \simeq \text{mod } R^{\text{op}}$
- $\text{mod } R$ does not have enough injectives

$\text{CM } R := \{X \in \text{mod } R \mid X \text{ is a free } T\text{-module}\}$
: category of *Cohen-Macaulay* R -modules

- \exists duality $\text{Hom}_T(-, T) : \text{CM } R \simeq \text{CM } R^{\text{op}}$

- R is a T -order (i.e. $R \in \text{CM } R$) \implies
 $\text{CM } R$ has enough projectives and enough injectives

Commutative T -orders = Cohen-Macaulay rings with a Noetherian normalization T

R : *isolated singularity* $\iff \text{gl.dim}(T \otimes_R R_{\mathfrak{p}}) = \dim T_{\mathfrak{p}}$
for any non-maximal prime ideal \mathfrak{p} of T

Theorem [Auslander]

R : T -order

- R is an isolated singularity \implies
 $\text{CM } R$ has *Auslander-Reiten sequences*

R : CM-finite \iff There are only finitely many indecomposable CM R -modules

- CM-finite \implies isolated singularity

R : CM-finite with $\dim R \leq 2 \implies$ The category CM R is mostly reconstructed from its Auslander-Reiten quiver

Example : Simple singularities $R = k[[x_0, \dots, x_d]]/(f)$

type	$f(x_0, \dots, x_d)$
A_n	$x_0^{n+1} + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2$
D_n	$x_0^{n-1} + x_0x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2$
E_6	$x_0^4 + x_1^3 + x_2^2 + \dots + x_d^2$
E_7	$x_0^3x_1 + x_1^3 + x_2^2 + \dots + x_d^2$
E_8	$x_0^5 + x_1^3 + x_2^2 + \dots + x_d^2$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Classification of CM-finite Cohen-Macaulay rings

Under reasonable assumptions

- dim 0 : $k[x]/(x^n)$
- dim 1 : Simple singularities and their overrings [Jacobinski, Drozd-Kirichenko-Roiter]
- dim 2 : Quotient singularities [Auslander, Esnault]
- Gorenstein case : Simple singularities [Knörrer, Buchweitz-Greuel-Schreyer]

\exists further results for non-commutative case

Navigation icons: back, forward, search, etc.

$\underline{\text{CM}} R := (\text{CM } R)/[R] : \text{Stable category}$

Properties

Assume R is Gorenstein

(i.e. $\text{Hom}_T(R, T)$ is a projective R -module)

- [Happel] $\underline{\text{CM}} R$ is a *triangulated category*

- *Suspension functor* is given by cosyzygy

$$\Omega^{-1} : \underline{\text{CM}} R \simeq \underline{\text{CM}} R$$

- *Triangles* are induced from short exact sequences

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

- [Auslander] $R : \text{commutative} \implies \underline{\text{CM}} R$ is

$(d-1)$ -Calabi-Yau : $\underline{\text{Hom}}_R(X, Y) \simeq \text{DExt}_R^{d-1}(Y, X)$

Tilting theory

Tilting theory reduces the study of a triangulated category to that of a derived category of a ring

$\mathcal{T} : \text{triangulated category}$

Definition

$U \in \mathcal{T} : \text{tilting object} \iff$

- $\forall i \neq 0 \text{ Hom}_{\mathcal{T}}(U, U[i]) = 0$

- U generates \mathcal{T} (as a thick subcategory)

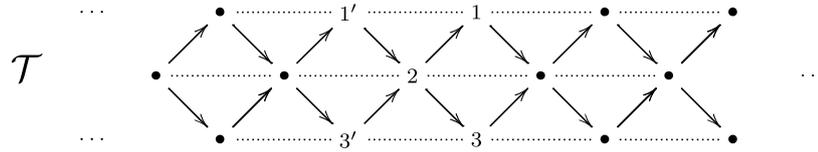
Example : $\text{K}^b(\text{proj } \Lambda)$ has a tilting object

$$\Lambda = (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{0} \Lambda \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$$

Tilting Theorem [Rickard, Keller]

\mathcal{T} : algebraic idempotent complete triangulated category
 $U \in \mathcal{T}$: tilting object $\implies \mathcal{T} \simeq K^b(\text{proj End}_{\mathcal{T}}(U))$

Example



$$\text{End}_{\mathcal{T}}(U_1) = k[1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3]$$

$$\text{End}_{\mathcal{T}}(U_2) = k[1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3']$$

$$\text{End}_{\mathcal{T}}(U_3) = k[1' \longleftarrow 2 \longrightarrow 3']$$

They have the same derived categories

Applications of Tilting theory

- Group theory
- Lie theory
- Algebraic geometry
- Mirror symmetry
- ...

Aim of this talk

Apply Tilting theory to CM representations

G : finitely generated abelian group

Assume that R is Gorenstein and G -graded
 (i.e. $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ and $R_g R_h \subset R_{g+h}$)

- $\text{CM}^G R$: category of G -graded CM R -modules
- $\underline{\text{CM}}^G R := (\text{CM}^G R)/[R]$: *stable category*

This is a triangulated category

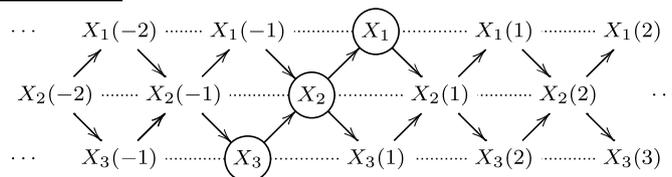
Key observation

- $\text{rank } G = 1 \implies \underline{\text{CM}}^G R$ is often triangle equivalent to the *derived category* of a finite dimensional algebra
 $\iff \underline{\text{CM}}^G R$ has a tilting object
- $\text{rank } G = 0 \implies \underline{\text{CM}}^G R$ is often triangle equivalent to the *cluster category* of a finite dimensional algebra

$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$: \mathbb{Z} -graded Gorenstein k -algebra

- [Happel, Yamaura] $\dim R = 0$ and $\text{gl.dim } R_0 < \infty \implies \underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} R$ has a tilting object $T := \bigoplus_{i \geq 0} R(i)_{\geq 0}$

Example : $R = k[x]/(x^n) \implies \underline{\text{End}}_R^{\mathbb{Z}}(T) \simeq k\mathbb{A}_{n-1}$



- [Buchweitz-I.-Yamaura, in preparation]

A result for $d = 1$

- [Geigle-Lenzing, Kajiura-Saito-Takahashi]

R is a simple singularity with $\dim R = 2 \implies$

$\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} R$ has a tilting object and $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{Z}} R \simeq D^b(\text{mod } kQ)$

In this case, the *preprojective algebra* Π and an idempotent $e \in \Pi_0$ satisfy $e\Pi e = R$ and $\Pi_0/(e) = kQ$

- [Amiot-I.-Reiten]

A result replacing Π by a \mathbb{Z} -graded $(d + 1)$ -Calabi-Yau algebra with Gorenstein parameter 1

- [Ueda, Iyama-Takahashi, Mori-Ueyama]

Results for quotient singularities

Geigle-Lenzing complete intersection

$d = 1$ [Geigle-Lenzing, 1987]

$d \geq 0$ [Herschend-I.-Minamoto-Oppermann, 2014]

- k : field
- $d \geq 0$
- $C := k[T_0, \dots, T_d]$: polynomial algebra
- $n \geq 0$
- $\ell_1, \dots, \ell_n \in C$: linear forms
- $p_1, \dots, p_n \geq 2$: integers (*weights*)

Definition

- $R := C[X_1, \dots, X_n]/(X_i^{p_i} - \ell_i \mid 1 \leq i \leq n)$
- $\mathbb{L} := \langle \vec{c}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle / \langle p_i \vec{x}_i - \vec{c} \mid 1 \leq i \leq n \rangle$

- \mathbb{L} is an abelian group of rank one
- R is an \mathbb{L} -graded k -algebra : $\deg T_j := \vec{c}$, $\deg X_i := \vec{x}_i$
- R is a complete intersection ring in dimension $d + 1$

Definition

(R, \mathbb{L}) : Geigle-Lenzing (GL) complete intersection \iff
 \forall at most $d + 1$ elements from ℓ_1, \dots, ℓ_n are linearly independent

- $\text{Ext}_R^d(k, R(\vec{\omega})) \simeq k$ (i.e. R has an a -invariant $\vec{\omega}$) for
 $\vec{\omega} := (n - d - 1)\vec{c} - \sum_{i=1}^n \vec{x}_i$
- Auslander-Reiten duality
 $\text{Hom}_{\text{mod } \mathbb{L}R}(X, Y) \simeq D\text{Ext}_{\text{mod } \mathbb{L}R}^d(Y, X(\vec{\omega}))$

- $n \leq d + 1 \iff R$ is regular
- $n = d + 2 \iff R$ is a hypersurface
 $R \simeq k[X_1, \dots, X_{d+2}] / (\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i^{p_i})$
- The case $d = 0$
 $R \simeq k[X_1, \dots, X_n] / (X_i^{p_i} - \alpha_i X_1^{p_1})_{2 \leq i \leq n}$

The case $d = 1$

(R, \mathbb{L}) is the weighted projective line of Geigle-Lenzing

$$R \simeq k[X_1, \dots, X_n] / (X_i^{p_i} - \alpha_{i1} X_1^{p_1} - \alpha_{i2} X_2^{p_2})_{3 \leq i \leq n}$$

- domestic $\iff (p, q), (2, 2, p), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$

In this case the Veronese subring $R^{(\vec{\omega})}$ is a simple singularity in dimension 2 and $\text{CM}^{\mathbb{L}} R \simeq \text{CM}^{\mathbb{Z}} R^{(\vec{\omega})}$

Theorem [HIMO]

\exists a finite dimensional k -algebra A^{CM} and
a triangle equivalence $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{L}} R \simeq \text{D}^b(\text{mod } A^{\text{CM}})$

The case $n = d + 2$: [Kussin-Meltzer-Lenzing] ($d = 1$),
[Futaki-Ueda], [Ballard-Favero-Katzarkov]

- \mathbb{L} has a partial order :
 $\vec{x} \geq \vec{y} \iff \vec{x} - \vec{y} \in \langle \vec{c}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle_{\text{monoid}}$
- $\vec{\delta} := d\vec{c} + 2\vec{\omega} \in \mathbb{L}$
- $A^{\text{CM}} := (R_{\vec{x}-\vec{y}})_{0 \leq \vec{x}, \vec{y} \leq \vec{\delta}}$: *CM-canonical algebra*
 k -algebra by product in R and matrix multiplication

Example : $n = d + 2 \implies$

$$\vec{\delta} = \sum_{i=1}^n (p_i - 2)\vec{x}_i \text{ and } A^{\text{CM}} = \bigotimes_{i=1}^n k\mathbb{A}_{p_i-1}$$

Example : $d = 1$ with weights $(2, 3, 4)$

$$R = k[X_1, X_2, X_3]/(\alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^3 + \alpha_3 X_3^4)$$

$$A^{\text{CM}} = k\mathbb{A}_2 \otimes k\mathbb{A}_3 \quad \begin{array}{ccccc} \vec{x}_2 & \longrightarrow & \vec{x}_2 + \vec{x}_3 & \longrightarrow & \vec{\delta} = \vec{x}_2 + 2\vec{x}_3 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \vec{x}_3 & \longrightarrow & 2\vec{x}_3 \end{array}$$

Corollary (Knörrer periodicity)

$(R, \mathbb{L}), (R', \mathbb{L}')$: GL hypersurfaces with weights
 (p_1, \dots, p_{d+2}) and $(2, p_1, \dots, p_{d+2})$ respectively \implies
 $\underline{\text{CM}}^{\mathbb{L}} R \simeq \underline{\text{CM}}^{\mathbb{L}'} R'$

(R, \mathbb{L}) : *CM-finite* \iff there are only finitely many indecomposable objects in $\text{CM}^{\mathbb{L}}R$ up to degree shift

- [Geigle-Lenzing] For $d = 1$, *CM-finite* \iff domestic

Corollary (Classification) [HIMO]

(R, \mathbb{L}) : GL complete intersection is *CM-finite*

- \iff
- $n \leq d + 1$ (i.e. R is regular) or
 - $n = d + 2$ and weights are $(2, \dots, 2, 2, p)$, $(2, \dots, 2, 3, 3)$, $(2, \dots, 2, 3, 4)$, $(2, \dots, 2, 3, 5)$ (i.e. R is domestic up to Knörrer periodicity)

Higher Auslander-Reiten theory

Definition

A full subcategory $\mathcal{C} \subset \text{CM}^{\mathbb{L}}R$ is *d-cluster tilting* \iff

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{X \in \text{CM}^{\mathbb{L}}R \mid \forall i \in [1, d-1] \text{Ext}_{\text{mod}^{\mathbb{L}}R}^i(\mathcal{C}, X) = 0\} \\ &= \{X \in \text{CM}^{\mathbb{L}}R \mid \forall i \in [1, d-1] \text{Ext}_{\text{mod}^{\mathbb{L}}R}^i(X, \mathcal{C}) = 0\} \end{aligned}$$

and \mathcal{C} is functorially finite

In this case

- $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\vec{\omega})$ holds
- \mathcal{C} has *d-Auslander-Reiten sequences*
 $0 \rightarrow X(\vec{\omega}) \rightarrow C_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow X \rightarrow 0$
- \mathcal{C} has *d-fundamental sequences*
 $0 \rightarrow R(\vec{\omega}) \rightarrow C_{d-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_0 \rightarrow R \rightarrow 0$

Definition

(R, \mathbb{L}) : d -CM-finite

$\iff \exists \mathcal{C} \subset \underline{\text{CM}}^{\mathbb{L}} R$: d -cluster tilting subcategory s.t. \mathcal{C} contains only finitely many isoclasses of indecomposable objects up to shift by $\mathbb{Z}\vec{\omega}$

$d = 1 \implies \text{CM-finite} = 1\text{-CM-finite}$

• Define a group homomorphism $d : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{Z}$ by

$$d(\vec{c}) = 1, d(\vec{x}_i) = \frac{1}{p_i}$$

• $d(\vec{\omega}) = n - d - 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$

• (R, \mathbb{L}) : Fano $\iff d(\vec{\omega}) < 0$

Example : For $d = 1$, Fano \iff domestic

Theorem (Criterion for d -CM-finiteness) [HIMO]

(R, \mathbb{L}) : GL complete intersection

Then (a) \implies (b)+(c) holds

(a) \exists finite dimensional k -algebra A s.t.

$$\text{gl.dim } A \leq d \text{ and } \underline{\text{CM}}^{\mathbb{L}} R \simeq D^b(\text{mod } A)$$

(b) (R, \mathbb{L}) is d -CM-finite

(c) (R, \mathbb{L}) is Fano

Example : These conditions are satisfied if

• $n \leq d + 1$ or

• $n = d + 2$ and weights are

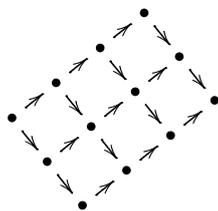
$$(2, 2, p_3, p_4, \dots, p_n), (2, 3, 3, p_4, \dots, p_n),$$

$$(2, 3, 4, p_4, \dots, p_n), (2, 3, 5, p_4, \dots, p_n)$$

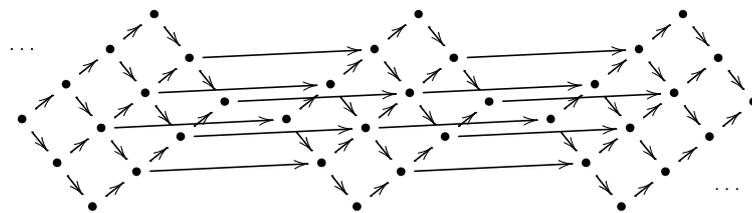
Example : $d = 2$ with weights $(2, 2, 4, 5)$

$$R = k[X_1, X_2, X_3, X_4]/(\alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \alpha_3 X_3^4 + \alpha_4 X_4^5)$$

$$A^{\text{CM}} = k\mathbb{A}_3 \otimes k\mathbb{A}_4$$



A 2-cluster tilting subcategory $\mathcal{C} \subset \text{CM}^{\text{L}} R$:



Conjecture

All conditions (a), (b) and (c) are equivalent

References :

[GL] W. Geigle, H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles, 265–297, Lecture Notes in Math., 1273, Springer, Berlin, 1987.

[HIMO] M. Herschend, O. Iyama, H. Minamoto, S. Oppermann, *Representation theory of Geigle-Lenzing complete intersections*, arXiv:1409.0668.



Buchsbaum-Rim multiplicities of a direct sum of cyclic modules

早坂 太
(北海道教育大学)

本報告では、局所環上長さ有限な加群に付随する不変量であるブックスバウム・リム重複度とその一般化である随伴ブックスバウム・リム重複度について、基本性質の紹介とこれまでに得られた結果の紹介を、イデアルの重複度が持つ性質の類似を中心に行う。第1節では、イデアルの重複度について復習する。特に、Koszul 複体のホモロジー群のオイラー標数との関係を表す Serre の定理を思い出し、Buchsbaum が加群の重複度を考えるに至った動機を説明する。第2節では、Buchsbaum-Rim が導入した加群の重複度の概念とその基本性質をまとめる。また、巴系イデアルの重複度が持つ基本性質の類似について考察し、Hyry 氏との共同研究で得られた結果を紹介する。第3節では、Rees, Kleiman-Thorup によって導入された加群に付随する2変数ブックスバウム・リム関数および重複度の列（随伴ブックスバウム・リム重複度）の概念とその基本性質をまとめる。第4節では、随伴ブックスバウム・リム重複度の具体的計算を巡回加群の直和の場合に行い得られた最近の結果を報告する。これは、Kirby-Rees によって得られていた随伴ブックスバウム・リム重複度を混合重複度で表す公式の（一部の）一般化と考えられる。証明の概略についても触れる。最後の節では、Kleiman-Thorup によって指摘された2変数ブックスバウム・リム関数を記述する、ある標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環の構成法に触れる。

本稿は、第60回代数学シンポジウムにおける講演内容に、講演では詳しく触れることができなかった次の内容を付け加えてまとめたものです。

- 巡回加群の直和の随伴ブックスバウム・リム重複度公式 (定理 4.2) の証明の概略
- 2変数ブックスバウム・リム関数を記述する \mathbb{Z}^2 次数付き環の構成法

講演の機会を与えてくださったことに深く感謝いたします。

1 イデアルのヒルベルト・サミュエル重複度

局所環内のイデアルに付随する重複度の概念は、1950年代初頭に Samuel によって与えられた。イデアルの重複度は、Samuel, 永田らによってイデアル論を基礎にした基礎理論が完成されて以来、局所環論における重要な不変量のひとつとして現在までに多くの詳細な研究がある。Samuel によるイデアルの重複度の定義を復習しよう。

以下、 (R, \mathfrak{m}) はネーター局所環、 $d = \dim R > 0$ とし、 I は R の \mathfrak{m} -準素イデアルとする。このとき、イデアル I に付随する次の長さの関数が考えられる。

$$\lambda_I : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} ; p \mapsto \ell_R(R/I^p)$$

関数 λ_I を (R のイデアル) I のヒルベルト・サミュエル関数 (HS 関数) という. Samuel は, 関数 $\lambda_I(p)$ が十分大きい $p \gg 0$ で d 次多項式関数となることを示した. すなわち, 次数 d の多項式 $P_I(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在して

$$\lambda_I(p) = P_I(p) \text{ for all } p \gg 0$$

を満たす. 多項式 $P_I(x)$ の最高次係数を正規化して得られる正整数を I のヒルベルト・サミュエル重複度 (HS 重複度) と呼び, $e(R/I)$ または $e(I)$ で表す.

$$e(R/I) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda_I(p)}{p^d} \times d!$$

イデアルの HS 重複度研究は, その節減をとることによって巴系イデアルのそれに帰着される場合が多く, 巴系イデアルの重複度は様々な良い性質を持つことが知られている. 中でも最も基本的かつ重要な結果として, Koszul 複体のホモロジー群のオイラー標数との関係を明らかにした次の Serre の定理がある.

定理 1.1. (Serre [17], Auslander-Buchsbaum [1])

$\underline{a} = a_1, a_2, \dots, a_n$ はイデアル I の極小生成系, $K_\bullet(\underline{a})$ は列 \underline{a} に関する Koszul 複体とし, $H_i(K_\bullet(\underline{a}))$ で $K_\bullet(\underline{a})$ の i 番目のホモロジー群を表す.

(1) Koszul 複体のホモロジー群のオイラー標数について次が成り立つ.

$$\chi(K_\bullet(\underline{a})) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \ell_R(H_i(K_\bullet(\underline{a}))) = \begin{cases} e(R/I) & (n = d) \\ 0 & (n > d) \end{cases}$$

(2) Koszul 複体のホモロジー群の部分オイラー標数は非負である.

$$\chi_j(K_\bullet(\underline{a})) := \sum_{i \geq j} (-1)^{i-j} \ell_R(H_i(K_\bullet(\underline{a}))) \geq 0 \text{ for all } j \geq 0$$

よって, $n = d$, すなわち, I が巴系イデアルのとき, 不等式

$$e(R/I) \leq \ell_R(R/I)$$

が成り立つ.

特に, R が Cohen-Macaulay ならば, 任意の巴系イデアル I について, $e(R/I) = \ell_R(R/I)$ である. また, この逆も正しいことがよく知られている.

系 1.2. 次は同値である.

- (1) R は Cohen-Macaulay
- (2) 任意の巴系イデアル I について, $e(R/I) = \ell_R(R/I)$
- (3) ある巴系イデアル I について, $e(R/I) = \ell_R(R/I)$

Serre の定理が示唆する形式的な側面のひとつに、イデアルの重複度の概念は、自由加群の間の R 線形写像 $\varphi: R^n \rightarrow R$ に付随する概念、あるいはその余核である巡回加群 $\text{Coker } \varphi = R/I$ に付随する概念と見なすことが自然であることが挙げられる。この視点に立つとき、一般に自由加群の間の R 線形写像、あるいはその余核として現れる（巡回加群とは限らない）有限生成加群の場合に重複度の概念を拡張できないかという問題を考えることは自然である。これが 1960 年代初頭における Buchsbaum の問題であった。¹

問題 1.3. (Buchsbaum)

R 線形写像 $R^n \rightarrow R$ ($1 \times n$ 型行列) に付随する重複度 (および Koszul 複体) の概念を、一般の有限生成自由加群の間の R 線形写像 $R^m \rightarrow R^r$ ($r \times m$ 型行列) に付随する概念に拡張できないか? 言い換えると、 m -準素イデアル I から定義される巡回加群 R/I に付随する重複度の概念を、長さ有限な R 加群の場合に拡張できないか?

2 加群のブックスバウム・リム重複度

1964 年, Buchsbaum-Rim [6] は、イデアルの HS 重複度の拡張概念 (および Koszul 複体の一般化) である加群の重複度の概念 (および一般化された Koszul 複体) を得て、問題 1.3 に対する自然な解答を与えた。Buchsbaum-Rim による加群の重複度の定義を思い出そう。

以下、 C は長さ有限な R 加群とする。 C の極小な有限表示 φ をとり固定しよう。 C の 1 番目のシジジーを $M := \text{Im } \varphi \subset F := R^r$ とおく。

$$R^n \xrightarrow{\varphi} R^r \rightarrow C \rightarrow 0$$

C が長さ有限より、 $n \geq d + r - 1$ に注意する。 φ が導く対称代数の間の射を $\tilde{\varphi} := \text{Sym}_R(\varphi)$ とし、その余核を考える。

$$\text{Sym}_R(R^n) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} S := \text{Sym}_R(F) \rightarrow \text{Coker } \tilde{\varphi} \rightarrow 0$$

$\text{Coker } \tilde{\varphi}$ は、 S の次数付き部分環 $R[M] := \text{Im } \tilde{\varphi}$ 上の次数付き加群で、各斉次成分は長さ有限である。よって、次の長さの関数が考えられる。

$$\lambda_M : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} ; p \mapsto \ell_R([\text{Coker } \tilde{\varphi}]_p)$$

関数 λ_M を (F の部分加群) M に付随するブックスバウム・リム関数 (BR 関数) という。 Buchsbaum-Rim は、関数 λ_M が十分大きい $p \gg 0$ で $d + r - 1$ 次多項式関数となることを示した。すなわち、次数 $d + r - 1$ の多項式 $P_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が存在して、

$$\lambda_M(p) = P_M(p) \text{ for all } p \gg 0$$

を満たす。多項式 $P_M(x)$ の最高次係数を正規化して得られる正整数を C のブックスバウム・リム重複度 (BR 重複度) と呼び、 $e(C)$ または $e(M)$ で表す。

$$e(C) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda_M(p)}{p^{d+r-1}} \times (d+r-1)!$$

¹Buchsbaum は次のように述べている。 It was natural at the time that the paper [5, 6] were being written, to try to generalize the notions of Hilbert-Samuel polynomials and multiplicity to the situation of finitely generated modules rather than just cyclic modules, that is, to modules of the form $\text{Coker}(f: R^m \rightarrow R^n), m \geq n$, rather than those of the form $\text{Coker}(f: R^m \rightarrow R)$. ([3, p.69])

BR 重複度 $e(C)$ は, C の有限表示 φ の取り方によらない長さ有限な加群に付随する不変量である. BR 重複度研究は, イdealの場合同様, M の節減をとることで $n = d + r - 1$ を満たす加群のそれに帰着される場合が多い. $n = d + r - 1$ を満たす行列 (R 線形写像) φ を巴系行列, その像 $M = \text{Im } \varphi \subset F = R^r$ を (F における) 巴系加群という.

問題 2.1. 巴系イdealの重複度の場合同様, 巴系加群の BR 重複度を, ある複体のホモロジー群のオイラー標数で表示すること (Serre の定理の類似) は可能か?

Buchsbaum-Rim [6] は, 問題 2.1 に良い解答を与えてくれる複体を構成し, Serre の定理の類似を証明した. 主張を述べる前に, この複体 (BR 複体と呼ばれる) がもつ基本性質を復習しておく. BR 複体は, R 上の $r \times n$ 型行列 $\varphi = (a_{ij})$ (R 線形写像 $\varphi: R^n \rightarrow R^r$) に付随する長さが $n - r + 1$ の自由複体 $BR_{\bullet}(\varphi)$ で次の性質をもつ.

- $r = 1$ ならば, $BR_{\bullet}(\varphi) \cong K_{\bullet}(\varphi)$
- $H_0(BR_{\bullet}(\varphi)) \cong \text{Coker } \varphi =: C$
- grade sensitivity を満たす. すなわち,

$$n - r + 1 = \text{grade } I_r(\varphi) + \max\{i \mid H_i(BR_{\bullet}(\varphi)) \neq (0)\}$$

が成り立つ. ただし, $I_r(\varphi)$ ($= \text{Fitt}_0(C)$) は行列 φ の r 次小行列式で生成される R のイdealを表す.

- $\text{grade } I_r(\varphi)$ が取り得る最大値 $n - r + 1$ をもつとき, $BR_{\bullet}(\varphi)$ は C の自由分解を与える.

ただし, $H_i(BR_{\bullet}(\varphi))$ は φ の BR 複体 $BR_{\bullet}(\varphi)$ の i 番目のホモロジー群を表す.

定理 2.2.² (Buchsbaum-Rim [6])

(1) BR 複体のホモロジー群のオイラー標数について次が成り立つ.

$$\chi(BR_{\bullet}(\varphi)) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \ell_R(H_i(BR_{\bullet}(\varphi))) = \begin{cases} e(C) & (n = d + r - 1) \\ 0 & (n > d + r - 1) \end{cases}$$

(2) 次は同値.

- (i) R は Cohen-Macaulay
- (ii) 任意の巴系行列をもつ長さ有限な R 加群 C について, $e(C) = \ell_R(C)$

イdealの場合の類似で自然に次の問題が考えられる.

問題 2.3. 巴系行列をもつ長さ有限な R 加群 C に対し, 一般に不等式

$$e(C) \leq \ell_R(C)$$

が成り立つか? また, 等号成立なら R は Cohen-Macaulay か?

²Kirby は, 行列 φ と整数 $t \in \mathbb{Z}$ に付随する自由複体の族 $\{K_{\bullet}(\varphi, t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ で $K_{\bullet}(\varphi, 1) \cong BR_{\bullet}(\varphi)$ なるものを構成し ([11]), そのオイラー標数について定理 2.2 の類似が成り立つことを証明した ([12]). 特に, $K_{\bullet}(\varphi, 0) \cong EN_{\bullet}(\varphi)$ が Eagon-Northcott 複体であることから, Cohen-Macaulay 局所環上の任意の巴系行列をもつ長さ有限な R 加群 C について, $e(C) = \ell_R(R/I_r(\varphi))$ が成り立つ.

この問題 2.3 に対し, Hyry 氏との共同研究で次を得た.

定理 2.4. ³ (H-Hyry [9])

(1) BR 複体のホモロジー群の部分オイラー標数は非負である.

$$\chi_j(BR_\bullet(\varphi)) := \sum_{i \geq j} (-1)^{i-j} \ell_R(H_i(BR_\bullet(\varphi))) \geq 0 \text{ for all } j \geq 0$$

よって, $n = d + r - 1$, すなわち, φ が巴系行列のとき, 不等式

$$e(C) \leq \ell_R(C)$$

が成り立つ.

(2) 次は同値.

(i) R は Cohen-Macaulay

(ii) ある巴系行列をもつ長さ有限な R 加群 C について, $e(C) = \ell_R(C)$

この定理 2.4 の BR 重複度に関する不等式および Cohen-Macaulay 局所環の特徴付けは, 次のように BR 関数に関するそれに拡張された. これは, イデアルの HS 関数の場合にも新しい内容を含むと思われる.

定理 2.5. (H-Hyry [10])

(1) $n = d + r - 1$, すなわち, φ が巴系行列のとき, 不等式

$$\lambda_M(p) \geq e(C) \binom{p + d + r - 2}{d + r - 1} \text{ for all } p > 0$$

が成り立つ.

(2) 次は同値. ⁴

(i) R は Cohen-Macaulay

(ii) 任意の巴系行列をもつ R 加群 C について, $\lambda_M(p) = e(C) \binom{p + d + r - 2}{d + r - 1}$ for all $p > 0$

(iii) ある巴系行列をもつ R 加群 C について, $\lambda_M(p) = e(C) \binom{p + d + r - 2}{d + r - 1}$ for some $p > 0$

3 加群の随伴ブックスバウム・リム重複度

加群の重複度 (BR 重複度) の概念は, 1964 年に Buchsbaum-Rim によって導入されて以降, しばらくの間注目されることはなかったが, 1980 年代に Kirby [12] によって見直され, その後, Gaffney によって特異点論分野における研究で用いられ始めたのを契機に本格的な研究が再開された. Gaffney [7] は, BR 重複度と加群の節減の関係について, イデアルの場合と

³定理 2.4(1) の非負性は, $t \geq -1$ に付随する一般化された Koszul 複体 $K_\bullet(\varphi, t)$ に対して成り立つ. 特に, $K_\bullet(\varphi, 0) \cong EN_\bullet(\varphi)$ の部分オイラー標数の非負性から, φ が巴系行列なら $e(C) \leq \ell_R(R/I_r(\varphi))$ も正しい ([9]).

⁴(i) から (ii) は Brennan-Ulrich-Vasconcelos [4] によって最初に証明された.

類似の性質が成り立つことを予想した. この問題に対し, Rees は加群に付随する 2 変数関数を用いて, これを肯定的に解決し, Kirby との共同研究 [13, 14] で BR 重複度を含む一般的な重複度理論を展開した. Kleiman-Thorup [15, 16] は, Kirby-Rees とは異なる手法で, 同時独立に一般的な重複度理論を展開した. これら理論の過程で導入された加群に付随する不変量の列 (BR 重複度をその一部に含む) を随伴ブックスバウム・リム重複度という.

以下, 第 2 節同様, C は長さ有限な R 加群とし, C の自由加群による極小な有限表示 φ を取って固定し, C の 1 番目のシジジーを $M := \text{Im } \varphi \subset F := R^r$ とおき, F の対称代数を $S := \text{Sym}_R(F) = \bigoplus_{p \geq 0} S_p$ とする. $R[M] = \bigoplus_{p \geq 0} M^p$ で M の元が定義する S の 1 次式で生成される S の部分 R 代数 (M の Rees 環) を表す. このとき, 次の 2 変数関数が考えられる.

$$\Lambda_M : \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} ; (p, q) \mapsto \ell_R(S_{p+q}/M^p S_q)$$

関数 Λ_M を (F の部分加群) M に付随する 2 変数ブックスバウム・リム関数 (2 変数 BR 関数) という. Kleiman-Thorup, Kirby-Rees は, 関数 Λ_M は十分大きい $p, q \gg 0$ で全次数 $d+r-1$ 次 2 変数多項式関数となることを示した. すなわち, 全次数 $d+r-1$ の 2 変数多項式 $P_M(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ が存在して,

$$\Lambda_M(p, q) = P_M(p, q) \text{ for all } p, q \gg 0$$

を満たす. 多項式 $P_M(x, y)$ の最高次単項式 $x^{d+r-1-j}y^j$ の係数を正規化して得られる整数を C の随伴ブックスバウム・リム重複度 (随伴 BR 重複度) と呼び, $e^j(C)$ または $e^j(M)$ で表す.

$$P_M(x, y) = \frac{e^j(C)}{(d+r-1-j)!j!} x^{d+r-1-j}y^j + (\text{全次数が } d+r-2 \text{ 以下の項})$$

随伴 BR 重複度 $e^j(C)$ は, C の有限表示 φ の取り方によらない長さ有限な R 加群 C の不変量である.

注意 3.1. (1) 2 変数 BR 関数 $\Lambda_M(p, q)$ を $q = 0$ に固定した関数 $\Lambda_M(p, 0)$ が, BR 関数 $\lambda_M(p)$ である.

(2) 2 変数 BR 関数 $\Lambda_M(p, q)$ は, 加群 $M \subset F$ から自然に構成される, ある標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環のヒルベルト関数に一致する.

2 変数 BR 関数は通常の BR 関数をその一部に完全に含む関数であるが, その漸近挙動を表す多項式の間には自明な関係はない. しかし, Kleiman-Thorup, Kirby-Rees は同時独立に随伴 BR 重複度と通常の BR 重複度の上に次の著しい関係があることを証明した.

定理 3.2. (Kleiman-Thorup [15], Kirby-Rees [14])

(1) 最初の随伴 BR 重複度 $e^0(C)$ は BR 重複度 $e(C)$ に一致する.

$$e^0(C) = e(C)$$

(2) 随伴 BR 重複度は非負整数減少列で, $e^{r-1}(C)$ は正, $e^r(C)$ 以降は 0 である.

$$e^0(C) \geq e^1(C) \geq \dots \geq e^{r-1}(C) > e^r(C) = \dots = e^{d+r-1}(C) = 0$$

4 巡回加群の直和の随伴 BR 重複度の計算

加群の BR 重複度および随伴 BR 重複度の具体的研究は、イデアルの HS 重複度の場合のそれと比べあまり進んでいないが、巡回加群の直和の場合には、イデアルの混合重複度との関係を明らかにした Kirby-Rees による次の結果がある。⁵

定理 4.1. (Kirby-Rees [14])

I_1, \dots, I_r は R の \mathfrak{m} -準素イデアルとし、 $C = R/I_1 \oplus \dots \oplus R/I_r$ とおく。

(1) C の BR 重複度はイデアル I_1, \dots, I_r の混合重複度全ての和と一致する。

$$e(C) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = d \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} e_{i_1 \dots i_r}(I_1, \dots, I_r)$$

(2) $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_r$ と仮定する。このとき、 C の随伴 BR 重複度について次が成り立つ。

$$e^j(C) = e(R/I_{j+1} \oplus \dots \oplus R/I_r) \text{ for all } j = 0, 1, \dots, r-1$$

一般の巡回加群の直和の場合にも随伴 BR 重複度を通常の BR 重複度で表す公式はあるか？ この問題に対し、次の部分的解答を得た。

定理 4.2. I_1, \dots, I_r は R の \mathfrak{m} -準素イデアルとし、 $C = R/I_1 \oplus \dots \oplus R/I_r$ とおく。このとき、次が成り立つ。

$$e^{r-1}(C) = e(R/I_1 + \dots + I_r)$$

特に、 $I_1, \dots, I_{r-1} \subset I_r$ のとき、 $e^{r-1}(C) = e(R/I_r)$ である。

証明. (概略) $M := I_1 \oplus \dots \oplus I_r \subset F := R^r$, $S := R[t_1, \dots, t_r] = \bigoplus_{p \geq 0} S_p$ とおく。随伴 BR 重複度を計算するには、 $R[M] = R[I_1 t_1, \dots, I_r t_r] = \bigoplus_{p \geq 0} M^p \subset S$ としてよい。 $p, q \geq 0$ に対し、

$$H_{p,q} := \{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid |\ell| := \ell_1 + \dots + \ell_r = p + q\}$$

とおく。 $\ell \in H_{p,q}$ に対し、 R のイデアル $J_{p,q}(\ell)$ を次で定める。

$$J_{p,q}(\ell) := \sum_{\substack{|\mathbf{i}|=p \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \ell}} \mathbf{I}^{\mathbf{i}} = \sum_{\substack{|\mathbf{i}|=p \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \ell}} I_1^{i_1} \dots I_r^{i_r}$$

このとき、 $\Lambda_M(p, q) = \sum_{\ell \in H_{p,q}} \ell_R(R/J_{p,q}(\ell))$ である。 $\Lambda_M(p, q)$ の漸近挙動を調べるには、 $q \geq (r-1)p \gg 0$ としてよい。このとき、任意の $\ell \in H_{p,q}$ について、少なくともひとつは $\ell_i \geq p$ なる成分をもつことに注意する。 $k = 1, \dots, r$ に対し、

$$H_{p,q}^{(k)} := \{\ell \in H_{p,q} \mid \#\{i \mid \ell_i \geq p\} = k\}$$

と定め、 $H_{p,q}$ をこれらで分割すると、

$$\Lambda_M(p, q) = \sum_{k=1}^r \sum_{\ell \in H_{p,q}^{(k)}} \ell_R(R/J_{p,q}(\ell))$$

⁵この他の BR 重複度および 2 変数 BR 関数の具体的研究として、例えば [2] や [8] などがある。

である. $\Lambda_M^{(k)}(p, q) := \sum_{\ell \in H_{p,q}^{(k)}} \ell_R(R/J_{p,q}(\ell))$ とおくと次が正しい.

Claim 任意の $q \geq (r-1)p \gg 0$ について,

$$(1) \Lambda_M^{(r)}(p, q) = \binom{q-(r-1)(p-1)}{r-1} \ell_R(R/(I_1 + \cdots + I_r)^p)$$

$$(2) \Lambda_M^{(r-1)}(p, q) = \binom{q-(r-2)(p-1)}{r-2} \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=0}^{p-1} \ell_R(R/(I_1 + \cdots + \widehat{I}_j + \cdots + I_r)^{p-i} (I_1 + \cdots + I_r)^i) \right) + (q \text{ の次数が } r-3 \text{ 以下})$$

(3) 任意の $1 \leq k \leq r-2$ に対し, $\deg_y g_k(x, y) \leq k-1$ なる多項式 $g_k(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ が存在して, $\Lambda_M^{(k)}(p, q) \leq g_k(p, q)$ を満たす.

従って, $\deg_y g(x, y) \leq r-2$ なる多項式 $g(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ が存在して, $\Lambda_M(p, q) - \Lambda_M^{(r)}(p, q) \leq g(p, q)$ for all $q \geq (r-1)p \gg 0$ とできる. 故に, $\deg_y f(x, y) \leq r-2$ なる多項式 $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ が存在して, $\Lambda_M(p, q) - \Lambda_M^{(r)}(p, q) = f(p, q)$ for all $q \geq (r-1)p \gg 0$ を満たす. $\Lambda_M(p, q) = \Lambda_M^{(r)}(p, q) + f(p, q)$ の両辺の $p^d q^{r-1}$ の係数を比較して, 定理の主張を得る. \square

この証明から, $r=3$ の場合には残る $e^1(C)$ についても次の公式が成り立つことがわかる.

系 4.3. $I := I_1 + I_2 + I_3, I_{ij} := I_i + I_j$ ($1 \leq i < j \leq 3$) とおくと, 次が成り立つ.

$$e^1(R/I_1 \oplus R/I_2 \oplus R/I_3) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} e(R/I_{ij} \oplus R/I) - 2(d+1)e(R/I)$$

A 次数付き環拡大に付随する次数環

2変数BR関数 $\Lambda_M(p, q)$ は加群 $M \subset F$ から自然に構成される, ある標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環のヒルベルト関数に一致する (注意 3.1(2)). これは, Kleiman-Thorup [16] によって指摘され, BR 重複度理論の一部が大幅に簡略化された. この節では, この標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環の構成法を一般の次数付き環拡大の場合に与える.

以下, $A \subset B$ は標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環拡大で $A_0 = B_0 = R$ なるものとする. $\mathcal{R} := \mathcal{R}(A_1 B) = B[A_1 T] \subset B[T]$ を B のイデアル $A_1 B$ の Rees 環とし, $\mathcal{R}' := \mathcal{R}'(A_1 B) = B[A_1 T, T^{-1}] \subset B[T, T^{-1}]$ を拡大 Rees 環, $G := \mathcal{R}'/T^{-1}\mathcal{R}'$ を随伴次数環とする. ここで, T は不定元である. 多項式環 $B[T]$ を $\deg T = (1, -1)$, B_n の元の次数を $(0, n)$ と定めることで \mathbb{Z}^2 次数付き環とみなす.

命題 A.1. (1) \mathcal{R} は $B[T]$ の標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き部分環で,

$$\mathcal{R}_{(p,q)} \cong \begin{cases} A_p B_q & (p, q \geq 0) \\ (0) & (other) \end{cases}$$

(2) \mathcal{R}' は $B[T, T^{-1}]$ の \mathbb{Z}^2 次数付き部分環で,

$$\mathcal{R}'_{(p,q)} \cong \begin{cases} A_p B_q & (p, q \geq 0) \\ B_{p+q} & (p < 0, q \geq -p) \\ (0) & (other) \end{cases}$$

(3) G は標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環で,

$$G_{(p,q)} \cong \begin{cases} A_p B_q / A_{p+1} B_{q-1} & (p, q \geq 0) \\ (0) & (\text{other}) \end{cases}$$

G 上の多項式環 $G[u]$ を, $G_{(1,0)}$ の元の次数を $(1, 0, 0)$, $G_{(0,1)}$ の元の次数を $(0, 1, 0)$, $\deg u = (0, 0, 1)$ と定めることで \mathbb{Z}^3 次数付き環とみなす.

$$\mathcal{C} := \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

とおき,

$$\mathcal{H} := \sum_{\iota(i,j,k) \in \mathcal{C}} G[u]_{(i,j,k)} \subset G[u]$$

と定める.

命題 A.2. (1) \mathcal{H} は $G[u]$ の \mathbb{Z}^3 次数付き部分環で, $\mathcal{H} = R[G_{(1,0)}u, G_{(0,1)}u, G_{(0,1)}]$ である.

(2) \mathcal{H} は, $G_{(1,0)}u$ および $G_{(0,1)}u$ の元の次数を $(1, 0)$, $G_{(0,1)}$ の元の次数を $(0, 1)$ と定めることで標準的 \mathbb{Z}^2 次数付き環の構造をもつ. このとき, 任意の $p, q \geq 0$ について,

$$\mathcal{H}_{(p,q)} \cong \bigoplus_{\substack{i+j=p+q \\ 0 \leq i \leq p}} A_i B_j / A_{i+1} B_{j-1}$$

である. ここで, 次のフィルトレーションがあることに注意する.

$$B_{p+q} \supset A_1 B_{p+q-1} \supset \cdots \supset A_p B_q \supset A_{p+1} B_{q-1}$$

ここまでの議論を (前節までの記号・状況で) $A = R[M] \subset B = S$ として適用すると,

$$\begin{aligned} \Lambda_M(p, q) &= \ell_R(S_{p+q}/M^p S_q) \\ &= \ell_R(S_{p+q}/M S_{p+q-1}) + \ell_R(M S_{p+q-1}/M^2 S_{p+q-2}) + \cdots + \ell_R(M^{p-1} S_{q+1}/M^p S_q) \\ &= \ell_R(\mathcal{H}_{(p-1, q+1)}) \end{aligned}$$

となり, $\Lambda_M(p, q)$ は $\mathcal{H}(-1, 1)$ のヒルベルト関数に一致することがわかる.

参考文献

- [1] M. Auslander and D. Buchsbaum, Codimension and multiplicity, Ann. of Math. (2) 68 (1958), 625–657
- [2] C. Biviá-Ausina, The integral closure of modules, Buchsbaum-Rim multiplicities and Newton polyhedra, J. London Math. Soc. (2) 69 (2004), 407–427
- [3] G. Boffi and D. A. Buchsbaum, Threading homology through algebra: selected patterns, Oxford Mathematical Monographs 2006

- [4] J. Brennan, B. Ulrich and W. V. Vasconcelos, The Buchsbaum-Rim polynomial of a module, *J. Algebra* 241 (2001), 379–392
- [5] D. A. Buchsbaum, A generalized Koszul complex. I. *Trans. Amer. Math. Soc.* 111 (1964), 183–196
- [6] D. A. Buchsbaum and D. S. Rim, A generalized Koszul complex. II. Depth and multiplicity, *Trans. Amer. Math. Soc.* 111 (1964), 197–224
- [7] T. Gaffney, Multiplicities and equisingularity of ICIS germs. *Invent. Math.* 123 (1996), 209–220
- [8] F. Hayasaka, A computation of Buchsbaum-Rim functions of two variables in a special case, to appear in *Rocky Mountain J. Math*
- [9] F. Hayasaka and E. Hyry, A note on the Buchsbaum-Rim multiplicity of a parameter module, *Proc. Amer. Math. Soc.* 138 (2010), 545–551
- [10] F. Hayasaka and E. Hyry, On the Buchsbaum-Rim function of a parameter module, *J. Algebra* 327 (2011), 307–315
- [11] D. Kirby, A sequence of complexes associated with a matrix, *J. London Math. Soc.* (2) 7 (1974), 523–530
- [12] D. Kirby, On the Buchsbaum-Rim multiplicity associated with a matrix, *J. London Math. Soc.* (2) 32 (1985), no. 1, 57–61
- [13] D. Kirby and D. Rees, Multiplicities in graded rings. I. The general theory. *Commutative algebra: syzygies, multiplicities, and birational algebra* (South Hadley, MA, 1992), 209–267, *Contemp. Math.*, 159, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994
- [14] D. Kirby and D. Rees, Multiplicities in graded rings. II. Integral equivalence and the Buchsbaum-Rim multiplicity. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 119 (1996), no. 3, 425–445
- [15] S. Kleiman and A. Thorup, A geometric theory of the Buchsbaum-Rim multiplicity, *J. Algebra* 167 (1994), no. 1, 168–231
- [16] S. Kleiman and A. Thorup, Mixed Buchsbaum-Rim multiplicities, *Amer. J. Math.* 118 (1996), no. 3, 529–569
- [17] J.-P. Serre, *Algèbre Locale. Multiplicités*. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 11. Springer, Berlin 1965

〒070-8621 北海道旭川市北門町9丁目
 北海道教育大学旭川校 数学教育専攻
 E-mail : hayasaka.futoshi@a.hokkyodai.ac.jp

Ehrhart 多項式と Ehrhart 環

東谷 章弘 (京都産業大学)

ahigashi@cc.kyoto-su.ac.jp

概要

整凸多面体の研究において、整凸多面体に付随する Ehrhart 多項式・Ehrhart 環は非常に重要な研究対象であり、様々な観点 (組合せ論・可換環論・トーリック幾何) から研究が行われている。また、Ehrhart 多項式の母関数に現れる非負整数列である h^* 列はこれらの研究において重要な役割を担う。本稿では、整凸多面体の Ehrhart 多項式・Ehrhart 環の研究として「 h^* 列の特徴付け」および「 h^* 列の unimodal 性」について紹介する。

1 導入

$P \subset \mathbb{R}^d$ を整凸多面体 (lattice polytope)、つまり頂点が全て \mathbb{Z}^d の点であるような凸多面体とし、 $\dim P = d$ とする。任意の正の整数 n に対し、

$$i(P, n) = |nP \cap \mathbb{Z}^d|$$

と定める。ただし、 $nP = \{n\alpha : \alpha \in P\}$ とする。1962 年に Ehrhart により、この数え上げ関数 $i(P, n)$ が n に関する d 次多項式でその定数項が 1 であることが証明された。この多項式 $i(P, n)$ は P の **Ehrhart 多項式** (Ehrhart polynomial) と呼ばれている。さらに、Macdonald により、**Ehrhart–Macdonald 相互法則** (reciprocity law) と呼ばれる等式

$$|nP^\circ \cap \mathbb{Z}^d| = (-1)^d i(P, -n) \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}) \quad (1.1)$$

(ただし P° は P の内部を表す) が成立することが証明された。Ehrhart 多項式については [6, Chapter 3–4] (あるいは [14, Part II]) に詳細に書かれているので参照されたい。

また、Ehrhart 多項式の母関数 $1 + \sum_{n \geq 1} i(P, n)t^n$ を考えると、次のような有理関数の形になることが知られている：

$$1 + \sum_{n \geq 1} i(P, n)t^n = \frac{h_0^* + h_1^*t + \cdots + h_d^*t^d}{(1-t)^{d+1}}.$$

この母関数の分子の係数からなる数列 $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ を P の h^* 列 (h^* -vector) と呼ぶ。(h^* -vector は δ -vector や Ehrhart h -vector などとも呼ばれている。) また h^* 列を係

数とする多項式 $h_P^*(t) = h_0^* + h_1^*t + \dots + h_d^*t^d$ を P の h^* 多項式 (h^* -polynomial) と呼ぶ。さらに等式 (1.1) により $(1-t)^{d+1} \sum_{n \geq 1} |nP^\circ \cap \mathbb{Z}^d| t^n = \sum_{j=1}^{d+1} h_{d+1-j}^* t^j$ を得る。特に、

$$\min\{\ell : \ell P^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset\} = d + 1 - \max\{i : h_i^* \neq 0\} \quad (1.2)$$

が成り立つ。

定義から明らかかもしれないが、 P の Ehrhart 多項式と h^* 列は同値な対象である。実際、 $i(P, n)$ は h^* 列を使って

$$i(P, n) = \sum_{j=0}^d h_j^* \binom{n-d+j}{d}$$

と表される。

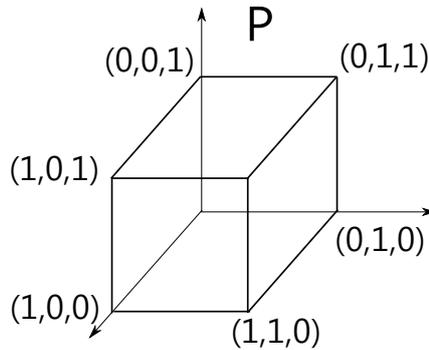
d 次元整凸多面体 P の h^* 列 $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ は次のような性質を満たす。

- $h_0^* = 1$, $h_1^* = |P \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$, $h_d^* = |P^\circ \cap \mathbb{Z}^d|$ が成り立つ。したがって $h_1^* \geq h_d^*$ が成り立つ。
- 各 h_i^* は非負整数。
- もし $P^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$ ならば $1 \leq i \leq d-1$ に対して $h_i^* \geq h_1^*$ が成立する ([16])。
- $i(P, n)$ の最高時の係数 $(\sum_{j=0}^d h_j^*)/d!$ は P の体積に一致する ([6, Corollary 3.20, 3.21])。

例 1.1 P を下図のような 3 次元整凸多面体とする。このとき、

$$i(P, n) = (n+1)^3, \quad h^*(P) = (1, 4, 1, 0), \quad h_P^*(t) = 1 + 4t + t^2$$

となる。実際、 P の体積は 1 であり、 $i(P, n)$ の最高次の係数も $(h^*$ 列の和)/3! も 1 である。



注 1.2 P を d 次元整凸多面体とし $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ とする。このとき等式 (P の体積) = $\sum_{j=0}^d h_j^*/d!$ が成立するが、これはピックの公式の高次元化に他ならない。実際、 $d = 2$ とし、 $h_0^* = 1$ および $h_1^* = |P \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$ および $h_d^* = |P^\circ \cap \mathbb{Z}^d|$ を $\sum_{j=0}^d h_j^*$ に代入すると

$$\begin{aligned} (P \text{ の面積}) &= \frac{h_0^* + h_1^* + h_2^*}{2!} = \frac{1 + |P \cap \mathbb{Z}^2| - 3 + |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2|}{2} \\ &= |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2| + \frac{|\partial P \cap \mathbb{Z}^2|}{2} - 1 \end{aligned}$$

を得る。

整凸多面体に付随する次数付き代数を定義する。 k を体とする。整数点 $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対し、 $\mathbf{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}$ という Laurent 単項式を定める。整凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ に対し、 $k[P]$ を Laurent 単項式の集合 $\{\mathbf{X}^\alpha Y^n : \alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ で生成される k 代数とする。つまり、

$$k[P] = k[X^\alpha Y^n : \alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}] \subset k[X_1^\pm, \dots, X_d^\pm, Y]$$

とする。この k 代数を P の **Ehrhart 環** (Ehrhart ring) と呼ぶ。

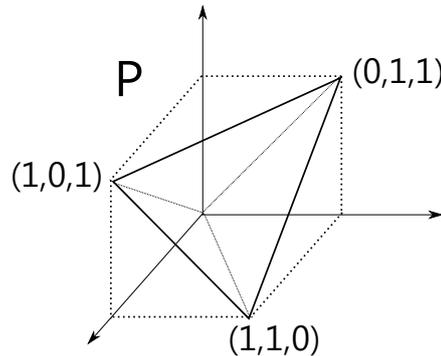
Ehrhart 環は次のような性質を満たす。

- $k[P]$ は $\deg(\mathbf{X}^\alpha Y^n) = n$ (ただし $\alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d$) という次数付けに関して有限生成次数付き k 代数の構造を持つ。
- $k[P]$ は標準的度数付き (standard graded)、つまり次数 1 の元で生成されるとは限らないが、一般に半標準的度数付き (semi-standard graded)、つまり次数 1 の元で生成される部分環上有限生成加群になる。
- $k[P]$ の Krull 次元は $\dim P + 1$ に一致する。
- $k[P]$ の Hilbert 関数 $\dim_k(k[P])_n$ は $i(P, n)$ に一致する。($k[P]$ が Ehrhart 環と呼ばれる所以である。)
- $k[P]$ は正規アフィン半群環の構造を持つ。特に、**Cohen–Macaulay** 整域である。

例 1.3 P を下図のような 3 次元整凸多面体とする。このとき

$$\begin{aligned} k[P] &= k[Y, X_1 X_2 Y, X_1 X_3 Y, X_2 X_3 Y, X_1 X_2 X_3 Y^2] \\ &\cong k[x_1, x_2, x_3, x_4, y] / (x_1 x_2 x_3 x_4 - y^2) \quad (\deg x_i = 1, \deg y = 2) \end{aligned}$$

となる。この Ehrhart 環の例は標準的度数付きではないが半標準的度数付きとなっている。



2 整凸多面体の h^* 列の特徴付け

整凸多面体の重要な研究として、下記の 2 つの問題の解決が挙げられる。

問題 2.1 任意に与えられた非負整数列 $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$ が d 次元整凸多面体の h^* 列になるための必要十分条件を与えよ。

問題 2.2 d 次元整凸多面体の h^* 列 $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ に対し、 $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ と同じ h^* 列を持つ d 次元整凸多面体を unimodular 同値を除いて全て分類せよ。

前述の通り、Ehrhart 多項式と h^* 列は同値な対象であるので、問題 2.1 は Ehrhart 多項式の特徴付けを考えていることに他ならない。様々な組合せ論的对象の数え上げ関数が整凸多面体の Ehrhart 多項式として記述できるので、整凸多面体の Ehrhart 多項式を特徴付けることは数え上げ組合せ論において重要な問題であると言える。また、整凸多面体の構造そのものを調べる上では、同じ Ehrhart 多項式 (h^* 列) を持つ整凸多面体を (ある種の同型を除いて) 分類することも非常に自然な問題である。

第 2 章では問題 2.1 を様々な条件の下で考察する。

2.1 次元が小さい場合

まず、 d が小さい場合にいつ非負整数列 $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$ が d 次元整凸多面体の h^* 列になるかを議論する。 $d = 1$ の場合はほとんど自明である。

命題 2.3 任意の非負整数 a に対し、 $(1, a)$ は 1 次元整凸多面体 (端点が整数の有界閉区間) の h^* 列になる。

証明: $P = [0, a + 1] \subset \mathbb{R}$ とすれば良い。 □

$d = 2$ の場合は決して自明ではないが、次の結果が知られている。

定理 2.4 ([27]) 非負整数 $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、 $(1, a, b)$ が 2 次元整凸多面体の h^* 列である必要十分条件は a, b が次のいずれかを満たすときである:

- $b = 0$; • $1 \leq b \leq a \leq 3b + 3$; • $a = 7$ かつ $b = 1$ となる。

$d = 3$ の場合は $d = 2$ の場合に比べて急に難しくなり、知られている結果はほとんどない。関連する重要な結果といえば、[8, 9] において、 $h_1^* \leq 2$ となる 3 次元整凸多面体を全て分類した (つまり問題 2.2 を $d = 3$ かつ $h_1^* \leq 2$ の場合に解決した) 結果があり、その系として $h_1^* \leq 2$ なる 3 次元整凸多面体の h^* 列の特徴付けが得られる。

2.2 体積が小さい場合

次に、 $\sum_{j=0}^d h_j^*$ が小さい場合を考える。第 1 章で紹介したように、 h^* 列は $h_0^* = 1$ や $h_1^* \geq h_d^*$ を満たすが、さらに次の 2 つ不等式が成り立つことも知られている。 d 次元整凸多面体 P の h^* 列 $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ に対し、 $s = \max\{i : h_i^* \neq 0\}$ とする。このとき

$$h_0^* + h_1^* + \dots + h_i^* \leq h_s^* + h_{s-1}^* + \dots + h_{s-i}^* \quad 0 \leq i \leq s \quad (2.1)$$

が成り立つ ([29])。さらに、

$$h_d^* + h_{d-1}^* + \cdots + h_{d-i}^* \leq h_1^* + h_2^* + \cdots + h_{i+1}^* \quad 0 \leq i \leq d-1, \quad (2.2)$$

が成り立つ ([16, Remark (1.4)])。

つまりこれらの条件は任意に与えられた非負整数列 $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$ が d 次元整凸多面体の h^* 列であるための必要条件である。逆に、 $\sum_{j=0}^d h_j^* \leq 3$ のとき、これらは十分条件となることも知られている。

定理 2.5 ([18, Theorem 0.1]) $d \geq 3$ とし、非負整数列 $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$ は $h_0^* = 1$ かつ $\sum_{j=0}^d h_j^* \leq 3$ を満たすとする。このとき $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ となる d 次元整凸多面体 P が存在する必要十分条件は $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ が不等式 (2.1) および (2.2) を満たすことである。

ただしこの定理は $\sum_{j=0}^d h_j^* = 4$ のとき成立しない。つまり不等式 (2.1) および (2.2) だけでは十分でないが、[17, Theorem 4.1] において、 $\sum_{j=0}^d h_j^* = 4$ の場合の特徴付けも与えられている。さらに、 $\sum_{j=0}^d h_j^* \geq 5$ の場合に向けて、 $\sum_{j=0}^d h_j^*$ が素数である整単体の h^* 列が満たす条件が [19, Theorem 1.1] において与えられており、この必要条件が $\sum_{j=0}^d h_j^* = 5$ または 7 のときは十分条件にもなることが知られている ([19, Theorem 1.2, Theorem 1.3])。

2.3 次数が小さい場合

P を d 次元整凸多面体とし、 $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ とする。 P の次数 $\deg(P)$ を

$$\deg(P) = \max\{i : h_i^* \neq 0\}$$

で定める。次数が小さい場合の h^* 列の特徴付けについて考える。

次はよく知られた命題である。

命題 2.6 (c.f. [6, Theorem 2.4]) d 次元整凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ に対し、

$$P' = \text{conv}(\{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^{d+1} : \alpha \in P\} \cup \{(0, \dots, 0, 1)\})$$

とおく。 $(P'$ は P の **lattice pyramid** と呼ばれる。) このとき、 P' は $d+1$ 次元整凸多面体であり、 $h_{P'}^*(t) = h_P^*(t)$ となる。特に、 $\deg(P') = \deg(P)$ が成り立つ。

この命題を念頭に置くと、次数が 1 の h^* 列の特徴付けはほとんど自明である。

命題 2.7 任意の正の整数 a および d に対し、 $(1, a, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1}$ は d 次元整凸多面体の h^* 列になる。

証明： P として $[0, a+1] \subset \mathbb{R}$ を $(d-1)$ 回 lattice pyramid をとったものとすればよい。□

次数が 2 の場合についても次の結果が知られている。

定理 2.8 ([13, 30]) 非負整数 $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0} (b \neq 0)$ および $d \geq 2$ に対し、 $(1, a, b, 0, \dots, 0)$ が d 次元整凸多面体の h^* 列である必要十分条件は a, b が次のいずれかを満たすときである：

- $a \leq 3b + 3$;
- $a = 7$ かつ $b = 1$ となる。

次数が 3 以上の場合については、ほとんど未解決である。そもそも $d = 3$ の場合が解決していないので完全解決はまだまだ先になりそうな状況である。

2.4 対称な場合

P を d 次元整凸多面体とし $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ とし $\deg(P) = s$ とする。このとき $h^*(P)$ が対称 (symmetric) であるとは $h_i^* = h_{s-i}^*$ ($0 \leq i \leq s$) が成り立つときに言う。

対称な h^* 列に関して次のことが良く知られている。

命題 2.9 (1) P の h^* 列が対称であることと P の Ehrhart 環が Gorenstein であることは同値である ([29])。

(2) P の h^* 列が対称かつ $\deg(P) = d$ であることと P が反射的凸多面体 (reflexive polytope) と unimodular 同値であることは同値である ([2, 15])。

この命題を考慮すると、対称な h^* 列を研究することは可換環論・トーリック幾何の観点からも重要であると言える。

4 次元以下の反射的凸多面体は完全に分類されている ([22, 23])。つまり $d \leq 4$ かつ対称な場合に問題 2.2 が解決されている。よってその系として、 $d \leq 4$ かつ対称な場合の h^* 列の特徴付けも得られる。

2.5 非零の項が少ない場合

最後に非負整数列 $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ の非零の項が少ない場合の h^* 列の特徴付けについて考える。この場合、 h^* 列の代わりに h^* 多項式 $h_P^*(t)$ を考えた方がわかりやすい。

まずは非零の項が 2 つの場合を考える。

命題 2.10 正の整数 a, d, k に対し、 $1 + at^k$ が d 次元整凸多面体の h^* 多項式であるための必要十分条件は $2k \leq d + 1$ である。

$1 + at^k$ の形をした h^* 多項式を持つ d 次元整凸多面体の分類が、 $k = 1$ の場合は Batyrev–Nill([5])、 $k = (d + 1)/2$ の場合は Batyrev–Hofscheier([3])、 $1 < k < (d + 1)/2$ の場合は Batyrev–Hofscheier([4]) によって解決されている。つまり Batyrev らの一連の仕事により、非零の項が 2 つの場合において問題 2.2 が完全に解決された。

これらの仕事の続きとして、非零の項が 3 つの場合、つまり $1 + at^k + bt^\ell$ ($a, b > 0, 1 \leq k < \ell \leq d$) の場合が考えられるが、まずは $\ell = 2k$ かつ $b = 1$ の場合、つまり対称な場合について考えてみる。

定理 2.11 ([21, Corollary 1.1]) $m \geq 3, d \geq 2, k \geq 1$ を満たす整数 m, d, k に対し、 $1 + (m-2)t^k + t^{2k}$ が d 次元整凸多面体の h^* 多項式である必要十分条件は m, d, k が次のいずれかを満たすことである：

- $k = 1, 3 \leq m \leq 9, d \geq 2$ (c.f. 定理 2.8 の系として得られる)；
- $k \geq 2, m \in \{3, 4, 6, 8, 9\}, d \geq 3k - 1$ ；
- $k = 2^{\ell-3}a, m = 2^\ell, d \geq 4k - 1$, ただし $a \geq 1, \ell \geq 4$ ；
- $k = 3^{\ell-2}a, m = 3^\ell, d \geq 3k - 1$, ただし $a \geq 1, \ell \geq 3$ となる。

[21] では実際には、 $1 + (m-2)t^k + t^{2k}$ を h^* 多項式に持つ d 次元整単体を完全に分類している。つまり、非零の項が 3 つで対称な場合において問題 2.2 が解決されている。

2.6 今後の課題

[21] の仕事の続きとして、正の整数 a, b, k, d に対して $1 + at^k + bt^{2k}$ を h^* 多項式に持つ d 次元整凸多面体の分類が今後の課題として挙げられる。Batyrev–Hofscheier([3]) において、 $1 + at^{(d+1)/2}$ という形の h^* 多項式を持つ d 次元整凸多面体が分類されたが、そのような整凸多面体は **Cayley polytope** と呼ばれる非常に特殊な構造を持つ。この結果のある種の一般化として、 $1 + at^{(d+1)/3} + bt^{2(d+1)/3}$ という形の h^* 多項式を持つ d 次元整凸多面体を考えたときに Cayley polytope の構造を持つかどうかを考えるのは自然であり、非常に興味深い。また、次数が 2 の整凸多面体の分類も興味深い。

3 整凸多面体の h^* 列の unimodal 性

3.1 unimodal 性、log-concave 性、alternatingly increasing 性

非負実数列 (a_0, a_1, \dots, a_d) に対し、

- (a_0, a_1, \dots, a_d) が **unimodal** であるとは、ある $0 \leq c \leq d$ が存在して

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_c \geq a_{c+1} \geq \dots \geq a_d$$

が成り立つときに言う。

- (a_0, a_1, \dots, a_d) が **log-concave** であるとは、任意の $1 \leq i \leq d-1$ に対して

$$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$$

が成り立つときに言う。

- ([26, Definition 2.9]) $a_i > 0$ としたとき、 (a_0, a_1, \dots, a_d) が **alternatingly increasing** であるとは、 $0 \leq i \leq \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ で $a_i \leq a_{d-i}$ が成り立ち、 $1 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor$ で $a_{d+1-i} \leq a_i$ が成り立つときに言う。つまり、

$$a_0 \leq a_d \leq a_1 \leq a_{d-1} \leq \dots \leq a_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \leq a_{d-\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \leq a_{\lfloor (d+1)/2 \rfloor}$$

が成り立つときである。

正の実数列が log-concave または alternatingly increasing ならば unimodal である。つまり、log-concave 性と alternatingly increasing 性は unimodal 性より強い性質である。一方で、log-concave 性と alternatingly increasing 性の間には強弱関係はない。(図 1 参照)

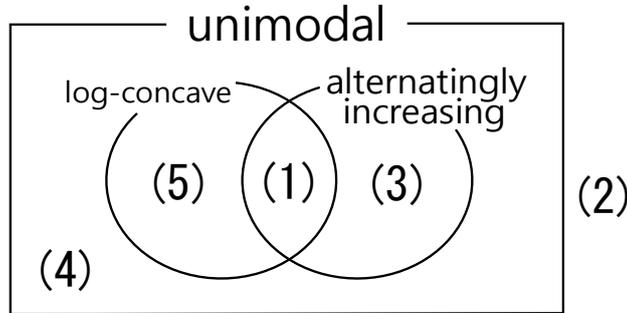


図 1: unimodal 性と関連する 2 つの性質

例 3.1 $(1, 2, 4, 5, 4, 3, 2)$ は log-concave かつ alternatingly increasing な数列である。つまり、図 1 の (1) に対応するものである。

次の例は図 1 の (2)、(3)、(4)、(5) それぞれに対応する数列である。

(2) $(1, 2, 3, 2, 3, 2, 2)$ (3) $(1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$ (4) $(1, 1, 2, 3, 1)$ (5) $(1, 2, 3, 4, 5, 3, 1)$

3.2 IDP を持つ整凸多面体の h^* 列の unimodal 性

整凸多面体の h^* 列の研究において、次の問題の解決も重要な研究の 1 つである。

問題 3.2 (c.f. [26, Question 1.1]) $P \subset \mathbb{R}^d$ を整凸多面体とし、 $P^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$ とする。また P の Ehrhart 環が標準的度数付きであると仮定する。このとき、 P の h^* 列は常に unimodal になるか？もしくは、log-concave になるか？alternatingly increasing になるか？

注 3.3 (1) 問題 3.2 では、 $P^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$ なる整凸多面体 P を考えているが、これは P の h^* 列 $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ が正の整数列になるための条件である。実際、 $h_d^* = |P^\circ \cap \mathbb{Z}^d|$ より、 $P^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$ ならば $h_d^* > 0$ を得る。一方で、 $h_1^* \geq h_d^*$ が一般に成り立ち、さらに [16] より $h_i^* \geq h_1^*$ ($1 \leq i \leq d-1$) が成り立つので、 $h_i^* > 0$ ($1 \leq i \leq d-1$) を得る。

(2) P の Ehrhart 環 $k[P]$ が標準的度数付きであることと P が **integer decomposition property (IDP)** を持つことは同値である。ここで、 P が IDP を持つとは、任意の正の整数 n および任意の $\alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d$ に対し、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in P \cap \mathbb{Z}^d$ が存在して $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ と表せるときに言う。

(3) Stanley ([28]) によって次の主張が予想された：標準的度数付き Cohen–Macaulay 整域の h 列は常に log-concave である。この予想は未解決と思われる。(おそらく反例も見つかって

いない。) 整凸多面体の h^* 列は、Ehrhart 環という Cohen–Macaulay 整域の h 列に他ならないので、問題 3.2 はこの Stanley の予想の特別な場合を考えていることになる。

注 3.4 数え上げ組合せ論の文脈で登場する整数列の unimodal 性や log-concave 性は昔からよく調べられていたが、alternatingly increasing 性はほとんど調べられていない。しかし h^* 列に関して言えば、alternatingly increasing 性は不等式 (2.1) と (2.2) を考慮すると自然に考えられるべきものである。

整凸多面体 P に対して $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ とし $\deg(P) = d$ と仮定する。このとき不等式 (2.1) および (2.2) が成り立つので、 $0 \leq i \leq \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ に対して $h_0^* + h_1^* + \dots + h_i^* \leq h_d^* + h_{d-1}^* + \dots + h_{d-i}^* \leq h_1^* + h_2^* + \dots + h_{i+1}^*$ が成り立つ。一方で、alternatingly increasing とは $0 \leq i \leq \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ に対して $h_i^* \leq h_{d-i}^* \leq h_{i+1}^*$ が成り立つことである。つまり、alternatingly increasing 性は不等式 (2.1) および (2.2) を少しだけ強めた条件であると思える。

問題 3.2 は次のような部分的な結果が知られている。

1. 5次元以下の反射的凸多面体の h^* 列は unimodal である。さらに、6次元以上の任意の反射的凸多面体の h^* 列も unimodal であると予想された ([14, §34]) が、Mustařa や Payne ([24, 25]) によって反例が構成された。しかし、それらの反例は全て IDP を持たないので、問題 3.2 の反例にはなっていない。
2. Bruns–Römer ([11]) によって、正則 unimodular 三角形分割を持つ反射的凸多面体の h^* 列が常に unimodal であることが証明されている。ここで、整凸多面体が正則 unimodular 三角形分割を持つならば IDP を持ち、反射的凸多面体は内部に原点を唯一の整数点として含むので、[11] の結果は問題 3.2 の部分的解決になっている。
3. Birkhoff 多面体の h^* 列は log-concave である ([1])。また内部に整数点を含む一般次元の平行六面体は alternatingly increasing である ([26])。

3.3 膨らませた整凸多面体の h^* 列 (図 1(1) の h^* 列)

問題 3.2 の部分的解決として、下記のような結果も知られている。

定理 3.5 ([20, Theorem 1.2]) $P \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とし、 $s = \deg(P)$ とする。正の整数 m に対して、 $h^*(mP) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ とする。このとき次が成立する。

- (i) $m \geq s$ ならば $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ は log-concave である。
- (ii) $m \geq \max\{s, d+1-s\}$ ならば $(h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ は alternatingly increasing である。

一方で、[10] および [7] において次が証明されている： d 次元整凸多面体 P に対して、ある整数 n_d が存在して、任意の $m \geq n_d$ に対して mP の h^* 列は log-concave かつ alternatingly increasing になる。定理 3.5 は n_d の下限を与えており、 $\max\{s, d+1-s\}$ という下限はある意味で最良なものである。実際、定理 3.5 と同じ記号を用いると、(1.2) から $m \geq d+1-s$

と $mP^\circ \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset$ が同値であることがわかるし、[12, Theorem 1.1] から $m \geq s$ ならば mP は IDP を持つこともわかる。したがって、問題 3.2 の設定を満たす整凸多面体として $m \geq \max\{s, d+1-s\}$ に対する mP を考えるのが妥当であり、その場合に mP の h^* 列は log-concave かつ alternatingly increasing になる。

3.4 様々な h^* 列の例 ((2)、(3)、(4)、(5) の h^* 列)

定理 3.5 は図 1 の (1) に対応する h^* 列の例であった。本章では残りの (2)、(3)、(4)、(5) に対応する h^* 列の例について紹介する。

その前に、いくつか注意をしておく。 P を $\deg(P) = d$ なる d 次元整凸多面体とすると、 $d \leq 4$ ならば $h^*(P)$ は常に alternatingly increasing である。また、 $d \leq 3$ かつ P が IDP を持つならば $h^*(P)$ は常に log-concave である。

例 3.6 ([20, Section 3]) (2) の h^* 列 : 任意の $d \geq 5$ と任意の $m \geq 1$ に対し、 d 次元整凸多面体 P で $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ が $h_d^* = m$ かつ unimodal でないものが存在する。例えば、

$$P = \text{conv}((0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (32, 55, 55, 55, 55, 55, 56)) \subset \mathbb{R}^7$$

とすると、 $h^*(P) = (1, 4, 10, 11, 7, 10, 10, 3)$ となる。(一般には、 P の最後の頂点の座標が d と m によって決まり、それに応じて h^* 列が変わる。)

(3) の h^* 列 : 任意の $d \geq 4$ と任意の $m \geq 1$ に対し、 d 次元整凸多面体 P で $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ が $h_d^* = m$ かつ alternatingly increasing であるが log-concave でないものが存在する。例えば、

$$P = \text{conv}((0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (65, 65, 65, 84, 84, 84, 85)) \subset \mathbb{R}^7$$

とすると、 $h^*(P) = (1, 5, 9, 13, 33, 12, 8, 4)$ となる。(一般には、 P の最後の頂点の座標が d と m によって決まり、それに応じて h^* 列が変わる。)

(4) の h^* 列 : 任意の $d \geq 5$ の奇数と任意の $m \geq 1$ に対し、 d 次元整凸多面体 P で $h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ が $h_d^* = m$ かつ unimodal であるが alternatingly increasing でも log-concave でもないものが存在する。例えば、

$$P = \text{conv}((0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (32, 37, 37, 37, 37, 37, 38)) \subset \mathbb{R}^7$$

とすると、 $h^*(P) = (1, 3, 6, 7, 6, 6, 6, 3)$ となる。(一般には、 P の最後の頂点の座標が d と m によって決まり、それに応じて h^* 列が変わる。)

(5) の h^* 列 : h^* 列が log-concave であるが alternatingly increasing でない整凸多面体の例に関して、次元が小さいところではいくつか例を構成することが出来ているが、一般次元での存在はまだわかっていない。例えば、

$$P = \text{conv}((0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, 1, 0, 0), (2, 2, 2, 2, 3, 0), (16, 16, 16, 16, 3, 30)) \subset \mathbb{R}^6$$

とすると、 $h^*(P) = (1, 6, 20, 22, 23, 15, 3)$ となる。

3.5 今後の課題

例 3.6 以外の h^* 列の例を (存在するのであれば) 構成したい。例えば、

- 6 以上の偶数次元整凸多面体の h^* 列で unimodal だが alternatingly increasing でも log-concave でもないもの
- 5 以上の任意の次元での整凸多面体の h^* 列で log-concave だが alternatingly increasing でないもの

などが挙げられる。

また、注 3.4 で述べたように、alternatingly increasing 性は不等式 (2.1) および (2.2) を少しだけ強めた条件にすぎないので、何か整凸多面体に “良い” 性質を仮定すれば自然に成り立ってもおかしくない性質であると思われる。どのような “良い” 性質が h^* 列の alternatingly increasing 性を導くかを代数的・組合せ論的な観点から調べていきたい。

参考文献

- [1] C. Athanasiadis, Ehrhart polynomials, simplicial polytopes, magic squares and a conjecture of Stanley, *J. Reine Angew. Math.* **583** (2005), 163–174.
- [2] V. Batyrev, Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties, *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), 493–535.
- [3] V.V. Batyrev and J. Hofscheier, A generalization of a theorem of G. K. White, arXiv:1004.3411, (2010).
- [4] V.V. Batyrev and J. Hofscheier, Lattice polytopes, finite abelian subgroups in $SL(n; \mathbb{C})$ and coding theory, arXiv:1309.5312, (2013).
- [5] V.V. Batyrev and B. Nill, Multiples of lattice polytopes without interior lattice points. *Mosc. Math. J.*, **7** (2007), 195–207.
- [6] M. Beck and S. Robins, “Computing the Continuous Discretely”, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2007.
- [7] M. Beck and A. Stapledon, On the log-concavity of Hilbert series of Veronese subrings and Ehrhart series, *Math. Z.* **264** (2010), 195–207.
- [8] M. Blanco and F. Santos, Lattice 3-polytopes with five lattice points, arXiv:1409.6701, 2014.
- [9] M. Blanco and F. Santos. Lattice 3-polytopes with six lattice points, arXiv:1501.01055, 2015.
- [10] F. Brenti and V. Welker, The Veronese construction for formal power series and graded algebras, *Adv. in Appl. Math.* **42** (2009), 545–556.
- [11] W. Bruns and T. Römer, h -vectors of Gorenstein polytopes, *J. Combin. Theory Ser. A* **114** (2007), 65–76.
- [12] D. A. Cox, C. Haase, T. Hibi and A. Higashitani, Integer decomposition property of dilated polytopes, *Electron. J. Comb.* **21** (2014), 1–17.

- [13] M. Henk and M. Tagami, Lower bounds on the coefficients of Ehrhart polynomials, *European J. Combinatorics*, **30** (2009), 70–83.
- [14] T. Hibi, “Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes”, Carlslaw Publications, Glebe NSW, Australia, 1992.
- [15] T. Hibi, Dual polytopes of rational convex polytopes, *Combinatorica* **12** (1992), 237–240.
- [16] T. Hibi, A lower bound theorem for Ehrhart polynomials of convex polytopes, *Adv. in Math.* **105** (1994), 162 – 165.
- [17] T. Hibi, A. Higashitani and N. Li, Hermite normal forms and δ -vectors, *J. Comb. Theory Ser. A* **119** (2012), 1158–1173.
- [18] T. Hibi, A. Higashitani and Y. Nagazawa, Ehrhart polynomials of convex polytopes with small volume, *European J. Combinatorics* **32** (2011), 226–232.
- [19] A. Higashitani, Ehrhart polynomials of integral simplices with prime volumes, *INTEGERS*, **14** A45 (2014), 1–15.
- [20] A. Higashitani, Unimodality on δ -vectors of lattice polytopes and two related properties, arXiv:1411.5250.
- [21] A. Higashitani, B. Nill and A. Tsuchiya, Gorenstein polytopes with trinomial h^* -polynomials, arXiv:1503.05685.
- [22] M. Kreuzer and H. Skarke, On the classification of reflexive polyhedra, *Comm. Math. Phys.* **185** (1997), 495–508.
- [23] M. Kreuzer and H. Skarke, Classification of polyhedra in three dimensions, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), 853–871.
- [24] M. Mustața and S. Payne, Ehrhart polynomials and stringy Betti numbers, *Math. Ann.* **113** (2006), 718–725.
- [25] S. Payne, Ehrhart series and lattice triangulations, *Discrete Comput. Geom.* **40** (2008), 365–376.
- [26] J. Schepers and L. Van Langenhoven, Unimodality Questions for Integrally Closed Lattice Polytopes, *Ann. Comb.* **17** (2013), 571–589.
- [27] P. R. Scott, On convex lattice polygons, *Bull. Austral. Math. Soc.* **15** (1976), 395 – 399.
- [28] R.P. Stanley, Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry, Graph Theory and Its Applications: East and West, *New York Acad. Sci.* **576** (1989), 500 – 535.
- [29] R. P. Stanley, On the Hilbert function of a graded Cohen–Macaulay domain, *J. Pure and Appl. Algebra* **73** (1991), 307 – 314.
- [30] J. Treutlein, Lattice polytopes of degree 2, *J. Comb. Theory. Ser. A*, **117** (2010), 354–360.

DERIVED EQUIVALENCES AND GORENSTEIN PROJECTIVE DIMENSION

HIROTAKA KOGA

ABSTRACT. In this note, we introduce the notion of complexes of finite Gorenstein projective dimension and show that a derived equivalence induces an equivalence between the full triangulated subcategories consisting of complexes of finite Gorenstein projective dimension provided that the equivalence satisfies a certain condition.

This work is based on a joint work with M. Hoshino.

Derived equivalences appear in various fields of current research in mathematics. For instance, in [3] Beilinson showed that there exists an algebra A such that the derived category of A is triangle equivalent to the derived category of coherent sheaves on \mathbb{P}^n , in [5] Broué conjectured abelian defect group conjecture and in [12] Kontsevich formulated mirror symmetry in terms of derived equivalences. So it is more and more important to study derived equivalences. It is natural to ask when two abelian categories are derived equivalent. A way to answer this question is to compare invariants under derived equivalences. It is well-known that for derived equivalent rings finiteness of selfinjective dimension is an invariant (see e.g. [11]). Finiteness of selfinjective dimension is closely related to Gorenstein projective dimension (see [9, 10]). So one can expect that there are some invariants associated with Gorenstein projective dimension.

In this note, we introduce the notion of complexes of finite Gorenstein projective dimension and show that a derived equivalence induces an equivalence between the full triangulated subcategories consisting of complexes of finite Gorenstein projective dimension provided that the equivalence satisfies a certain condition. Let \mathcal{A}, \mathcal{B} be abelian categories with enough projectives. Denote by $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ the full subcategory of \mathcal{A} consisting of projective objects and by $\mathcal{GP}_{\mathcal{A}}$ the full subcategory of \mathcal{A} consisting of Gorenstein projective objects. A complex $X^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ is said to have finite Gorenstein projective dimension if it is isomorphic to a bounded complex of Gorenstein projective objects in $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ (see Definition 11). We denote by $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fGpd}}$ the full triangulated subcategory of $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ consisting of complexes of finite Gorenstein projective dimension. Let $F : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ be a triangle equivalence. Assume that there exists an integer $a > 0$ such that

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}(FP, Q[i]) = 0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}(Q, FP[i])$$

for all $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ and $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ unless $-a \leq i \leq a$. Then our main result states that F induces an equivalence between $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fGpd}}$ and $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})_{\text{fGpd}}$ (see Theorem 18). Note that in case \mathcal{A} and \mathcal{B} are module categories then such an integer a always exists for any derived

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

equivalence F . As corollaries we have the following: the equivalence F induces a triangle equivalence between $\mathcal{GP}_{\mathcal{A}}/\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ and $\mathcal{GP}_{\mathcal{B}}/\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ (see Corollary 19); $\mathcal{GP}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ if and only if $\mathcal{GP}_{\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}$, $\widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}} = \mathcal{GP}_{\mathcal{A}}$ if and only if $\widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{B}} = \mathcal{GP}_{\mathcal{B}}$, and $\widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ if and only if $\widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ where $\widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}}$ stands for the full subcategory of \mathcal{A} consisting of objects $X \in \mathcal{A}$ with $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, \mathcal{P}_{\mathcal{A}}) = 0$ for $i > 0$ (see Corollary 20); and letting A, B be rings, A and B are derived equivalent if and only if $\mathcal{D}^b(\text{Mod-}A)_{\text{fGpd}}$ and $\mathcal{D}^b(\text{Mod-}B)_{\text{fGpd}}$ are equivalent as triangulated categories (see Corollary 22).

This work is supported by JSPS KAKENHI Grant Number 26887034.

1. PRELIMINARIES

In this note, complexes are cochain complexes and objects are considered as complexes concentrated in degree zero. Let \mathcal{A} be an abelian category with enough projectives. We denote by $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ the full subcategory of \mathcal{A} consisting of all projective objects in \mathcal{A} . We denote by $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ the derived category of complexes over \mathcal{A} and by $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ the full triangulated subcategory of $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ consisting of complexes with bounded cohomology. Also, we denote by $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(-, -)$ the associated single complex of the double hom complex.

For an additive category \mathcal{X} we denote by $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ the homotopy category of cochain complexes over \mathcal{X} and by $\mathcal{K}^+(\mathcal{X})$ and $\mathcal{K}^b(\mathcal{X})$ the full triangulated subcategories of $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ consisting of bounded below and bounded complexes, respectively.

For a ring A we denote by $\text{Mod-}A$ the category of right A -modules.

We refer to [4], [8] and [14] for basic results in the theory of derived categories.

Definition 1. For a complex X^{\bullet} , we denote by $Z^i(X^{\bullet})$ and $H^i(X^{\bullet})$ the i th cycle and the i th cohomology of X^{\bullet} , respectively.

Definition 2 ([8]). A complex $X^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ is said to have finite projective dimension if $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X^{\bullet}[-i], -)$ vanishes on \mathcal{A} for $i \gg 0$. We denote by $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fpd}}$ the épaisse subcategory of $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ consisting of complexes of finite projective dimension.

Note that the canonical functor $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ gives rise to equivalences of triangulated categories

$$\mathcal{K}^b(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fpd}}.$$

Let \mathcal{C} be a full subcategory of \mathcal{A} .

Definition 3. A complex $X^{\bullet} \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ is said to be $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{C})$ -exact if $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^{\bullet}, C)$ is exact for all $C \in \mathcal{C}$.

Definition 4. An exact sequence $0 \rightarrow M \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \cdots \rightarrow C^n \rightarrow \cdots$ in \mathcal{A} is said to be a \mathcal{C} -coresolution of $M \in \mathcal{A}$ if $C^i \in \mathcal{C}$ for all i and the exact sequence is $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{C})$ -exact.

Definition 5 ([1, 7]). An object $M \in \mathcal{A}$ is said to be Gorenstein projective if M admits a \mathcal{P} -coresolution. We denote by $\mathcal{GP}_{\mathcal{A}}$ the full subcategory of \mathcal{A} consisting of Gorenstein projective objects $M \in \mathcal{A}$.

We refer to [6] for basic facts on Gorenstein projective dimension.

2. GORENSTEIN PROJECTIVE DIMENSION

In this section, we study Gorenstein projective objects and introduce the notion of complexes of finite Gorenstein projective dimension.

Definition 6. We denote by $\widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}}$ the full subcategory of \mathcal{A} consisting of objects $X \in \mathcal{A}$ with $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, \mathcal{P}_{\mathcal{A}}) = 0$ for $i > 0$.

Definition 7. Let $\widehat{\mathcal{GP}}_0 := \widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}}$. For $n \geq 1$ we denote by $\widehat{\mathcal{GP}}_n$ the full subcategory of $\widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}}$ consisting of objects X admitting right resolutions in \mathcal{A} $0 \rightarrow X \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots \rightarrow P^n \rightarrow Y \rightarrow 0$ with $Y \in \widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}}$ and $P^i \in \mathcal{P}$ for $1 \leq i \leq n$.

Proposition 8. We have $\mathcal{GP}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{n \geq 0} \widehat{\mathcal{GP}}_n$.

Theorem 9. Let $X^{\bullet} \in \mathcal{K}^b(\mathcal{GP}_{\mathcal{A}})$ with $X^i = 0$ unless $0 \leq i \leq l$. Then there exists a quasi-isomorphism $X^{\bullet} \rightarrow P^{\bullet}$ with $P^{\bullet} \in \mathcal{K}^+(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})$ such that $Z^{l+1}(P^{\bullet}) \in \mathcal{GP}_{\mathcal{A}}$ and $H^{-i}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(P^{\bullet}, \mathcal{P}_{\mathcal{A}})) = 0$ for $i > l$.

Proposition 10. Let $X^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$. The followings are equivalent:

- (1) $X^{\bullet} \cong Y^{\bullet}$ in $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ for some $Y^{\bullet} \in \mathcal{K}^b(\mathcal{GP}_{\mathcal{A}})$.
- (2) There exists a distinguished triangle $X^{\bullet} \rightarrow Y^{\bullet} \rightarrow Z[l] \rightarrow$ in $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ with $Y^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fpd}}$, $Z \in \mathcal{GP}_{\mathcal{A}}$ and $l \in \mathbb{Z}$.
- (3) $X^{\bullet} \cong Z[l]$ in $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})/\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fpd}}$ with $Z \in \mathcal{GP}_{\mathcal{A}}$ and $l \in \mathbb{Z}$.

Definition 11. A complex $X^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ is said to have finite Gorenstein projective dimension if X^{\bullet} satisfies the equivalent condition in Proposition 10. We denote by $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fGpd}}$ the full subcategory of $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ consisting of all complexes in $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ having finite Gorenstein projective dimension.

Theorem 12 (cf. [2] and [9, Proposition 3.5]). The followings hold:

- (1) The embedding $\widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ induces a fully faithful functor

$$\widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}}/\mathcal{P}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})/\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fpd}}$$

- (2) The embedding $\mathcal{GP}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fGpd}}$ induces an equivalence

$$\mathcal{GP}_{\mathcal{A}}/\mathcal{P}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fGpd}}/\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fpd}}$$

At the end of this section, using the quotient category, we characterize Gorenstein projective objects.

Theorem 13. Let $X \in \widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}}$. Then $X \in \mathcal{GP}_{\mathcal{A}}$ if and only if for each $i > 0$ there exists $Y_i \in \widehat{\mathcal{GP}}_{\mathcal{A}}$ such that $X \cong Y_i[-i]$ in $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})/\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fpd}}$.

3. DERIVED EQUIVALENCES

In this section, we deal with derived equivalences of abelian categories with enough projectives. Let \mathcal{B} be an abelian category with enough projectives. Throughout this section we assume that there exists an equivalence of triangulated categories $F : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ with an integer $a > 0$ such that

$$(*) \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}(FP, Q[i]) = 0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}(Q, FP[i])$$

for all $P \in \mathcal{P}_A$ and $Q \in \mathcal{P}_B$ unless $-a \leq i \leq a$ and G stands for a quasi-inverse of F .

Lemma 14. $H^i(FP) = 0$ for all $P \in \mathcal{P}_A$ unless $-a \leq i \leq a$.

Remark 15. $H^i(GQ) = 0$ for all $Q \in \mathcal{P}_B$ unless $-a \leq i \leq a$.

Proposition 16. *The equivalence F induces an equivalence of triangulated categories between $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fpd}}$ and $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})_{\text{fpd}}$.*

Proof. See [13, Proposition 8.2]. □

Lemma 17. *For each $X \in \widehat{\mathcal{GP}}_A$ there exists $X' \in \widehat{\mathcal{GP}}_B$ such that $FX \cong X'[a]$ in $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})/\mathcal{D}^b(\mathcal{B})_{\text{fpd}}$.*

Theorem 18. *Let $F : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ be an equivalence of triangulated categories. If there exists $a > 0$ such that*

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}(FP, Q[i]) = 0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B})}(Q, FP[i])$$

for all $P \in \mathcal{P}_A$ and $Q \in \mathcal{P}_B$ unless $-a \leq i \leq a$ then F induces an equivalence of triangulated categories between $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fGpd}}$ and $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})_{\text{fGpd}}$.

Corollary 19. *The equivalence F induces an equivalence between $\mathcal{GP}_A/\mathcal{P}_A$ and $\mathcal{GP}_B/\mathcal{P}_B$.*

Corollary 20. *The following hold.*

- (1) $\mathcal{GP}_A = \mathcal{P}_A$ if and only if $\mathcal{GP}_B = \mathcal{P}_B$.
- (2) $\widehat{\mathcal{GP}}_A = \mathcal{GP}_A$ if and only if $\widehat{\mathcal{GP}}_B = \mathcal{GP}_B$.
- (3) $\widehat{\mathcal{GP}}_A = \mathcal{P}_A$ if and only if $\widehat{\mathcal{GP}}_B = \mathcal{P}_B$.

Proposition 21. *Let $F' : \mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fGpd}} \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})_{\text{fGpd}}$ be an equivalence of triangulated categories. Then F' induces an equivalence of triangulated categories $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})_{\text{fpd}} \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})_{\text{fpd}}$ if both \mathcal{A} and \mathcal{B} satisfy the condition Ab_4 .*

Corollary 22. *Let A, B be rings. Then A and B are derived equivalent, i.e., $\mathcal{D}^b(\text{Mod-}A)$ and $\mathcal{D}^b(\text{Mod-}B)$ are equivalent as triangulated categories if and only if $\mathcal{D}^b(\text{Mod-}A)_{\text{fGpd}}$ and $\mathcal{D}^b(\text{Mod-}B)_{\text{fGpd}}$ are equivalent as triangulated categories.*

REFERENCES

- [1] M. Auslander and M. Bridger, *Stable module theory*, Mem. Amer. Math. Soc., **94**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.
- [2] L. L. Avramov, Gorenstein dimension and complete resolutions. Conference on commutative algebra to the memory of professor Hideyuki Matsumura, Nagoya, Aug 26-28, 1996, Nagoya University: Nagoya, Japan, 1996, 28–31.
- [3] A. A. Beilinson, Coherent sheaves on \mathbf{P}^n and problems in linear algebra. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 68–69.
- [4] M. Bökstedt and A. Neeman, Homotopy limits in triangulated categories, Compositio Math. **86** (1993), no. 2, 209–234.
- [5] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées (French), Astérisque No. 181–182 (1990), 61–92.
- [6] L. W. Christensen, *Gorenstein dimensions*, Lecture Notes in Math, **1747**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [7] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, Gorenstein injective and projective modules, Math. Z. **220** (1995), no. 4, 611–633.

- [8] R. Hartshorne, *Residues and duality*, in: *Lecture Notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64*, Lecture Notes in Math., **20**, Springer, Berlin, 1966.
- [9] M. Hoshino and H. Koga, Zaks' lemma for coherent rings, *Algebr. Represent. Theory* **16** (2013), no. 6, 1647–1660.
- [10] M. Hoshino and H. Koga, Finiteness of selfinjective dimension for noetherian algebras, *Comm. Algebra* **41** (2013), no. 9, 3414–3428.
- [11] Y. Kato, On derived equivalent coherent rings, *Comm. Algebra* **30** (2002), no. 9, 4437–4454.
- [12] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zurich, 1994)*, 120–139, Birkhauser, Basel, 1995.
- [13] J. Rickard, Morita theory for derived categories, *J. London Math. Soc. (2)* **39** (1989), no. 3, 436–456.
- [14] J. L. Verdier, Catégories dérivées, état 0, in: *Cohomologie étale*, 262–311, Lecture Notes in Math., **569**, Springer, Berlin, 1977.

SCHOOL OF INFORMATION ENVIRONMENT
TOKYO DENKI UNIVERSITY
CHIBA, 270-1382, JAPAN
E-mail address: koga@mail.dendai.ac.jp

特殊な線形射影を持つ射影多様体とその応用

野間 淳

ここでは、射影多様体の内点からの線形射影により、次数の低い定義方程式を構成する問題と線形射影の二重点因子の positivity についての問題を扱う。このような問題を扱う動機とこれらの応用についてもふれる。問題を考察する際に、特殊な線形射影を持つ射影多様体、すなわち 1 点からの線形射影が像と双有理とならない射影多様体と一般の内点からの線形射影が例外因子を持つ射影多様体の考察が必要になる。

1. 状況設定と問題設定

1.1. 状況設定.

全体を通して、常に次を仮定する。

$X^n \subseteq \mathbb{P}^N$ は、代数閉体 \mathbb{k} 上の N 次元射影空間 \mathbb{P}^N の中で**非退化な射影多様体**で、次元 $(\dim X) n$, 次数 $(\deg X) d$, 余次元 $(\text{codim } X) e = N - n$ とする。さらに、 \mathbb{k} の標数は 0 であると仮定する。(char $\mathbb{k} = p$ の場合の結果についてもふれることがあります.)

ここで、 N 次元射影空間 $\mathbb{P}^N := \{[a_0 : a_1 : \cdots : a_N] \neq \mathbf{0} \mid a_i \in \mathbb{k}\}$ の部分集合 X が**射影多様体** (projective variety) であるとは、同次多項式 $F_1, \dots, F_m \in S := \mathbb{k}[T_0, T_1, \dots, T_N]$ があって、 $X = \{(a_0 : \cdots : a_N) \mid F_i(a_0 : \cdots : a_N) = 0 \ \forall i = 1, \dots, m\}$ と表せ、その斉次イデアル $I(X) := (\{F \in S \mid F \text{ 同次式}, F(P) = 0 \ \forall P \in X\})$ が素イデアル (prime ideal) となることである。多項式環 S は \mathbb{P}^N の座標環、剰余環 $S/I(X)$ は X の座標環になっている。さらに、射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が \mathbb{P}^N で**非退化** (nondegenerate) であるとは、任意の超平面 H に X が含まれないことである。射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の**次元** $(\dim X)$ とは、一般の $(N-k)$ -次元の線形部分空間 (以下 $(N-k)$ -plane という) と X との交わり $X \cap \Phi^{N-k}$ が有限個の点集合となる最小値 k のこと。 $\dim X = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{一般の } (N-k-1)\text{-plane } \Gamma \text{ に対して } X \cap \Gamma^{N-k-1} = \emptyset\}$ でも定義できる。さらに、 X の**次数** $(\deg X)$ とは、次元の定義の中で、一般の $(N-k)$ -plane に対して有限点集合となったときのその個数 $\#(X \cap \Phi^{N-n})$ のことである。この次数は、一般の $(N-n-2)$ -plane Λ^{e-2} からの線形射影 $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ による X の像 $\pi_\Lambda(X)$ である超曲面 F の次数とも定義できるが、これは後で使われる。

1.2. 条件 A_m, B_m, C_m .

m を自然数として、射影多様体 $X(\subseteq \mathbb{P}^N)$ に対する次の 3 つの条件を考える。

(A_m) X に含まれない任意の直線 $L \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して次が成立する；

$$\ell(X \cap L) := \text{length}(\mathcal{O}_{X \cap L}) \leq m.$$

(B_m) X を含む次数 m 以下の \mathbb{P}^N の超曲面の共通部分を $E_m(X)$ と表すとき、すなわち

$$E_m(X) := \bigcap_{\substack{F \text{ hypersurface } \supseteq X \\ \deg F \leq m}} F$$

のとき、 $X = E_m(X)$ が成立する。ここで、“=” は、集合/スキーム/斉次イデアルとしてなどが考えられるが、どの意味であるかその都度断ることにする。

(C_m) X は Castelnuovo-Mumford の意味で m -**regular** である。すなわち、次の同値な条件 (i) または (ii) が成立する。(i) と (ii) が同値であることは例えば、[1], [15] を参照.)

(i) X のイデアル層 $\mathcal{I}_{X/\mathbb{P}^N}$ について、 $H^i(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_{X/\mathbb{P}^N} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m-i)) = 0$ ($\forall i > 0$) が成立する。

(ii) X の斉次イデアル $I(X)$ の座標環 $S := \mathbb{k}[T_0, T_1, \dots, T_N]$ 上の次数付き極小自由分解

$$0 \rightarrow \bigoplus_i S \mathbf{e}_{i,N} \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_i S \mathbf{e}_{i,1} \rightarrow \bigoplus_i S \mathbf{e}_{i,0} \rightarrow I(X) \rightarrow 0$$

に対して、 $\deg \mathbf{e}_{i,j} \leq m + j$ ($\forall i, \forall j$) が成立する。

考えたい問題は、

問題. A_m, B_m, C_m が成り立つ最小の m は何か。

である。 $e = 1$ の時は、 X が超曲面であり、どの条件も成立する。従って以下ではつねに、 $e \geq 2$ と仮定する。これらの条件に対して次に注意する。

注意. (1). B_m が斉次イデアルとして成立すれば、 B_m がスキームとして成立する。また、 B_m がスキームとして成立すれば、 B_m が集合として成立する。

(2). $C_m \implies B_m \implies A_m$ が成り立つ。というのは、もし C_m が成立すれば、斉次イデアル $I(X)$ の極小生成元 $\mathbf{e}_{i,0}$ について $\deg \mathbf{e}_{i,0} \leq m$ が成立するので、 $I(X)$ は m 以下の元で生成され、斉次イデアルとしての B_m が成立する。また、集合としての B_m が成立するとき、 X に含まれない直線 L に対して $P \in L \setminus X$ を含まない m 次の超曲面 F がとれるから、この F と L との交わりについて、 $\ell(X \cap L) \leq \ell(F \cap L) = m$ となり、 A_m が成立する。

この注意により、 C_m が成立すれば他の条件が成立するので、はじめに C_m についてみていく。そして A_m について、最後にここで主に考えたい条件 B_m についてみていく。

1.3. Castelnuovo-Mumford regularity C_m について.

条件 C_m については次の予想がある。

Regularity 予想=Eisenbud-Goto 予想. (Gruson, Lazarsfeld, Peskine [11], Eisenbud, Goto [8]) 任意の射影多様体 X は $(d - e + 1)$ -regular であろう。すなわち、任意の射影多様体 X に対して C_{d-e+1} が成立する。

この予想については、以下の結果が知られているが、 $n \geq 3$ のとき未解決である。

定理. 状況設定のもとで考える。

(1) C_{d-e+1} が次の場合に成立する.

- **曲線** ($p \geq 0$). すなわち, 既約かつ被約な**曲線** X は $(d - e + 1)$ -regular である (Gruson, Lazarsfeld, Peskine [11]).
- $\Delta(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ ($d = e + 1$) ($p \geq 0$). すなわち, 最小次数の多様体 ($d = e + 1$) は 2-regular である (Eisenbud, Goto [8]).
- **非特異曲面** ($p = 0$). すなわち, 非特異な曲面は $(d - e + 1)$ -regular である (Pinkham [21], Lazarsfeld [14]).

(2) $\varepsilon = (n - 2)(n - 1)/2$ に対して $C_{d-e+1+\varepsilon}$ が次の場合に成立する.

- **非特異 3-fold** ($p = 0$). すなわち, 非特異な 3次元射影多様体は $(d - e + 1 + \varepsilon)$ -regular である (Kwak [13]).
- **非特異 n -fold** ($n \leq 14$) ($p = 0$). すなわち, 非特異な n 次元 ($n \leq 14$) 射影多様体は $(d - e + 1 + \varepsilon)$ -regular である (Chiantini, Chiarli, Greco [6]).

(3) **任意の非特異射影多様体** ($p = 0$) に対して,

- $C_{(n+1)(d-2)+2}$ が成立する. すなわち, 任意の非特異射影多様体は $((n + 1)(d - 2) + 2)$ -regular である (Bayer, Mumford [1]).
- $C_{e(d-1)+1}$ が成立する. すなわち, 任意の非特異射影多様体は $(e(d - 1) + 1)$ -regular である (Bertram, Ein, Lazarsfeld [4]).

上の結果 (1), (2) のうち Eisenbud, Goto [8] 以外のものは, 大雑把に言って, Lazarsfeld [14] のアイデアをもとに, 線形射影のファイバーのある性質を使って示された. この性質が一般に成立する場合が $n \leq 14$ であることが知られている ([6],[13] 参照). 他方で, Bayer, Mumford [1] の結果は, $\mathcal{O}_X(d - n - 2) \otimes \omega_X^\vee$ の base-point-freeness と \mathbb{P}^n 上の Koszul 複体, 小平消滅定理を使って示された. Bertram, Ein, Lazarsfeld [4] の結果は, $B_d \cdot \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$ が globally generated と Kawamata-Viehweg 消滅定理を使って示された.

1.4. Secant Length A_m について.

Regularity 予想=Eisenbud-Goto 予想 が正しいと考えられるので, 注の $C_m \implies A_m$ により, 任意の射影多様体 X に対して A_{d-e+1} が成立することが予想される. 実際, 次の議論により, A_{d-e+1} が成立しそうである. $L \subseteq \mathbb{P}^N$ を X に含まれない直線とし, $l(X \cap L) = m$ が成立しているとする. このとき, X の一般の点 $x_1, \dots, x_{e-1} \in X$ があって,

$$\bullet \ell(\langle L, x_1, \dots, x_{e-1} \rangle \cap X) = d = \deg X$$

が成立していると仮定する. このとき, $\ell(L \cap X) + (e - 1) \leq \ell(\langle L, x_1, \dots, x_{e-1} \rangle \cap X) = d$, となるので, $\ell(L \cap X) \leq d - e + 1$ が成立する.

事実. (Bertin [2]) $X \cap L \subseteq \text{Sm } X$ (特に X が非特異) なら, 上の仮定が成立し, 従って A_{d-e+1} が成立する. (超平面切断を取る方法もある)

問題点は, **仮定**は一般には成立しないことである.

問題. A_{d-e+1} は任意の射影多様体について成立するか？(これについては, Bertin の結果 ([2],[3]) も参照.)

1.5. Hypersurfaces cut out X, B_m について.

C_{d-e+1} や A_{d-e+1} を示すことが難しそうなので, 方針を転換して B_m について考える. まず, B_d がほぼ成立していることが次の結果によってわかっている.

事実. (Mumford [16]) 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して,

- (1) 集合として B_d が成立;
- (2) さらに X が非特異ならば, スキームとして B_d が成立.

Mumford による証明のアイデア. (詳細は [16] を参照). 一般の $(e-2)$ -平面 $\Lambda^{e-2} \subseteq \mathbb{P}^N$ を取ると, $\Lambda \cap X \neq \emptyset$ であるので, Λ を中心とする射影 $\pi_\Lambda: \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ は, X 上で定義される. このとき, X の像 $\bar{X}_\Lambda := \pi_\Lambda(X)$ が, \mathbb{P}^{n+1} で d 次超曲面となる. これを \mathbb{P}^N へ引き戻したものを F_Λ は \mathbb{P}^N の d 次超曲面となる.

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda \subseteq \mathbb{P}^N & \supseteq & X & \subseteq & F_\Lambda := \text{Cone}(\Lambda, \pi_\Lambda(X)) := \bigcup_{\bar{x} \in \pi_\Lambda(X)} \langle \Lambda, \bar{x} \rangle \\ & \pi_\Lambda \downarrow & & \downarrow & \swarrow \\ & \mathbb{P}^{n+1} & \supseteq & \bar{X}_\Lambda := \pi_\Lambda(X) & \end{array}$$

鍵となるのは $\Lambda^{e-2} \subseteq \mathbb{P}^N$ をいろいろ動かして F_Λ の共通部分を取ると, X となることである. これを示すには,

- (1) X の外の点 $w \in \mathbb{P}^N \setminus X$ と X を分離する $F_\Lambda = \text{Cone}(\Lambda, \pi_\Lambda(X))$ の構成
- (2) X の非特異点 $u \in \text{Sm } X$ での接空間 $T_u(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ と, $T_u(X)$ の外の点 $w \in \mathbb{P}^N \setminus T_u(X)$ を分離する超曲面 F_Λ の構成

を行えばよい. 考え方を扱うため, 以下でこれらがどのように構成されるかを見ていく.

(1) X の外の点 $w \in \mathbb{P}^N \setminus X$ と X を分離する超曲面 $F_\Lambda = \text{Cone}(\Lambda, \pi_\Lambda(X))$ の構成.

w を頂点とする X 上の錐 $\text{Cone}(w, X) := \bigcup_{x \in X} \langle w, x \rangle$ に対して, $(e-2)$ -平面 $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^N$ を $\Lambda \cap \text{Cone}(w, X) = \emptyset$ と取る. すると, $\pi_\Lambda(w) \notin \pi_\Lambda(X) =: \bar{X}$ となる. 実際, もし, $\pi_\Lambda(w) \in \pi_\Lambda(X)$ であれば, $\pi_\Lambda(w) = \pi_\Lambda(x)$ となる X の点 x に対して, 直線 $\langle w, x \rangle$ が $\langle \Lambda, w \rangle$ に含まれることになり, $\langle \Lambda, w \rangle$ の超平面 Λ と $\langle w, x \rangle$ は必ず交わるので, $\Lambda \cap \text{Cone}(w, X) = \emptyset$ に矛盾する. $\pi_\Lambda(w) \notin \pi_\Lambda(X)$ なので, $w \notin F_\Lambda$ が成立し, この F_Λ が, X を含むが w を含まない超曲面となる.

(2) X の非特異点 $u \in \text{Sm } X$ での接空間 $T_u(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ と, $T_u(X)$ の外の点 $w \in \mathbb{P}^N \setminus T_u(X)$ を分離する超曲面 $F_\Lambda = \text{Cone}(\Lambda, \pi_\Lambda(X))$ の構成.

$u \in X$ を頂点とする X 上の錐 $\text{Cone}(u, X)$ を, $\bigcup_{x \in X \setminus \{u\}} \langle u, x \rangle$ のザリスキー閉包として定義する. また, w と $T_u(X)$ の線形閉包 $\langle w, T_u(X) \rangle$ も考える. これらに対して, $(e-2)$ -平面 $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^N$ を $\Lambda \cap (\text{Cone}(u, X) \cup \langle w, T_u(X) \rangle) = \emptyset$ と取る. すると, $\langle u, \Lambda \rangle$ は X と接することなくただ一点 u で交わるので, その像 $\pi_\Lambda(X)$ の中で $\pi_\Lambda(u)$ は非特異な点となる. (このことにより, X と $\pi_\Lambda(X)$ は双有理となり, $\pi_\Lambda(X)$ は \mathbb{P}^{n+1} の $\deg X$ 次の超曲面となっていることがわかる.) さらに, $\Lambda \cap \langle w, T_u(X) \rangle = \emptyset$ より, $\pi_\Lambda(w) \notin T_{\pi_\Lambda(u)}(\pi_\Lambda(X))$ ともなっている. 従って, Λ を頂点集合とする $\pi_\Lambda(X)$ 上の錐 F_Λ は, u で非特異となり, その接空間

$T_u(F_\Lambda)$ は $\langle \Lambda, T_{\pi_\Lambda(u)}(\pi_\Lambda(X)) \rangle$ である. $\pi_\Lambda(w) \notin T_{\pi_\Lambda(u)}(\pi_\Lambda(X))$ より, $w \notin T_u(F_\Lambda)$ となり, F_Λ が X を含み u で非特異で w を含まない超曲面となる.

2. 内点からの線形射影を用いて B_{d-e+1} を示せるか?

この章では, 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, X の一般の内点からの線形射影により, B_{d-e+1} の成立を示せるかどうかを検討する.

アイデア. 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, X の一般の点 $x_1, \dots, x_{e-1} \in X$ が張る $(e-2)$ -平面 $\Lambda^{e-2} := \langle x_1, \dots, x_{e-1} \rangle \subseteq \mathbb{P}^N$ を中心とする射影 $\pi_\Lambda: \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ を考える. X の像の閉包 $\bar{X}_\Lambda := \overline{\pi_\Lambda(X \setminus \Lambda)}$ (以下単に X の像という) が, \mathbb{P}^{n+1} で $(d-e+1)$ 次超曲面となる. この超曲面を \mathbb{P}^N へ引き戻したもの $F_\Lambda := \text{Cone}(\Lambda, \bar{X}_\Lambda)$ は \mathbb{P}^N の $(d-e+1)$ 次超曲面となる.

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^{e-2} \subseteq & \mathbb{P}^N & \supseteq & X & \subseteq F_\Lambda \\ & \pi_\Lambda \downarrow & & & \swarrow \\ & \mathbb{P}^{n+1} & \supseteq & \bar{X}_\Lambda := \overline{\pi_\Lambda(X \setminus \Lambda)} & \end{array}$$

そこで, $(e-1)$ コの点 x_1, \dots, x_{e-1} を X 上の点としていろいろと動かしてできる F_Λ により, X が切り取られるかどうかを検討する.

問題. 上の F_Λ のみで X が切り出せるか?

答えは, No で, その理由を以下で見ていく.

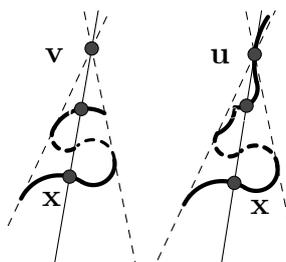
2.1. 非双有理中心点の集合 $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$.

次に定義する非双有理中心点集合と X とを, F_Λ 型の超曲面によっては分離できない.

$$\mathcal{B}(X) := \{v \in \mathbb{P}^N \setminus X \mid \text{一般の点 } x \in X \text{ に対して } l(X \cap \langle v, x \rangle) \geq 2\}$$

$$\mathcal{C}(X) := \{u \in \text{Sm } X \mid \text{一般の点 } x \in X \text{ に対して } l(X \cap \langle u, x \rangle) \geq 3\}$$

$\mathcal{B}(X)$ を非双有理外中心点の集合, $\mathcal{C}(X)$ を非双有理内中心点の集合と呼ぶ (下図参照). ($e \geq 2$ として考えているが, これらを特に $e=1$ のとき, すなわち X が超曲面のときに考えると, $d \geq 2$ のとき $\mathcal{B}(X) = \mathbb{P}^N \setminus X$ であり, $d \geq 3$ のとき $\mathcal{C}(X) = \text{Sm } X$ である.) $\mathcal{B}(X)$ は $\mathbb{P}^N \setminus X$ の閉集合であり, $\mathcal{C}(X)$ は $\text{Sm } X$ の閉集合となっていることがわかる. さらに, $\mathcal{B}(X)$ の閉包 $\overline{\mathcal{B}(X)}$ は B.Segre によって研究されており, Segre ローカスとも呼ぶ (以下の節 2.6 参照).



2.2. 非双有理中心点の集合が F_Λ 型の超曲面によっては分離できない理由.

次に $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が F_Λ 型の超曲面によっては分離できない理由を見ていく.

補題. 射影多様体 $X (e \geq 2)$ の一般の x_1, \dots, x_{e-1} に対し,

- (1) $X \cup \mathcal{B}(X) \subseteq F_{\langle x_1, \dots, x_{e-1} \rangle}$ が成立する.
- (2) $u \in \mathcal{C}(X)$ は, 超曲面 $F_{\langle x_1, \dots, x_{e-1} \rangle}$ の特異点である. (u で $T_u(X)$ を分離する $F_{\langle x_1, \dots, x_{e-1} \rangle}$ 型の超曲面は存在しない.)

証明. (1). $v \in \mathcal{B}(X)$ を任意の点とする. このとき, X の一般の $x_1, \dots, x_{e-1} \in X$ に対し, $(e-2)$ -平面 $\Lambda^{e-2} := \langle x_1, \dots, x_{e-1} \rangle \subseteq \mathbb{P}^N$ を中心とする射影 $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ を考える. v は $\mathcal{B}(X)$ の点なので $\langle x_1, v \rangle \cap (X \setminus \{x_1\}) \neq \emptyset$ となるのでその像 $\pi_\Lambda(v)$ は $\pi_\Lambda(X \setminus \Lambda) \subseteq \bar{X}_\Lambda$ に含まれる. 従って, v は \bar{X}_Λ の \mathbb{P}^N への引き戻し F_Λ に含まれる.

(2). u を $\mathcal{C}(X)$ の点とする. 定義より $\langle x_1, u \rangle \cap (X \setminus \{x_1, u\}) \neq \emptyset$ となるので, 射影による像 $\pi_\Lambda(u)$ は X の像 \bar{X}_Λ の特異点となる. 従って, u はその引き戻しである超曲面 F_Λ の特異点となる. \square

2.3. B_{d-e+1} 型の結果.

次の定理により, 非双有理中心点の集合 $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ を除くと, X を F_Λ 型の超曲面で分離できることがわかる.

定理. ([17]) 射影多様体 X について $e \geq 2$ と仮定する.

- (1) 集合として $X \subseteq E_{d-e+1}(X) \subseteq X \cup \mathcal{B}(X)$ が成立する.
(この部分は, 既に Calabri, Ciliberto [5] と Sommese, Vershelde, Wampler [23] によって知られていた.)
- (2) スキームとして $X = E_{d-e+1}(X)$ が $\mathbb{P}^N \setminus (\mathcal{B}(X) \cup \mathcal{C}(X) \cup \text{Sing } X)$ 上で成立する.

証明のためには次の事実が重要である

補題. 射影多様体 X について $e \geq 3$ と仮定する.

- (1) 与えられた $v \notin \mathcal{B}(X)$ に対して, $x \in \text{Sm}(X)$ を一般の点とする. このとき, $\pi_x(v) \notin \mathcal{B}(\overline{\pi_x(X \setminus \{x\})})$ が成立する.
- (2) 与えられた $u \in \text{Sm}(X) \setminus \mathcal{C}(X)$ に対して, $x \in \text{Sm}(X)$ が一般の点とする. このとき, $\pi_x(u) \in \text{Sm}(\overline{\pi_x(X \setminus \{x\})}) \setminus \mathcal{C}(\overline{\pi_x(X \setminus \{x\})})$ が成立する.

2.4. B_{d-e+1} へ向けての問題.

B_{d-e+1} 型の定理が得られたので, B_{d-e+1} の成立を調べるため, 次の問題を設定し調べる.

問題.

- (1) $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が空である X はあるか?

- (2) $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が空でないとき, その次元はどのくらいで, その閉包はどのような性質を持つか?
- (3) $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が空でない X はどのような特徴を持つか? 特に, つぎの (4) を見据えて何か特徴を抽出できないか?
- (4) 線形射影以外の方法で X を含む $(d - e + 1)$ 次の超曲面を見つけることができるか?

それぞれの問いに対して, 現在までにわかっていることを以下で見ていく.

2.5. $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ の問題 (1). $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が空である X はあるか?

第一歩として $\mathcal{B}(X) = \mathcal{C}(X) = \emptyset$ となる X をなるべくたくさん見つけたい. そうすればそのような多様体に対しては B_{d-e+1} は成立するからである. これに対して, 次がわかる.

命題. 次の場合は $\mathcal{B}(X) = \mathcal{C}(X) = \emptyset$ となる. 従って, 次の場合に対して, 集合として B_{d-e+1} , 非特異な X に対してスキームとして B_{d-e+1} が成立する.

- (1) X がある射影空間のベロネーゼ埋め込み $v_l(\mathbb{P}^m) (l \geq 2)$ に含まれるとき.
- (2) $\Delta(X) = 0$ ($d = e + 1$) の射影多様体のとき.
- (3) X が曲線上のスクロールで, $n - 2$ 次元の頂点を持つ cone ではなく, R_1 (regular in codimension 1) が成立するとき.

ほかにも沢山ありそうなので, $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ をもつ射影多様体 X を特徴付けるための次のステップへ進む.

2.6. $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ の問題 (2). $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ の次元と形状.

$\mathcal{B}(X)$ の閉包 $\overline{\mathcal{B}(X)}$ については, 既に Beniamino Segre による次の事実が知られている.

事実. (Beniamino Segre [22],[5]) 余次元 $e \geq 2$ の射影多様体 X に対し, $\mathcal{B}(X)$ の閉包 $\overline{\mathcal{B}(X)}$ の既約成分 Γ について次が成立する.

- Γ は線形部分集合で $\dim \Gamma \leq n - 1$ である.
- $\dim \overline{\pi_\Gamma(X \setminus \Gamma)} = \dim X - \dim \Gamma$ が成立する. 特に, X は Γ を頂点とする $\overline{\pi_\Gamma(X \setminus \Gamma)}$ 上の錐 $\text{Cone}(\Gamma, \overline{\pi_\Gamma(X \setminus \Gamma)})^{n+1}$ 上の余次元 1 の部分集合すなわち “因子” となっている.

注. 上の事実は $\text{char } \mathbb{k} = 0$ の場合であるが, $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$ のときは Furukawa [10] の結果がある.

Segre の結果の証明のアイデアを使うと次がわかる.

定理. ([17]) X を余次元 $e \geq 2$ の射影多様体とする.

- (1) $\mathcal{B}(X)$ の閉包 $\overline{\mathcal{B}(X)}$ の既約成分 Γ について $\dim(X \cap \Gamma) = \dim \Gamma - 1$ かつ $X \cap \Gamma \subseteq \text{Sing } X$ が成立する. 従って, $\dim \Gamma \leq \min\{n - 1, \dim \text{Sing } X + 1\}$ が成立する.

- (2) $\mathcal{C}(X)$ の閉包 $\overline{\mathcal{C}(X)}$ の既約成分 Ψ は線型部分空間で、
 $\dim \Psi \leq \min\{n-1, \dim \text{Sing } X + 2\}$ が成立する。さらに
 $\dim \pi_\Psi(X \setminus \Psi) = \dim X - \dim \Psi$ が成立する。

特に X が非特異の場合には、 $\dim \emptyset = -1$ である（と定義される）ので、次がわかる。

系. ([17]) X は非特異で $n \geq 2$ かつ $e \geq 2$ のとき、 $\mathcal{B}(X)$ は高々有限集合で、 $\mathcal{C}(X)$ は高々有限個の点と直線の和集合である。従って、これらを除くと、 B_{d-e+1} が集合として、さらにスキームとして成立する

2.7. $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ の問題 (3). $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が空でない X はどのような特徴を持つか

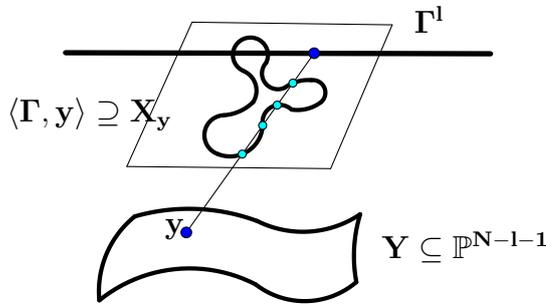
この節では、問題 (3) について得られた結果を述べる。その前に、まず概略を述べる。

Γ を $\overline{\mathcal{B}(X)}$ または $\overline{\mathcal{C}(X)}$ の既約成分とすると、 X は $\text{Cone}(\Gamma, \overline{\pi_\Gamma(X \setminus \Gamma)})$ の“因子”になっている。 $\text{Cone}(\Gamma, \overline{\pi_\Gamma(X \setminus \Gamma)})$ を非特異多様体上の射影束として実現するとその因子型がわかる。逆に、空集合でない $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ を持つ X の存在もわかる。

$\mathcal{C}(X)$ についてはさらに2つの type に分かれて、 $\overline{\mathcal{C}(X)}$ の既約成分 Γ 上の Gauss map $\gamma : \Gamma \cap \text{Sm } X \rightarrow \text{Grass}(n, \mathbb{P}^N)$ が constant か non-constant かで構造が異なる。

特に、 X が smooth のとき、 $\mathcal{C}(X)$ に line 含まれる X の構造がわかるので、その line に沿った normal bundle の様子が分かる。この事実は、応用上で重要な役割をはたす。

以下の図は、 Γ が直線で、 X が $(n-1)$ 次元射影多様体 Y によってパラメトライズされた平面曲線 $X_y \subseteq \langle \Gamma, y \rangle \cong \mathbb{P}^2$ ($y \in Y$) の族で、 $\Gamma \subseteq \mathcal{B}(X)$ となっている。



定義. ([18]) $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ となる X の構成 (その 1) — Scroll divisor type $(\mu, 1)$

$n > l \geq 0, \mu \geq 2$ を任意の整数とする。 Y を $(n-l)$ 次元非特異射影多様体で、次を満たすものを取る：

- (1) 像と双有理な射 $\nu : Y \rightarrow \mathbb{P}^{N-l-1}$ が存在する、このとき $\mathcal{O}_Y(1) := \nu^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-l-1}}(1)$ とおく；
- (2) $H^0(Y, \mathcal{L}) \neq 0$ と $(\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_Y(1))^{n-l-1} = 1$ を満たす直線束 $\mathcal{L} \in \text{Pic } Y$ が存在する；

\mathbf{F}_Y^Γ と $\tilde{\Gamma}$ を、 Y 上の射影束 $\mathbf{F}_Y^\Gamma := \mathbb{P}_Y(\mathcal{O}_Y^{\oplus l} \oplus \mathcal{O}_Y(1)) \supseteq \tilde{\Gamma} := \mathbb{P}_Y(\mathcal{O}_Y^{\oplus l})$ と定義する。
 $\varphi : \mathbf{F}_Y^\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^N$ を、 $|\mathcal{O}_{\mathbf{F}_Y^\Gamma}(1)|$ の部分線形束で定まり像と双有理な射と取る。

$\tilde{X} \in |\mathcal{O}_{\mathbf{F}_Y^\Gamma}(\mu) \otimes \tau^* \mathcal{L}|$ を, $G_{\tilde{X}} \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{F}_Y^\Gamma}(\mu) \otimes \tau^* \mathcal{L})$ で定まり $\tilde{\Gamma}$ と異なる既約かつ被約な因子で, ある $t \neq 0 \in H^0(Y, \mathcal{L})$ と $h \neq 0 \in H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(\mu))$ があつて $G_{\tilde{X}}|_{\tilde{\Gamma}} = t \cdot h \neq 0$ が成立し, さらに像 $\varphi(\tilde{X})$ と双有理となっているものを取る. このとき, 像 $X := \varphi(\tilde{X})$ を **scroll divisor type** $(\mu, 1)$ と呼ぶ. $\Gamma := \varphi(\tilde{\Gamma})$ とおく.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma} := \mathbb{P}_Y(\mathcal{O}_Y^{\oplus l}) & \subseteq & \mathbf{F}_Y^\Gamma := \mathbb{P}_Y(\mathcal{O}_Y^{\oplus l} \oplus \mathcal{O}_Y(1)) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^N \\ & \swarrow \tau & \cup & & \cup \\ Y & & \tilde{X} & \xrightarrow{\text{bir}} & X := \varphi(\tilde{X}) \end{array}$$

命題. ([18]) 上の定義のもとで, $t \in H^0(Y, \mathcal{L})$ が Y 上の既約かつ被約な因子を定めるならば, $\Gamma \cap \text{Sm } X = \Gamma \setminus V_+(h) \neq \emptyset$ で $\Gamma \cap \text{Sm } X \subseteq \mathcal{C}(X)$ となる.

定義. ([18]) $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ となる X の構成 (その 2) -Rational scroll divisor type $(\mu, 1)$

$n > l \geq 0, \mu \geq 2$ を任意の整数とする. $\mathcal{E} := \bigoplus_{i=l+1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ を \mathbb{P}^1 上の階数 $n-l$ の ample ベクトル束とする. $\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma$ と $\tilde{\Gamma}$ を \mathbb{P}^1 上の射影束 $\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus l} \oplus \mathcal{E})$, $\tilde{\Gamma} := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus l})$ とする. $\psi: \mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^N$ を $|\mathcal{O}_{\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma}(1)|$ の部分線形束で定まり像と双有理な射とする.

$\tilde{X} \in |\mathcal{O}_{\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma}(\mu) \otimes \tau^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)|$ を $G_{\tilde{X}} \in H^0(\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{O}_{\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma}(\mu) \otimes \tau^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ で定まり既約かつ被約で ψ による像と双有理な因子とする. このとき, $X := \psi(\tilde{X})$ を **rational scroll divisor type** $(\mu, 1)$ と呼ぶ. 直ちに $\deg X = \mu c_1(\mathcal{E}) + 1$ がわかる.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma} := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus l}) & \subseteq & \mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus l} \oplus \mathcal{E}) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^N \\ & \swarrow \tau & \cup & & \cup \\ \mathbb{P}^1 & & \tilde{X} & \xrightarrow{\text{bir}} & X := \psi(\tilde{X}) \end{array}$$

命題. ([18]) 上の定義のもとで考える. W_0, W_1, \dots, W_l を Γ の斉次座標, s, t を \mathbb{P}^1 の斉次座標とする. $\tilde{\Gamma} \cong \Gamma \times \mathbb{P}^1$ なので,

$G_{\tilde{X}}|_{\tilde{\Gamma}} \in H^0(\mathcal{O}_\Gamma(\mu)) \otimes_{\mathbb{k}} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) (\cong H^0(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}(\mu) \otimes \tau^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)))$ と見なし,

$G_{\tilde{X}}|_{\tilde{\Gamma}} = G_1 s + G_2 t$ ($G_1, G_2 \in H^0(\mathcal{O}_\Gamma(\mu))$) と表すと $\Gamma \cap \text{Sm } X = \Gamma \setminus V_+(G_1, G_2)$ が成立する. 従つて, $G_{\tilde{X}}|_{\tilde{\Gamma}} \neq 0$ であることと $\Gamma \cap \text{Sm } X \neq \emptyset$ は同値であり, この条件が満たされる時 $\Gamma \cap \text{Sm } X \subseteq \mathcal{C}(X)$ が成り立つ. さらに, $\deg \text{GCD}(G_1, G_2) < \mu$ であることと, ガウス写像 $\gamma: X \rightarrow \text{Grass}(n, \mathbb{P}^N)$, $u \mapsto T_u(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ の Γ への制限 $\gamma|_\Gamma$ が non-constant であることは同値である.

構造定理. 上の様に $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ となる射影多様体 X が構成されることがわかったが, 逆に $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ となる射影多様体 X はこれしかないことが以下のようにわかる. ただし, $\gamma: X \rightarrow \text{Grass}(n, \mathbb{P}^N)$, $u \mapsto T_u(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ を Gauss map とする.

定理. ([18]) $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ と仮定し, Γ を $\overline{\mathcal{C}(X)}$ の既約成分とする.

- $\gamma|_\Gamma$ が constant ($\dim \Gamma = 0$ を含む) ならば, X は scroll divisor type $(\mu, 1)$ で, $\dim \Gamma \leq \dim \text{Sing } X + 1$ が成立する.
- $\gamma|_\Gamma$ が non-constant (特に, $\dim \Gamma > 0$) ならば, X は rational scroll divisor type $(\mu, 1)$ で, $\dim \Gamma \leq \dim \text{Sing } X + 2$ が成立する.

注. Y が rational scroll のときの scroll divisor type $(\mu, 1)$ から, rational scroll divisor type $(\mu, 1)$ へは, 双有理写像があり, このときの X は, どちらの構成でも得られる.

注. 同様にして, $\mathcal{B}(X) \neq \emptyset$ となる射影多様体 X の構造定理が得られる ([18] 参照).

$\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ の次元についての定理と構造定理により, 非特異で $\dim \mathcal{C}(X) \geq 1$ となる射影多様体 X の特徴付けが得られる.

定理. ([18]) X を非特異で $e \geq 2$ かつ $\dim \mathcal{C}(X) \geq 1$ となる射影多様体と仮定する. このとき, $\dim \mathcal{C}(X) = 1$ であり, X は直線を頂点集合に持つ有理スクロール

$\mathbf{E}_{\mathcal{E}}^{\Gamma} := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{E}) \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1$ (\mathcal{E} は, \mathbb{P}^1 上の階数 $n-1$ の ample ベクトル束) の $(\mu, 1)$ -型の因子 ($\mu \geq 2$) である.

定義. (Bollic [12]) 上の X で $(\mu \geq 1)$ となっているものを, **Roth 多様体** という.

2.8. $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ の問題 (4). $\mathcal{B}(X)$ や $\mathcal{C}(X)$ を持つ射影多様体に対して, 線形射影以外の方法で $(d-e+1)$ 次の超曲面を見つけられるか?

この問題については, まだほとんどよくわかっていない. しかし, 非特異で $\dim \mathcal{C}(X) \geq 1$ として特徴づけられる Roth 多様体については部分的に次がわかる.

定理. ([20]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を **Roth 多様体** で, $e < a = c_1(\mathcal{E})$ を満たすと仮定する. このとき, X は $(d-e + ((1-e)\mu + a - 1))$ -regular である.

注. $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を Roth 多様体で, $e < a = c_1(\mathcal{E})$ を満たし, さらに, $(1-e)\mu + a - 1 \leq 1$ の場合, C_{d-e+1} と B_{d-e+1} 成立が成立する. しかし, $(1-e)\mu + a - 1 \geq 2$ の場合これらが成立するかは今のところわからない.

2.9. 非双有理中心点の研究の応用.

この節では, 常に X は**非特異**と仮定する.

定理. ([18]) $\mu: \tilde{\mathbb{P}}^N := \text{Bl}_X(\mathbb{P}^N) \rightarrow \mathbb{P}^N$ を X を中心とするブローアップ, E を μ の例外因子, A を引き戻し $\mu^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ とする. このとき, $(d-e+1)A - E$ は semiample 特に nef である.

上に, Bertram, Ein, Lazarsfeld [4] の論法を用いると, Bayer, Mumford [1] や Bertram, Ein, Lazarsfeld [4] の regularity 上限の改良が得られる.

系. ([18]) 非特異な射影多様体 X は, $(e(d-e)+1)$ -regular である. すなわち, 非特異な射影多様体に対して $C_{e(d-e)+1}$ が成立する.

注. 上の系は, Bertram, Ein, Lazarsfeld [4] の結果「 X は $(ed-e+1)$ -regular である」の改良になっている.

任意の自然数 a に対して \mathcal{I}_X^a が m -regular となる最小の整数 m を $\text{reg}(\mathcal{I}_X^a)$ とおく.

系. ([18])(Asymptotic regularity 上限の改良) $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\text{reg}(\mathcal{I}_X^a)}{a} \leq d - e + 1$ が成立する.

注. 上の系は, Bertram, Ein, Lazarsfeld [4] の結果 「 $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\text{reg}(\mathcal{I}_X^a)}{a} \leq d$ 」 の改良になっている.

3. 内点からの線形射影の二重点因子の POSITIVITY

前章では, 射影多様体の内点からの線形射影を用いて定義方程式を構成したが, ここでは, 射影多様体の内点からの線形射影の二重点因子について考察し, その応用を述べる.

3.1. 射影多様体の外点からの線形射影の二重点因子.

はじめに, 射影多様体の外点からの線形射影の二重点因子についての Mumford の結果について再吟味する.

事実. (Bayer, Mumford [1]) X が非特異でその標準束を ω_X とする. このとき, 直線束 $\mathcal{O}_X(d - n - 2) \otimes \omega_X^\vee$ (これを **二重点因子** と呼ぶ) は大域的切断で生成される (spanned) である.

Mumford は, 非特異射影多様体 X に対して, 射影空間の一般の $(e - 2)$ -plane Λ を中心とする射影 $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ による像 $\bar{X} = \pi_\Lambda(X)$ と X との非同型集合 (non-isomorphic locus) $\mathbb{D}(\pi_\Lambda)$ について考察した. ただし, $\omega_{\bar{X}}$ は \bar{X} の dualizing sheaf で, 今の場合に \bar{X} が超曲面なので, 直線束になっている.

- (1) $\mathbb{D}(\pi_\Lambda)$ は Λ の取り方によらず $|\mathcal{O}_X(d - n - 2) \otimes \omega_X^\vee| = |\pi_{\Lambda, X}^* \omega_{\bar{X}}^\vee \otimes \omega_X^\vee|$ のメンバー,
- (2) 任意の点 $x \in X$ に対し, 一般の Λ を取れば射影 π_Λ は x で同型となる. すなわち, $x \notin \mathbb{D}(\pi_\Lambda)$ である.

が成立するので, 上の**事実**が証明される.

ここでは, 一般の内点からの線形射影を考えることで, 「ある正の整数 ε に対して, $\mathcal{O}_X(d - n - 2 - \varepsilon) \otimes \omega_X^\vee$ は spanned が示せないか」考える. 別の言い方をすれば, 非特異射影多様体 X に対し, 次の問題が考えられる.

問題. 直線束 $\mathcal{O}_X(d - n - 2) \otimes \omega_X^\vee$ はより強い “positivity” を満たすか?

この方向の研究は, Bo Ilic により行われている.

事実. (Bo Ilic [12]) もし, $e \geq 2$ かつ, X が Roth 多様体でなければ, X の線形束 $|\mathcal{O}_X(d - n - 2) \otimes \omega_X^\vee|$ は X 上の任意の異なる 2 点を分離する. 特に, $\mathcal{O}_X(d - n - 2) \otimes \omega_X^\vee$ は ample である.

注. (Bo Ilic [12]) で注意されているように, X が Roth 多様体のとき, 直線 $L := \psi(\mathbb{P}(\mathcal{O}^{\oplus 2})) \subseteq X$ に対して, $\mathcal{O}_X(d - n - 2) \otimes \omega_X^\vee|_L \cong \mathcal{O}_L$ となる. 従って, $\mathcal{O}_X(d - n - 2) \otimes \omega_X^\vee$ のより強い positivity のためには, Roth 多様体を除いて考えなければならぬ.

3.2. 内点からの線形射影の二重点因子.

一般の内点からの線形射影を考えることで、 \bar{X} の次数は $d - e + 1$ となるので、 $\mathcal{O}_X(d - n - 2) \otimes \omega_X^\vee$ ではなく、 $\mathcal{O}_X((d - e + 1) - n - 2) \otimes \omega_X^\vee$ が spanned かどうかを考える. そのため、 x_1, \dots, x_{e-1} を X の一般の点とし、それらの線形包 $\Lambda^{e-2} := \langle x_1, \dots, x_{e-1} \rangle$ からの線形射影を $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$, これによる X の像 $\pi_\Lambda(X \setminus \Lambda)$ の閉包を $\overline{\pi_\Lambda(X \setminus \Lambda)}$ とする.

$$\begin{array}{ccc} \pi_\Lambda : & \mathbb{P}^N \setminus \Lambda & \rightarrow & \mathbb{P}^{n+1} \\ & \cup & & \cup \\ \pi_{\Lambda, X} : & X \setminus \Lambda & \rightarrow & \overline{\pi_\Lambda(X \setminus \Lambda)} \end{array}$$

このとき、線形射影の X への制限 $\pi_{\Lambda, X} : X \setminus \Lambda \rightarrow \overline{\pi_\Lambda(X \setminus \Lambda)}$ について、次がわかる:

- (1) $\pi_{\Lambda, X}$ の例外因子 $\text{Exc}(\pi_{\Lambda, X})$ (すなわち、 $\pi_{\Lambda, X}$ で次元の下がる因子の和) が空ならば、 $\pi_{\Lambda, X}$ の同型でないローカスの閉包 $\mathbb{D}(\pi_{\Lambda, X})$ は effective 因子で $|\mathcal{O}_X((d - e + 1) - n - 2) - K_X|$ のメンバーである.
- (2) 非双有理内中心点でない X の点 x (すなわち $x \in X \setminus \mathcal{C}(X)$) が与えられたとき、 x_1, \dots, x_{e-1} を十分一般に選べば、 $\pi_{\Lambda, X}$ は x で定義され局所的に同型となる. 従って特に、 $x \notin \mathbb{D}(\pi_{\Lambda, X})$ となる. (既に B_{d-e+1} 型の結果の補題でこの事実をみた)

これらを合わせると、中間的な結果として次が得られる.

命題. ([19]) X は非特異で $e \geq 2$ とする. $\pi_{\Lambda, X}$ の例外因子 $\text{Exc}(\pi_{\Lambda, X}) (\subseteq X)$ が空であると仮定する. このとき、 $\text{Bs}|\mathcal{O}_X(d - e - n - 1) \otimes \omega_X^\vee| \subseteq \mathcal{C}(X)$ となる. 従って特に、 $|\mathcal{O}_X(d - e - n) \otimes \omega_X^\vee|$ は $X \setminus \mathcal{C}(X)$ 上 very ample. さらに $\dim \mathcal{C}(X) \leq 0$ を仮定すると、 $\mathcal{O}_X(d - e - n - 1) \otimes \omega_X^\vee$ は semiample で、 $\mathcal{O}_X(d - e - n) \otimes \omega_X^\vee$ は ample である.

上の命題により、

- (1) $\dim \mathcal{C}(X) \geq 1$ となる射影多様体
- (2) $\pi_{\Lambda, X}$ の例外因子 $\text{Exc}(\pi_{\Lambda, X}) (\subseteq X)$ が空でない射影多様体

を調べることが次の問題となる. (1) は 2.7 節で示したように **Roth 多様体** になることがわかっているので、残された問題は、(2) の多様体について調べることである.

3.3. $\pi_{\Lambda, X}$ の例外集合 $\text{Exc}(\pi_{\Lambda, X})$ が空集合でない射影多様体.

(2) の多様体について調べるために次を定義をする.

定義. ([19]) 射影多様体 X が条件 (E_m) を満たすとは、 X の十分に一般の m 点 ($1 \leq m \leq e - 1$) x_1, \dots, x_m に対して、その線形包 $\Lambda := \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ からの線形射影 $\pi_{\Lambda, X} : X \setminus \Lambda \rightarrow \overline{\pi_{\Lambda, X}(X \setminus \Lambda)}$ が例外因子 ($\pi_{\Lambda, X}$ で次元の下がる因子) を持つことである.

例. 上で定義した、条件 (E_m) を満たす射影多様体には次のようなものがある.

- 曲線上のスクロールは (E_1) を満たす.
- ベロネーゼ曲面 $v_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$ は (E_2) を満たす.

次の定理が示すように、 $1 \leq m \leq e - 1$ に対して (E_m) を満たす射影多様体は本質的に上の例以外に存在しない。

定理. ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ は**非特異とは限らない**射影多様体とする。

- (1) $e \geq 2$ で、 X は (E_1) を満たすと仮定する。このとき、 X は線形部分空間 $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^N$ で覆われる。更に、 X が非特異ならば、 X は曲線上の射影束と射影同値となる。
- (2) $e \geq 3$ で、 X は (E_2) を満たし (E_1) は満たさないと仮定する。このとき、 X は $(n-3)$ -plane を頂点にもつ、2次ベロネーゼ曲面 $v_2(\mathbb{P}^2)$ 上の cone と射影同値となる。従って特に、 X が非特異ならば、 X は $v_2(\mathbb{P}^2)$ と射影同値となる..
- (3) 整数 m ($3 \leq m \leq e - 1$) に対して、 X が (E_m) を満たすことと、 X が (E_1) を満たすことは同値である。

3.4. 内点からの線形射影の二重点因子の positivity.

上の結果をあわせると、内点からの線形射影の二重点因子の positivity について次の結果が得られる。

定理. ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ は非特異で、次の (1)-(3) とともに射影同値でないと仮定する：

- (1) $e \geq 2$ のときの、曲線上のスクロール；
- (2) $e = 3$ のときの、2次ベロネーゼ曲面 $v_2(\mathbb{P}^2)$ ；
- (3) Roth 多様体。

このとき、 $\text{Bs}|\mathcal{O}_X(d-n-e-1) \otimes \omega_X^\vee| \subseteq \mathcal{C}(X)$ となり、高々有限集合である。従って特に、 $\mathcal{O}_X(d-n-e-1) \otimes \omega_X^\vee$ は semiample (すなわち十分ひねると spanned) で、 $\mathcal{O}_X(d-n-e) \otimes \omega_X^\vee$ は ample である。

注. 上の定理において、(2) と (3) は結論が成立するために本当に除かなければならないが、(1) はすべて除く必要があるかどうかはわかっていない。

3.5. 二重点因子の positivity の応用.

3.4 の定理の系として、次がわかる。

系. ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を非退化な非特異射影多様体で、曲線上のスクロールと射影同値でないと仮定する。このとき、構造層 \mathcal{O}_X は $(d-e)$ -regular である。すなわち、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(d-e-i)) = 0$ ($\forall i > 0$) が成立する。

注. regularity 予想「 X は $(d-e+1)$ -regular である」が成立することは、 \mathcal{O}_X が $(d-e)$ -regular かつ $H^1(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d-e)) = 0$ が成立することと同値である。従って、上の系はその一部がいえたことになる。しかし、 $H^1(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d-e)) = 0$ を示すことの方が難しいと思われる。

系. ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を非退化な非特異射影多様体で、3.4 の定理の (1) と (3) とともに射影同値でないと仮定する。このとき、

- (1) $\Delta(X, \mathcal{O}_X(1)) \leq n$ ならば, $\text{Bs}|\omega_X^\vee|$ は高々有限集合である ;
 (2) $\Delta(X, \mathcal{O}_X(1)) < n$ ならば, ω_X^\vee は $X \setminus \mathcal{C}(X)$ 上で very ample であり, ω_X^\vee は ample on X である.

系. ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ は非退化な非特異射影多様体で次元 $n \geq 2$ で, 3.4 の定理の (1) と (3) と射影同値でないと仮定する. このとき,

- (1) $\kappa(X) \geq 0$ (i.e., $H^0(X, \omega_X^{\otimes l}) \neq 0 \exists l > 0$) ならば $\Delta(X, \mathbb{P}^N) \geq n$ が成立する ;
 (2) $\Delta(X, \mathbb{P}^N) \geq \frac{2}{d}(g(X, \mathcal{O}_X(1)) - 1) + 1$ が成立する.

注. 上に関連して, Fukuma [9] によって, 「 $\dim_{\mathbb{k}} H^0(X, \omega_X) > 0$ のとき $\Delta(X, \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{n}{n+1}(\mathcal{O}_X(1)^n - 1)$ が成立する」ことが知られている.

系. ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ は非退化な非特異射影多様体で次元 $n \geq 2$ で, 3.4 の定理の (1)-(3) と射影同値でないと仮定する. このとき, $\mathcal{O}_X(k)$ は, (N_{k-d+e}) -property を満たす. 特に, $\mathcal{O}_X(d-e)$ は, projectively normal である.

注. 上の系は, Ein, Lazarsfeld [7] の結果 「 $\mathcal{O}_X(k)$ は, (N_{k-d+1}) -property を満たす」の改良になっている.

謝辞. この講演の機会を与えていただいたことに対してシンポジウム委員の先生方へ感謝いたします. 本研究は JSPS 科研費 26400041 の助成を受けたものです.

REFERENCES

- [1] Dave Bayer and David Mumford. What can be computed in algebraic geometry? In *Computational algebraic geometry and commutative algebra (Cortona, 1991)*, Sympos. Math., XXXIV, pages 1–48. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [2] Marie-Amélie Bertin. On the regularity of varieties having an extremal secant line. *J. Reine Angew. Math.*, 545:167–181, 2002.
- [3] Marie-Amélie Bertin. On singular varieties having an extremal secant line. *Comm. Algebra*, 34(3):893–909, 2006.
- [4] Aaron Bertram, Lawrence Ein, and Robert Lazarsfeld. Vanishing theorems, a theorem of Severi, and the equations defining projective varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3):587–602, 1991.
- [5] Alberto Calabri and Ciro Ciliberto. On special projections of varieties: epitome to a theorem of Beniamino Segre. *Adv. Geom.*, 1(1):97–106, 2001.
- [6] L. Chiantini, N. Chiarli, and S. Greco. Bounding Castelnuovo-Mumford regularity for varieties with good general projections. *J. Pure Appl. Algebra*, 152(1-3):57–64, 2000. Commutative algebra, homological algebra and representation theory (Catania/Genoa/Rome, 1998).
- [7] Lawrence Ein and Robert Lazarsfeld. Syzygies and Koszul cohomology of smooth projective varieties of arbitrary dimension. *Invent. Math.*, 111(1):51–67, 1993.
- [8] David Eisenbud and Shiro Goto. Linear free resolutions and minimal multiplicity. *J. Algebra*, 88(1):89–133, 1984.
- [9] Yoshiaki Fukuma. On the sectional geometric genus of quasi-polarized varieties. II. *Manuscripta Math.*, 113(2):211–237, 2004.
- [10] Katsuhisa Furukawa. Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic. *J. Algebra*, 336:84–98, 2011.
- [11] L. Gruson, R. Lazarsfeld, and C. Peskine. On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves. *Invent. Math.*, 72(3):491–506, 1983.

- [12] Bo Ilic. Geometric properties of the double-point divisor. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(4):1643–1661, 1998.
- [13] Sijong Kwak. Castelnuovo regularity for smooth subvarieties of dimensions 3 and 4. *J. Algebraic Geom.*, 7(1):195–206, 1998.
- [14] Robert Lazarsfeld. A sharp Castelnuovo bound for smooth surfaces. *Duke Math. J.*, 55(2):423–429, 1987.
- [15] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series.
- [16] David Mumford. Varieties defined by quadratic equations. In *Questions on Algebraic Varieties (C.I.M.E., III Ciclo, Varenna, 1969)*, pages 29–100. Edizioni Cremonese, Rome, 1970.
- [17] Atsushi Noma. Hypersurfaces cutting out a projective variety. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(9):4481–4495, 2010.
- [18] Atsushi Noma. Projective varieties with nonbirational linear projections and applications. *Preprint*, 2011.
- [19] Atsushi Noma. Generic inner projections of projective varieties and an application to the positivity of double point divisors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(9):4603–4623, 2014.
- [20] Atsushi Noma. Regularity of projected roth varieties. *Preprint*, 2014.
- [21] Henry C. Pinkham. A Castelnuovo bound for smooth surfaces. *Invent. Math.*, 83(2):321–332, 1986.
- [22] Beniamino Segre. On the locus of points from which an algebraic variety is projected multiply. *Proceedings of the Phys.-Math. Soc. Japan*, 18(1):425–426, 1936.
- [23] Andrew J. Sommese, Jan Verschelde, and Charles W. Wampler. Numerical irreducible decomposition using projections from points on the components. In *Symbolic computation: solving equations in algebra, geometry, and engineering (South Hadley, MA, 2000)*, volume 286 of *Contemp. Math.*, pages 37–51. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY, YOKOHAMA 240-8501 JAPAN

E-mail address: noma@ynu.ac.jp

一般型代数曲面の多重標準写像と標準環

今野 一宏

大阪大学大学院理学研究科

はじめに

代数学シンポジウムが記念すべき第 60 回を迎えた今年 (2015 年) は, 小平邦彦先生の生誕 100 年にもあたり, 二重の意味で喜ばしい年になりました. 日本数学会では小平先生の業績を称えるために様々な事業が行われています. だからというわけではありませんが, 小平先生のお仕事に少しだけ関係する話題を取り上げてみようと考えました. 小平先生が一般型代数曲面の多重標準写像の研究に着手なされたのは, 有名なコンパクト複素解析曲面の分類が完成したあとのことです. 先生の数多い著作や講義録から関連する文献を探してみても, 次の 3 つくらいしか見つかりません.

[1] K. Kodaira, Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 170–192.

[2] 小平邦彦, 代数曲面論, 東大数学教室セミナー・ノート 20, Tokyo, 1968 (山島成穂 記)

[3] K. Kodaira, Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type II (飯高茂先生のホームページにあった)

[3] は結局出版されていませんし, [2] は [1] の解説であるとみなせば, [1] のみだと言ってよいのかも知れません.

以下では, [1] や [3] で証明された定理に加えて, 一般型代数曲面の多重標準写像や標準環について現在までに知られている結果を紹介したいと思います. もちろん, すべてを網羅することはできません. 例えば, 正標数の話題には全く触れません.

1 復習：代数曲線の場合

代数曲面の話に入る前に、代数曲線の場合の諸結果を簡単に振り返る。2012年に開催された第57回代数学シンポジウムの報告集に、大淵朗さん（徳島大）のすばらしい解説があるので、詳しくはそちらを参照されたい。

C を種数 g のコンパクト・リーマン面（非特異既約射影代数曲線 $/\mathbb{C}$ ）とすれば良く知られているように、

- $g = 0 \Leftrightarrow C$ はリーマン球面（射影直線 \mathbb{P}^1 ）
- $g = 1 \Leftrightarrow C$ は1次元複素トーラス（楕円曲線）

である。多重標準写像の立場からは、これらのケースは考えても意味が無いので、以下では常に $g \geq 2$ と仮定する。

C から \mathbb{P}^1 への次数2の射 $\varphi: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ があるとき、 C を超楕円曲線という。このような射は（存在するとしても） φ と \mathbb{P}^1 の正則自己同型写像（一次分数変換）との合成を法として唯ひとつである。Riemann-Hurwitz の公式から、 φ は \mathbb{P}^1 上の相異なる $2g + 2$ 点で分岐することがわかる。 \mathbb{P}^1 は単連結なので、その分岐2重被覆は分岐点によって決まる。一次分数変換によって、 \mathbb{P}^1 上の任意の異なる3点を $0, 1, \infty$ に写すことができるから、超楕円曲線の同型類は $2g + 1$ 個の分岐点のうち残る $2g - 1$ 個の点のもつ任意性に相当する自由度をもち、すなわち $2g - 1$ 個の有効パラメータに依存する。他方、Teichmüller 理論によれば、種数 g の代数曲線全体は $3g - 3$ 個のパラメータに依存するので、 $g \geq 3$ のときには超楕円曲線は（種数 g の曲線全体の中で）極めて「稀な」曲線であることが了解される。（注：種数2の曲線は常に超楕円的である。）超楕円曲線でない大多数の曲線を非超楕円曲線と呼ぶ。

多重標準写像に関する結果を紹介しよう。いつものように K_C によって C 上の標準直線束または標準因子を表す。正則余接束であると言っても良い。どのテキストにも書いてあることだが、 K_C が自由である という事実は非常に重要である。ここに、直線束 L が自由であるとは、任意の点 $p \in C$ に対して制限写像 $H^0(C, L) \rightarrow \mathbb{C}_p$ が全射であるとき（つまり p で零にならないような L の大域正則切断が見つかるとき）をいうのだった。すると、任意の正整数 m に対して $mK_C (= K_C^{\otimes m} = K_C$ の m 個のテンソル積) も自動的に自由になる。 $p \in C$ で零にならない $s \in H^0(C, K_C)$ をとって $s^m \in H^0(C, mK_C)$ を考えれば、 s^m も p で零にならないからである。

$H^0(C, mK_C)$ の基底をひと組選び、それを一列に並べることによって定義される、射影空間への正則写像

$$\Phi_m : C \rightarrow \mathbb{P}^{P_m-1}, \quad P_m = h^0(C, mK_C),$$

を m -標準写像といい、それらを総称して多重標準写像という。ここに $h^0(C, \mathcal{F}) = \dim H^0(C, \mathcal{F})$ である。 Φ_m を通して C がいつ \mathbb{P}^{P_m-1} の複素部分多様体になるか、すなわち、どんな m に対して Φ_m が正則埋め込みになるか、という問題については次が知られている。

- 標準写像 Φ_1 が埋め込みである $\Leftrightarrow C$ は非超楕円曲線である。(このとき任意の $m \geq 1$ に対して Φ_m は埋め込み.)
- C が超楕円曲線のとき、 Φ_1 は分岐 2 重被覆 $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ を経由し、像である $g-1$ 次有理正規曲線 (\mathbb{P}^1 の $g-1$ 次 Veronese 埋め込み) への 2 重被覆を与える。
- C が種数 $g \geq 3$ の超楕円曲線ならば、 $m \geq 2$ に対して Φ_m は埋め込みである。
- C の種数が 2 のとき、 $m \geq 3$ に対して Φ_m は埋め込みである。 Φ_2 は非特異平面 2 次曲線への 2 重被覆を与える。

m -標準写像が埋め込みであるか否かは、代数的には C の標準環、すなわち次数付き \mathbb{C} 代数

$$R(C, K_C) := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(C, mK_C)$$

の極小生成系の次数を求める問題に翻訳される。

C が超楕円曲線であるとき、 $R(C, K_C)$ は $\begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$ 次以下の元から成る生成系をもち、生成元の間関係式は $\begin{cases} 6 & (g=2) \\ 4 & (g \geq 3) \end{cases}$ 次以下である。

他方、 C が非超楕円曲線の場合には次が知られている。

- (M. Noether) $R(C, K_C)$ は 1 次部分で生成される。
- (Enriques-Babbage, Petri) 生成元の間関係式は $\begin{cases} 4 & (g=3) \\ 3 & (g \geq 4) \end{cases}$ 次以下である。
もし 3 次以上の原始的關係式があれば、 C はトリゴナル曲線または非特異平面 5 次曲線である。ここに、 \mathbb{P}^1 への次数 3 の射をもつとき、非超楕円曲線 C をトリゴナル曲線という。ちなみに、種数 3 と 4 の非超楕円曲線はトリゴナルである。 $g \geq 5$ のときには、超楕円曲線の場合と同様に、トリゴナル曲線は「稀な」曲線である。

従って、種数が5以上の「一般」の曲線に対して、 $R(C, K_C)$ は1次で生成され、2次の関係式をもつことになる。こういう事実をさらに一般化すれば、次のようになる。

- (Green's conjecture) 標準環の“余分な syzygies”と曲線の“特殊性”は密接に関係している。

(注) Federigo Enriques と Dennis William Babbage は、標準像 $\Phi_1(C)$ が集合論的に2次超曲面で切り取られることを示し、Max Noether の弟子である Karl Petri は、イデア論的にそうであることを示した。Green 予想は、まだ完全には解決されていないようである。

2 一般型代数曲面 (before and around Kodaira's time)

この節からは代数曲面に話題を転じ、代数曲線に対する諸結果がどのように拡張されたのか(或いは、できなかったのか)を論じる。以下の記号を断りなしに用いる。

- S は非特異既約な射影代数曲面 $/\mathbb{C}$,
- $K = K_S$ は S の標準束あるいは標準因子,
- $p_g = p_g(S) := h^0(S, K)$ (幾何種数), $q = q(S) := h^1(S, \mathcal{O}_S)$ (不正則数),
- 正整数 m に対して $P_m(S) := h^0(S, mK_S)$ (m -種数)。

19世紀末から20世紀初頭にかけてのイタリア学派の活躍を抜きにして代数曲面論は語れない。Enriques が完成した代数曲面の双有理不変量による分類は、Guido Castelnuovo の有理性判定法 ($q = P_2 = 0 \Leftrightarrow S$ は有理曲面) がその発端であり、直接には Enriques の定理 ($P_{12} = 0 \Leftrightarrow S$ は線織面) に繋がる。もうひとつの重要な発見は、Castelnuovo の縮約定理であり、双有理的な分類を考える限りにおいて、曲面は極小であると仮定して良いことになる。ここで、 S が極小とは、 S 上に自己交点数が -1 であるような \mathbb{P}^1 ((-1) 曲線という) が存在しないことである。縮約定理は S 上に (-1) 曲線があれば、それを非特異点に縮約して S と双有理同値な代数曲面が得られることを保証する。

約100年前(1914年)に発表された Enriques の分類は、大雑把には次の表に見られる通りである。これは約50年後に Shafarevich らのモスクワ学派によって現代的で厳密な証明を与えられ、小平邦彦によってコンパクト複素解析曲面全体にまで拡張されることになる。

P_{12}	K^2	名前
0		有理曲面, 線織面
1	0	K3 曲面, Enriques 曲面, 双楕円曲面, アーベル曲面
> 1	0	楕円曲面
> 1	> 0	一般型曲面

この表にはいろいろな名前をもった曲面が現れるが、一番最後の行にある一般型曲面という呼称は他とは質が違ふ。つまり、特別に与えられた名誉の称号ではなく十把一絡げの代数曲面たちの総称である。代数曲線で言えば種数が2以上のものに相当する。

以下では、とくに断らない限り S は 極小な一般型代数曲面 を表す。(-1) 曲線をもたないことは言うまでもないが、数値的には $K_S^2 > 0$ かつ $\chi(\mathcal{O}_S) := p_g - q + 1 > 0$ で特徴づけられる。さらに、次のような不等式、等式が成立する。

- (Noether) $K^2 \geq 2\chi - 6$.
- (Bogomolov-Miyaoka-Yau) $K^2 \leq 9\chi$.
- (Pluri-genus formula)

$$P_m(S) := h^0(S, mK_S) = \binom{m}{2} K_S^2 + \chi \quad (m \geq 2)$$

最初の Noether 不等式は古典だが、2 番めの不等式は 1977 年に証明された。最後の多重種数公式は [1] において厳密な証明が与えられた。

$H^0(S, mK_S)$ の基底を並べて定義する有理写像 $\Phi_m : S \dashrightarrow \mathbb{P}^{P_m-1}$ を m 標準写像と呼ぶのは、曲線の場合と同様である。Enriques 後の多重標準写像の組織的な研究は、人類史上最悪の不幸な出来事を挟んで Shafarevich らによって引き継がれた。次いで小平, Bombieri と連なる。代数曲線の場合と異なり一般型代数曲面の場合には K_S は必ずしも自由ではなく、これが物事を煩雑にする大きな要因である。そこで、まず mK_S が自由になるような m の値を確定しなければいけない。また、いくら m を大きくしても Φ_m は必ずしも埋め込みにはならないことにも注意が必要である。 S は極小な一般型曲面なので、 K_S はネフであるが、一般には交点数 $K_S C = 0$ となる既約曲線 C が存在する。 $K_S^2 > 0$ だから Hodge の指数定理より $C^2 < 0$ でなければならず、さらに $2p_a(C) - 2 = K_S C + C^2$ は -2 以上の偶数なので $C^2 = -2$ かつ $C \simeq \mathbb{P}^1$ であることがわかる。すなわち C は (-2) 曲線である。このような既約曲線からなる連結集合は Φ_m によって 1 点に縮約されてしまうが、生じる特異点は Artin によって研究された有理 2 重点に他ならない。いずれにせよ、 Φ_m に期待できる最良の性質は「双有理正則写像」である。

小平 [1] の主結果は次の通りである。

定理 2.1 (Kodaira, 1968). $m \geq 4$ ならば mK_S は自由である. $m \geq 6$ ならば Φ_m は (像への) 双有理正則写像である.

例 2.2 ($3K_S$ が自由でない例). $Y = \{x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ を Fermat 型の 5 次曲面とする. $\epsilon = e^{2\pi\sqrt{-1}/5}$ とおき, \mathbb{P}^3 への \mathbb{Z}_5 作用

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon^2 x_2 : \epsilon^3 x_3)$$

を考えると, これは Y の正則自己同型を誘導し, Y 上に固定点を持たないことがわかる. そこで $S = Y/\mathbb{Z}_5$ とおけば, これは $p_g = q = 0$, $K^2 = 1$ をみたす極小一般型曲面であり, 発見者の名前を冠して **Godeaux 曲面** と呼ばれている. 超曲面であることを利用すれば, Y 上の m -標準形式は

$$\frac{F_m(x, y, z)}{(\partial f / \partial z)^m} (dx \wedge dy)^m,$$

のように書くことができる. ここに, $(x, y, z) = (x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0)$, F_m は $\deg F_m \leq m$ なる多項式で $f(x, y, z) = 1 + x^5 + y^5 + z^5$ は Y の定義方程式である. これら Y 上の m -標準形式のうちで \mathbb{Z}_5 不変なものが S 上の m -標準形式に相当する. 従って $H^0(S, mK_S)$ の基底は $m + i + 2j + 3k \equiv 0 \pmod{5}$ かつ $0 \leq i + j + k \leq m$ をみたす単項式 $x^i y^j z^k$ 全体と同一視される. それを x_0, x_1, x_2 の斉次単項式の形で与えると, 簡単な計算から次のようになることがわかる.

- $m = 2$: $x_1 x_2, x_0 x_3$
- $m = 3$: $x_0 x_1^2, x_0^2 x_2, x_2^2 x_3, x_1 x_3^2$
- $m = 4$: $x_0^3 x_1, x_1^3 x_3, x_1^2 x_2^2, x_0 x_1 x_2 x_3, x_0 x_2^3, x_0^2 x_3^2, x_2 x_3^3$

従って $3K_S$ は自由でなく 2 つの基点をもつ. 実際, $m = 3$ の場合の基底は $x_0 = x_3 = 0$ および $x_1 = x_2 = 0$ を共通零点とするが, これらは S 上の相異なる 2 点を定める.

よって, 定理 2.1 における最初の主張は最適である. しかし, 2 番めの Φ_m の双有理性に関する条件にはまだ改善の余地があった. これが多重標準写像の研究を継続し [3] を執筆する動機になったものと想像される. 小平 [3] では次が示されている.

定理 2.3 (Kodaira). $m \geq 5$ ならば Φ_m は像の上への双有理正則写像である. さらに $K^2 \geq 2$ ならば Φ_4 は双有理正則写像である. $K^2 \geq 3$ かつ $p_g \geq 3$ ならば Φ_3 も双有理正則写像である.

筆者にはプレプリント [3] が書かれた年を特定できないが、数理解析研究所講究録 78 (1969), 66–75, に拠れば, 1969 年 10 月には既に上記の結果が得られていたようである。Enrico Bombieri の論文

[4] E. Bombieri, Canonical models of surfaces of general type, Publ. Math. I.H.E.S. 42 (1973), 171–219.

が世に出たのは, [3] が書かれた少し後なのだろう。序文で [3] の結果に言及している。

[4] の主定理を述べるために, 記号と用語を少し補充する。 m 標準写像 $\Phi_m : S \dashrightarrow \mathbb{P}^{P_m-1}$ に対してその像を $X_m = \Phi_m(S)$ とおく。David Mumford は Oscar Zariski の論文 (The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Ann. of Math. **76** (1962), 560–615) の Appendix において, 標準環

$$R(S, K_S) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(S, mK_S)$$

が有限生成であることを示した。 $X = \text{Proj}(R(S, K_S))$ を S の標準モデルという。これは正規代数曲面であって, その特異点は既に注意したように高々有理 2 重点である。構成の仕方から, どんな正整数 m に対しても自然な有理写像 $X \dashrightarrow X_m$ がある。

定理 2.4 (Bombieri). 極小一般型代数曲面 S の標準モデル X と m 標準像 X_m に対して次が成立する。

- (1) $m \geq 5$ のとき $X \rightarrow X_m$ は同型射である。
- (2) $K^2 \geq 2$ ならば $X \rightarrow X_4$ は同型射である。
- (3) 次の場合を除けば, $m \geq 3$ に対して $X \rightarrow X_m$ は双有理写像である。
 - (i) $K^2 = 1, p_g = 2, m = 3, 4$.
 - (ii) $K^2 = 2, p_g = 3, m = 3$.
 - (iii) $K^2 = 1, p_g = 0, m = 3, 4; K^2 = 2, p_g = 0, m = 3$.
- (4) $K^2 \geq 10, p_g \geq 6$ であって S が種数 2 曲線のペンシルをもたなければ $X \rightarrow X_2$ は双有理写像である。

[1] と [3] における小平の証明は, 多重標準因子の鎖連結性とコホモロジー群の消滅定理を用いたものだが, [4] における Bombieri の道具は, ネフかつ巨大な有効因子の数値的連結性および Ramanujam の消滅定理という, より洗練されたものであった。が, アイディア自体に本質的な差異はない。

数年後 (1976?) に, 定理 2.4 の (3-iii) は除外されることになる. すなわち (3-iii) のような曲面についても「 $m \geq 3$ ならば $X \dashrightarrow X_m$ は双有理である」ことが示された. $K^2 = 1$ は宮岡洋一, $K^2 = 2$ は Bombieri-Catanese による. しかし, (3-i) や (3-ii) を除外することはできない. これを見ておこう.

例 2.5 ($K^2 = 1, p_g = 2$). 極小一般型代数曲面 S で $K^2 = 1, p_g = 2$ をみたすものを考える. このとき $q = 0$ である. 多重種数公式を頼りに調べると, $H^0(S, mK_S)$ は次のような元をもつことがわかる.

- $m = 1$: $\boxed{x_0}, \boxed{x_1}$
- $m = 2$: $\text{Sym}^3\{\bar{x}\}, \boxed{y}$
- $m = 3$: $\text{Sym}^3\{\bar{x}\}, x_0y, x_1y$
- $m = 4$: $\text{Sym}^4\{\bar{x}\}, \text{Sym}^2\{\bar{x}\}y, y^2$
- $m = 5$: $\text{Sym}^5\{\bar{x}\}, \text{Sym}^3\{\bar{x}\}y, x_0y, x_1y, \boxed{z}$
- ⋮
- $m = 10$: $\text{Sym}^{10}\{\bar{x}\}, \text{Sym}^8\{\bar{x}\}y, \text{Sym}^6\{\bar{x}\}y^2, \text{Sym}^5\{\bar{x}\}z, \text{Sym}^4\{\bar{x}\}y^3, \text{Sym}^3\{\bar{x}\}yz, \text{Sym}^2\{\bar{x}\}y^4, x_0y^2z, x_1y^2z, y^5, \underline{z^2}$

ここに, 四角で囲んだ元はその次数 m で初めて現れるものを表し, $\text{Sym}^k\{\bar{x}\}$ は x_0, x_1 の k 次の斉次単項式全体を表す. $m = 10$ のとき, 波下線を付した z^2 を除く元は 1 次独立であって $H^0(S, 10K_S)$ の基底をなす. 従って,

1. $3K_S$ は自由でない. [$K^2 = 1$ なので x_0, x_1 は共通零点をもつから]
2. Φ_3 と Φ_4 は双有理ではない. [$m = 3, 4$ には z がまだ現れないから]
3. 標準モデルは $\mathbb{P}(1, 1, 2, 5)$ の 10 次曲面である. [$m = 10$ において, z^2 は他の元の一次結合. 以降の m について調べても関係式はこれだけ]

例 2.6 ($K^2 = 2, p_g = 3$). 極小一般型代数曲面 S で $K^2 = 2, p_g = 3$ をみたすものを考える. このとき $q = 0$ であり, 多重種数公式を頼りに調べると $H^0(S, mK_S)$ は次のような元をもつことがわかる.

- $m = 1$: $\boxed{x_0}, \boxed{x_1}, \boxed{x_2}$
- $m = 2$: $\text{Sym}^2\{\bar{x}\}$
- $m = 3$: $\text{Sym}^3\{\bar{x}\}$
- $m = 4$: $\text{Sym}^4\{\bar{x}\}, \boxed{y}$

- ⋮
- $m = 8$: $\text{Sym}^8\{\bar{x}\}, \text{Sym}^4\{\bar{x}\}y, \underline{y}^2$

四角の囲みなどが意味するところは、前の例と同じである。従って、 Φ_3 の像は、 Φ_1 の像である \mathbb{P}^2 の 3 次 Veronese 像に他ならない。とくに Φ_3 は双有理ではない。 $m = 8$ において、 y^2 は他の元の一次結合で表せる。このことから、標準モデルは $\mathbb{P}(1, 1, 1, 4)$ の 8 次曲面であることがわかる。

よって、 Φ_m ($m \geq 3$) に関する限り、次が最良の結果である。

定理 2.7. 極小一般型代数曲面に対して、次が成立する。

- (1) $m \geq 5$ のとき $X \rightarrow X_m$ は同型である。
- (2) $K^2 \geq 2$ ならば $X \rightarrow X_4$ は同型である。
- (3) 次の場合を除けば、 $m \geq 3$ に対して $X \rightarrow X_m$ は双有理写像である。
 - (i) $K^2 = 1, p_g = 2, m = 3, 4.$
 - (ii) $K^2 = 2, p_g = 3, m = 3.$

注意 2.8. S が種数 2 曲線のペンシル $\{D\}$ をもてば $X \rightarrow X_2$ は双有理にならない。 D は種数 2 なので、 $K_S|_D$ は次数 2 以下の特殊因子である。よって $2K_S|_D$ は埋込みを与えず、実際に D の像は \mathbb{P}^1 である。この場合には、従って、 X_2 は無数の有理曲線を含むことになり、一般型曲面である S とは双有理になり得ない。同様のことは、基点がある種数 3 曲線のペンシル $\{D\}$ をもつ S に対しても言える。

$X \rightarrow X_2$ が双有理でないような S は、20 世紀末からヨーロッパを中心に精力的に研究されており、現在では分類がほぼ完成している。中心的なメンバーは Rita Pardini, Margarida Mendes Lopes, Ciro Ciliberto, Fabrizio Catanese とその弟子たちである。

3 一般型代数曲面 (after Kodaira, Bombieri)

一般型代数曲面全般に関して言えば、1970 年代には目覚ましい進展を見せた。堀川穎二による Noether 直線付近に不変量をもつ曲面の構造研究、David Gieseker によるモジュライ空間の構成、宮岡洋一による Miyaoka-Yau の不等式の確立など、枚挙にいとまがない。80 年代に入ると Ulf Persson によって「一般型曲面の地誌学」の考え方が導入され、Xiao Gang がそれを強力に推進した。Xiao は一般型代数曲面の正則自己同型群の位数に上限を与えた直ぐ後に、代数幾何学の研究をやめてしまった。その後、 Φ_2 が双有理

でない曲面の分類に力が注がれたことは、既に触れた通りである。

話を多重標準写像や標準環に限定すれば、小平・Bombieri の定理がほぼ決定的だったため、定理 2.7 のような改良や Φ_2 が非双有理な曲面の決定問題はあったものの、残された課題はそう多くはない。しかし、歩みが完全に止まってしまったわけではない。

多重標準写像の双有理性の代数的対応物は標準環の生成元である。これに関しては、期待される通りの結果が証明された：

定理 3.1 (Ciliberto, 1983). 高々有限個の族に属する S を除いて、標準環 $R(S, K_S)$ は 5 次以下の元で生成される。

また mK_S がいつ自由になるかについては、より精密な結果が得られた：

定理 3.2 (Francia, Reider). 次が成立する。

- (1) $p_g = 0$ かつ $K_S^2 \leq 4$ である場合を除き、 $2K_S$ は自由である。
- (2) $K_S^2 \geq 2$ ならば $3K_S$ は自由である。

とりわけ Igor Reider のアプローチは画期的であった。彼はベクトル束に関する Bogomolov instability theorem を巧みに用いることによって、[5] において次の定理を証明した。さらに、それを適用して小平・Bombieri の定理に別証明を与えたのである。

定理 3.3 (Reider, 1988). L を非特異既約射影代数曲面 S 上のネフ直線束とする。

(1) $L^2 \geq 5$ のとき、 p が $|K_S + L|$ の基点ならば、つぎのような有効因子 $E \ni p$ が存在する。

(i) $LE = 0$ かつ $E^2 = -1$, または

(ii) $LE = 1$ かつ $E^2 = 0$.

(2) $L^2 \geq 10$ のとき、2 点 p と q が $|K_S + L|$ によって分離されなければ、つぎのような有効因子 $E \ni p, q$ が存在する。

(i) $LE = 0$ かつ $E^2 = -1, -2$, または

(ii) $LE = 1$ かつ $E^2 = -1, 0$, または

(iii) $LE = 2$ かつ $E^2 = 0$.

定理を $L = (m-1)K_S$, $m \geq 2$ に対して適用する。 $K_S C + C^2$ は常に偶数なので、(1) における例外的な E は許されない。(2) の E として許されるのは (i) 有理 2 重点の基本サイクル, または (ii) $m = 2$ で E は (-1) 楕円尾, または (iii) $m = 2$ で E は算術種数

2, の場合だけである. (2-iii) は小平・Bombieri の定理における「種数 2 曲線のペンシル」を一般化したものと言える. 実は, 後者 2 つは Paolo Francia による $2K_S$ の研究において既に障害を引き起こす曲線として扱われていた. そういう事情で, 現在では **Francia cycle** と呼ばれている. Reider の定理が出現したので, Francia は自身の結果を暫くの間公表しなかった. 周囲のすすめに応じて彼が論文を世に出したのは 1991 年のことである.

[5] I. Reider, Vector bundles on rank 2 and linear systems on algebraic surfaces, *Ann. of Math.* **127** (1988), 309–316.

[6] P. Francia, On the base points of the bicanonical system, in: *Problems in the theory of surfaces and their classification* (Cortona, 1988), pp. 141–150, *Sympos. Math.*, XXXII, Academic Press, London, 1991.

Francia と Reider の結果 (定理 3.2) を考慮すれば, 最初から $2K_S$ が自由だと仮定してもそれほど大きな損失はない. この仮定のもと, Ciliberto の定理 (定理 3.1) は少しだけ精密にできる:

定理 3.4 (K, 2008). S を極小な一般型代数曲面で $2K_S$ が自由なものとする. このとき, 次が成立する.

(1) $R(S, K_S)$ は 5 次以下の元で生成され, 関係式は 10 次以下である.

(2) $q(S) = 0$ のとき, $(p_g, K^2) = (2, 1), (0, 3)$ の場合を除けば $R(S, K_S)$ は 4 次以下の元で生成され, 関係式は 8 次以下である.

既に例 2.6 で見たように, (2) において $(p_g, K^2) = (2, 1)$ は良く知られた例外で, $R(S, K_S)$ には 5 次の生成元と 10 次の関係式があった. 他方, $(p_g, K^2) = (0, 3)$ のほうは実際に除かなければいけないのかどうかははっきりしない. この場合 $R(S, K_S)$ の生成元は 4 次までに取れるのだが, 9 次の関係式は必要かも知れない.

定理 3.4 は, Mark Green が構築した Koszul cohomology の一般論に乗せて次の 2 つの補題を示し, それで取り逃がした曲面についてはさらに Φ_2 の様子を詳しく調べることによって証明される. 詳細は

[7] K. Konno, Relations in the canonical algebras on surfaces, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **120** (2008), 227–261

にある.

補題 3.5 (generators). $2K_S$ が自由のとき, かけ算写像

$$H^0(S, 2K_S) \otimes H^0(S, (m-2)K_S) \rightarrow H^0(S, mK_S)$$

は, 次の場合に全射である.

- (1) $m > 7$.
- (2) $m = 7$ かつ $K_S^2 + p_g(S) - q(S) \geq 3$.
- (3) $m = 6$ かつ $K_S^2 \geq q(S) + 2$.
- (4) $m = 5$, $q(S) = 0$ かつ Φ_2 の像は最小次数の曲面ではない.

補題 3.6 (relations). $2K_S$ が自由のとき, Koszul 複体

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 H^0(S, 2K_S) \otimes H^0(S, (m-4)K_S) \rightarrow \\ H^0(S, 2K_S) \otimes H^0(S, (m-2)K_S) \rightarrow H^0(S, mK_S) \end{aligned}$$

は, 次の場合に (中間項で) 完全である.

- (1) $m > 9$,
- (2) $m = 9$ かつ $K_S^2 + p_g(S) - q(S) \geq 4$,
- (3) $m = 8$ かつ $K_S^2 \geq q(S) + 3$.

4 Francia サイクルと 1-2-3 問題

小平・Bombieri の定理を眺めていると, 次のことが証明できそうに思えてくる.

問題 4.1 (1-2-3 問題). 有限個の族に属する S を除けば, $R(S, K_S)$ は 3 次以下の元で生成され, 関係式は 6 次以下である.

3 次の生成元が必要になる最大の理由は, K_S が通常は自由でないことにある. K_S が自由ではなくて $2K_S$ や $3K_S$ は自由であるという状態が普通であることは, 定理 3.2 から容易に想像できよう. このとき, かけ算写像

$$H^0(S, K_S) \otimes H^0(S, 2K_S) \rightarrow H^0(S, 3K_S)$$

は, 明らかに全射になり得ない. K_S が自由でないので像は必ず共通零点をもつが, $3K_S$ は自由だからである. また, 第 1 節で見たように, 種数 2 曲線の標準環には 3 次の生成元と 6 次の関係式があった. 従って, 仮に K_S が自由であっても, S が種数 2 曲線をファ

イバーとするファイバー曲面の場合には、 $R(S, K_S)$ にはやはり 3 次の生成元が必要になる。こういった曲面の実例は、Noether 直線上に大量に見出すことができる。そういうわけで、上の問題は考え得る最良の結果を問うていると言うことができる。

実は、局所的な場合や半大域的な場合（2 次元正規特異点や代数曲線束の場合）には、対応する問題への解答が既にある、ほぼ肯定的である。この辺りは、1999 年の第 44 回代数幾何シンポジウム報告集に報告した通りである。よって尚更、大域的な場合にも同様の結論が成り立つかどうかに関心を惹かれるわけだが、話はそう簡単ではない。

定義 4.2. 次のいずれかをみたす数値的連結な有効因子 D を Francia cycle という。

- $K_S D = 1$ かつ $D^2 = -1$ (すなわち (-1) 楕円尾).
- $K_S D = 2$ かつ $D^2 = 0$.

Reider の定理の直後に言及した曲線である。

K_S の大域正則切断が全て、ある Francia cycle 上で恒等的に零になってしまうと、3 次までの生成元では足りなくなる。すなわち：

主張 4.3. Francia cycle $D \subset \text{Bs}|K_S|$ ならば、 $R(S, K_S)$ は 4 次の生成元をもつ。

Proof. そうでなければ、 $\text{Sym}^2 H^0(2K_S) \rightarrow H^0(4K_S)$ および $H^0(K_S) \otimes H^0(3K_S) \rightarrow H^0(4K_S)$ という 2 つのかけ算写像の像は $H^0(S, 4K_S)$ 全体を生成するはずである。 D に制限する。 $D \subset \text{Bs}|K_S|$ だから $H^0(K_S)$ は D 上零である。 よって $\text{Sym}^2 H^0(2K_S)|_D \rightarrow H^0(4K_S)|_D$ が全射でなければならないが、 Φ_4 は (-2) 曲線を縮約するだけなので、容易にわかるようにこれは不可能である。 \square

こういう困った現象が起こらなければ良いのだが、 (-1) 楕円尾が標準系の固定部分に入ってくるような実例は割合簡単に構成できてしまう。例えば：

[8] K. Konno and M. Mendes Lopes, On a question of Miles Reid, *Manuscripta Math.* **100** (1999), 81–86.

そこで、問題を若干修正する。

問題 4.4. もし標準系の固定部分が Francia cycle を含まなければ、 $R(S, K_S)$ は 1-2-3 property をもつか？（もちろん有限個の族を除いて）

要するに、悪さをするのは Francia cycle だけだと言いたいのだが、残念ながらこの問題への解答はまだ得られていない。既知の結果の中で最も一般的なものでも、次の程度で

ある.

定理 4.5 (K). S を $p_g(S) \geq 2$, $q(S) = 0$ かつ $K_S^2 \geq 3$ をみたす極小一般型代数曲面とする. また, $|K_S| = |M| + Z$ を標準系の可動部分 $|M|$ と固定部分 Z への分解とするとき, $|M|$ は既約なメンバーを含むものとする. このとき, 以下の条件 (1), (2) のいずれかがみたされれば, $R(S, K_S)$ は 3 次以下の元で生成され, 関係式は 6 次以下である.

(1) $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ ($Z = 0$ でも可).

(2) Z は 2 次元正規特異点の基本サイクルの非交和であって, (-1) 楕円尾を含まない.

注意 4.6. $p_g \geq 3$ のとき $|M|$ が既約なメンバーを含むことと $|M|$ が定める有理写像の像が曲面であることは同値である. 従って, この部分は「標準写像が像の上に generically finite である」と言い換えても良い. 特異点との関連で言えば (1) が成り立つための十分条件は「 Z が有理特異点の解消の例外集合にサポートをもつ」ことである. そういうわけで, 定理の主張は「固定部分 Z 上の交点形式が半負定値で, Z は Francia cycle を含まない」という条件下で成立するのではないかと思われる.

Z が有理 2 重点の解消の例外集合にサポートをもつ場合 (標準モデルの標準系が高々基点しかもたない場合) は, Miles Ried によって証明された. 上の定理はその拡張にあたる.

注意 4.7. 一般型代数曲面の標準系の固定部分について一般的に言えることは, ほとんど何もない. この問題についても, 正規特異点の解消空間や代数曲線束の場合には解答がわかっていて, 相対標準系の固定部分は

- (正規特異点) 有理特異点に縮約できる.
- (代数曲線束) 有理特異点または弱楕円型特異点に縮約できる. 後者は重複ファイバーにおいてのみ起こる.

これらに関する文献はそれぞれ:

[9] K. Konno, On the fixed loci of the canonical systems over normal surface singularities, Asian J. of Math. **12** (2008), 449–464.

[10] K. Konno, Canonical fixed parts of fibred algebraic surfaces, Tohoku Math. J. **62** (2010), 117–136.

CYLINDERS IN DEL PEZZO FIBRATIONS

岸本 崇 (埼玉大学・理学部)

ABSTRACT. 与えられた射影多様体に含まれるシリンダーの存在は、その射影多様体上の適当なアフィン錐への1次元ユニポテント代数群 \mathbb{G}_a の有効作用の存在に翻訳されることが知られている。この報告では、(任意次元の)del Pezzo fibration $\pi: V \rightarrow W$ について、どのような状況下で V は π に垂直なシリンダーを含むのかという問題についての結果を述べる。尚この報告での結果は、Adrien Dubouloz 氏 (Université de Bourgogne) との共同研究によるものである。

1. 動機と問題

1.1. タイトルにもあるシリンダー (cylinder) とは、適当な代数多様体 Z を用いて $Z \times \mathbb{A}^1$ という形状をしているものである。このような非常にシンプルな幾何学的対象を敢えて考える1つの理由・動機付けをまずは述べたいと思う。

1.2. Flenner-Zaidenberg の問題。Flenner-Zaidenberg は2003年に次の具体的な問題を提起した (cf. [FZ]):

問題 1.1. アフィン代数多様体:

$$\{x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4 = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, u]),$$

には有効な \mathbb{G}_a -作用が存在するか?

もともと問題 1.1 は特異点の視点から提起された。より正確に述べると、[FZ, Theorem 0.3] に於いて次の事柄が示された:

定理 1.2. (cf. [FZ, Theorem 0.3]) V を複素数体 \mathbb{C} 上に定義された代数多様体とし、 $v \in V$ を孤立 Cohen-Macaulay 特異点とする。この $v \in V$ が次の性質 (*) を満たしているとする:

(*) V の Zariski 開集合 $U \subseteq V$ が存在して、 U の一般の点 $u \in U$ に対して、 V の中で閉な有理曲線 $C_u \subseteq V$ で $u \in C_u$ かつ $v \notin C_u$ を満たすものが存在する。

このとき、 $v \in V$ は有理特異点である。

1.3. 問題 1.1 に挙げたアフィン代数多様体:

$$X := \{x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4 = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, u]),$$

に立ち戻ってみる。仮に X に有理的ではない特異点が存在したとすると、上述した定理 1.2 によって X は有効 \mathbb{G}_a -作用を持たないことが分かる。しかし X は原点 \circ でのみ特異点をもち、しかも $\circ \in X$ は標準特異点、特に有理特異点であることが分かる。従って、問題 1.1 を考察するにあたって別のアプローチを模索する必要がある。ところで、 X は Fermat 型3次曲面:

$$Y := \{x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4 = \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, u]),$$

上の反標準偏極なアフィン錐に同型、つまり:

$$X \cong \text{Spec}\left(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(Y, m(-K_Y))\right)$$

と見なすことができる。この視点を考慮して一般に次の定義をする。

1.4. H -偏極シリンダーの存在と H -偏極アフィン錐への \mathbb{G}_a -作用の存在。

定義 1.3. (V, H) を正規射影多様体 V とその上の豊富 \mathbb{Q} -因子 H の対とする。 V のアフィン開集合 $U \subseteq V$ は次の条件 (***) を満たすときに H -偏極シリンダー (H -polar cylinder) と呼ぶ:

(***) 適当な有効 \mathbb{Q} -因子 $\Delta \in \mathbb{Q}_+[H] \subseteq \text{Pic}(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が存在して、 $U = V \setminus \text{Supp}(\Delta) \cong Z \times \mathbb{A}^1$ となっている¹。

この研究は科学研究費補助金・基盤研究 (C):15K04805 の援助を受けて行った。

¹ここで H は豊富であるので、 Z はアフィン代数多様体である。

わざわざ定義 1.3 を準備した理由は、次の結果にある:

定理 1.4. (cf. [KPZ₂]) (V, H) を正規射影多様体 V とその上の豊富 \mathbb{Q} -因子 H の対とする. $A_m := H^0(V, [mH])$ ($m \geq 0$) として, $A^{(e)} := \bigoplus_{m \geq 0} A_{em}$ とおく. このとき, 適当な $e \geq 1$ が存在して $\text{Spec}(A^{(e)})$ が有効 \mathbb{G}_a -作用を持つための必要十分条件は V が H -偏極シリンダーを含むことである.

1.5. del Pezzo 曲面内の反標準偏極シリンダーについて. 定理 1.4 によって, 問題 1.1 は Fermat 型 3 次曲面 (次数 3 の del Pezzo 曲面) Y 内の $(-K_Y)$ -偏極シリンダーの存在に帰着されることになる. この方向の結果, より一般に次数の低い del Pezzo 曲面内の反標準偏極シリンダーの存在について次の結果が知られている.

定理 1.5. (cf. [KPZ₃], [CPW]) S を次数が $(-K_S)^2 \leq 3$ である非特異 del Pezzo 曲面とする. このとき, S は $(-K_S)$ -偏極シリンダーを含まない.

注意 1.6. 標数ゼロの代数閉体上に定義された次数が 4 以上の del Pezzo 曲面は反標準偏極シリンダーを含む (cf. [KPZ₁]). しかし代数閉体でない場合には, たとえ有理点を持っていたとしても必ずしも反標準偏極シリンダーを含むとは限らない (cf. 定理 2.1).

注意 1.7. 次数が 3 以下であっても, 特異点を持っているような del Pezzo 曲面である場合には反標準偏極シリンダーを含む場合がある. 例えば,

$$Y = \{yu^2 + z(xz + y^2) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$$

を考えると, Y は $[1:0:0:0]$ で E_6 -型の特異点を持つ次数 3 の del Pezzo 曲面であるが,

$$\Delta := \{u = 0\}|_Y \sim -K_Y$$

の補集合は $Y \setminus \Delta \cong \mathbb{A}^2$ であるので Y は $(-K_Y)$ -偏極シリンダーを含む.

1.6. 定理 1.4 と定理 1.5 によって, 次数が 3 以下の任意の非特異 del Pezzo 曲面 S と正整数 $\forall e \geq 1$ に対して, その上の反標準偏極アフィン錘:

$$\text{Spec} \left(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(S, me(-K_S)) \right)$$

は有効 \mathbb{G}_a -作用を持たないことが分かる. 特に, 問題 1.1 のアフィン代数多様体:

$$\{x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4 = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, u])$$

は有効 \mathbb{G}_a -作用を有さないことが帰結される.

1.7. 上述した問題 1.1 の解決へのアプローチ方法にあるように, ある種のアフィン代数多様体 (アフィン錘) へのユニポテント代数群作用の存在を, 付随する偏極多様体に含まれる偏極シリンダーの存在に帰着することができる. ここで定理 1.4 について幾つか注意をする:

注意 1.8. Y を非特異射影多様体とする.

- (1) 一般には Y の偏極 (Y, H) の選び方に応じて, H -偏極シリンダーは存在したり存在しなかったりする. 例えば定理 1.5 により次数が $d = (-K_Y)^2 \leq 3$ の非特異 del Pezzo 曲面 S は $(-K_Y)$ -偏極シリンダーは含まない. 一方, Y 上のコニック $C \subseteq S$ を一つととってくるとそれは基底点自由な線形束 $|C|$ を与え, 一般ファイバーが \mathbb{P}^1 であるファイブレーション:

$$\varphi = \Phi|_C : Y \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

を与える. φ は $(8-d)$ 個の特異ファイバー F_1, \dots, F_{8-d} を持っていて, それぞれ横断的に交差する 2 つの (-1) -曲線から構成される. 一方, Tsen の定理により φ はセクションを持つのでその 1 つを Γ とする. 各特異ファイバー F_i の Γ と交わる成分を L_i とする. また F を非特異ファイバーとしてとってくる. このとき:

$$\Gamma \cup F \cup L_1 \cup \dots \cup L_{8-d}$$

に台をもつような豊富因子 Δ を見つけることができる. 構成方法より Y は Δ -偏極シリンダーをもつ.

- (2) Y のピカル数 $\rho(Y)$ が 1 であるときには, Y 上の全ての有効 \mathbb{Q} -因子は \mathbb{Q} -線形同値で同一視して互いに定数倍であるので, Y 上の適当な偏極アフィン錘に有効 \mathbb{G}_a -作用が存在するかどうかはもっぱら Y に関する性質である. つまり, Y が 1 つでもシリンダーを含むかが問題となる.
- (3) Y を $\rho(Y) = 1$ の Fano 多様体とする. $\dim(Y) = 2$ のときには, $Y \cong \mathbb{P}^2$ であり, Y は明らかにシリンダー (というかアフィン平面 \mathbb{A}^2) を含む. $\dim(Y) = 3$ のときには状況は複雑になるが, シリンダーとして最も理想的な 3 次元アフィン空間 \mathbb{A}^3 を含む場合には, そのような Y と補集合 $Y \setminus \mathbb{A}^3$ の分類は知られている (cf. [Fur], [FN₁, FN₂], [Pro]). 一方, \mathbb{A}^3 ではないようなシリンダーを含む $\rho(Y) = 1$ の 3 次元 Fano 多様体の完全な分類は知られていない. ただし, 以下のような \mathbb{A}^3 ではないシリンダーを含む族は知られている:

定理 1.9. (cf. [KPZ₄]) Y を $\rho(Y) = 1$ で Fano 指数が 1 の 3 次元非特異 Fano 多様体とし, その種数:

$$g(Y) = \frac{1}{2}(-K_Y^3) + 1$$

は 9 または 10 とする. もしも Y 上の直線をパラメトライズする Hilbert スキームの成分が非特異でなければ², Y は (\mathbb{A}^3 と同型でないような) シリンダーを含む. さらに, このように非特異でない直線の Hilbert スキームを持つような $\rho = 1$, Fano 指数 1, 種数 9 または 10 の 3 次元 Fano 多様体は, それぞれのモジュライの中で余次元 1 である.

- (4) たとえ $\dim(Y) = 2$ の場合でも, ピカル数 $\rho(Y)$ が 2 以上であるときには Y に含まれるシリンダーを分類することは難しい. 例えば, $\rho(Y) = 2$ の場合を考えてみる. Y がシリンダーを含むとすると Y は森ファイバー空間でないといけなないので, Y は非特異射影曲線 C 上の \mathbb{P}^1 -束:

$$\pi : Y \longrightarrow C$$

の構造がある. Tsen の定理によって π はセクションを持つ. $\Gamma \subseteq Y$ を 1 つのセクションとする. このとき, 必要に応じて π のファイバー l_1, \dots, l_r を選んで:

$$Y \setminus (\Gamma \cup l_1 \cup \dots \cup l_r)$$

をシリンダーとすることができる. C が非有理であれば, Y 内のシリンダーはすべてこのようにして得られることは Lüroth の定理によって容易に分かるが, 一方, $C \cong \mathbb{P}^1$ のとき, つまり Y が Hirzebruch 曲面であるときには Y に含まれるシリンダーは必ずしも上記のようにして得られるとは限らない (cf. [Bre], [FI]).

1.8. 注意 1.8. (4) で述べたように, 2 次元の森ファイバー空間の例である Hirzebruch 曲面 $\pi : \Sigma_m \rightarrow \mathbb{P}^1$ の場合であっても, Σ_m 内のアフィン平面 $\Sigma_m \supseteq U \cong \mathbb{A}^2$ で制限 $\pi|_U$ が \mathbb{A}^1 -ファイブレーションを与えないものが存在する. 従って Σ_m に含まれるシリンダーを分類するというは既に複雑な問題である. しかし, π と両立できる, つまり π の制限が \mathbb{A}^1 -ファイブレーションを与えるようなシリンダーは容易に記述できる. この状況を考慮して, ピカル数が 2 以上の高次元の森ファイバー空間の場合であっても, 例えば del Pezzo ファイブレーションの場合にそのファイブレーション構造と両立するようなシリンダーであればある程度明示的に記述できるのではないかと期待できる. ここでファイブレーション構造と両立するシリンダーということの意味をはっきりさせておく. これについてはより一般的な設定で定義できるが, ここでは del Pezzo ファイブレーションの場合に限定をして定義をする:

定義 1.10. V を \mathbb{Q} -分解的な端末特異点のみを持つ射影多様体として, V には del Pezzo ファイブレーション:

$$\pi : V \longrightarrow W$$

の構造があるとする³. V の開集合 $U \subseteq V$ が π に関して垂直な \mathbb{A}^1 -シリンダーであるとは次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たしているときに言う:

- (i) U は \mathbb{A}^1 -シリンダー $U \cong Z \times \mathbb{A}^1$ である,

² Y 上の曲線 $l \subseteq Y$ は $(-K_Y \cdot l) = 1$ を満たすとき直線と呼ばれる. Y 上の直線 $l \subseteq Y$ は (a) $\mathcal{N}_{l/Y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ または (b) $\mathcal{N}_{l/Y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ を満たすが, l に対応する Hilbert スキームの点为非特異であることと l が (a) のタイプであることは同値である.

³つまり π は $\text{NE}(V)$ の単射線の収縮として得られ, π の一般閉ファイバーは非特異 del Pezzo 曲面である.

(ii) 一般閉ファイバーが既約な曲線であるような射 $g: Z \rightarrow W$ が存在して:

$$\pi|_U = g \circ \text{pr}_Z$$

と分解される.

一方, V の開集合 $U \subseteq V$ が π に関して垂直な \mathbb{A}^2 -シリンダーであるとは次の2つの条件 (i)', (ii)' を満たしているときに言う:

(i)' U は \mathbb{A}^2 -シリンダー $U \cong Z \times \mathbb{A}^2$ である,

(ii)' Z は W の開集合であり, $\pi|_U = \text{pr}_Z$ が成り立つ.

この定義 1.10 の用語に従えば, Hirzebruch 曲面 $\pi: \Sigma_m \rightarrow \mathbb{P}^1$ の場合, π に関して垂直な \mathbb{A}^1 -シリンダーは存在して, それは π の適当なセクション Γ と適当なファイバー l_1, \dots, l_r の補集合として得られる. このような考察を一般次元の del Pezzo ファイブレーションに置き換えるとどうなるのか? という問題が今回のメインテーマである. つまり次の問題である:

問題 1.11. $\pi: V \rightarrow W$ を (任意次元の) del Pezzo ファイブレーションとする. このとき, どのような状況下で V は π に関して垂直な \mathbb{A}^n -シリンダー ($n = 1, 2$) を含むのか?

2. 主結果

2.1. 問題 1.11 に関する結果を述べる.

定理 2.1. (cf. [DK₂]) $\pi: V \rightarrow W$ を del Pezzo ファイブレーションとし, $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ を π の次数とする⁴. $\eta \in W$ を生成点, $K = \mathbb{C}(\eta)$ を W の有理関数体, そして π の生成ファイバーを $V_\eta = \pi^*(\eta) \subseteq V$ とおく. このとき:

- (1) $d \leq 4 \implies V$ は π に垂直な \mathbb{A}^n -シリンダーを含まない.
- (2) $d = 5, 6 \implies V$ は π に垂直な \mathbb{A}^2 -シリンダーを含まない.
- (3) $d = 5, 6$ であり, V_η が K -有理点を持っている $\implies V$ は π に垂直な \mathbb{A}^1 -シリンダーを含む.
- (4) $d = 8, 9$ であり, V_η が K -有理点を持っている $\implies V$ は π に垂直な \mathbb{A}^2 -シリンダーを含む.

注意 2.2. 定理 2.1, (3), (4) に於いては V_η が K -有理点を持っているという条件を課している. しかし V が 3次元の del Pezzo ファイブレーションである場合, つまり W が曲線である場合には, Tsen の定理により K は C_1 -体であるので, V_η は自動的に K -有理点をもつ. 従って, 定理 2.1 の主張は必要十分条件になる. 結果的にこの場合には, del Pezzo ファイブレーション $\pi: V \rightarrow W$ が π に垂直なシリンダーを含むかどうかは, もっぱら π の次数で分かるということになる (cf. 定理 2.3).

注意 2.2 で言及したように, V が 3次元の場合には定理 2.1 は次のように結果を改善することができる:

定理 2.3. (cf. [DK₂]) $\pi: V \rightarrow W$ を 3次元の del Pezzo ファイブレーションとし, $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ を π の次数とする. このとき:

- (1) $d \leq 4 \iff V$ は π に垂直な \mathbb{A}^n -シリンダーを含まない.
- (2) $d = 5, 6 \iff V$ は π に垂直な \mathbb{A}^2 -シリンダーを含まないが, 一方, V は π に垂直な \mathbb{A}^1 -シリンダーを含む.
- (3) $d = 8, 9 \iff V$ は π に垂直な \mathbb{A}^2 -シリンダーを含む.

2.2. 定理 2.1, 2.3 は $\pi: V \rightarrow W$ に関して垂直なシリンダーに関する結果であり, 特に π の次数が 4 以下の場合にはそのようなシリンダーは含まないことが分かるが, 一方, π に関して垂直ではないようなシリンダーについては次数が 4 以下であっても存在する可能性はある. しかしたとえ V が 3次元の場合であっても π に関して垂直でないようなシリンダーを分類することは非常に難しいと思われる. それは Hirzebruch 曲面へのアフィン平面 \mathbb{A}^2 の埋め込みを分類することが既に難しいことよりも想像はできる.

⁴ π の一般閉ファイバーの del Pezzo 曲面の次数 d のことを π の次数ということにする. または, π の生成ファイバー V_η を考えると V_η は $K := \mathbb{C}(W) = \mathbb{C}(\eta)$ 上に定義された del Pezzo 曲面になるが, その次数 $(-K_{V_\eta}^2)$ が d であると言っても同じことである. 今の場合, π は単射線の収縮として得られているので, 生成ファイバーの K 上のピカル数は $\rho_K(V_\eta) = 1$ であることに注意する. 特に V_η は K 上に極小であるので, $d \neq 7$ である (cf. [Ma]).

分類自体は困難であるが、次の結果は次数が4以下の3次元の del Pezzo ファイブレーションの場合であっても、垂直でないシリンダー（というか \mathbb{A}^3 ）を含むような例を構成できることを主張している。

定理 2.4. (cf. [DK₁]) 各 $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対して、次数 d の3次元 del Pezzo ファイブレーション $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ で3次元アフィン空間 \mathbb{A}^3 を (π に関して垂直でないように) 含むものが存在する。

例 2.5. 後に定理 2.9, 命題 2.10 に於いてより一般的な結果を述べるが、例えば次数 $d = 1$ の del Pezzo ファイブレーション $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ で \mathbb{A}^3 を含む例は次のようにして構成される。

$$S := \{xy^5 + z^3 + u^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P} := \mathbb{P}(1, 1, 2, 3) = \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, u])$$

なる次数1の正規 del Pezzo 曲面を考えて、 \mathcal{L} を S と $6H$ で生成される \mathbb{P} 上の線形束とする。ここで H は $x = 0$ で定義される超平面である。このとき \mathcal{L} の基底点集合 $\text{Bs } \mathcal{L}$ は:

$$C := \text{Bs } \mathcal{L} = \{x = z^3 + u^2 = 0\}$$

で定義される特異有理曲線である。 S は $[1:0:0:0]$ に於いて E_8 -型の特異点をもっているが、これは C 上にはない。また、 \mathcal{L} の一般メンバーは次数1の非特異 del Pezzo 曲面であることは容易に確かめられる。さて、 $\text{Bs } \mathcal{L}$ は C 及びその無限小近傍曲線を中心とする6回のブローアップで解消される。それを:

$$\sigma: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^1$$

としておき、解消された線形束 $\tilde{\mathcal{L}} := \sigma^{-1}\mathcal{L}$ によって定義される射:

$$\tilde{\rho}: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^1$$

に相対的に極小モデルプログラムを実行する。その1つを:

$$\varphi: \tilde{\mathbb{P}} \dashrightarrow \tilde{\mathbb{P}}'$$

としておく。 σ は C およびその無限小近傍曲線に於けるブローアップの合成であるので、 $\tilde{\mathbb{P}}$ は $\mathbb{P} \setminus H \cong \mathbb{A}^3$ を含んでいる。自明ではないが、この構成で鍵となる次の事実を証明することができる。

補題 2.6. $\tilde{\rho}$ に相対的なような極小モデルプログラム $\varphi: \tilde{\mathbb{P}} \dashrightarrow \tilde{\mathbb{P}}'$ を選択しても、3次元アフィン空間 $\mathbb{A}^3 \cong \tilde{\mathbb{P}} \setminus \sigma^{-1}(H) \subseteq \tilde{\mathbb{P}}$ は φ を経由して保たれる。つまり、 φ の過程で起こる全ての因子収縮射とフリップは \mathbb{A}^3 の外側で起こる。

更に、 $\tilde{\rho}$ に相対的な極小モデルプログラムの最終地点 $\tilde{\mathbb{P}}'$ は $\tilde{\rho}$ により誘導される射:

$$\tilde{\rho}': \tilde{\mathbb{P}}' \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad \tilde{\rho}' \circ \varphi = \tilde{\rho}$$

を備えているが、次の事実も証明することができる:

補題 2.7. $\tilde{\rho}': \tilde{\mathbb{P}}' \rightarrow \mathbb{P}^1$ は次数1の del Pezzo ファイブレーションである。

[補題 2.7 の証明の概略] 補題 2.6 の証明の際にも必要となる情報であるが、 σ の最後のブローアップの例外因子は $\tilde{\rho}$ のファイバーには含まれないが、それ以外の σ -例外因子は全て $6H$ に対応する $\tilde{\mathcal{L}}$ のメンバーに含まれる。そして、 $\tilde{\mathbb{P}}$ の特異点は全てそのメンバー内に含まれている。 $S \in \mathcal{L}$ に対応する $\tilde{\mathcal{L}}$ のメンバーを \tilde{S} としておく。 S は C に沿って Cartier であるので、 $\tilde{S} \cong S$ である。特に、 \tilde{S} のピカル数 $\varrho(\tilde{S})$ は $\varrho(S)$ に等しくそれは1である。更に、非自明であるが、 φ を経由して \tilde{S} は影響を受けない。従って固有変換 $\tilde{S}' := \varphi_*(\tilde{S})$ のピカル数も1である。いま仮に $\tilde{\rho}'$ が del Pezzo ファイブレーションでないとする、 $\tilde{\rho}'$ は:

$$\tilde{\rho}' = h \circ g: \tilde{\mathbb{P}}' \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{h} \mathbb{P}^1$$

と分解される。ここで、 $g: \tilde{\mathbb{P}}' \rightarrow Y'$ は森コニックバンドルである。すると $Q := \tilde{\rho}'(\tilde{S}') \in \mathbb{P}^1$ として、

$$\tilde{S}' = g^*(h^*(Q))$$

が成り立つが、 $\varrho(\tilde{S}') = 1$ であるのでこれは矛盾である。□

補題 2.6, 2.7 によって、3次元アフィン空間 \mathbb{A}^3 を含む次数1の del Pezzo ファイブレーション $\tilde{\rho}': \tilde{\mathbb{P}}' \rightarrow \mathbb{P}^1$ を得ることができた。また、このシリンダーが $\tilde{\rho}'$ に関して垂直でないことは定理 2.3 により分かる。

2.3. 例 2.5 では 3 次元アフィン空間 \mathbb{A}^3 を含む次数 1 の del Pezzo ファイブレーションの例を挙げたが、実はもっと一般的に \mathbb{A}^3 を含む次数 4 以下の del Pezzo ファイブレーションを系統的に構成することができる。結果を述べるために少しだけ記号と事実を準備しておく。

記号 2.8. S を次数 $d = (-K_S^2)$ が 3 以下の非特異 del Pezzo 曲面とする。よく知られているように、 $d = 1$ のときには S は $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ の中の次数 6 の超曲面、 $d = 2$ のときには $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ の中の次数 4 の超曲面、 $d = 3$ のときには \mathbb{P}^3 の中の次数 3 の超曲面として実現される。記号の簡略化のために \mathbb{P} という記号を:

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}(1, 1, 2, 3) \quad (d = 1), \quad \mathbb{P}(1, 1, 1, 2) \quad (d = 2), \quad \mathbb{P}^3 \quad (d = 3)$$

の意味で用いる。また e を S の \mathbb{P} の中で次数として:

$$e := 6 \quad (d = 1), \quad 4 \quad (d = 2), \quad 3 \quad (d = 3)$$

とする。 $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)|$ を超平面とし、 \mathcal{L} を S と eH で生成される \mathbb{P} 上の線形束とする。このとき次の 3 つの性質を満たす \mathcal{L} の基底点集合 $\text{Bs } \mathcal{L} = H \cap S$ の解消:

$$\sigma: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}$$

と解消された $\tilde{\mathbb{P}}$ 上の線形束 $\tilde{\mathcal{L}} := \sigma_*^{-1} \mathcal{L}$ で定義される射:

$$\tilde{\rho}: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^1$$

が存在することが知られている:

- (a) $\tilde{\mathbb{P}}$ は高々 \mathbb{Q} -分解的末端特異点を持つ。更に、 $\tilde{\mathbb{P}}$ の特異点の集合は eH に対応する $\tilde{\mathcal{L}}$ のメンバー $\tilde{\rho}^*(\infty)$ に含まれる。
- (b) σ は $\text{Bs } \mathcal{L}$ の各既約成分及びその無限小近傍曲線に於ける有限回のブローアップと必要に応じて \mathbb{Q} -分解化の合成として得られる。
- (c) $\tilde{\mathcal{L}}$ の $\tilde{\rho}^*(\infty)$ 以外のメンバーに σ を制限したものは、その像との間の同型を与えている。

このとき、 $\tilde{\mathbb{P}}$ からスタートする極小モデルプログラムを $\tilde{\rho}: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^1$ に相対的に実行して、その 1 つを:

$$(*) \quad \varphi: \tilde{\mathbb{P}} \dashrightarrow \tilde{\mathbb{P}}'$$

とする。 $(*)$ は $\tilde{\rho}$ に相対的であるので、帰結である $\tilde{\mathbb{P}}'$ は $\tilde{\rho}$ より誘導される射:

$$\tilde{\rho}': \tilde{\mathbb{P}}' \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}' \circ \varphi$$

を備えている。

定理 2.9. (cf. [DK₁]) 記号・設定は上の通りとする。このとき次の事柄が成り立つ:

- (1) $\tilde{\rho}$ に相対的などのような極小モデルプログラム $\varphi: \tilde{\mathbb{P}} \dashrightarrow \tilde{\mathbb{P}}'$ を経由しても、3 次元アフィン空間 $\tilde{\mathbb{P}} \setminus \sigma^{-1}(H) \cong \mathbb{P} \setminus H \cong \mathbb{A}^3$ は保たれる。従って、 $\tilde{\mathbb{P}}'$ は \mathbb{A}^3 を含む。
- (2) もし $H \cap S$ が既約であるときには⁵、 $\tilde{\rho}': \tilde{\mathbb{P}}' \rightarrow \mathbb{P}^1$ は次数が d の del Pezzo ファイブレーションである。
- (3) もし $d = 2$ で $H \cap S$ が可約であれば、 $\tilde{\rho}': \tilde{\mathbb{P}}' \rightarrow \mathbb{P}^1$ は次数が $d + 1 = 3$ の del Pezzo ファイブレーションである。
- (4) もし $H \cap S$ が 3 つの既約成分から構成されていれば⁶、 $\tilde{\mathbb{P}}'$ はコニックバンドルの構造を備えている。

⁵ $d = 1$ のときには、どのような $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)|$ であっても、 $H \cap S$ は既約である。

⁶このような状況は $d = 3$ のときに限られる。

2.4. 上の定理 2.9 によって, 各 $d \in \{1, 2, 3\}$ に対して次数が d の del Pezzo ファイブレーション:

$$\tilde{\rho}: \tilde{\mathbb{P}}' \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

で $\tilde{\rho}$ に関して垂直でない 3 次元アフィン空間 \mathbb{A}^3 を含むものを構成することができる. 定理 2.4 を保証するには, 残る $d = 4$ の例を構成する必要がある. これは次の結果を用いて具体的に構成することができる:

命題 2.10. (cf. [DK₁]) 記号・設定は記号 2.8 の $d = 3$ の場合とする. もし \mathbb{P} 上の線形束 \mathcal{L} の基底点集合 $\text{Bs } \mathcal{L}$ が直線とコニックの和であるとすると, 相対的極小モデルプログラム $\varphi: \tilde{\mathbb{P}} \dashrightarrow \tilde{\mathbb{P}}'$ の最終地点 $\tilde{\rho}: \tilde{\mathbb{P}}' \rightarrow \mathbb{P}^1$ は次数が 4 の del Pezzo ファイブレーションになっている.

定理 2.9, (1) と命題 2.10 を併せることにより, \mathbb{A}^3 を含む次数 4 の del Pezzo ファイブレーションも構成できることになる.

3. 定理 2.1 の証明の概略

3.1. ここでは定理 2.1 の証明の概略を述べる. ここで定理 2.1 の設定を振り返っておく:

$$\pi: V \longrightarrow W$$

を del Pezzo ファイブレーションとする. $\eta \in W$ を生成点, $K := \mathbb{C}(\eta) = \mathbb{C}(W)$ を W の有理関数体, そして $V_\eta := \pi^*(\eta) \subseteq V$ を π の生成ファイバーとする. また:

$$d = (-K_{V_\eta}^2) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

を π の次数とする. 定理 2.1 を証明するにあたって, 生成ファイバー V_η に関する次の結果が重要になる.

命題 3.1. (1) V が π に垂直な \mathbb{A}^1 -シリンダーを含む為の必要十分条件は, V_η が \mathbb{A}_K^1 -シリンダーを含むことである.

(2) V が π に垂直な \mathbb{A}^2 -シリンダーを含む為の必要十分条件は, V_η がアフィン平面 \mathbb{A}_K^2 を含むことである.

命題 3.1 により, 定理 2.1 は体 K 上 Picard 数が 1 の del Pezzo 曲面 V_η の幾何学に帰着される. 以下 del Pezzo ファイブレーションの次数 d に応じて個別に議論する.

3.2. $d \leq 3$ のケース. このケースは定理 1.5 と命題 3.1 を用いれば簡単に証明できる. 実際に, もし V が π に垂直な \mathbb{A}^1 -シリンダーを含んだとすると, 命題 3.1 によって π の生成ファイバー V_η は \mathbb{A}_K^1 -シリンダー:

$$V_\eta \supseteq U_\eta \cong Z_\eta \times \mathbb{A}_K^1$$

を含む. ここで, Z_η は K 上に定義されたアフィン代数曲線である. 補集合:

$$\Delta_\eta := V_\eta \setminus U_\eta$$

は K 上に定義された因子である. 一方, $\rho_K(V_\eta) = 1$ であるので,

$$\text{Pic}_K(V_\eta) \cong \mathbb{Z}[-K_{V_\eta}]$$

となっている. とくに:

$$\Delta_\eta \sim m(-K_{V_\eta}) \quad (m \geq 1)$$

と表される. しかしこのとき K の代数閉包 \bar{K} に係数拡大した $V_\eta \otimes \bar{K}$ は $(-K_{V_\eta \otimes \bar{K}})$ -偏極シリンダー $U_\eta \otimes \bar{K}$ を含むので定理 1.5 に矛盾である.

3.3. $d = 4$ のケース. 実は定理 2.1 の主張の中で最も面倒な部分は, $d = 4$ のケースに V が $\pi: V \rightarrow W$ に垂直な \mathbb{A}^1 -シリンダーを含まないことを示すところである. 3.2 での $d \leq 3$ の場合には本質部分は次数が 3 以下の非特異 del Pezzo 曲面は反標準偏極シリンダーを含まないという定理 1.5 である. 一方, 標数ゼロの代数閉体上に定義された次数 4 の非特異 del Pezzo 曲面は反標準偏極シリンダーを含む (cf. [KPZ₁]). 従って, $d = 4$ の場合に π に垂直な \mathbb{A}^1 -シリンダーが存在しないことを証明するには, 3.2 とは異なった議論をしなくてはならない. 詳細はここでは述べないが, アイデアとしては代数閉体ではない $K = \mathbb{C}(\eta)$ 上の Sarkisov プログラムを用いる (cf. [DK₂]).

3.4. $d \geq 5$ のケース. ここでは del Pezzo ファイブレーション $\pi: V \rightarrow W$ の次数は $d \geq 5$ とし, 生成ファイバー V_η は K -有理点をもっているとする. $d = 5, 6$ のときには, V_η に含まれる $(\mathbb{A}_*^1)_K \times \mathbb{A}_K^1$ を具体的に構成し, 一方で \mathbb{A}_K^2 は含まないことを別の議論で示す. $d = 8, 9$ のときには, V_η に含まれる \mathbb{A}_K^2 を具体的に構成する. そして命題 3.1 によって定理 2.1 の (2), (3), (4) の証明は完了する. 以下では $d = 5$ の場合に限定をして, どのようにして生成ファイバー V_η に含まれる \mathbb{A}_K^1 -シリンダー $(\mathbb{A}_*^1)_K \times \mathbb{A}_K^1$ を構成するのかについてと, どのようにして V_η は \mathbb{A}_K^2 を含まないことを示すのかについて概略を説明する.

3.5. 次数 5 の del Pezzo 曲面 V_η に含まれる \mathbb{A}_K^1 -シリンダーの構成.

3.5.1. $d = 5$ の場合を考える. このとき生成ファイバー V_η は K 上に定義された次数が 5 の非特異 del Pezzo 曲面であり, その Picard 数は $\rho_K(V_\eta) = 1$ である. また仮定により V_η は K -有理点を少なくとも 1 つはもつので, その 1 つを $x_0 \in V_\eta$ としておく.

3.5.2. K の代数閉包 \bar{K} に係数拡大した $V_\eta \otimes \bar{K}$ を考えると, よく知られているように $V_\eta \otimes \bar{K}$ は \mathbb{P}_K^2 の一般の位置にある 4 点のブローアップとして得られる. それを:

$$\mu: V_\eta \otimes \bar{K} \longrightarrow \mathbb{P}_K^2$$

として, ブローアップされる点を $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{P}_K^2$ とする. E を $V_\eta \otimes \bar{K}$ 上の全ての (-1) -曲線の和集合としておく. E は μ の例外因子 $E_i := \mu^{-1}(x_i)$ と点 x_j, x_k を通過する直線の固有変換の合計 10 本の (-1) -曲線の和集合である ($1 \leq i \leq 4, 1 \leq j < k \leq 4$). このとき, $\rho_K(V_\eta) = 1$, とくに V_η は K 上では極小であることに注意をすると $x_0 \notin E$ であることが分かる.

3.5.3. 次に:

$$g: V'_\eta \longrightarrow V_\eta$$

を x_0 を中心とするブローアップとし, E_0 をその例外因子とする. x_0 は K -有理点であるので, V'_η は K 上定義されている. E' を $V'_\eta \otimes \bar{K}$ 上の全ての (-1) -曲線の和集合とすると, E' は E の固有変換 $(g \otimes \bar{K})_*^{-1} E, E_0 \otimes \bar{K}$, 点 $\mu(x_0)$ と x_i を通過する \mathbb{P}_K^2 の直線の固有変換 L_i ($1 \leq i \leq 4$), そして \mathbb{P}_K^2 の 5 点 $\mu(x_0), x_1, \dots, x_4$ を通過するコニックの固有変換 C の和集合である. これらのうち $E_0 \otimes \bar{K}$ は $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用に関して不変である. また L_1, L_2, L_3, L_4, C は E' の成分の中で $E_0 \otimes \bar{K}$ と交差するものの全てである. 従って, それらの和:

$$(*) \quad C + \sum_{i=1}^4 L_i$$

は $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用で不変であり, 特に K 上で定義されている. 更にこれら 5 本の (-1) -曲線は互いに交わらないので, $(*)$ は K 上で収縮することができる. この収縮射を:

$$h: V'_\eta \longrightarrow V''_\eta$$

とする. \bar{K} 上の Picard 数を計算することにより, $V''_\eta \otimes \bar{K} \cong \mathbb{P}_K^2$ であることが分かるので V''_η は K 上の Severi-Brauer 曲面である. しかし $E_0 \cong \mathbb{P}_K^1$ であり, h は K 上で定義されているので, V''_η は $E''_0 := h(E_0)$ 上に K -有理点をもつので, 実際には $V''_\eta \cong \mathbb{P}_K^2$ となっている (cf. [Ro]). また, E''_0 はコニックである.

3.5.4. E''_0 上の K -有理点を 1 つとりそれを $Q \in E''_0$ とする. そして l_Q を E''_0 の点 Q に於ける接線とする. E''_0 も Q も K 上で定義されているので, l_Q もそうである. そこで V''_η 上の線形束:

$$\mathcal{L}_Q := \langle E''_0, 2l_Q \rangle \subseteq | \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2}(2) |$$

を考える. \mathcal{L}_Q が定義する有理写像:

$$\Phi_{\mathcal{L}_Q}: V''_\eta \dashrightarrow \mathbb{P}_K^1$$

を K 上に定義されたアフィン曲面 $X := V''_\eta \setminus (E''_0 \cup l_Q)$ に制限した射:

$$\varphi_Q: X \longrightarrow (\mathbb{A}_*^1)_K$$

を考える. 構成方法から, φ_Q を \bar{K} に係数拡大した:

$$\varphi_Q \otimes \bar{K}: X \otimes \bar{K} \longrightarrow (\mathbb{A}_*^1)_{\bar{K}}$$

は自明な \mathbb{A}_K^1 -バンドルになっている．一方, [KM] により \mathbb{A}_K^1 の非自明な K -form は存在しないので, φ_Q は自明な \mathbb{A}_K^1 -バンドルになっている．特に:

$$X \cong (\mathbb{A}_*^1)_K \times \mathbb{A}_K^1$$

となっている．

3.5.5. ここで g, h の構成方法に注意すると, V_η も X と同型な開集合を含むことが分かる．従って, V_η は \mathbb{A}_K^1 -シリンダーを含むことが示された．

3.6. 次数 5 の del Pezzo 曲面 V_η がアフィン平面 \mathbb{A}_K^2 を含まないことの証明.

3.6.1. 仮に次数 5 の del Pezzo 曲面 V_η が K 上定義されたアフィン平面 $\mathbb{A}_K^2 \cong U_\eta \subseteq V_\eta$ を含んだとする． $\varrho_K(V_\eta) = 1$ であり, $\text{Pic}(\mathbb{A}_K^2) = 0$ であるので:

$$\text{Pic}(V_\eta) \cong \mathbb{Z}[\Delta_\eta]$$

となっている．ここで, $\Delta_\eta := V_\eta \setminus U_\eta$ とする.

3.6.2. さて, K の代数閉包 \bar{K} に係数拡大をする．このとき $\varrho(V_\eta \otimes \bar{K}) = 5$ であり $\text{Pic}(\mathbb{A}_{\bar{K}}^2) = 0$ であるので, $\Delta_\eta \otimes \bar{K}$ は 5 個の既約因子から成っており, それらは $\text{Pic}(V_\eta \otimes \bar{K})$ を自由に生成する．

$$\Delta_\eta \otimes \bar{K} = \sum_{i=1}^5 a_i \Delta_i \quad (a_i \in \mathbb{N})$$

と表しておく．

$$5 = (-K_{V_\eta \otimes \bar{K}}^2) = \sum_{i=1}^5 a_i (-K_{V_\eta \otimes \bar{K}} \cdot \Delta_i)$$

に注意すると, 各 i について $a_i = 1$ であり Δ_i は (-1) -曲線であることが分かる．ところで Galois 群 $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ はこれら 5 つの (-1) -曲線の集合:

$$\{\Delta_1, \dots, \Delta_5\}$$

に作用する．仮にこの作用が推移的でないとすると, $1 \leq \exists a < 5$ が存在し適当に順番を付け換えることにより:

$$\text{Gal}(\bar{K}/K) \cdot \Delta_1 = \{\Delta_1, \dots, \Delta_a\}$$

となっている．このとき:

$$\Delta_1 + \dots + \Delta_a \quad (< \Delta_\eta \otimes \bar{K})$$

は K 上で定義されている．しかしこれは Δ_η が $\text{Pic}(V_\eta)$ を生成しているということに矛盾である．従って $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用は推移的である．

3.6.3.

$$\text{Gal}(\bar{K}/K) \curvearrowright \{\Delta_1, \dots, \Delta_5\}$$

が推移的であるので, $\Delta_1 + \dots + \Delta_5$ の図は対称性を持っている．一方で, 補集合が:

$$(V_\eta \otimes \bar{K}) \setminus (\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_5) \cong \mathbb{A}_{\bar{K}}^2$$

であるので, $\Delta_1 + \dots + \Delta_5$ は単連結である．従って, $\Delta_1, \dots, \Delta_5$ は全て共通の 1 点でのみ交差している．

$$c := \min_{i \neq j} \{(\Delta_i \cdot \Delta_j)\} \in \mathbb{N}$$

とする．このとき:

$$5 = (\Delta_1 + \dots + \Delta_5)^2 = -5 + \sum_{i \neq j} (\Delta_i \cdot \Delta_j) \geq -5 + 20c$$

を満たすので, $c \leq 1/2$ となるがこれは矛盾である．

REFERENCES

- [Bre] L. Brenton, *A note on compactifications of \mathbb{C}^2* , Math. Ann., 206 (1973), 303–310.
- [CPW] I. Cheltsov, J. Park and J. Won, *Affine cones over smooth cubic surfaces*, arXiv:1303.2648v4 [math.AG] 6 Jan2015. (to appear in Journal of Eur. Math. Soc.)
- [DK₁] A. Dubouloz and T. Kishimoto, *Explicit biregular/birational geometry of affine threefolds: completions of \mathbb{A}^3 into del Pezzo fibrations and Mori conic bundles*, arXiv:1508.01792 [math.AG], 2015.
- [DK₂] A. Dubouloz and T. Kishimoto, *Cylinders in del Pezzo fibrations*, in preparation.
- [FZ] H. Flenner and M. Zaidenberg, *Rational curves and rational singularities*, Math. Z., 244 (2003), 549–575.
- [Fur] M. Furushima, *The complete classification of compactifications of \mathbb{C}^3 which are projective manifolds with the second Betti number one*, Math. Ann., 297 (1993), 627–662.
- [FI] M. Furushima and A. Ishida, *Hirzebruch surfaces and compactifications of \mathbb{C}^2* , Affine Algebraic Geometry, Proceedings of the Conference, Osaka, Japan 3-6 March 2011, World Scientific (Eds. K. Masuda, H. Kojima and T. Kishimoto), 2013, 42–51.
- [FN₁] M. Furushima and N. Nakayama, *The family of lines of on the Fano threefolds V_5* , Nagoya Math. J., 116 (1989), 111–122.
- [FN₂] M. Furushima and N. Nakayama, *A new construction of a compactification of \mathbb{C}^3* , Tôhoku Math. J., 41 (1989), 543–560.
- [KM] T. Kambayashi and M. Miyanishi, *On flat fibrations by the affine line*, Illinois J. Math., 22 (1978), 662–671.
- [KPZ₁] T. Kishimoto, Y. Prokhorov, M. Zaidenberg, *Group actions on affine cones*. Affine algebraic geometry, 123–163. Peter Russell’s Festschrift, CRM Proc. Lecture Notes, 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [KPZ₂] T. Kishimoto, Y. Prokhorov, M. Zaidenberg, *\mathbb{G}_a -actions on affine cones*, Transformation Groups, 18 (2013), 1137–1153.
- [KPZ₃] T. Kishimoto, Y. Prokhorov, M. Zaidenberg, *Unipotent group actions on del Pezzo cones*, Algebraic Geometry, 1 (2014), 46–56.
- [KPZ₄] T. Kishimoto, Y. Prokhorov, M. Zaidenberg, *Affine cones over Fano threefolds and additive group actions*, Osaka J. Math., 51 (2014), 1093–1112.
- [Ma] Yu.I. Manin, *Cubic forms: Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974.
- [Pro] Yu. Prokhorov, *Fano threefolds of genus 12 and compactifications of \mathbb{C}^3* , St. Petersburg Math. J., 3 (1992), 855–864.
- [Ro] P. Roquette, *On the Galois cohomology of the projective linear group and its application to the construction of generic splitting fields of algebras*, Ann. of Math., 150 (1963), 411–439.

平面曲線のガロア点配置と応用

深澤 知 (山形大学理学部)

1. はじめに

本稿は静岡大学で開催された第60回代数学シンポジウム(2015年8月31から9月3日)において「平面曲線のガロア点配置と応用」と題して発表した内容をまとめたものである。より詳しくは、ガロア点の個数の上限について、これまで得られた結果について論じている。またガロア点配置の応用のひとつとして、Ballico-Hefez 曲線上の有理点 (=ガロア点) を用いた代数幾何符号についても述べている。

2. ガロア点

K を標数 $p \geq 0$ の代数閉体とし、 $C \subset \mathbb{P}^2$ を次数 $d \geq 4$ の既約平面代数曲線とする¹。曲線 C の特異点集合を $\text{Sing}(C)$ で表し、関数体を $K(C)$ で表す。平面 \mathbb{P}^2 内の2点 $P \neq Q$ を通る直線を \overline{PQ} とかく。 $P \in \mathbb{P}^2$ を点とする。このとき、点 P からの射影 (とよばれる有理写像)

$$\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1; Q \mapsto \overline{PQ}$$

を考えることができる。(\mathbb{P}^2 内の1点 P を通る直線全体の集合は射影直線 \mathbb{P}^1 と一対一対応が付くことに注意。) この射影により、関数体の拡大

$$K(C)/\pi_P^*K(\mathbb{P}^1)$$

を得る。この拡大は有限次代数拡大である。吉原久夫氏は次の定義を与えた。

定義 (吉原久夫, 1996 ([5, 22, 29])). 関数体の拡大 $K(C)/\pi_P^*K(\mathbb{P}^1)$ がガロアであるとき、 P を C のガロア点という。

点 P がガロア点のとき、 G_P でそのガロア群 $\text{Gal}(K(C)/\pi_P^*K(\mathbb{P}^1))$ を表す。

射影の計算方法について簡単に復習しよう。点 $P \in \mathbb{P}^2$ が2枚の一次方程式 $aX + bY + cZ = dX + eY + fZ = 0$ で定義されているとき、射影は

$$\pi_P(X : Y : Z) = (aX + bY + cZ : dX + eY + fZ)$$

と与えられる。この有理写像は P の定義連立方程式に依存するが、部分体 $\pi_P^*K(\mathbb{P}^1) \subset K(C)$ は定義連立方程式に依存しないことに注意する。 $P = (1 : 0 : 0)$ であれば、 $\pi_P = (Y : Z)$ と書ける。 C の定義式を $F(X, Y, Z) = 0$ とし、 $f(x, y) = F(x, y, 1)$ とする。このとき $Z = 1$ とすれば π_P によって得られる関数体の拡大は $K(x, y)/K(y)$ であり、その関係式は $f(x, y) = 0$ で与えられる。

本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金・若手研究 (B)(25800002) の援助を受けている。

¹次数 $d = 3$ のとき、 C 上の点からの射影の次数は2となるので (分離的なら) どの点から射影してもガロア拡大を与えるため、本稿の問題は自明となる。 $\mathbb{P}^2 \setminus C$ の点からの射影を考えることにはそれでも意味があるが、混乱をさける。また高次元については [13, 30] を参照。

これらを踏まえると次の例を観察できる.

例 1. 標数 $p \neq 2, 3$ とし, 次の式で定義される曲線 C を考える:

$$X^3Z + Y^4 + Z^4 = 0.$$

このとき, $P_1 = (1:0:0) \in C$, $P_2 = (0:1:0) \in \mathbb{P}^2 \setminus C$ は共にガロア点である. P_1 でのガロア群 G_{P_1} は位数 3 の, P_2 でのガロア群 G_{P_2} は位数 4 の巡回群である.

正標数においては次の例が考えられる.

例 2. 標数 $p \geq 3$ とし, 次の式で定義される曲線 H を考える:

$$X^pZ + XZ^p - Y^{p+1} = 0.$$

このとき, $P_1 = (1:0:0) \in H$, $P_2 = (0:1:0) \in \mathbb{P}^2 \setminus H$ は共にガロア点である. 特に π_{P_1} は Artin-Schreier 拡大を与える.

射影の中心点 P がガロア点でないときは, 次のような記号を準備する (簡単のため「体拡大 $K(C)/\pi_P^*K(\mathbb{P}^1)$ は分離拡大」とする):

- $L_P := K(C)/\pi_P^*K(\mathbb{P}^1)$ のガロア閉包
- $G_P := \text{Gal}(L_P/\pi_P^*K(\mathbb{P}^1))$

吉原氏は代数曲面の非有理次数 (曲線で言えば gonality²) を研究していた際, 代数曲線の関数体について「gonality を与える射による体拡大における中間体の存在・非存在」の考察が必要となった (らしい). 特に非特異平面曲線の gonality を与える射が点からの射影として実現されることに着目し, 次のような問題提起をした ([22, 29, 32]):

- (1) いつ P がガロア点となるか?
- (2) ガロア点の個数はいくつか?
- (3) G_P の構造は?
- (4) L_P の構造は?
- (5) L_P の非特異モデルの構造 (種数など) は?

これがガロア点を定義する動機となった. それらのうち本稿では, (2) の問題に注目する.

問題 1. 平面曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ に対し, ガロア点の個数はいくつか?

これは他の問題が重要でないことを意味しない. 例えば問題 (3) に関して ($p = 0$ のとき) P が一般点であれば G_P は対称群になるが, これは uniform position principle と関係がある ([24]).

次のように記号を準備する.

- $r: \hat{C} \rightarrow C$ は C の正規化を表す.
- $g = g(\hat{C})$ で \hat{C} の種数を表す.
- $\hat{C}_0 := \{\hat{Q} \in \hat{C} \mid \text{接空間の射 } d_{\hat{Q}}r \text{ が単射}\} \subset \hat{C}^3$
- $\hat{\pi}_P$ は点 $P \in \mathbb{P}^2$ からの射影 $\pi_P: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ と r との合成 $\pi_P \circ r$ とする.
- $T_Q C \subset \mathbb{P}^2$ は点 $Q \in C \setminus \text{Sing}(C)$ での (射影) 接線を表す.

² \mathbb{P}^1 への dominant rational map で最も低い次数のこと. 定義からわかるように「rational からどれだけ離れているか」を測る量.

³ $\hat{C}_0 = \hat{C}$ のとき, 多様体論で言えば, r は “はめこみ” である.

- $I_Q(C, l)$ は C と直線 $l \subset \mathbb{P}^2$ の点 $Q \in C \cap l$ での交わりの重複度を表す.
- C の一般点 Q について $M(C) = I_Q(C, T_Q C)$ なる値 $M(C)$ が定まる.
- $\hat{Q} \in \hat{C}_0$ なら \exists line $h = 0$ (unique) s.t. $\text{ord}_{\hat{Q}} r^* h \geq M(C)$
このとき $\nu_{\hat{Q}} := \text{ord}_{\hat{Q}} r^* h$
- $\delta(C) := \#\{P \in C \setminus \text{Sing}(C) \mid P \text{ は } C \text{ のガロア点}\}$
- $\delta'(C) := \#\{P \in \mathbb{P}^2 \setminus C \mid P \text{ は } C \text{ のガロア点}\}$

3. ガロア点の分布のあり方

写像 $\hat{\pi}_P : \hat{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の点 $\hat{Q} \in \hat{C}$ での分岐指数を $e_{\hat{Q}}$ で表す. 像について $Q = r(\hat{Q}) \in C \setminus \text{Sing}(C)$ のときは, $e_{\hat{Q}}$ を e_Q と表す. 分岐について次のことがわかる.

事実 1. $P \in \mathbb{P}^2, \hat{Q} \in \hat{C}, Q = r(\hat{Q}) \neq P$ とする. 写像 $\hat{\pi}_P$ について次が成立する.

- (1) $P \in C \setminus \text{Sing}(C) \Rightarrow e_P = I_P(C, T_P C) - 1.$
- (2) h が直線 \overline{PQ} を定義する一次式するとき, $e_{\hat{Q}} = \text{ord}_{\hat{Q}} r^* h$ である. 特に $Q \in C \setminus \text{Sing}(C)$ なら $e_Q = I_Q(C, \overline{PQ})$ である.

このことから, P と異なる点 $Q \in C \setminus \text{Sing}(C)$ について

$$e_Q \geq 2 \Leftrightarrow \overline{PQ} = T_Q C$$

となる.

ここで π_P が非分離となることを注意しておく. このとき, すべての点 $Q \in C \setminus \text{Sing}(C)$ に対して, $e_Q \geq 2$ が満たされる. 即ち, 上で考察したことから,

$$\pi_P \text{ が非分離} \Leftrightarrow \overline{PQ} = T_Q C \text{ for } \forall Q \in C \setminus \text{Sing}(C)$$

が成立する⁴. 簡単な考察により, このような点は1点しか存在しないことがわかり, しかもどこにあるかすぐに特定できる. 従ってガロア点を探す際, 射影の分離性についてはほとんど気にしなくて良い.

さらに曲線のガロア被覆について次がある.

事実 2 ([25], III. 7.1, 7.2, 8.2). $\theta : C \rightarrow C'$ を非特異曲線の間次数 d のガロア被覆とし, そのガロア群を G とする. このとき, 次が成立する.

- (1) $\forall P \in C, \forall \sigma \in G, \theta(\sigma(P)) = \theta(P).$
- (2) $\theta(P) = \theta(Q) \Rightarrow \exists \sigma \in G \text{ s.t. } \sigma(P) = Q.$
- (3) 任意の点 $P \in C$ に対して, P でのスタビライザー群 $G(P) := \{\sigma \in G \mid \sigma(P) = P\}$ の位数は分岐指数 e_P に等しい.
- (4) $\theta(P) = \theta(Q) \Rightarrow e_P = e_Q.$
- (5) 分岐指数 e_P は次数 d を割り切る.

点 P がガロア点のときどのような状況になるか, 上の2つを使って説明する. 事実1(2)と2(4)により

$$Q, R \in C \setminus (\text{Sing}(C) \cup \{P\}), \overline{PQ} = \overline{PR} \Rightarrow I_Q(C, \overline{PQ}) = I_R(C, \overline{PR})$$

⁴このような点 P をもつ曲線は strange 曲線と呼ばれている [14, IV, Section 3].

となる. 即ち, $R \in C$ が直線 \overline{PQ} 上にあるとすると, R は Q と同じ重複度で直線 \overline{PQ} と交わらなければならない. π_P が双有理でなければ (Hurwitz の公式より) 分岐点は必ず存在する. よって標語的に,

ガロア点は多重接線や変曲点での接線たちの交点である

と言える⁵. (ここでは, 接点が2つ以上ある接線を多重接線, $I_Q(C, T_Q C) \geq 3$ なる点 $Q \in C$ を変曲点と呼んだ.)

4. 非特異平面曲線に関する結果

標数 $p = 0$ で C が非特異のときには, 問題1は吉原氏, 三浦敬氏により完全に解決されている. (記号 \sim は射影同値を表すものとする.)

定理 1 (吉原, 三浦 [22, 29]). $p = 0$, 曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ は非特異とする. このとき:

- (I) $\delta(C) = 0, 1$ or 4 .
 $\delta(C) = 4 \Leftrightarrow C \sim X^3Z + Y^4 + Z^4 = 0$.
- (II) $\delta'(C) = 0, 1$ or 3 .
 $\delta'(C) = 3 \Leftrightarrow C \sim X^d + Y^d + Z^d = 0$.

標数 $p > 0$ では, 本間正明氏による次の結果がある.

定理 2 (本間 [17]). $p > 0$, $q \geq 3$ を p 冪とし, H は Hermitian 曲線⁶ $X^qZ + XZ^q - Y^{q+1} = 0$ とする. (H は \mathbb{F}_{q^2} で Fermat 曲線 $F(q+1)$ に射影同値である.) このとき, 点 $P \in \mathbb{P}^2$ について

$$P : \text{ガロア点} \Leftrightarrow P : \mathbb{F}_{q^2}\text{-有理点}$$

が成立する. 特に, $\delta(H) = q^3 + 1$, $\delta'(H) = q^4 - q^3 + q^2$ である.

本間氏の結果から, 次数を大きくすればいくらかでもガロア点の個数は大きくなるので, 吉原-三浦の定理は正標数では成立していないことがわかる. 正標数ではどうしてこのようなことが起きるのか? 主に次のことが考えられる.

- ガロア点からの射影がワイルドに分岐する点をもつことがある.
- generic order of contact $M(C)$ が2より大きくなることがある.

ワイルドに分岐している点があると分岐点数が極端に少なくなることがあり, $M(C) > 2$ だと変曲点の数え上げが変化する. これら2つの現象は, 標数零の証明の「ガロア点ひとつに対して変曲点がたくさん必要であり, 変曲点の数え上げから個数を決める」という基本的なアイデア⁷に影響を与える.

例えば上記曲線 H において, ガロア点 $P = (1 : 0 : 0) \in H$ からの射影 π_P を考察すると, 点 P での分岐指数は $e_P = q$ となることが確認できる. また, 任意の点 $Q \in H$ について, 接線との交わりの重複度は $I_Q(H, T_Q H) \geq q$ になっていることも確かめられる.

これら2つの現象があまりにも上手く機能してしまっている例が Hermitian 曲線だと言える.

残りの状況を著者が決定し, 結果的には次を得た.

⁵このような点が必ずしもガロアになるとは限らないが.

⁶本来は \mathbb{F}_{q^2} 上で考察する際にそのように呼ぶそうである.

⁷実は, 多項式の条件だけを使う ([13, Key Lemma]), という代数的な別証明がある. しかしながらこちらも, 正標数においてワイルドに分岐する点をもつ可能性があるときにはそのままでは機能しない.

定理 3 (吉原, 三浦, 本間, 深澤 [7]). $\delta(C) \geq 2$ または $\delta'(C) \geq 2$ となる非特異平面曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ は次のいずれかに射影同値.

	$\delta(C)$	標数 p	次数 d	曲線
(1)	$q^3 + 1$	> 0	$q + 1$	Hermitian
(2)	$q + 1$	2	$q + 1$	$\prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} (x + \alpha y + \alpha^2) + cy^{q+1} = 0$ ($c \neq 0, 1$)
(3)	4	$\neq 2, 3$	4	$x^3 + y^4 + 1 = 0$

	$\delta'(C)$	標数 p	次数 d	曲線
(1)	$q^4 - q^3 + q^2$	> 0	$q + 1$	Hermitian
(2)	7	2	4	Klein quartic
(3)	3	≥ 0	$\neq 0 \pmod p$ $\neq q + 1$	Fermat
(4)	3	2	4	$(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)(y^2 + y) + (y^2 + y)^2 + c = 0$ ($c \neq 0, 1$)

5. ガロア点を複数もつ例

非特異平面曲線についてはガロア点の配置が完全にわかったので, 特異曲線についても考えたい. この節では $\delta(C)$ に注目する. $\delta(C) \geq 2$ なる特異曲線は 3 例知られている.

例 3 (三浦 [21], Example 1). $p = 0$ とし, $C \subset \mathbb{P}^2$ を $x^4 - x^3y + y^3 = 0$ によって (射影閉包として) 定義される射影曲線とする ($g = 0$ である). このとき次が成立する.

- (1) 点 $(1 : 1 : 0)$, $(8 : -16 : 3) \in C \setminus \text{Sing}(C)$ はガロア点である.
- (2) $\delta(C) = 2$

この例から次のことがわかるため, 簡単なようだがこの例は貴重である.

- ガロア点は変曲点とは限らない.
- ガロア点の群による作用でガロア点を移したとき, その像はガロア点とは限らない⁸.

例 4 (深澤-長谷川 [11]). $p > 0$, $q = p^e \geq 4$ とし, $C \subset \mathbb{P}^2$ が $x - y^q = 0$ で定義されているとする. このとき, すべての非特異点がガロア点, つまり, $\delta(C) = \infty$ である.

例 5 (深澤 [8]). $p > 0$, $q = p^e \geq 3$ とし, 射

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2; (s : t) \mapsto (s^{q+1} : s^q t + s t^q : t^{q+1})$$

の像 $B := \varphi(\mathbb{P}^1)$ を Ballico-Hefez 曲線という⁹. 点 $P \in \mathbb{P}^2$ に対して

$$P : B \text{ のガロア点} \Leftrightarrow P : \mathbb{F}_q\text{-有理点}$$

⁸非特異曲線のときには自己同型が射影変換の制限という事実 [1, Appendix A, 17 and 18], [3] から, この作用でガロア点はガロア点に移る. 逆に言えば今の場合, ガロア点による作用は \mathbb{P}^2 の射影変換から来ない. 下の例 5 についても, $p \geq 3$ であれば, ガロア点による作用は \mathbb{P}^2 の射影変換から来ない.

⁹本間氏による命名. 由来は, Ballico-Hefez による $M(C) = d - 1$ の分類定理 [2] に出てくる 3 タイプのうちのひとつであるため. 文献 [12] で使用. Hoang-島田の論文ではタイトルの一部になっている.

が成立する. 特に, $\delta(C) = q + 1$.

以上をまとめて次の表を得る (2010 年 11 月頃更新)¹⁰.

	$\delta(C)$	標数 p	次数 d	$M(C)$	曲線	ガロア群
(1)	∞	> 0	q	q	$x - y^q = 0$	巡回群
(2)	$q^3 + 1$	> 0	$q + 1$	q	Hermitian	$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus e}$
(3)	$q + 1$	> 0	$q + 1$	q	Ballico-Hefez	$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus e}$
(4)	$q + 1$	2	$q + 1$	2	$\prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} (x + \alpha y + \alpha^2) + cy^{q+1} = 0$ ($c \neq 0, 1$)	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus e}$
(5)	4	$\neq 2, 3$	4	2	$x^3 + y^4 + 1 = 0$	巡回群
(6)	2	0	4	2	$x^4 - x^3y + y^3 = 0$	巡回群

2015 年 9 月 1 日現在, $\delta(C) \geq 2$ なる例で現在までに知られている (公表されていない) ものはこの 6 タイプに限られる. これらの例は単発的に見つかっているが, どうしてこれらの例でなくてはならないのだろうか? 「ガロア点の個数による特徴づけ」を行うことはそのひとつの理論的解釈を与えることになる. 実際に次の結果がある.

定理 4 (深澤-長谷川 [11]). $\delta(C) = \infty \Leftrightarrow p > 0, d$ は p 冪であり, C は $x - y^d = 0$ で定義される曲線に射影同値である.

この状況を (FH) と名付ける. (FH) でなければガロア点の個数は有限となるので, 次の問題が浮上する.

問題 2. (FH) の状況にないとき, $\delta(C)$ の上限は何か?

6. ガロア点の個数の上限

特異曲線に対する $\delta(C)$ の上限について考察したものととして, 三浦氏の次の結果がある.

定理 5 (三浦 [21], Theorem 1). $p = 0, d - 1$ を素数とする.

- (1) C が cusp をもつとき, $d \geq 5$ なら $\delta(C) \leq 1$ であり, $d = 4$ なら $\delta(C) \leq 2$ である.
- (2) C が cusp をもたないとき,

$$(A(d, g) + 1)\delta_{d-2}(C) + A(d, g)\delta_0(C) \leq 3(2g + d - 2)$$

が成り立つ¹¹. ここで

$$A(d, g) = (d - 3)(2g + 2d - 4)/(d - 2)$$

である.

¹⁰度々「 $\delta(C) \geq 1$ かどうか」を考察しないのか, 或はその判定条件はないのか, という質問を受ける. 非特異平面曲線 (または超曲面) については判定条件が存在する [29, Proposition 5], [30, Corollary 6], [13, Key Lemma]. それら判定条件から $\delta(C) \geq 1$ なる例はたくさんあることがわかる. またガロア理論でガロア拡大について出てくる標準的な多項式を用いれば, それら例を作ることは簡単である. 問題は $\delta(C) \geq 2$ として. ひとつガロア点を作るためにガロア理論の標準形を使うと, もう一点を作ることはたいてい困難である.

¹¹ $\delta_{i-2}(C)$ は $I_P(C, T_P C) = i$ を満たすガロア点 $P \in C \setminus \text{Sing}(C)$ の個数.

ここでの証明の基本方針は非特異曲線のとおりと同じで、「ガロア点に必要な変曲点の個数の勘定+変曲点の個数の上限」である。上の $A(d, g)$ は概ねひとつのガロア点に必要な変曲点の数と見てよい。尚、三浦氏の考察している状況で cusp をもたないときは (特に意識する必要はないが)、複数のガロア点に「共通して使われる分岐点はない」ことも上限を決める上で重要である。

ガロア点が存在すればするほど自己同型群の位数が増えることになるので、自己同型群の位数の上限からガロア点の個数の上限が得られることは容易に想像できる。次の補題に注意する。

補題 1. P_1, P_2 がガロア点で $P_1 \neq P_2$ であるとき、 $G_{P_1} \cap G_{P_2} = \{1\}$ である。

この補題と Hurwitz 上限を用いることにより、次のような不等式が得られる。

事実 3 (Hurwitz 上限を使った不等式). $p = 0, g \geq 2$ のとき次が成立する。

- (1) $(d-1) + (\delta(C) - 1)(d-2) = \delta(C)(d-2) + 1 \leq 84(g-1) \quad (\leq 42d(d-3))$
- (2) $\delta(C) \geq 2 \Rightarrow (d-1)^2 \leq 84(g-1)$

これらの不等式は雑に作ったので、シャープかどうかわからない (恐らくシャープではない)。しかしながら標数零においては、「 (g/d) の一次式程度で評価されるべき」ことや「(ガロア点が多いと) あまり多くの特異点を持ってない」ことがわかる。

$M(C)$ が大きい場合には $\delta(C)$ は決定されている。後でも使うのでそれを書いておく¹²。

定理 6 ([8]). 次が成り立つ。

- (1) $M(C) = d$ かつ $\delta(C) \geq 1 \Rightarrow$ (FH)
- (2) $M(C) = d-1$ かつ $\delta(C) \geq 1 \Rightarrow C$ は Hermitian 曲線または Ballico-Hefez 曲線に射影同値である。

7. 主結果

主結果は次のように「generic order $M(C)$, 種数 g , 次数 d を用いた上限を与え、それに到達する曲線を分類」したものである。

主定理 ([9, 10]). C が (FH) の状況にないとき、

$$\delta(C) \leq (M(C) + 1)(2g - 2) + 3d$$

が成り立つ。さらに、等式が成り立つための必要十分条件は C が Hermitian 曲線または Ballico-Hefez 曲線に射影同値であることである。

この結果により、(FH) と合わせて、 $\delta(C)$ に関する表の上位3つまでが特徴づけられたことになる。証明の道具を次の節で準備するが、そこで現れるように、この上限は「変曲点の個数の上限」と一致する。 $M(C) = 2$ のときは上限 $3(2g-2) + 3d$ を得る。 $p = 0$ のときは $M(C) = 2$ であるが、「 g/d の一次式程度が妥当」と書いたように、理想からは d 倍程度大きい。

ガロア点で特異点であるものの個数を $\delta_s(C)$ と書けば、次のこともわかる。

¹² $M(C) = d$ のときの本間の分類定理 [16, Theorem 3.4], $M(C) = d-1$ のときの Ballico-Hefez の分類定理 [2] を用いているため、著者の貢献度は大したことはない。

系. C が (FH) の状況にないとき,

$$\delta(C) + \delta_s(C) \leq (M(C) + 1)(2g - 2) + 3d + \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$$

が成り立つ. 等式が成立するための必要十分条件は上の定理に同じである.

8. 証明の準備

事実 4 (変曲点の数え上げ [26], Theorem 1.5).

$$\sum_{\hat{Q} \in \hat{C}_0} (\nu_{\hat{Q}} - M(C)) \leq (M(C) + 1)(2g - 2) + 3d.$$

事実 5 (Plücker formula [23]). d^* を双対曲線 C^* の次数, $s(\gamma)$ を双対写像の分離次数, $q(\gamma)$ を非分離次数とする. このとき次が成り立つ.

- (1) $s(\gamma)q(\gamma)d^* \leq 2g - 2 + 2d$
- (2) $\hat{C}_0 = \hat{C}$ (i.e. $r : \hat{C} \rightarrow \mathbb{P}^2$: unramified) $\Rightarrow s(\gamma)q(\gamma)d^* = 2g - 2 + 2d$

ここで $M(C) \geq 3$ のときには, Hefez-Kleiman の定理 [15, (3.5) Theorem](または [16, Proposition 4.4]) から, $\overline{M(C)} = q(\gamma)$ となることに注意しておく.

複数のガロア点に対して「分岐点が共有されるか」という問題は変曲点や多重接線の個数を数え上げる際に重要である. 次のことがわかる.

補題 2. $P_1, P_2 \in C \setminus \text{Sing}(C)$ がガロア点で $P_1 \neq P_2$ のとき, 次が成立する.

- (1) $\overline{P_1 P_2} \in \mathbb{P}^1$ は π_{P_1}, π_{P_2} の branch point ではない.
- (2) $r : \hat{C} \rightarrow \mathbb{P}^2$ が unramified $\Rightarrow \pi_{P_1}$ と π_{P_2} は分岐点を共有しない¹³.

9. 証明のアイデア

$M(C) \geq 3$ の場合に説明する.

証明のポイントは「ガロア点が上限の個数あると仮定すると, ガロア点がすべて変曲点になる」ことである¹⁴. さらにその途中で「正規化 r が (ほとんどの場合) unramified」であることがわかり, $M(C), g, d$ の正確な情報が得られたり, 楯の定理が使える.

$(M(C) + 1)(2g - 2) + 3d \leq \delta(C) < \infty$ を仮定

- (1) $M(C) \leq d - 1$ (定理 6(1))
- (2) $g \geq 1 \Rightarrow r : \hat{C} \rightarrow \mathbb{P}^2$ が unramified, を示す
(補題 2(1), 特異点からの射影を考察)
- (3) ($g = 0$ も含めて) ガロア点に変曲点, を示す
(r が unramified で $M(C) \geq 3$ のときは容易)
- (4) 変曲点の数え上げ $\Rightarrow \delta(C) = (M(C) + 1)(2g - 2) + 3d$

¹³unramified でないと特異点で分岐を共有するかもしれない. この (2) は主に $M(C) = 2$ の場合の証明で使う.

¹⁴ここで言う「変曲点」は $I_P(C, T_P C) > M(C)$ となる点 P のことだと考えている. 例 3 の後で注意したように, 一般にはガロア点に変曲点ではない.

曲線の決定

- (5) (4) $\Rightarrow I_P(C, T_P C) = M(C) + 1$ かつ $M(C) \mid d - 1$ (事実 1(1), 事実 2(5))
 (6) $g = 0 \Rightarrow M(C) = d - 1 \Rightarrow C \sim \text{Ballico-Hefez}$ (定理 6(2))
 (7) $g \geq 1 \Rightarrow M(C) \mid 2g - 2 + 2d$ (上の (2) と Plücker formula (2)) $\Rightarrow M(C) \mid 2g$
 $\Rightarrow g \neq 1$
 (8) $g \geq 2 \Rightarrow g(\hat{C}^*) = g$ & $s(\gamma) = 1$ (上の (2) と楯の定理 [18, 20])

(8-1) $M(C) < d - 1$ のとき:

\exists 重複度 $(d - 1)/M(C)$ 以上の特異点 on C^* (ガロア点 1 個あたり)

C^* について genus formula (Plücker formula (1) も使用):

$$g \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2g - 2 + 2d}{M(C)} - 1 \right) \left(\frac{2g - 2 + 2d}{M(C)} - 2 \right) \\ - ((M(C) + 1)(2g - 2) + 3d) \times \frac{1}{2} \frac{d - 1}{M(C)} \left(\frac{d - 1}{M(C)} - 1 \right)$$

\Rightarrow 矛盾

(8-2) $M(C) = d - 1 \Rightarrow C \sim \text{Hermitian}$ (Ballico-Hefez 分類定理 [2])

10. BALLICO-HEFEZ 曲線上の有理点を用いた代数幾何符号

代数幾何符号を簡単に復習する.

代数幾何符号の構成法 (H -construction) ([28, 3.1.1])

材料:

- \mathbb{F}_q 上定義された代数多様体 X (通常はいくつか標準的な仮定)
- 直線束 \mathcal{L} (の global sections $\Gamma(X, \mathcal{L})$)
- \mathbb{F}_q -有理点 P_1, \dots, P_n

作り方:

$$\Phi: \Gamma(X, \mathcal{L}) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{L}_{P_i} / m_{P_i} \mathcal{L}_{P_i} \cong \mathbb{F}_q^{\oplus n}$$

像として符号¹⁵ $C_L := \text{Im} \Phi$ が得られる:

- C_L の符号長 $= n$
- Φ : 単射 $\Rightarrow C_L$ の次元 (情報量) $= \dim_{\mathbb{F}_q} \Gamma(X, \mathcal{L})$
- 符号 C_L の最小距離 (誤り訂正幅)

$$d := \min\{u - v \text{ の零でない成分の個数} \mid u, v \in C_L, u \neq v\}$$

長さ n , 次元 k , 最小距離 d である符号を $[n, k, d]_q$ または $[n, k, d]$ と表し, これらをパラメータと呼ぶ. n, k が計算できる場合であっても, d をきちんと求めることはしばしば難しい. 最小距離の半分くらいまでなら「誤りを訂正できる」ため, 「与えられた n, k に対して d が大きな符号」をいかにして作るかが符号理論の基本的な問題である.

¹⁵抽象的には単に, $\mathbb{F}_q^{\oplus n}$ の線形部分空間.

BH 曲線上の有理点を用いた代数幾何符号

材料:

- 射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$
- 直線束 $\mathcal{O}(m)$ ($\Gamma(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q), \mathcal{O}(m))$) は \mathbb{F}_q 上 m 次斉次式全体
- BH 曲線上の有理点全体 $B(\mathbb{F}_q)$ ($p \geq 3$)
BH 曲線上の特異点全体 $\text{Sing}(B)$ ($p = 2$)

ここでの d の求め方を簡単に説明する.

$$F \in \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(m)) \Rightarrow \Phi(F) = (F(P_i))_{i=1}^n$$

であるから,

$$\Phi(F) \text{ の第 } i \text{ 成分がゼロ} \Leftrightarrow F(P_i) = 0$$

である. 即ち,

m 次曲線が $B(\mathbb{F}_q)$ を最大で何点通れるか

を考えればよい. Ballico-Hefez 曲線上の有理点と直線の関係からその最大値が計算できる ($m \geq 2$ でも直線に分解できた方が通れる有理点が多くなる).

符号のパラメータを次のように決定した.

定理 7 (深澤-本間-Kim [12]). $m = 1$ とする.

(1) $p \geq 3$ のとき構成される符号は

$$\left[\frac{q^2 + q + 2}{2}, 3, \frac{q^2 - 1}{2} \right]$$

というパラメータをもつ.

(2) $p = 2$ のとき構成される符号は

$$\left[\frac{q^2 - q}{2}, 3, \frac{q^2 - 2q}{2} \right]$$

というパラメータをもつ.

これらはいずれも Griesmer 限界 $n \geq \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil$ に到達する.

定理 8 (深澤-本間-Kim [12]). q を奇数とする.

(1) $q \geq 5$ かつ $m = 2$ のとき構成される符号は

$$\left[\frac{q^2 + q + 2}{2}, 6, \frac{q^2 - q - 4}{2} \right]$$

というパラメータをもつ.

(2) $q \geq 7$ かつ $m = 3$ のとき構成される符号は

$$\left[\frac{q^2 + q + 2}{2}, 10, \frac{q^2 - 2q - 7}{2} \right]$$

というパラメータをもつ.

$m = 2, 3$ のときの符号は现阶段では何かしらの上限に到達しているわけではないが, 知られている符号のテーブルと比較してみると, 「現在知られている最も良い符号と同じパラメータをもつ」ということがわかる¹⁶.

$m = 2, 3$ のときの符号のテーブルとの比較 [http://www.codetables.de]

$$d_q(n, k) := \max\{d \mid \exists [n, k, d]_q\text{-code}\}$$

$$q \geq 5: \text{ odd, } m = 2 \Rightarrow n = \frac{q^2 + q + 2}{2}, k = 6, d = \frac{q^2 - q - 4}{2}$$

q	$n = \frac{q^2 + q + 2}{2}$	$k = 6$	$d_q(n, k)$	$\frac{q^2 - q - 4}{2}$
5	16		8	8
7	29		21-19	19
9	46		36-34	34

$$q \geq 7: \text{ odd, } m = 3 \Rightarrow n = \frac{q^2 + q + 2}{2}, k = 10, d = \frac{q^2 - 2q - 7}{2}$$

q	$n = \frac{q^2 + q + 2}{2}$	$k = 10$	$d_q(n, k)$	$\frac{q^2 - 2q - 7}{2}$
7	29		17-14	14
9	46		33-28	28

11. 今後の課題

$\delta(C)$ の上限を決める, ということに関しては一応の満足いく結果が得られたのではないかと考えている. $\delta'(C)$ についても同様に次が問題となる ($\delta'(C) = \infty$ については著者の結果 [6] がある).

問題 3. $\delta'(C) < \infty$ のとき, $\delta'(C)$ の上限はいくつか?

標数零においてはもっと強く, 次が肯定的であろう, と予想されている.

問題 4. $p = 0$ のとき, $\delta(C) \leq 4, \delta'(C) \leq 3$ は成り立つか?

実際にこれまでの結果で反例になっているものはない. また三浦氏の $\delta(C)$ に関する上限についても $d = 4$ においては “4” を出力する. $p = 0$ の $\delta'(C)$ については次のことが知られている.

¹⁶講演中にも質問があり回答したが, それらが符号として同じものかどうかは調べていない. しかしながら少なくとも, 具体的な代数幾何符号として実現されている点に意味がある.

- (Duyaguit-三浦 [4]) d が素数で C が非有理的のとき $\delta'(C) \leq 3$.
- (吉原 [31]) 次数 $d \neq 12, 24, 60$ の有理曲線について $\delta'(C) \leq 3$.

次の問題も自然ではあるが例がほとんど知られておらず, 2011 年頃高橋剛氏によって初めて与えられた ([27], 付録のテーブル (8) の例)¹⁷.

問題 5. 群が異なるガロア点を 2 つもつ平面曲線を見つけよ.

ガロア点全般の未解決問題については [33] があるので, そちらをご覧ください.

12. 付録: 複数の外ガロア点をもつ平面曲線のテーブル
(2013 年 4 月 2 日更新)

	$\delta'(C)$	標数 p	次数 d	曲線	ガロア群
(1)	∞	> 0	p^e	$\sum_{i=0}^e (\alpha_i x^{p^i} + \beta_i y^{p^i}) = 0$	$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus e}$
(2)	$q^4 - q^3 + q^2$	> 0	$q + 1$	Hermitian	巡回群
(3)	$q(q + 1)/2$	> 0	$q + 1$	Ballico-Hefez	巡回群
(4)	$q + 1$ or $q - 1$	> 0	$2q$	$(x^q - x)^2 + (x^q - x)(y^q - y) + \lambda(y^q - y)^2 + \mu = 0$ ($\lambda \in \mathbb{F}_q, (q, \lambda, \mu) \neq (2, 1, 1)$)	$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus e}$ \times $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
(5)	7	2	4	Klein quartic	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$
(6)	3	≥ 0	$\not\equiv 0 \pmod p$ $\neq q + 1$	Fermat	巡回群
(7)	3	0		$(s^d : (s + 1)^d : 1)$	巡回群
(8)	≥ 2	0	$2m$	$x^{2m} + x^m + y^{2m} = 0$	巡回群 二面体群
(9)	≥ 2 $= 2$ (many cases)	> 0	$q\ell$ $p \nmid \ell, \ell \geq 3$ $\ell \mid q - 1$	$(x^q - x)^\ell + \lambda(y^q - y)^\ell + \mu = 0$	$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus e}$ \times $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$

テーブルについての注意

- $\delta'(C)$ を考察する際は, $d \geq 3$ を仮定する.
- $\delta'(C)$ の欄が “ ≥ 2 ” となっているものは, 2 以上であることは分かるが, 実際には何個あるか明らかにされていない.
- 標数 p が正のとき, q は p の幂であるとする.
- 標数 p の欄が “0” になっているものは, $p = 0$ で明らかにされているものであり, $p > 0$ でもある程度成立することは容易に推察されるが, 正標数での条件をきちんと述べた文献がないものについてはそのような表記にしてある.
- “ガロア群” はガロア点のガロア群として現れるものを意味する.

¹⁷2011 年 6 月に開催された佐渡シンポジウムでの高橋氏の講演で公表された. 金沢-吉原 [19] にも $d = 4$ についての考察がある. 例自体は有名かもしれない. 例えば $d = 4$ のときは Hartshorne [14, I. Ex. 5.1] に (射影同値な例が) 載っている.

REFERENCES

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves, Vol. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **267**, Springer-Verlag, New York (1985).
- [2] E. Ballico and A. Hefez, Non-reflexive projective curves of low degree, *Manuscripta Math.* **70** (1991), 385–396.
- [3] H. C. Chang, On plane algebraic curves, *Chinese J. Math.* **6** (1978), 185–189.
- [4] C. Duyaguit and K. Miura, On the number of Galois points for plane curves of prime degree, *Nihonkai Math. J.* **14** (2003), 55–59.
- [5] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, *Geom. Dedicata* **139** (2009), 211–218.
- [6] S. Fukasawa, Classification of plane curves with infinitely many Galois points, *J. Math. Soc. Japan* **63** (2011), 195–209.
- [7] S. Fukasawa, Complete determination of the number of Galois points for a smooth plane curve, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **129** (2013), 93–113.
- [8] S. Fukasawa, Galois points for a non-reflexive plane curve of low degree, *Finite Fields Appl.* **23** (2013), 69–79.
- [9] S. Fukasawa, An upper bound for the number of Galois points for a plane curve, in “Topics in Finite Fields,” *Contemp. Math.* **632**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, pp. 111–119.
- [10] S. Fukasawa, Bounds for the number of Galois points for plane curves, preprint, arXiv:1404.4413.
- [11] S. Fukasawa and T. Hasegawa, Singular plane curves with infinitely many Galois points, *J. Algebra* **323** (2010), 10–13.
- [12] S. Fukasawa, M. Homma and S. J. Kim, Rational curves with many rational points over a finite field, in “Arithmetic, Geometry, Cryptography and Coding Theory,” *Contemp. Math.* **574**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 37–48.
- [13] S. Fukasawa and T. Takahashi, Galois points for a normal hypersurface, *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 1639–1658.
- [14] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM 52, Springer (1977).
- [15] A. Hefez and S. Kleiman, Notes on the duality of projective varieties, “Geometry Today,” *Prog. Math.* vol 60, Birkhäuser, Boston, 1985, pp. 143–183.
- [16] M. Homma, Funny plane curves in characteristic $p > 0$, *Comm. Algebra* **15** (1987), 1469–1501.
- [17] M. Homma, Galois points for a Hermitian curve, *Comm. Algebra* **34** (2006), 4503–4511.
- [18] H. Kaji, On the Gauss maps of space curves in characteristic p , *Compositio Math.* **70** (1989), 177–197.
- [19] M. Kanazawa and H. Yoshihara, Galois lines for space elliptic curve with $j = 12^3$, preprint, arXiv:1405.0759.
- [20] S. L. Kleiman, Multiple tangents of smooth plane curves (after Kaji), “Algebraic geometry: Sundance 1988,” *Contemp. Math.* **116**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 71–84.
- [21] K. Miura, Galois points on singular plane quartic curves, *J. Algebra* **287** (2005), 283–293.
- [22] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, *J. Algebra* **226** (2000), 283–294.
- [23] R. Piene, Numerical characters of a curve in projective n -space, In: *Real and Complex Singularities, Oslo 1976*, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977, pp. 475–495.
- [24] G. P. Pirola and E. Schlesinger, Monodromy of projective curves, *J. Algebraic Geom.* **14** (2005), 623–642.
- [25] H. Stichtenoth, *Algebraic Function Fields and Codes*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [26] K. O. Stöhr and J. F. Voloch, Weierstrass points and curves over finite fields, *Proc. London Math. Soc.* (3) **52** (1986), 1–19.
- [27] T. Takahashi, Galois point for a plane curve with one or two singular points, in preparation.

- [28] M. A. Tsfasman and S. G. Vlăduț, Algebraic-Geometric Codes, Mathematics and its Applications, **58**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991).
 - [29] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239** (2001), 340–355.
 - [30] H. Yoshihara, Galois points for smooth hypersurfaces, J. Algebra **264** (2003), 520–534.
 - [31] H. Yoshihara, Galois points for plane rational curves, Far east J. Math. **25** (2007), 273–284; Errata, *ibid.* **29** (2008), 209–212.
 - [32] 吉原久夫, 研究紹介, available at http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/staffs/Hisao_Yoshihara.pdf
 - [33] H. Yoshihara and S. Fukasawa, List of problems, available at <http://hyoshihara.web.fc2.com/openquestion.html>
- E-mail address:* s.fukasawa@sci.kj.yamagata-u.ac.jp

エンリケス曲面の自己同型について¹

大橋 久範 (東京理科大学 理工学部 数学科)

1 イントロ

以下、代数多様体は複素数 \mathbb{C} 上定義されているとし、特に断らない限り非特異とする。射影代数曲面 S がエンリケス曲面であるとは、条件

$$2K_S \sim 0, \quad H^i(S, \mathcal{O}_S) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

が満たされているときにいう。ここで K_S は標準因子、 \sim は線型同値、 \mathcal{O}_S は構造層を表している。特に、一つ目の条件は「 S が至る所退化しない大域的な正則二重二形式を持つ」と言い換えられる。

エンリケス曲面は定義から極小代数曲面、即ち K_S がネフとなる代数曲面であり、これらは一般型の場合を除きかなり詳しく分類されている。エンリケス曲面の基本的性質は以下の通り。

- (1) エンリケス曲面は互いに微分同相だが、複素構造は 10 個の有効パラメータ (モジュライ) を持つ。
- (2) $\text{Aut}(S) = \{\varphi: S \rightarrow S \mid \text{双正則な同型写像}\}$ は有限または無限位数の離散群となり、この群の構造は変形との相性が悪い。
- (3) $\pi: X \rightarrow S$ を普遍被覆とすると、これは二重被覆であり X は $K3$ 曲面である。即ち、 X は次の二条件を満たす：

$$K_X \sim 0, \quad H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

π の被覆変換は X に固定点を持たない位数 2 の正則自己同型 (自由対合) として作用する。逆に、ある $K3$ 曲面 X の上に自由対合 ε が存在していたとすると、それで割って得られる曲面 $S = X/\varepsilon$ はエンリケス曲面の一例になる。つまり、

$$\{(X, \varepsilon) \mid K3 \text{ 曲面と自由対合のペア}\} \longleftrightarrow \{S \mid \text{エンリケス曲面}\}.$$

¹2015 年代数学シンポジウムの報告集

例 1.1. $K3$ 曲面の基本的な例は、 \mathbb{P}^3 内の 4 次曲面である。

$$X = \{(x_0 : \cdots : x_3) \in \mathbb{P}^3 \mid F_4(x_0, \dots, x_3) = 0\},$$

ここで $F_4(x_0, \dots) = a_0x_0^4 + \cdots + a_mx_m^4$ は 4 次斉次式で、パラメータとなる係数 (a_i) は一般とする。4 次単項式の個数を数えることで $m = {}_7C_4 - 1 = 34$ となる。

例 1.2. 上の $K3$ 曲面からエンリケス曲面を作るには工夫がいる。 X の上に自由対合 ε を構成すればよいわけだが、すぐに思いつく線型変換などでは、例えば

$$\varepsilon: (x_0 : \dots) \mapsto (x_0 : x_1 : -x_2 : -x_3)$$

を考えると $\varepsilon \curvearrowright \mathbb{P}^3$ の固定点集合が

$$\begin{aligned} & \{x_0 = x_1 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3 \\ & = (\text{直線}) \cup (\text{直線}) \end{aligned}$$

となり、これは常に X と共有点を持つ。これはつまり ε が X に作用したとしても固定点を持つということになり、所望の自由対合ではないことがわかる。

例 1.3. 次のようにするとエンリケス曲面が作れる。 $X = \{F_4(x_0, \dots, x_3) = 0\}$ を 4 次曲面とし、定義方程式 F_4 を次の条件を満たすようにとる：

$$(1) (x_0 \cdots x_3)^2 F_4(x_0^{-1}, \dots, x_3^{-1}) = F_4(x_0, \dots, x_3),$$

$$(2) F_4(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \neq 0 \quad (\pm \text{は全ての組み合わせを動く})$$

すると、条件 (1) から X は各座標点 $(1 : 0 : 0 : 0), \dots, (0 : 0 : 0 : 1)$ において特異点を持つが、これが有理二重点である限りは最小解消 $\tilde{X} \rightarrow X$ をとればこれが $K3$ 曲面になる。 ε をクレモナ変換 $(x_0 : \cdots : x_3) \mapsto (x_0^{-1} : \cdots : x_3^{-1})$ が \tilde{X} に誘導する自己同型とすれば、これが自由対合になり、 $S = \tilde{X}/\varepsilon$ がエンリケス曲面である。

この講演で紹介する定理は、この例の特殊化に関するものである。多項式 F_4 を特別な形にとり、

$$X = \{(x_0x_1 + \cdots + x_2x_3)^2 = kx_0x_1x_2x_3\} \quad (k \neq 0, 4, 36)$$

とする（左辺の括弧内は、2 次の基本対称式である。）この場合、各座標点における特異点は D_4 型となり、有理二重点であるから、例 1.3 によりエンリケス曲面 $S = \tilde{X}/\varepsilon$ が構成できる。

定理 1.4 (向井-O). このエンリケス曲面 S に対して、

$$\text{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{*4} \rtimes \mathfrak{S}_4$$

である²。ここで、 $*$ は自由積を、 \rtimes は半直積を表す。また、各生成元は次のように具体的に記述できる。

- \mathfrak{S}_4 は 4 次対称群であり、座標 x_0, \dots, x_3 の置換として S に作用する。
- 各 $i = 0, 1, 2, 3$ に対し、 $\mathbb{Z}/2$ の生成元 σ_i は X に次のように作用する。例えば $i = 0$ として、

$$\sigma_0: (x_0 : \dots) \mapsto \left(\frac{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2}{x_0(x_1 + x_2 + x_3)^2} : x_1 : x_2 : x_3 \right).$$

この作用は、代数的には、 F_4 を x_0 に関する二次方程式と見たときにその二つの根を入れ替える作用である。幾何的には、座標点 $(1 : 0 : 0 : 0)$ から X を射影して \mathbb{P}^2 の二重被覆とみなした時にその被覆変換が S に誘導する自己同型である。

この定理の証明は、エンリケス曲面 S 上の有理曲線配置、楕円曲線束の分類といった幾何的な考察をもとに、自己同型群を双曲空間に作用する鏡映群と捉えることで行う。重要なステップとして、 S 上の低種数曲線の分類が以下のようにできる。

定理 1.5. [同上] 上と同じエンリケス曲面 S を考える。 \mathcal{F} を自己同型群の自由積部分 $\mathcal{F} = (\mathbb{Z}/2)^{*4}$ とする。

- (1) \mathcal{F} の作用を法として、 S 上にはちょうど 16 個の非特異有理曲線が存在する。これらは (定理の証明中に現れる) $10A + 6B$ 配置で代表される。
- (2) \mathcal{F} の作用を法として、 S 上にはちょうど 29 個の楕円曲線束が存在する。特異ファイバーの性質に関してこれらは 5 種類に分かれ、それぞれの性質は以下の通り。

²話を単純にするため \mathbb{C} 上としているが、奇数標数の代数閉体においても定理は成り立つ。証明も同じである。

	特異ファイバー	Mordell-Weil 階数	個数
1)	$\tilde{E}_7 + \tilde{A}_1$	0	12
2)	$\tilde{E}_6 + \tilde{A}_2$	0	4
3)	$\tilde{D}_6 + \tilde{A}_1$	1	6
4)	$\tilde{A}_7 + \tilde{A}_1$	0	3
5)	$2\tilde{A}_5 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_1$	0	4

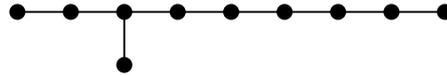
次のセクションで、定理の証明の概略を説明する。

2 定理の証明の概略

エンリケス曲面 S に対し、コホモロジー群 $H^2(S, \mathbb{Z})_f := H^2(S, \mathbb{Z})/(\text{torsion})$ (あるいは、同じことだが、ネロンセベリ群 $NS(S)_f := NS(S)/(\text{torsion})$) は階数 10、符号 $(1, 9)$ の偶ユニモジュラー格子であり、同型

$$H^2(S, \mathbb{Z})_f \simeq U \oplus E_8 \simeq T_{2,3,7}$$

が成り立つ。ここで、 U はグラム行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で定義される双曲格子、 E_8 はその型のルート格子 (の符号を負定値にしたもの)、 $T_{2,3,7}$ は次のグラフから (ルート格子と同様に) 定義される双曲格子である。



これをもとに、自然な表現 $r: \text{Aut}(S) \rightarrow O(H^2(S, \mathbb{Z})_f)$ について見ていく。

Step 1: S 上には以下の非特異有理曲線がある。

- (1) X 上の 4 つの D_4 特異点と、4 つの trope³ から定まる、 S 上の 10 本の非特異有理曲線
- (2) 対称な平面切断、例えば $X \cap \{x_0 + x_1 = 0\}$ 、から定まる 6 本の非特異有理曲線

³即ち、切断 $X \cap \{x_i = 0\}$ から決まる X 上の二次曲線

これらについて通常の変対グラフ⁴を描くと、次のようになる。以下ではこれらを $10A$ 配置、 $6B$ 配置と呼ぶことにする。 $10A + 6B$ 配置と言ったときには A 部分と B 部分の間の交点関係も表すこととするが、この部分は図にすると複雑になるため省略する。

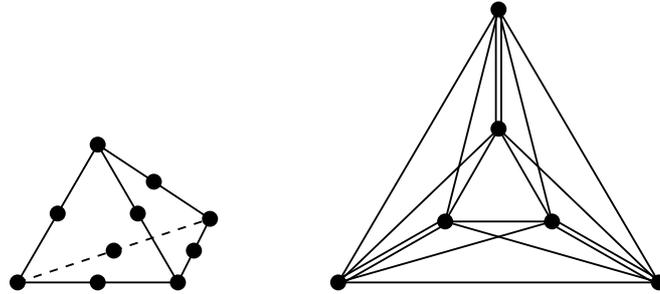


図 1: 非特異有理曲線の $10A$ 配置 (左) と $6B$ 配置 (右)

δ をこれら非特異有理曲線の基本類とすると、 $\delta \in H^2(S, \mathbb{Z})_f$ は $(\delta^2) = -2$ を満たしていて、従ってコホモロジー格子のピカール・レフシェッツ変換

$$s_\delta: H^2(S, \mathbb{Z})_f \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})_f$$

$$x \mapsto x + (x, \delta)\delta$$

を誘導することに注意する。これにより、 $H^2(S, \mathbb{Z})_f$ から定まる 9 次元の双曲空間 Λ に作用する鏡映群 $W(10A + 6B)$ が定まるが、上の変対グラフはこの鏡映群の基本領域を表すコクセター図形と (ほとんど) 一致する。⁵

この変対グラフから、 S は多くの楕円曲線束を持つことがわかる。特に、定理 1.5 中の表の 5) に対応する楕円曲線束と有理曲線を詳しく調べることで、次もわかる。

補題 2.1. r は単射である。

Step 2: S 上の自己同型 σ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) に対応してコホモロジー類 G_i が存在し、 $(G_i^2) = -2$ かつ σ_i のコホモロジー作用は G_i に関する鏡映作用と一致する。

この命題は、イントロで説明した σ_i の幾何的描像と、そこから導かれるエンリケス曲面の「二次ひねり」構造 ([1, 5]) を調べることで説明される。このように、コホモロジー作用が鏡映となるような自己同型は「数値的鏡映な対合」と呼ばれている [4]。

⁴既約曲線を頂点とし、交点数により頂点間の辺の本数を定めたグラフ

⁵変対グラフの二重線が、コクセター図形では太線に置き換わる。

鏡映の中心 G_i ($i = 0, 1, 2, 3$) の双対グラフは、4 頂点の完全二重グラフ $K_4^{[2]}$ となり、この部分は S 上の $4C$ 配置と呼ばれる。 $4C$ 配置には S 上の曲線は対応しないことに注意しておく。一方、コクセター図形としての $10A + 6B + 4C$ 配置には Λ に作用する鏡映群 $W = W(10A + 6B + 4C)$ の基本領域という幾何的な意味があり、例えば $\mathcal{F} = \langle \sigma_i \rangle$ が $\mathbb{Z}/2$ の自由積になることはここから直ちにわかる。

Step 3: 上で定義した $10A + 6B + 4C$ 配置のコクセター図形は、Vinberg の判定条件を満たし、従って基本領域の体積が有限、あるいは同じことだが W は $O(H_f^2, \mathbb{Z})$ の中で有限指数を持つ。この事実により、 \mathcal{F} を法として低種数の曲線を分類する手がかりが得られる。

命題 2.2. \mathcal{F} を法とすると、 S 上の非特異有理曲線は $10A + 6B$ 配置で代表される。

Proof. H を、 $10A$ 配置の曲線の和として定義される nef で巨大な因子とする。 E を任意の非特異有理曲線とし、軌道 $\mathcal{F}.E$ の中で H に関する次数を最小にするような元 E_0 をとると、 E_0 が G_i とは非負で交わることから、 E_0 は $10A + 6B$ 配置のどれかの曲線と負で交わることになり、主張が従う。 \square

系 2.3. $N(W(10A + 6B))$ を、 $10A + 6B$ 配置から定義される部分鏡映群 $W(10A + 6B)$ を含むような W の最小の正規部分群とすると、これは S の非特異有理曲線のピカール・レフシェッツ変換から生成されるワイル群 $W(S)$ と一致する。

Proof. これは、コクセター図形において $10A + 6B$ と $4C$ を結ぶ辺の重複度が偶数であり、従って同型写像 $W/N(W(10A + 6B)) \rightarrow W(4C) = \mathcal{F}$ が存在することからわかる。 \square

同様の議論で S 上の楕円曲線束の分類も得られ、定理 1.5 の証明が完了する。

Step 4: 最後に、 r が同型 $\text{Aut}(S) \rightarrow \mathcal{F} \rtimes \mathfrak{S}_4$ を誘導することを示す。単射性は Step 1 で得られているので、像を記述するのが主目標になるが、これは非特異有理曲線全体の双対グラフにおいて各頂点を楕円曲線束を用いて特徴づけするという議論を経由する。詳細は略すが、ここから、各自己同型が因子 H を (因子として) 保つことがわかり、従って $\text{im } r$ は \mathcal{F} と基本領域 P の対称群 $\text{Sym}(P) \simeq \mathfrak{S}_4$ から生成されていることがわかる。これで、定理の証明が完成する。

注意 2.4. 今回現れたコクセター図形 $10A + 6B + 4C$ は、金銅 [2] における V 型曲面の非特異有理曲線の双対図形と一致している。実際、 $k \rightarrow 0$ の極限において適切なモデルに取り換えることにより、 S は V 型曲面に変形する。

参考文献

- [1] K. Hulek and M. Schütt, Enriques surfaces and Jacobian elliptic $K3$ surfaces, *Math. Z.*, **268** (2011), 1025-1056.
- [2] Kondo, S., Enriques surfaces with finite automorphism groups, *Japan. J. Math.*, **12** (1986), 191–282.
- [3] Kondo, S., The automorphism group of a generic Jacobian Kummer surface, *J. Algebraic Geometry* **7** (1998), 589609.
- [4] S. Mukai, Kummer’s quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces, *J. Math. Soc. Japan*, **64** (2012), 231–246.
- [5] S. Mukai and H. Ohashi, Enriques surfaces of Hutchinson-Göpel type and Mathieu automorphisms, in *Arithmetic and Geometry of $K3$ surfaces and Calabi-Yau threefolds*, Fields Institute Communications **67**, 2013, pp. 429–454.

Siegel modular 形式の合同について

長岡昇勇（近畿大学理工学部）

1 緒言

Serre は論文 [32] において、 p 進 modular 形式の理論を展開し、その応用として総実代数体上の p 進 zeta 関数を構成した。 p 進 modular 形式の幾何学的取り扱い、Katz [14] によってなされたが、直接的な高次元化（多変数化）は十分に研究されたとは言い難い。この稿では、Serre の理論が Siegel modular 形式の場合にどのように拡張されるかを論ずる。このため、最初に Siegel modular 形式の基本的な事柄を復習し、そのあと mod p Siegel modular 形式や p 進 Siegel modular 形式の概念を定義する。後半では Serre の一変数の場合の結果が、Siegel modular 形式の場合にどのように拡張されるかを俯瞰する。最後に theta 作用素の mod p 核に関する最近の結果を紹介する。

2 準備

2.1 記号

まず本稿で使用する記号についてまとめておく。

$\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$ を n 次の Siegel modular 群とし、 \mathbb{H}_n を n 次の Siegel 上半空間とする。 $\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$ の合同部分群 Γ に対して $M_k(\Gamma)$ で、 Γ に対する weight k の Siegel modular 形式全体のなす \mathbb{C} -vector 空間、また $S_k(\Gamma)$ で cusp 形式のなす部分空間を表すものとする。（以下、扱う Γ は Γ_n 全体か Γ_0 型の合同部分群であるかいずれかであると仮定する。） $M_k(\Gamma)$ の任意の元 $F(Z)$ は、次の形の Fourier 展開をもつ：

$$F(Z) = \sum_{0 \leq T \in Sym_n^*(\mathbb{Z})} a(F; T) q^T, \quad q^T := \exp(2\pi i \operatorname{tr}(TZ)), \quad Z \in \mathbb{H}_n,$$

ここで

$$Sym_n^*(\mathbb{Z}) := \{T = (t_{lj}) \in Sym_n(\mathbb{Q}) \mid t_{ll}, 2t_{lj} \in \mathbb{Z}\}.$$

すなわち、 $T \in Sym_n^*(\mathbb{Z})$ に対応する Fourier 係数を $a(F; T)$ で表す。

また、 \mathbb{C} の部分環 R に対して、 $M_k(\Gamma)_R \subset M_k(\Gamma)$ で全ての Fourier 係数が R に含まれるような $M_k(\Gamma_n)$ の元全体のなす R -加群を表すものとする。

2.2 形式的 Fourier 展開（ q -展開）

$T = (t_{lj}) \in Sym_n^*(\mathbb{Z})$, $Z = (z_{lj}) \in \mathbb{H}_n$ に対して $q_{lj} := \exp(2\pi i z_{lj})$ と表す。すると

$$q^T = \exp(2\pi i \operatorname{tr}(TZ)) = \prod_{l < j} q_{lj}^{2t_{lj}} \prod_{l=1}^n q_{ll}^{t_{ll}}$$

と書ける．したがって $F \in M_k(\Gamma)_R$ は R 上の形式的べき級数環の元とみることができ：

$$F = \sum a(F; T)q^T \in R[q_{lj}, q_{lj}^{-1}][[q_{11}, \dots, q_{nn}]].$$

素数 p に対して， $\mathbb{Z}_{(p)}$ で p -整有理数のなす局所環を表すこととする．二つの元

$$F_i = \sum a(F_i; T)q^T \in \mathbb{Z}_{(p)}[q_{lj}, q_{lj}^{-1}][[q_{11}, \dots, q_{nn}]], \quad (i = 1, 2)$$

に対して，合同式

$$a(F_1; T) \equiv a(F_2; T) \pmod{p}$$

が全ての $T \in \text{Sym}_n^*(\mathbb{Z})$ について成立するとき， $F_1 \equiv F_2 \pmod{p}$ と書くことにする．

2.3 modular 形式の構成

modular 形式の具体的な構成法としては，Eisenstein 級数によるものと theta 級数によるものが典型的である．それぞれについて簡単に復習する．

Eisenstein 級数

Γ_n の部分群 $\Gamma_{n, \infty}$ を

$$\Gamma_{n, \infty} := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \right\}$$

により定義する．

定義： $k > n + 1$ ：偶数に対して

$$E_k^{(n)}(Z) := \sum_{\substack{(* \\ C \ D)}: \Gamma_{n, \infty} \backslash \Gamma_n} \det(CZ + D)^{-k}, \quad Z \in \mathbb{H}_n$$

と定義し，degree n ，weight k の (Siegel) Eisenstein 級数とよぶ．

注意： $k > n + 1$ は級数の収束条件である．(この収束条件を満たさない、所謂 “weight の低い Eisenstein 級数” も Shimura[34] によって調べられているが、ここでは言及しない.)

次が証明されている：

定理 2.1 (Siegel[35]). k を $k > n + 1$ なる偶数とする．すると

$$E_k^{(n)} \in M_k(\Gamma_n)\mathbb{Q}$$

である．

注意：Fourier 係数 $a(E_k^{(n)}; T)$ が有理数であるという部分が重要である．これは対応する modular 多様体が \mathbb{Q} 上定義されることと関連している．驚くべきことに $a(E_k^{(n)}; T)$ の明示公式が桂田氏によって与えられている (Katsurada [13]) ．

Eisenstein 級数の q -展開

$n = 1$ の場合: $E_k^{(1)}$ 収束条件は $k > 2$ である. このときよく知られているように $E_k^{(1)}$ は次の形の q -展開を持つ:

$$E_k^{(1)} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(t) q^t.$$

ここで B_m は m 番目の Bernoulli 数を表し, $\sigma_m(n) = \sum_{0 < d|n} d^m$ である. 定理 2.1 が主張するように, この場合確かに $a(E_k^{(1)}; t) \in \mathbb{Q}$ となっている. 以下に $E_4^{(1)}$ と $E_6^{(1)}$ の q -展開の “最初の部分” を与える:

$$E_4^{(1)} = 1 + 240 \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_3(t) q^t = 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + 17520q^4 + \dots$$

$$E_6^{(1)} = 1 - 504 \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_5(t) q^t = 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - 532827q^4 - \dots$$

注意: $E_4^{(1)} \in M_4(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}}$, $E_6^{(1)} \in M_6(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}}$.

$n = 2$ の場合:

$$T = \begin{pmatrix} n & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & m \end{pmatrix} \in \Lambda_2 \quad \text{に対して} \quad q^T = q_{11}^n q_{12}^r q_{22}^m \quad \text{である.}$$

この記法のもとで 2 次 Siegel modular 形式は $\mathbb{C}[q_{12}^{-1}, q_{12}][[q_{11}, q_{22}]]$ の元と見ることができ.

Eisenstein 級数 $E_k^{(2)}$ ($k = 4, 6$) の q -展開の初めの部分は以下のように与えられる:

$$E_4^{(2)} = 1 + 240(q_{11} + q_{22}) + 2160(q^2 + q_{22}^2) + (240q_{12}^{-2} + 13440q_{12}^{-1} + 30240 + 13440q_{12} + 240q_{12}^2)q_{11}q_{22} + \dots$$

$$E_6^{(2)} = 1 - 504(q_{11} + q_{22}) - 16632(q_{11}^2 + q_{22}^2) + (-504q_{12}^{-2} + 44352q_{12}^{-1} + 166320 + 44352q_{12} - 504q_{12}^2)q_{11}q_{22} + \dots$$

以上の Fourier 係数の数値例は, 例えば次の式を用いて計算される:

$$a \left(E_k^{(2)}; \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \right) = q\zeta q' \text{ の係数} = -\frac{4k \cdot B_{k-1, \chi_{-3}}}{B_k \cdot B_{2k-2}},$$

$$a \left(E_k^{(2)}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = q q' \text{ の係数} = -\frac{4k \cdot B_{k-1, \chi_{-4}}}{B_k \cdot B_{2k-2}}.$$

ここで $B_{m, \chi}$ は指標 χ をもつ一般化された Bernoulli 数を表している.

注意: 次数 1 の場合と同様に $E_4^{(2)} \in M_4(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}$, $E_6^{(2)} \in M_6(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}$ が成り立つ, すなわち, これらの Eisenstein 級数は有理整 Fourier 係数をもっている.

次に theta 級数による構成法を紹介する.

theta 級数

$S \in \text{Sym}_m(\mathbb{R})$ を正定値対称行列とする． \mathbb{H}_n 上の級数

$$\vartheta_S^{(n)}(Z) = \sum_{X \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})} \exp(\pi i \text{tr}(S[X]Z)), \quad Z \in \mathbb{H}_n$$

を S に付随する theta 級数とよぶ．ここで $S[X] := {}^t X S X$ である．

次が成り立つ：

定理 2.2 S を正定値 even, unimodular 行列とする．すなわち, $0 < S \in 2\text{Sym}_m^*(\mathbb{Z})$ かつ $\det(S) = 1$ とする．すると

$$\vartheta_S^{(n)} \in M_{\frac{m}{2}}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}}$$

が成り立つ．

よく知られているように, 上記のような S が存在するための m の条件は $m \equiv 0 \pmod{8}$ である．したがって $\vartheta_S^{(n)}$ の weight $\frac{m}{2}$ は 4 の倍数であり, weight が 4 の倍数の空間には theta 級数で非自明な Siegel modular 形式が構成できるわけである．

2.4 modular 形式のなす環

この節ではモジュラー形式のなす環の構造定理をまとめておく．

$$M(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma)$$

を Γ 上の Siegel modular 形式のなす環 (次数付き環) という．同様に部分環 $R \subset \mathbb{C}$ に対して次の様に表す：

$$M(\Gamma)_R := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma)_R$$

次の事実は古典的な結果である：

$$\begin{aligned} M(\Gamma_1) &= \mathbb{C}[E_4^{(1)}, E_6^{(1)}] \\ M(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}} &= \mathbb{Z}[E_4^{(1)}, E_6^{(1)}, \Delta] \end{aligned}$$

ここで Δ は weight 12 の cusp 形式で次で定義されるものである：

$$\Delta = \frac{1}{1728} ((E_4^{(1)})^3 - (E_6^{(1)})^2) = \sum_{t=1}^{\infty} \tau(t) q^t \in S_{12}(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}}$$

ここで $\tau(t)$ は Ramanujan の τ -関数である．(以下 Ramanujan の Δ とよぶことにする．)

注意：(1) 良く知られているように (例えば Serre の教科書 [33] 参照), $E_4^{(1)}$ と $E_6^{(1)}$ は代数的独立であり, これは $M(\Gamma_1)$ は \mathbb{C} 上の 2 変数多項式環と同型であることを示している．

(2) $M(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}}$ の生成元について, Δ はそれ自身整 Fourier 係数をもっているが, $E_4^{(1)}$ と

$E_6^{(1)}$ の整係数多項式では書けず, \mathbb{Z} 上の生成元として必要であり, なおかつそれで十分であるということであることを示している.

$n = 2$ の場合:

定理 2.3 井草の構造定理[11] は次を主張する:

$$M(\Gamma_2) = \mathbb{C}[E_4^{(2)}, E_6^{(2)}, \chi_{10}, \chi_{12}, \chi_{35}]$$

ここで下添え字はそれぞれの weight を表す.

$E_k^{(2)}$ ($k = 4, 6$) は前に定義した 2 次の Siegel Eisenstein 級数で χ_k ($k = 10, 12, 35$) は井草の cusp 形式とよばれるものである (定義は井草 [11]). 最初の 4 個は代数的独立であり, χ_{35} についてはある多項式 $P \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ が存在して

$$\chi_{35}^2 = P(E_4^{(2)}, E_6^{(2)}, \chi_{10}, \chi_{12})$$

とかける. P は井草により具体的に計算されている (eg. cf. [11]).

\mathbb{Z} 上の場合

井草 [12] は環 $M(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}$ の極小生成系を theta 零値を用いて具体的に構成した.

定理 2.4 (井草の \mathbb{Z} 上の構造定理)

$$M(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[X_4, X_6, X_{10}, X_{12}, Y_{12}, X_{16}, \dots, X_{48}] \quad (15 \text{ 個})$$

$X_4 = E_4^{(2)}$, $X_6 = E_6^{(2)}$, $X_{10} = \chi_{10}$, $X_{12} = \chi_{12}$ で Y_{12} は, Siegel 作用素 Φ に対して

$$\Phi(Y_{12}) = \Delta \quad (\Delta: \text{Ramanujan の } \Delta)$$

なるものとして特徴付けられる. もちろん $\Phi(F) = \Delta$ なる modular 形式 F は複数存在するが, \mathbb{Z} 上で考えれば一意的である.

注意: "... " の中には $X_{35} = \chi_{35}$ が含まれる. また, weight 12 のところだけが, 生成元が 2 個存在している.

井草の cusp 形式の q -展開

Eisenstein 級数の場合に倣って, 井草の cusp 形式 χ_{10}, χ_{12} の q -展開の初めの数項を与える (χ_{35} については後述.)

$$\chi_{10} = (q_{12}^{-1} - 2 + q_{12})q_{11}q_{22} + (-2q_{12}^{-2} - 16q_{12}^{-1} + 36 - 16q_{12} - 2q_{12}^2)(q_{11}^2q_{22} + q_{11}q_{22}^2) + \dots,$$

$$\chi_{12} = (q_{12}^{-1} + 10 + q_{12})q_{11}q_{22} + (10q_{12}^{-2} - 88q_{12}^{-1} - 132 - 88q_{12} + 10q_{12}^2)(q_{11}^2q_{22} + q_{11}q_{22}^2) + \dots.$$

Witt 作用素 W : ここで Witt 作用素を導入しておく .

$F = F \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \in M_k(\Gamma_2)$ に対して次の様に定義する :

$$W(F)(z_{11}, z_{22}) := F \begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ 0 & z_{22} \end{pmatrix}.$$

W は線形写像 $M_k(\Gamma_2) \rightarrow M_k(\Gamma_1) \otimes M_k(\Gamma_1)$ を誘導する .

例 : 井草の (偶数 weight) の生成元について Witt 作用素の像は次の様になる :

$$\begin{aligned} W(E_k^{(2)})(z_{11}, z_{22}) &= E_k^{(1)}(z_{11})E_k^{(1)}(z_{22}) \quad (k = 4, 6), \\ W(\chi_{10})(z_{11}, z_{22}) &\equiv 0, \quad W(\chi_{12})(z_{11}, z_{22}) = 12\Delta(z_{11})\Delta(z_{22}). \end{aligned}$$

ここで Δ は Ramanujan の Δ . Freitag は $W(F)(z_{11}, z_{22}) \equiv 0$ なる 2 次 Siegel modular 形式の特徴付け (W の核のなすイデアルが χ_{10} で生成される単項イデアルであること) を用いて, 井草の構造定理の別証明を与えた (Freitag [8]).

注意 : もちろん Witt 作用素は一般の次数で定義される .

3 mod p modular 形式の algebra

これまで Siegel modular 形式について復習をしてきたが, この章から Serre 理論の拡張 (の試み) を紹介する .

以前定義した様に, 素数 p に対して $\mathbb{Z}_{(p)} := \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ を p における局所環とする .
 $F = \sum a(F; T)q^T \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ に対して

$$\tilde{F} := \sum a(\tilde{F}; T)q^T \in \mathbb{F}_p[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][[q_{11}, \dots, q_{nn}]]$$

と定義する . ここで $a(\tilde{F}; T)$ は $a(F; T)$ の reduction mod p とする . さらに

$$\tilde{M}_k(\Gamma_n)_p := \{ \tilde{F} \mid F \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}} \} \subset \mathbb{F}_p[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][[q_{11}, \dots, q_{nn}]]$$

とする .

定義 :

$$\tilde{M}(\Gamma_n)_p := \sum_k \tilde{M}_k(\Gamma_n)_p \subset \mathbb{F}_p[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][[q_{11}, \dots, q_{nn}]]$$

を mod p modular 形式の algebra とよぶ .

algebra $\tilde{M}(\Gamma_n)_p$ の構造定理

Swinnerton-Dyer は $\tilde{M}(\Gamma_1)_p$ の構造を決定した .

定理 3.1 (Swinnerton-Dyer[36]) (1) $p \geq 5$ のとき ,

$$\tilde{M}(\Gamma_1)_p \cong \mathbb{F}_p[x_1, x_2]/(\tilde{A} - 1).$$

ここで A は $E_{p-1}^{(1)} = A(E_4^{(1)}, E_6^{(1)})$ を満たす $\mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2]$ の多項式で $\tilde{A} \in \mathbb{F}_p[x_1, x_2]$ はその reduction mod p .

(2) $p = 2$ or 3 のとき

$$\tilde{M}(\Gamma_1)_p = \mathbb{F}_p[\tilde{\Delta}].$$

ここで Δ は Ramanujan の Δ .

上に現れた Eisenstein 級数 $E_{p-1}^{(1)}$ の性質について述べておく. その q -展開は

$$E_{p-1}^{(1)} = 1 - \frac{2(p-1)}{B_{p-1}} \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_{p-2}(t) q^t$$

で与えられる, von Staudt-Clausen の定理より $E_{p-1}^{(1)} \equiv 1 \pmod{p}$ が成立している. 上記 Swinnerton-Dyer の結果の $p \geq 5$ のときの証明の概略を述べると, まず $\mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2]$ の多項式 $f(x_1, x_2)$ に対して, $\varphi(f) := f(E_4^{(1)}, E_6^{(1)})$ により, $\tilde{M}(\Gamma_1)_p$ への準同型を定義する. まずこれが全射であることを示し, 次に φ の核が

$$\text{Ker}(\varphi) = (\tilde{A} - 1) \quad (\text{単項イデアル})$$

であることを示すわけである. この核の構造を決定するため, weight が $p-1$ で Fourier 展開の定数項が 1, それ以外の Fourier 係数が p で割り切れる (すなわち, reduction mod p が 1 となる) modular 形式の存在が鍵となるわけである.

構造定理の拡張のためにまず次の問題の解決が望まれる:

問題

$$F_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

を満たす modular 形式 $F_{p-1} \in M_{p-1}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ の存在を示せ.

さしあたり候補としては weight $p-1$ の Eisenstein 級数 $E_{p-1}^{(n)}$ が考えられるが, これは十分ではない.

定理 3.2 (Nagaoka [24]) 次を満たす素数 p が存在する.

$$E_{p-1}^{(n)} \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

実際 $n = 2$, $p = 16843$ がこれを満たしている.

Eisenstein 級数ではなく, theta 級数を用いることにより (p -special lattice に付随する theta 級数), 次が示される.

定理 3.3 (Böcherer-Nagaoka [2]) $p > n + 3$ のとき, 次を満たす modular 形式 $F_{p-1}^{(n)} \in M_{p-1}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ が存在する:

$$F_{p-1}^{(n)} \equiv 1 \pmod{p}.$$

注意：素数 p が、 $p \equiv 1 \pmod{4}$ を満たすときは、条件 “ $p > n + 3$ ” は必要としない。
条件 “ $p > n + 3$ ” は p -special lattice の存在に関して必要とする条件である。

上記定理は、一般の n についての主張であるが、これを $n = 2$ の場合に適用することにより、次の構造定理が証明される。

$n = 2$ のときの構造定理

Swinnerton-Dyer の構造定理の $n = 2$ の場合への拡張を考える。まず $\widetilde{M}(\Gamma_2)_p$ の even-part のなす subalgebra を

$$\widetilde{M}^{(e)}(\Gamma_2)_p := \sum_{k:\text{even}} \widetilde{M}_k(\Gamma_2)_p$$

とおく。

定理 3.4 (Nagaoka [26])

(1) $p \geq 5$ のとき

$$\widetilde{M}^{(e)}(\Gamma_2)_p \cong \mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4]/(\widetilde{B} - 1).$$

ここで B は前定理で存在が示された $F_{p-1}^{(2)}$ に対して

$$F_{p-1}^{(2)} = B(E_4^{(2)}, E_6^{(2)}, \chi_{10}, \chi_{12})$$

を満たす $\mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ の多項式で $\widetilde{B} \in \mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4]$ はその reduction mod p .

(2) $p = 2$ or 3 のとき

$$\widetilde{M}^{(e)}(\Gamma_2)_p = \mathbb{F}_p[\widetilde{X}_{10}, \widetilde{Y}_{12}, \widetilde{X}_{16}].$$

ここで X_{10}, Y_{12}, X_{16} は井草の \mathbb{Z} 上の生成系の中の modular 形式。

注意：(1) 上記多項式 B の取り方は一意的ではないが、その reduction mod p である \mathbb{F}_p 上の多項式 \widetilde{B} は一意的である。

(2) 全 algebra $\widetilde{M}(\Gamma_2)_p$ の構造では、odd weight X_{35} について、関係式 $X_{35}^2 = P(X_4, X_6, X_{10}, X_{12})$ を考慮に入れればよい。 $p \geq 5$ ならば、 $P \in \mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ である。

系 3.5 : $p \geq 5$ とし、 $F \in M_k(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 、 $F' \in M_{k'}(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ とする。 $(k, k' \in 2\mathbb{Z})$

$$0 \neq F \equiv F' \pmod{p} \implies k \equiv k' \pmod{p-1}.$$

注意：この weight に関する合同式が、“Serre の p 進 modular 形式” の理論の出発点と思われる。実際 Serre の論文では $f \in M_k(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 、 $f' \in M_{k'}(\Gamma_1)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ について

$$f \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad f \equiv f' \pmod{p^m} \implies k \equiv k' \pmod{p^{m-1}(p-1)}$$

なる事実の証明を目標としている。

この事実の Siegel modular 形式への拡張が成り立つ：

定理 3.6 (Ichikawa[10], Böcherer-Nagaoka[4]) p を奇素数とし。さらに $F \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 、 $F' \in M_{k'}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ とする。 $F \not\equiv 0 \pmod{p}$ 、 $F \equiv F' \pmod{p^m}$ と仮定すると

$$k \equiv k' \pmod{p^{m-1}(p-1)}$$

が成り立つ .

注意 : Ichikawa[10] は , 代数幾何学的手法でこの事実を証明している .

4 p 進 modular 形式

緒言でも述べたように Serre は p 進 modular 形式の理論を構築し , p 進 zeta 関数の構成に応用した . p 進 modular 形式の概念はいくつかあり , ここで述べる定義は “Serre の p 進 modular 形式” である .

p 進 modular 形式の定義

p を素数 , v_p を \mathbb{Q}_p の valuation で $v_p(p) = 1$ と正規化されたものとする .

$F = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} a(F; T) q^T \in \mathbb{Q}_p[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][[q_{11}, \dots, q_{nn}]]$ に対して

$$v_p(F) := \inf_{0 \leq T \in \Lambda_n} v_p(a(F; T))$$

とおく .

定義 : \mathbb{Q}_p 上の形式的べき級数

$$F = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} a(F; T) q^T \in \mathbb{Q}_p[q_{ij}^{-1}, q_{ij}][[q_{11}, \dots, q_{nn}]]$$

が p 進 (Siegel) modular 形式であるとは有理係数の modular 形式の列 $\{F_m\}$ ($F_m \in M_{k_m}(\Gamma_n)_{\mathbb{Q}}$) が存在して

$$v_p(F_m - F) \longrightarrow +\infty \quad (m \rightarrow \infty)$$

が成り立つときをいう . これを単に $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = F$ と書き表すこととする .

定理 3.6 より , p 進 modular 形式の “weight の空間” が定義される .

p を奇素数とする . $\{F_m\}$ ($F_m \in M_{k_m}(\Gamma_n)_{\mathbb{Q}}$) を p 進 modular 形式 F を定義する modular 形式の列とする : すると定理 3.6 より , 数列 $\{k_m\}$ は

$$X := \varprojlim \mathbb{Z}/p^{m-1}(p-1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$$

に極限をもつ . $\lim_m k_m =: k \in X$ を p 進 modular 形式 F の weight と呼ぶ .

注意 : (1) p 進 modular 形式の weight は , modular 形式の列 $\{F_m\}$ のとり方によらず決まる .

(2) $p = 2$ のときは $X = \mathbb{Z}_2$ ととれることがわかっている .

p 進 Eisenstein 級数

p 進 modular 形式の例として , p 進 Eisenstein 級数が定義される .

$n = 1$ の場合 : $k \geq 4$ なる偶数 k に対して

$$G_k := \frac{1}{2} \zeta(1-k) \cdot E_k^{(1)} = \frac{1}{2} \zeta(1-k) + \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(t) q^t$$

とおく．ここでは，正規化された Eisenstein 級数 $E_k^{(1)}$ を定数倍したものを考えている．

定義： $k \in X$ に対して， k_m ：偶数で $\lim_m k_m = k$ ， $k_m \geq 4$ ， $|k_m| \rightarrow +\infty$ なる数列 $\{k_m\}$ をとる．すると Eisenstein 級数の列 $\{G_{k_m}\}$ は一様収束し

$$G_k^* := \lim_{m \rightarrow \infty} G_{k_m}$$

は p 進 modular 形式を定義する．これは (Serre の) p 進 Eisenstein 級数と呼ばれる．

$k \in X$ に対して

$$G_k^* = a_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^*(t) q^t \in \mathbb{Q}_p[[q]]$$

とおく．ここで $\sigma_{k-1}^*(t) := \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{k_m-1}(t)$ ，また

$$a_0 = \frac{1}{2} \zeta^*(1-k)$$

で X 上の関数 ζ^* を定義する．

定理 4.1 (Serre [32]) p を奇素数とする． (s, u) を $X = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ の元とすると

$$\zeta^*(s, u) = L_p(s; \omega^{1-u}).$$

ここで， $L_p(s; \chi)$ は p 進 L 関数， ω は Teichmüller character.

この定理は， p 進 Eisenstein 級数の定数項に p 進 L 関数が現れることを示している．

p 進 Eisenstein 級数の例

Serre は，上記 p 進 Eisenstein 級数の例として次のものを挙げている．

p を $p \equiv 3 \pmod{4}$ ， $p > 3$ なる素数， $k = (1, \frac{p+1}{2}) \in X$ とすると

$$G_k^* = \frac{1}{2} h(-p) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{0 < d|t} \left(\frac{d}{p} \right) q^t.$$

ここで， $h(-p)$ は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数， $\left(\frac{*}{p} \right)$ は Legendre 記号である．

注意：右辺の q -展開をみると，群 $\Gamma_0(p)$ 上の weight 1 の Hecke Eisenstein 級数

$$G_1(z) = -\frac{1}{2} B_{1,\chi} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{0 < d|t} \chi(d) q^t$$

の特別な場合 ($\chi = \chi_p = \left(\frac{*}{p} \right)$) になっていることがわかる．すなわち上記 G_k^* は $\Gamma_0(p)$ 上の weight 1 の modular 形式となっている．

上記の結果の一般の次数の場合への拡張を考える．

定理 4.2 (Nagaoka [25]) $E_k^{(n)}$ を次数 n ，weight k の Siegel Eisenstein 級数とする．

また p を $p \equiv 3 \pmod{4}$, $p > 3$ なる素数とし, 数列 $\{k_m\}$ を $k_m := 1 + \frac{p-1}{2} \cdot p^{m-1}$ で定義する. すると

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m}^{(n)} = \text{genus } \vartheta^{(n)}(S) \quad (p\text{-adically})$$

が成立する. ここで $\text{genus } \vartheta^{(n)}(S)$ は $\det S = p$ なる binary quadratic form S に対応する genus theta 級数である. すなわち S_1, \dots, S_h を S の含まれる genus の類の代表系としたとき

$$\text{genus } \vartheta^{(n)}(S) := \left(\sum_{i=1}^h \frac{\vartheta_{S_i}^{(n)}(Z)}{E(S_i)} \right) / \left(\sum_{i=1}^h \frac{1}{E(S_i)} \right).$$

で定義される関数であり

$$\text{genus } \vartheta^{(n)}(S) \in M_1(\Gamma_0^n(p), \chi_p)$$

が成立する. ここで $\chi_p = \left(\frac{*}{p} \right)$, $E(S_i) = |O_{\mathbb{Z}}(S_i)|$ は S_i の unit 群の位数を表す.

注意: (1) 上記数列 $\{k_m\}$ の極限は Serre の例にある $(1, \frac{p+1}{2})$ となっている.

(2) genus theta 級数は theta 級数の “平均” であり, 上記定理はある意味, Siegel の主定理の p 進版と考えられる.

(3) $n = 1$ の場合は, Serre の例に一致することがわかる.

次に, $n = 2$ の場合だけであるが上記定理のある種の “拡張” を紹介する.

定理 4.3 (Kikuta-Nagaoka [16]) p を $p > 3$ なる素数とし, 数列 $\{k_m\}$ を $k_m := 2 + p^{m-1}(p-1)$ で定義する. S を $\det(S) = p^2$, level p なる quaternary quadratic form とする. すると

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m}^{(2)} = \text{genus } \vartheta^{(2)}(S) \quad (p\text{-adically})$$

が成立する. すなわち

$$\text{genus } \vartheta^{(2)}(S) \in M_2(\Gamma_0^2(p))$$

が成り立つ.

この結果の次数 $n \geq 3$ の場合への拡張が期待される. singular modular 形式の理論より $n = 3, 4$ の場合に証明できれば, 一般の次数で証明されたことになる.

5 $\Gamma_0(p)$ 上の modular 形式

Serre の p 進理論の結果のなかで重要なものとして, $\Gamma_0(p)$ 上の modular 形式が全て p 進 modular 形式であるという結果がある. Siegel modular 群 Γ_n の合同部分群

$$\Gamma_0^n(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid C \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

を考える. Serre の結果は次の様に述べられる.

定理 5.1 (Serre [32]) p を素数とする . $f \in M_k(\Gamma_0^1(p))_{\mathbb{Q}}$ は p 進 modular 形式である .

この結果は vector 値 Siegel modular 形式の場合も込めて拡張されており , それを紹介する . そのため vector 値 Siegel modular 形式の定義を振り返る .

vector 値 Siegel modular 形式

(ρ, V_ρ) を $GL_n(\mathbb{C})$ の有限次多項式表現とする .

\mathbb{H}_n 上の V_ρ -値関数 $F(Z)$ と $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbb{R})$ に対して

$$(F|_{\rho,k}M)(Z) = \det(CZ + D)^{-k} \rho(CZ + D)^{-1} F(M(Z))$$

と書き表す .

$\Gamma \subset \Gamma_n$ を合同部分群とし , ν を Γ の character とする . \mathbb{H}_n 上の (V_ρ -値関数) $F(Z)$ が character ν をもつ Γ 上の $\rho \otimes \det^k$ 型 Siegel modular 形式であるとは

$$(F|_{\rho,k}M)(Z) = \nu(M)F(Z) \quad (\forall M \in \Gamma)$$

を満たすときをいう . ($n = 1$ のときは cusp における有限性を仮定 .)

上記 Siegel modular 形式全体のなす \mathbb{C} -vector 空間を $M_k(\Gamma, \rho, \nu)$ で表す .

注意: (1) $\Gamma = \Gamma_0^n(p)$ の場合は ν は通常 right lower block からくる mod p の Dirichlet character χ_p であると仮定する .

(2) vector 空間 V_ρ の基底を固定し , $V_\rho = \mathbb{C}^M$ とみた場合 , $F \in M_k(\Gamma, \rho, \chi)$ の Fourier 係数は数 vector $a(F; T) = (a(F; T)^{(j)}) \in \mathbb{C}^M$ である . このとき部分環 $R \subset \mathbb{C}$ に対して $M_k(\Gamma, \rho, \chi)_R$ が scalar 値の場合と同様に定義される .

定理 5.2 (Böcherer-Nagaoka [5]) p を奇素数 , ρ を \mathbb{Q} -rational 表現 (i.e. ρ を定義する多項式がすべて有理数係数) とすると , $F \in M_k(\Gamma_0^n(p), \rho, \chi_p)_{\mathbb{Q}}$ は (vector 値の意味で) p -adic modular 形式である .

6 p 進 modular 形式に関連するその他の結果

p 進 modular 形式の応用として , ある場合 $\Gamma_0(p)$ 上の cusp 形式を具体的に構成できる . それを紹介しよう .

$H(r, N)$ を Cohen の関数とする . すなわち $(-1)^r N = Df^2$ (D は基本判別式) なる (r, N) については

$$H(r, N) = L(1-r, \chi_D) \sum_{0 < d|f} \mu(d) \chi_D(d) d^{r-1} \sigma_{2r-1}\left(\frac{f}{d}\right)$$

で定義される関数である ([6] 参照) .

一方関数 $(s, N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ 上の $G(s, N)$ を

$$G(S, N) = \begin{cases} \frac{1}{1 + |\chi_{-4}(N)|} (\sigma_{s, \chi_{-4}}(N) - \tilde{\sigma}_{s, \chi_{-4}}(N)) & \text{if } N > 0, \\ -\frac{B_{s+1, \chi_{-4}}}{2(s+1)} & \text{if } N = 0 \end{cases}$$

で定義する . ここで $B_{m, \chi}$ は一般化された Bernoulli 数 , $\sigma_{s, \chi_{-4}}(N)$, $\tilde{\sigma}_{s, \chi_{-4}}(N)$ は

$$\sigma_{s, \chi_{-4}}(N) = \sum_{0 < d|N} \chi_{-4}(d) d^s, \quad \tilde{\sigma}_{s, \chi_{-4}}(N) = \sum_{0 < d|N} \chi_{-4}\left(\frac{N}{d}\right) d^s$$

で定義される関数である . $G(s, N)$ は虚 2 次体 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ に関する 2 次の Hermitian Eisenstein 級数の Fourier 係数を記述する , いわゆる Krieg の関数とよばれるものである .

定理 6.1 (Nagaoka-Nakamura [30]) 次の Fourier 係数 $a(f_k; T)$ をもつ 2 次の Siegel cusp 形式 $f_k \in S_k(\Gamma_2)$ が存在する :

$$a(f_k; T) = \sum_{0 < d|\varepsilon(T)} d^{k-1} \alpha_k \left(\frac{4\det(T)}{d^2} \right).$$

ここで

$$\alpha_k(N) := H(k-1, N) - \frac{B_{2k-2}}{B_{k-1, \chi_{-4}}} \sum_{\substack{s \in \mathbb{N} \\ s^2 \leq N}} G(k-2, N-s^2)$$

$$\varepsilon(T) := \max\{\ell \in \mathbb{N} \mid \ell^{-1}T \in \Lambda_2\}.$$

次の結果は , 上記の cusp 形式のある列の p 進極限が , $\Gamma_0^2(p)$ 上の cusp 形式となるというものである .

定理 6.2 (Kodama-Nagaoka-Nakamura [21]) p を $p \equiv 3 \pmod{4}$ なる素数とし , 数列 $\{k_m\}$ を

$$k_m = k_m(p) := 2 + (p-1)p^{m-1}$$

で定義される数列とする . すると対応する Siegel cusp 形式の列 $\{f_{k_m}\}$ は $m \rightarrow \infty$ のとき p 進的な極限をもち

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{k_m} =: f_p^* \in S_2(\Gamma_0^2(p))$$

である .

注意 : $p = 11$, すなわち $\Gamma_0^2(11)$ 上の cusp 形式の例として知られている , いわゆる weight 2 , level 11 の吉田の cusp 形式は , 上で構成した f_{11}^* と定数倍の違いで一致する . (吉田の cusp 形式については , Yoshida [37] を参照 .)

7 theta 作用素

$F = \sum a(F; T)q^T \in M_k(\Gamma_n)$ に対して

$$\Theta(F) := \sum a(F; T) \cdot \det(T)q^T$$

を対応させる．この形式的べき級数環上の作用素 Θ を theta 作用素とよぶことにする (cf. [2]) ．

注意： (1) $n = 1$ のとき

$$\theta : f = \sum a(f; t)q^t \mapsto \theta(f) := \sum a(f; t) \cdot tq^t$$

は古典的な Ramanujan 作用素に一致する．

(2) $\Theta(F) \equiv 0$ となる Siegel modular 形式 $F \in M_k(\Gamma_n)$ は特異モジュラー形式として調べられている (Freitag-Resnikoff) ．

$\Theta(F)$ は必ずしも Siegel modular 形式とはならないことに注意しておく．しかしながら次が成立する：

定理 7.1 (Böcherer-Nagaoka [2], Theorem 4). p を $p \geq n + 3$ なる素数とする．すると任意の modular 形式 $F \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ に対して cusp 形式 $G \in S_{k+p+1}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ で

$$\Theta(F) \equiv G \pmod{p}$$

となるものが存在する．ただし，合同は形式的べき級数として見たものである．

注意：この結果は， $\text{mod } p$ Siegel modular 形式の algebra が作用素 Θ で stable であることを示している．

例： $n = 2, p = 5, F = E_6^{(2)}$ と仮定する：

$$\begin{aligned} \Theta(E_6^{(2)}) &= (33264q_{12}^{-1} + 166320 + 33264q_{12})q_{11}q_{22} + \cdots \\ &\equiv (-q_{12}^{-1} - 10 - q_{12})q_{11}q_{22} + \cdots = -\chi_{12} \pmod{5} \end{aligned}$$

したがって， G として $-\chi_{12}$ をとることができる．

定理 7.2 (Böcherer-Nagaoka [5]) $p \geq n + 3$ を素数． $F \in M_k(\Gamma_n)_{\mathbb{Q}}$ に対して

$$\Theta(F) \text{ は } p \text{ 進 modular 形式となる．}$$

注意： (1) 上記定理の群 Γ_n は一般に $\Gamma_0^n(p^r)$ ($r \geq 0$) で置き換えられる．

(2) vector 値 Siegel modular 形式の場合，作用素 Θ は vector 値微分作用素

$$\Theta_{k,p}$$

に拡張され，主張は “vector 値 Siegel modular 形式 $\Theta_{k,p}(F)$ は p 進 (vector 値) Siegel modular 形式となる” と拡張される．(Böcherer-Nagaoka [5])

theta 作用素に関連する結果

theta 作用素に関連したいくつかの結果を紹介する .

定理 7.3 (Kikuta-Kodama-Nagaoka [15]) X_{35} を weight 35 の井草の cusp 形式とする . すると X_{35} の theta 作用素の像 $\Theta(X_{35})$ は次の合同式を満たす :

$$\Theta(X_{35}) \equiv 0 \pmod{23}.$$

X_{35} の q -展開の最初の数項を書き下すと以下の様になる :

$$\begin{aligned} X_{35} &= (q_{12}^{-1} - q_{12})(q_{11}^2 q_{22}^3 - q_{12}^3 q_{22}^2) + (-q_{12}^{-3} - 69q_{12}^{-1} + 69q_{12} + q_{12}^3)(q_{11}^2 q_{22}^4 - q_{11}^4 q_{22}^2) \\ &+ (69q_{12}^{-3} + 2277q_{12}^{-1} - 2277q_{12} - 69q_{12}^3)(q_{11}^2 q_{22}^5 - q_{11}^5 q_{22}^2) + \cdots \end{aligned}$$

この例を見ると

$$\det(T) \not\equiv 0 \pmod{23} \implies a(X_{35}; T) \equiv 0 \pmod{23}$$

の成立が予想される . 定理はこれが全ての T に対して成立することを示している . 証明に使う事実は , 奇数 weight の場合の Sturm 型定理と定理 7.1 である . (Sturm の定理を適用するための X_{35} の Fourier 展開の数値データを後に与える (§9)) .

$\Theta(F) \equiv 0 \pmod{p}$ を満たす modular 形式を theta 作用素の mod p 核の元と呼ぶ . 定理は井草の cusp 形式 X_{35} が theta 作用素の mod 23 核の元になっていることを主張している .

その後の研究の中で theta 作用素の mod 23 核の元が見つかっている . それを紹介しよう .

その 1 : $S = S_{\mathcal{L}}$ を Leech 格子に付随する 24 次正定値 unimodular 行列とすると $\vartheta_S^{(2)} \in M_{12}(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}$ で合同式

$$\Theta(\vartheta_S^{(2)}) \equiv 0 \pmod{23}$$

が成立する . 24 次正定値 unimodular 行列は Niemeier によって調べられ , 24 個の類に分けられることが示されている . Leech 格子はその一つであるが , 他にもう一つの類に対応する theta 級数が theta 作用素の mod 23 核の元となることが確かめられている (§9 において , 数値例を与える) .

その 2 : $[\Delta]$: Ramanujan の Δ から構成される Klingen Eisenstein 級数とすると $[\Delta] \in M_{12}(\Gamma_2)_{\mathbb{Q}}$ で合同式

$$\Theta([\Delta]) \equiv 0 \pmod{23}$$

が成立する . この事実は , Böcherer の学位論文の一部 ([1]) で既に得られていた .

その 3 : $E_{12}^{(2)}$ を次数 2 , weight 12 の Siegel Eisenstein 級数とすると

$$\Theta(E_{12}^{(2)}) \equiv 0 \pmod{23}$$

が成立する .

これらの例は次数が 2 の場合に限定されているが , 一般偶数次数の場合への拡張が得られている .

定理 7.4 (Nagaoka [29]) n を正の偶数とする . さらに p を $p > n + 3$ かつ $p \equiv (-1)^{\frac{n}{2}} \pmod{4}$ なる素数 , $t \geq 1$ を奇数とする . すると Siegel modular 形式 $F \in M_{\frac{n}{2} + \frac{p-1}{2}, t}(\Gamma_n)_{\mathbb{Z}(p)}$ で

$$\Theta(F) \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{and} \quad F \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

となるものが存在する .

注意 : 上記の例は , $n = 2, p = 23, t = 1$ の場合である .

8 Siegel modular 群以外の場合の結果

以上の議論においては , 主に Siegel modular 群の場合を扱った . この section では他の modular 群 , 特に Hermite modular 群の場合の結果を紹介する .

\mathbb{K} を虚 2 次体とし , $d_{\mathbb{K}}$ をその判別式 , $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ を整数環とする . Hermite modular 群を次のように定義する :

$$\begin{aligned} U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) &:= \{ M \in M_{2n}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) \mid {}^t \bar{M} J_n M = J_n \}, \\ SU_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) &:= U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) \cap SL_{2n}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}). \end{aligned}$$

ここで $J_n := \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$ で , \bar{M} は M の共役 (成分の共役) を表す . Siegel modular 形式の場合と同様に

$$M_k(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}), \nu), \quad (\text{resp. } M_k(SU_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}), \nu))$$

を $U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ (resp. $SU_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$) 上の character ν をもつ , weight k の Hermite modular 形式全体のなす \mathbb{C} -vector 空間を表すものとする .

F を Hermite modular 形式とすると , 次の形の Fourier 展開をもつ :

$$F(Z) = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_{\mathbb{K}}} a(F; T) \exp(2\pi i \text{tr}(TZ)).$$

ここで $\Lambda_{\mathbb{K}}$ は

$$\Lambda_{\mathbb{K}} := \{ T = (t_{ij}) \in \text{Her}_n(\mathbb{K}) \mid t_{ii} \in \mathbb{Z}, \quad \sqrt{d_{\mathbb{K}}} t_{ij} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}} \}$$

で定義される格子である . Siegel modular 形式の場合と同様に部分環 $R \subset \mathbb{C}$ に対して $M_k(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}), \nu)_R$ 等も定義される .

次に “ $F_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ” を満たす modular 形式 F_{p-1} の存在に関する問題である (cf.

§3) . 虚 2 次体 \mathbb{K} が $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ (Gauss 数体) と $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (Eisenstein 数体) の場合には次の結果が得られている :

定理 8.1 (Kikuta-Nagaoka [17]) (1) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ または $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ とする . p を $p \equiv 1 \pmod{4}$ なる素数とすれば

$$F_{p-1}^{(n)} \equiv 1 \pmod{p}$$

を満たす modular 形式 $F_{p-1}^{(n)} \in M_{p-1}(SU(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}))_{\mathbb{Z}(p)}$ が存在する .

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ とする . 素数 p に対して , $p \equiv 1 \pmod{4}$ であることと

$$F_{p-1}^{(n)} \equiv 1 \pmod{p}$$

を満たす modular 形式 $F_{p-1}^{(n)} \in M_{p-1}(SU(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}))_{\mathbb{Z}(p)}$ が存在することとは同値である .

この結果は一般の虚 2 次体 \mathbb{K} の場合に拡張されている (Hentschel-Nebe [9]) .

Hermitian modular 形式の場合の mod p の modular 形式の algebra について , 次数 2 , $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合だけであるが , Swinnerton-Dyer の結果の拡張が得られている .

Siegel modular 形式の場合と同様に \mathbb{F}_p -vector 空間

$$\widetilde{M}_k(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}), \nu_k)_p^{\text{Sym}}$$

が定義できる . ここで “ $(\cdot)^{\text{Sym}}$ ” は symmetric な Hermitian modular 形式に制限して考えることを意味し , ν_k は , $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合は次で定義される character である :

$$\nu_k := \begin{cases} \det^{k/2} & \text{if } \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \\ \det^k & \text{if } \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}). \end{cases}$$

上記 $\widetilde{M}_k(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}), \nu_k)_p^{\text{Sym}}$ の even な k について和をとって algebra

$$\widetilde{M}^{(e)}(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}), \nu)_p^{\text{Sym}} := \sum_{k:\text{even}} \widetilde{M}_k(U_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}), \nu_k)_p^{\text{Sym}}$$

を定義する .

定理 8.2 (Kikuta-Nagaoka [18]) (1) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $p \geq 5$ とする . すると同型

$$\widetilde{M}^{(e)}(U_2(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}), \nu)_p^{\text{Sym}} \cong \mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]/(\widetilde{B} - 1)$$

が得られる . ここで $B \in \mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ は $F_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ なる Hermitian modular 形式 F_{p-1} に対して

$$F_{p-1} = B(E_4, E_6, \chi_8, F_{10}, F_{12})$$

で定義されるもので \widetilde{B} はその reduction mod p である . $\{E_4, E_6, \chi_8, F_{10}, F_{12}\}$ は $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の場合の Hermitian modular 形式のなす $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の生成系である (定義につい

ては [18] 参照) .

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $p \geq 5$ とする . すると同型

$$\widetilde{M}^{(e)}(U_2(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}), \nu)_p^{\text{Sym}} \cong \mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]/(\widetilde{C} - 1)$$

が得られる . ここで $C \in \mathbb{Z}_{(p)}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ は $F_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ なる Hermitian modular 形式 F_{p-1} に対して

$$F_{p-1} = B(E_4, E_6, F_{10}, F_{12}, \chi_{18})$$

で定義されるもので \widetilde{C} はその reduction mod p である . $\{E_4, E_6, F_{10}, F_{12}, \chi_{18}\}$ は $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の場合の Hermitian modular 形式のなす $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の生成系である (定義については [18] 参照) .

Hermitian modular 形式の場合の p 進 modular 形式の理論

これも Siegel modular 形式の場合と同様に , p 進 modular 形式の概念が拡張される . ここでは Siegel modular 形式の場合の定理 4.2 の “Hermitian modular 版” の結果として次の定理を紹介する :

定理 8.3 (Munemoto-Nagaoka [23]) 虚 2 次体 \mathbb{K} の類数は 1 であるものとする . p を $\chi_{\mathbb{K}}(p) = -1$ とする . ただし $\chi_{\mathbb{K}}$ は \mathbb{K} の Kronecker 指標を表す .

数列 $\{k_m\}$ を

$$k_m := 2 + (p - 1)p^{2m}$$

で定義すると , 対応する Hermite Eisenstein 級数の列 $\{E_{k_m, \mathbb{K}}\}_{m=1}^{\infty}$ は $m \rightarrow \infty$ のときに p 進的に収束し

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E_{k_m, \mathbb{K}} = \text{genus} \vartheta^{(n)}(S_p)$$

ここで S_p は $S_p \in \Lambda_2(\mathbb{K})$ で $\Delta(S_p) := |d_{\mathbb{K}}| \cdot \det(S_p) = p$ を満たす Hermitian 形式である .

注意 : 同様の結果は [20] において , 四元数上半空間上の Eisenstein 級数の場合にも拡張されている . ただし , weight 2 の場合は “超越的” な Fourier 係数が現れ興味深い .

9 いくつかの数値例

この節では , これ以前の節で述べた theta 作用素に関する結果の数値例を与える .

9.1 井草の cusp 形式 X_{35} の Fourier 展開

以下は井草の cusp 形式に X_{35} の Fourier 展開で , Sturm の定理を適用するに必要な T の trace が 9 以下の部分を計算している :

$$\begin{aligned}
X_{35} = & (q_{12}^{-1} - q_{12})q_{11}^2q_{22}^3 + (-q_{12}^{-1} + q_{12})q_{11}^3q_{22}^2 \\
& + (-q_{12}^{-3} - 69q_{12}^{-1} + 69q_{12} + q_{12}^3)q_{11}^2q_{22}^4 + (q_{12}^{-3} + 69q_{12}^{-1} - 69q_{12} - q_{12}^3)q_{11}^4q_{22}^2 \\
& + (69q_{12}^{-3} + 2277q_{12}^{-1} - 2277q_{12} - 69q_{12}^3)q_{11}^2q_{22}^5 \\
& + (q_{12}^{-5} - 32384q_{12}^{-2} - 129421q_{12}^{-1} + 129421q_{12} + 32384q_{12}^2 - q_{12}^5)q_{11}^3q_{22}^4 \\
& + (-q_{12}^{-5} + 32384q_{12}^{-2} + 129421q_{12}^{-1} - 129421q_{12} - 32384q_{12}^2 + q_{12}^5)q_{11}^4q_{22}^3 \\
& + (-69q_{12}^{-3} - 2277q_{12}^{-1} + 2277q_{12} + 69q_{12}^3)q_{11}^5q_{22}^2 \\
& + (q_{12}^{-5} - 2277q_{12}^{-3} - 47702q_{12}^{-1} + 47702q_{12} + 2277q_{12}^3 - q_{12}^5)q_{11}^2q_{22}^6 \\
& + (32384q_{12}^{-4} - 2184448q_{12}^{-2} - 3203072q_{12}^{-1} + 3203072q_{12} + 2184448q_{12}^2 - 32384q_{12}^4)q_{11}^3q_{22}^5 \\
& + (-32384q_{12}^{-4} + 2184448q_{12}^{-2} + 3203072q_{12}^{-1} - 3203072q_{12} - 2184448q_{12}^2 + 32384q_{12}^4)q_{11}^5q_{22}^3 \\
& + (-q_{12}^{-5} + 2277q_{12}^{-3} + 47702q_{12}^{-1} - 47702q_{12} - 2277q_{12}^3 + q_{12}^5)q_{11}^6q_{22}^2 \\
& + (-69q_{12}^{-5} + 47702q_{12}^{-3} + 709665q_{12}^{-1} - 709665q_{12} - 47702q_{12}^3 + 69q_{12}^5)q_{11}^2q_{22}^7 \\
& + (-q_{12}^{-7} + 129421q_{12}^{-5} + 2184448q_{12}^{-4} + 41321984q_{12}^{-2} + 105235626q_{12}^{-1} \\
& \quad - 105235626q_{12} - 41321984q_{12}^2 - 2184448q_{12}^4 - 129421q_{12}^5 + q_{12}^7)q_{11}^3q_{22}^6 \\
& + (-69q_{12}^{-7} - 32384q_{12}^{-6} + 107121810q_{12}^{-3} - 31380096q_{12}^{-2} + 759797709q_{12}^{-1} \\
& \quad - 759797709q_{12} + 31380096q_{12}^2 - 107121810q_{12}^3 + 32384q_{12}^6 + 69q_{12}^7)q_{11}^4q_{22}^5 \\
& + (69q_{12}^{-7} + 32384q_{12}^{-6} - 107121810q_{12}^{-3} + 31380096q_{12}^{-2} - 759797709q_{12}^{-1} \\
& \quad + 759797709q_{12} - 31380096q_{12}^2 + 107121810q_{12}^3 - 32384q_{12}^6 - 69q_{12}^7)q_{11}^5q_{22}^4 \\
& + (q_{12}^{-7} - 129421q_{12}^{-5} - 2184448q_{12}^{-4} - 41321984q_{12}^{-2} - 105235626q_{12}^{-1} \\
& \quad + 105235626q_{12} + 41321984q_{12}^2 + 2184448q_{12}^4 + 129421q_{12}^5 - q_{12}^7)q_{11}^6q_{22}^3 \\
& + (69q_{12}^{-5} - 47702q_{12}^{-3} - 709665q_{12}^{-1} + 709665q_{12} + 47702q_{12}^3 - 69q_{12}^5)q_{11}^7q_{22}^2 + \dots
\end{aligned}$$

次は、上記 X_{35} の Fourier 係数で ± 1 とならないものについて素因数分解を具体的に与えたものである。素因数として 23 が現れているのが見てとれる。

$$\begin{aligned}
a(X_{35}; [4, 2, 1]) &= -69 = -3 \cdot 23, & a(X_{35}; [5, 2, 1]) &= 2277 = 3^2 \cdot 11 \cdot 23, \\
a(X_{35}; [4, 3, 1]) &= -1294121 = -17 \cdot 23 \cdot 331, & a(X_{35}; [4, 3, 2]) &= -32384 = -2^7 \cdot 11 \cdot 23, \\
a(X_{35}; [6, 2, 1]) &= -47702 = -2 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 61, & a(X_{35}; [5, 3, 1]) &= -3203072 = -2^{13} \cdot 17 \cdot 23, \\
a(X_{35}; [5, 3, 2]) &= -2184448 = -2^8 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 53, & a(X_{35}; [7, 2, 1]) &= 709665 = 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 23, \\
a(X_{35}; [6, 3, 1]) &= 105235626 = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 762577, & a(X_{35}; [6, 3, 2]) &= 41321984 = 2^9 \cdot 11^2 \cdot 23 \cdot 29, \\
a(X_{35}; [5, 4, 1]) &= 759797709 = 3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 34519, \\
a(X_{35}; [5, 4, 2]) &= -31380096 = -2^7 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23, \\
a(X_{35}; [5, 4, 3]) &= 107121810 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 8171.
\end{aligned}$$

ここで $T = \begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix} = [m, r, n]$ なる略記号を用いている。

9.2 Niemeier 格子の theta 級数

前の章で Leech 格子の theta 級数が、theta 作用素の mod 23 核の元となっていることを紹介したがここでは、Niemeier 格子 (Leech 格子はその 1 つ) の theta 級数について、その Fourier 係数の数値例を挙げる。次の表は、まず Conway-Sloane [7] (p.407, Table 16.1) に従って、24 個の Niemeier 格子に $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 等の名前を付け、その格子の theta 級数を井草の生成元 (定理 2.4 参照) で表したものである。右端に表示したものである。その次に theta 作用素の mod 23 核に入っている 4 個の theta 級数 $\vartheta_\alpha, \vartheta_\delta, \vartheta_\psi, \vartheta_\omega$ の Fourier 係数の表を与える。 ϑ_ω が Leech 格子 ω に付随する theta 級数である。

表 1: Niemeier 格子の theta 級数の井草生成元による表示

Name	Components	Theta series
α	D_{24}	$\vartheta_\alpha = X_4^3 + 12288X_{12} + 384Y_{12}$
β	$D_{16}E_8$	$\vartheta_\beta = X_4^3$
γ	E_8^3	$\vartheta_\gamma = \vartheta_\beta$
δ	A_{24}	$\vartheta_\delta = X_4^3 + 1200X_{12} - 120Y_{12}$
ϵ	D_{12}^2	$\vartheta_\epsilon = X_4^3 + 3072X_{12} - 192Y_{12}$
ζ	$A_{17}E_7$	$\vartheta_\zeta = X_4^3 + 6912X_{12} - 288Y_{12}$
η	$D_{10}E_7^2$	$\vartheta_\eta = \vartheta_\zeta$
θ	$A_{15}D_9$	$\vartheta_\theta = X_4^3 + 9408X_{12} - 336Y_{12}$
ι	D_8^3	$\vartheta_\iota = X_4^3 + 12288X_{12} - 384Y_{12}$
κ	A_{12}^2	$\vartheta_\kappa = X_4^3 + 13872X_{12} - 408Y_{12}$
λ	$A_{11}D_7E_6$	$\vartheta_\lambda = X_4^3 + 15552X_{12} - 432Y_{12}$
μ	E_6^4	$\vartheta_\mu = \vartheta_\lambda$
ν	$A_9^2D_6$	$\vartheta_\nu = X_4^3 + 19200X_{12} - 480Y_{12}$
ξ	D_6^4	$\vartheta_\xi = \vartheta_\nu$
o	A_8^3	$\vartheta_o = X_4^3 + 21168X_{12} - 504Y_{12}$
π	$A_7^2D_5^2$	$\vartheta_\pi = X_4^3 + 23232X_{12} - 528Y_{12}$
ρ	A_6^4	$\vartheta_\rho = X_4^3 + 25392X_{12} - 552Y_{12}$
σ	$A_5^4D_4$	$\vartheta_\sigma = X_4^3 + 27648X_{12} - 576Y_{12}$
τ	D_4^6	$\vartheta_\tau = \vartheta_\sigma$
v	A_4^6	$\vartheta_v = X_4^3 + 30000X_{12} - 600Y_{12}$
ϕ	A_3^8	$\vartheta_\phi = X_4^3 + 32448X_{12} - 624Y_{12}$
χ	A_2^{12}	$\vartheta_\chi = X_4^3 + 34992X_{12} - 648Y_{12}$
ψ	A_1^{24}	$\vartheta_\psi = X_4^3 + 37632X_{12} - 672Y_{12}$
ω	Leech	$\vartheta_\omega = X_4^3 + 43200X_{12} - 720Y_{12}$

表 2: $\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)} = \vartheta_{\alpha}$ の Fourier 係数とその素因数分解

$T = [m, r, n]$	$\text{tr}(T)$	$4\det(T)$	$a(\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)}; T)$
[0,0,0]	0	0	1
[1,0,0]	1	0	$1104 = 2^4 \cdot 3 \cdot 23$
[2,0,0]	2	0	$170064 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 1181$
[1,2,1]	2	0	$1104 = 2^4 \cdot 3 \cdot 23$
[1,1,1]	2	3	$97152 = 2^7 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
[1,0,1]	2	4	$1022304 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 463$
[3,0,0]	3	0	$17051328 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 4229$
[2,2,1]	3	4	$1022304 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 463$
[2,1,1]	3	7	$27202560 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[2,0,1]	3	8	$131300928 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 53$
[4,0,0]	4	0	$396408912 = 2^4 \cdot 3 \cdot 1619 \cdot 5101$
[3,3,1]	4	3	$97152 = 2^7 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
[3,2,1]	4	8	$131300928 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 53$
[3,1,1]	4	11	$4180088448 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1997$
[3,0,1]	4	12	$10201693056 = 2^7 \cdot 3 \cdot 23^2 \cdot 50221$
[2,4,2]	4	0	$170064 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 1181$
[2,3,2]	4	7	$27202560 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[2,2,2]	4	12	$777313152 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 127$
[2,1,2]	4	15	$6283791360 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 23$
[2,0,2]	4	16	$14744809824 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 6677903$
[5,0,0]	5	0	$4634713440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 19991$
[4,4,1]	5	0	$1104 = 2^4 \cdot 3 \cdot 23$
[4,3,1]	5	7	$27202560 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[4,2,1]	5	12	$10201693056 = 2^7 \cdot 3 \cdot 23^2 \cdot 50221$
[4,1,1]	5	15	$104826866688 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 23 \cdot 54949$
[4,0,1]	5	16	$207523912032 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 23 \cdot 1783 \cdot 5857$
[3,4,2]	5	8	$131300928 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 53$
[3,3,2]	5	15	$6283791360 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 23$
[3,2,2]	5	20	$169345554048 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 18743$
[3,1,2]	5	23	$713871369216 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 77460001$
[3,0,2]	5	24	$1120553013888 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 241$
[6,0,0]	6	0	$34410979008 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 1289 \cdot 2207$

表 3: $\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)} = \vartheta_{\delta}$ の Fourier 係数とその素因数分解

$T = [m, r, n]$	$\text{tr}(T)$	$4\det(T)$	$a(\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)}; T)$
[0,0,0]	0	0	1
[1,0,0]	1	0	$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
[2,0,0]	2	0	$182160 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$
[1,2,1]	2	0	$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
[1,1,1]	2	3	$27600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23$
[1,0,1]	2	4	$303600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23$
[3,0,0]	3	0	$16924320 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 73$
[2,2,1]	3	4	$303600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23$
[2,1,1]	3	7	$17001600 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[2,0,1]	3	8	$74685600 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 41$
[4,0,0]	4	0	$397150800 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 139 \cdot 2381$
[3,3,1]	4	3	$27600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23$
[3,2,1]	4	8	$74685600 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 41$
[3,1,1]	4	11	$2239657200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2459$
[3,0,1]	4	12	$5525851200 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 50053$
[2,4,2]	4	0	$182160 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$
[2,3,2]	4	7	$17001600 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[2,2,2]	4	12	$765072000 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[2,1,2]	4	15	$7844538240 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 769$
[2,0,2]	4	16	$15928677600 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 709$
[5,0,0]	5	0	$4632279120 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 89 \cdot 449$
[4,4,1]	5	0	$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
[4,3,1]	5	7	$17001600 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
[4,2,1]	5	12	$5525851200 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 50053$
[4,1,1]	5	15	$57173731200 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 28771$
[4,0,1]	5	16	$112857310800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 34949$
[3,4,2]	5	8	$74685600 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 41$
[3,3,2]	5	15	$7844538240 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 769$
[3,2,2]	5	20	$177299242560 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 61 \cdot 3989$
[3,1,2]	5	23	$760474281600 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 104369$
[3,0,2]	5	24	$1191548635200 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 46723$
[6,0,0]	6	0	$34414027200 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 317 \cdot 359$

表 4: $\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)} = \vartheta_{\psi}$ の Fourier 係数とその素因数分解

$T = [m, r, n]$	$\text{tr}(T)$	$4\det(T)$	$a(\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)}; T)$
[0,0,0]	0	0	1
[1,0,0]	1	0	$48 = 2^4 \cdot 3$
[2,0,0]	2	0	$195408 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 59$
[1,2,1]	2	0	$48 = 2^4 \cdot 3$
[1,1,1]	2	3	0
[1,0,1]	2	4	$2208 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23$
[3,0,0]	3	0	$16785216 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 181$
[2,2,1]	3	4	$2208 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23$
[2,1,1]	3	7	$1554432 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
[2,0,1]	3	8	$6266304 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 43$
[4,0,0]	4	0	$397963344 = 2^4 \cdot 3 \cdot 8290903$
[3,3,1]	4	3	0
[3,2,1]	4	8	$6266304 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 43$
[3,1,1]	4	11	$176357376 = 2^{16} \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 23$
[3,0,1]	4	12	$440443008 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 23 \cdot 1847$
[2,4,2]	4	0	$195408 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 59$
[2,3,2]	4	7	$1554432 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
[2,2,2]	4	12	$886900608 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 179$
[2,1,2]	4	15	$99163376640 = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 131$
[2,0,2]	4	16	$18080232288 = 2^5 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 167 \cdot 49033$
[5,0,0]	5	0	$4629612960 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 1051$
[4,4,1]	5	0	$48 = 2^4 \cdot 3$
[4,3,1]	5	7	$1554432 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
[4,2,1]	5	12	$440443008 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 23 \cdot 1847$
[4,1,1]	5	15	$4591650816 = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 10831$
[4,0,1]	5	16	$9034943904 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 64951$
[3,4,2]	5	8	$6266304 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 43$
[3,3,2]	5	15	$9163376640 = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 131$
[3,2,2]	5	20	$186645799296 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 151 \cdot 4241$
[3,1,2]	5	23	$810828896256 = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 1912621$
[3,0,2]	5	24	$1266676811136 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 283 \cdot 5119$
[6,0,0]	6	0	$34417365696 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 367 \cdot 7753$

表 5: $\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)} = \vartheta_{\omega}$ の Fourier 係数とその素因数分解

$T = [m, r, n]$	$\text{tr}(T)$	$4\det(T)$	$a(\vartheta_{\mathcal{L}}^{(2)}; T)$
[0,0,0]	0	0	1
[1,0,0]	1	0	0
[2,0,0]	2	0	$196560 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
[1,2,1]	2	0	0
[1,1,1]	2	3	0
[1,0,1]	2	4	0
[3,0,0]	3	0	$16773120 = 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
[2,2,1]	3	4	0
[2,1,1]	3	7	0
[2,0,1]	3	8	0
[4,0,0]	4	0	$398034000 = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
[3,3,1]	4	3	0
[3,2,1]	4	8	0
[3,1,1]	4	11	0
[3,0,1]	4	12	0
[2,4,2]	4	0	$196560 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
[2,3,2]	4	7	0
[2,2,2]	4	12	$904176000 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[2,1,2]	4	15	$9258762240 = 2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[2,0,2]	4	16	$18309564000 = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[5,0,0]	5	0	$4629381120 = 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[4,4,1]	5	0	0
[4,3,1]	5	7	0
[4,2,1]	5	12	0
[4,1,1]	5	15	0
[4,0,1]	5	16	0
[3,4,2]	5	8	0
[3,3,2]	5	15	$9258762240 = 2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[3,2,2]	5	20	$187489935360 = 2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$
[3,1,2]	5	23	$815173632000 = 2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
[3,0,2]	5	24	$1273079808000 = 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
[6,0,0]	6	0	$34417656000 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 103$

参考文献

- [1] S. Böcherer: Über gewisse Siegelsche Modulformen zweiten Grades. *Math. Ann.* **261**(1982), 23-41.
- [2] S. Böcherer and S. Nagaoka: On mod p properties of Siegel modular forms. *Math. Ann.*, **338**(2007), 421-433.
- [3] S. Böcherer and S. Nagaoka: On Siegel modular forms of level p and their properties of mod p , *manuscripta math.*, **132**(2010), 501-515.
- [4] S. Böcherer and S. Nagaoka: Congruences for Siegel modular forms and their weights, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **80**(2010), 227-231.
- [5] S. Böcherer and S. Nagaoka: On p -adic properties of Siegel modular forms. *Automorphic Forms, Springer, Proceedings in Mathematic and Statistics* (ed. Heim et al.) **115**(2014), 47-66.
- [6] H. Cohen: Sums involving the values at negative integers of L -functions of quadratic characters. *Math. Ann.* **217**(1975), 271-285.
- [7] J. H. Conway and N. J. A. Sloane: *Sphere packings, lattices and groups*. Third edition. Springer, 1999.
- [8] E. Freitag: Zur Theorie der Modulformen zweiten Grades. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II*(1965), 151-157.
- [9] M. Hentschel and G. Nebe: Hermitian modular forms congruent 1 modulo p . *Arch. Math.* **92**(2009), 251-256.
- [10] T. Ichikawa: Congruences between Siegel modular forms. *Math. Ann.* **342**(2008), 527-532.
- [11] J. -I. Igusa: On Siegel modular forms of genus two. *Am. J. Math.* **84**(1962), 175-200; II, *ibid.* **86**(1964), 392-412.
- [12] J. -I. Igusa: On the ring of modular forms degree two over \mathbf{Z} . *Am. J. Math.* **101**(1979), 149-183.
- [13] H. Katsurada: An explicit formula for Siegel series. *Amer. J. Math.* **121**(1999), 415-452.
- [14] N. M. Katz: p -adic properties of modular schemes and modular forms. *Modular Functions of One Variables III. Lec. Notes in Math.* Springer, **350**(1973), 69-190.
- [15] T. Kikuta, H. Kodama and S. Nagaoka: Note on Igusa's cusp form of weight 35. *Rocky Mountain J. of Math.* **45**(2015), No.3, 963-972
- [16] T. Kikuta and S. Nagaoka: On a correspondence between p -adic Siegel-Eisenstein series and genus theta series. *Acta Arithmetica*, **134**(2008), 111-126.

- [17] T. Kikuta and S. Nagaoka: Congruence properties of Hermitian modular forms, Proc. Amer. Math. Soc., **137**(2009), 1179-1184.
- [18] T. Kikuta and S. Nagaoka: On Hermitian modular forms mod p , J. Math. Soc. Japan, **63**(2011), 211-238.
- [19] T. Kikuta and S. Nagaoka: Ramanujan type congruences for modular forms of several variables. Ramanujan J. **32**(2013),143-157.
- [20] T. Kikuta and S. Nagaoka: On p -adic quaternionic Eisenstein series. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **83**(2013), 147-157.
- [21] H. Kodama, S. Nagaoka and Y. Nakamura: On level p Siegel cusp forms of degree two. International J. of Mathematics and Mathematical Science. **2012**(2012), 1-9.
- [22] Y. Mizuno and S. Nagaoka: Some congruences for Saito-Kurokawa lifts, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **80**(2010), 9-23.
- [23] T. Munemoto and S. Nagaoka: Note on p -adic Hermitian Eisenstein series. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **76**(2006), 247-260.
- [24] S. Nagaoka: Some congruence properties of Eisenstein series. Hokkaido Math. J. **8**(1979), 239-243.
- [25] S. Nagaoka: A remark on Serre's example of p -adic Eisenstein series. Math. Zeitschrift **235**(2000), 227-250.
- [26] S. Nagaoka: Note on mod p Siegel modular forms. Math. Zeitschrift **235**(2000),405-420, II *ibid.* **251**(2005), 821-826.
- [27] S. Nagaoka: On p -adic Hermitian Eisenstein series. Proc. Amer. Math. Soc., **134**(2006), 2533-2540.
- [28] S. Nagaoka: On Hilbert modular forms modulo p : explicit ring structure. Revista Math. Iberoamericana, **22**(2006), 357-368.
- [29] S. Nagaoka: On the mod p kernel of the theta operator. Proc. Amer. Math. Soc., **143**(2015), 4237-4244.
- [30] S. Nagaoka and Y. Nakamura: On the restriction of the Hermitian Eisenstein series and its applications. Proc. Amer. Math. Soc., **139**(2010), 1291-1298.
- [31] S. Nagaoka and S. Takemori: Notes on theta series for Niemeier lattices. Ramanujan J. in press.
- [32] J.-P. Serre: Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques. Modular Functions of One Variables III. Lec. Notes in Math. Springer, **350**(1973), 191-268.
- [33] J.-P. Serre: *Cours D'arithmétique*, Presses Universitaires de France, 1970.

- [34] G. Shimura: On Eisenstein series. Duke Math. J. **50**(1983), 417-476. (全集 III 卷, 455-476).
- [35] C. L. Siegel: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades, Math. Ann. **116**(1939), 617-657. (全集 III 卷, 97-137)
- [36] H. P. F. Swinnerton-Dyer: On ℓ -adic representaitons and congruences for coefficients of modular forms. Modular Functions of One Variables III. Lec. Notes in Math. Springer, **350**(1973), 1-55.
- [37] H. Yoshida: Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms. Inv. Math. **60**(1980), 193-248.

岩澤理論の高次元化をとりまく風景

落合理 (大阪大学理学研究科)

CONTENTS

1. イdeal類群の円分岩澤理論の復習: 岩澤理論は何をしたい理論なのか?	1
2. 高次元化による一般化の道: 高次元化とは何だろうか?	6
3. 高次元岩澤主予想の証明の現状: Euler 系 VS Eisenstein イdeal	12
4. p 進保型 L 函数に関連する諸問題: 高次元 p 進 L 函数の深い理解を目指して	16
5. 岩澤理論の高次元化と多変数化から派生する新しい問題: 周辺の数学領域との相互作用を目指して	24

1. イdeal類群の円分岩澤理論の復習: 岩澤理論は何をしたい理論なのか?

今回は、岩澤理論の高次元化¹の現状について概説する機会をいただいた。ここでは、講演で話した流れに沿って可能な限り、今の風景と展望を記すことを試みた。しかしながら、著者の展望能力も知識も限られているので自分の視界が及ぶ範囲でしか紹介できなかった。そもそも、同じものを目にしてもみている世界の階層が完全に違うこともあるかもしれない。また、かなり偏った風景を描写してしまっているかもしれないことも懸念されるがその点もご容赦願いたい。

さて、一般化の現状を概説するには当然古典的な状況を認識していることが前提となる。必ずしも専門家でない読者を想定して、この節では駆け足で古典的なイdeal類群の円分岩澤主予想を振り返りたい。

まず、記号や概念を固定しておく。 p : 奇素数 (以下固定する), N : p と素な自然数とする。各自然数 n ごとに, $A_n := \text{Cl}(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n}))[p^\infty]$, $G_{\text{cyc},n} := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n})/\mathbb{Q}(\zeta_N))$ とする。

代数的側面 (Selmer 群)

岩澤理論には、代数的側面と解析的側面がある。その両側面の理解を深めたり、あるいはその両側を結ぶ岩澤主予想を考えたい。まず代数的側面から振り返る。

次は「岩澤代数的類数公式」と呼ばれ、代数体の族における類数に関する数少ない一般的な結果であり、岩澤による無限次の円分塔を考えるアイデアの重要性を示す最初の金字塔である。

¹高次元化とはそもそも何であるかについては 2 節の最後の方も参照のこと。

定理 1.1 (岩澤, 1950 年代). 非負整数 λ_p, μ_p と整数 ν_p が存在して, 十分大きな n で

$$\#A_n = p^{\lambda_p n + \mu_p p^n + \nu_p}$$

が成り立つ. (実は Ferrero-Washington によって $\mu_p = 0$ が示されている)

今, A_n に $G_{\text{cyc},n}$ が作用することより, イデアル類群の順極限 $\mathcal{A} := \varinjlim_n A_n$ にはガロワ群の逆極限 $G_{\text{cyc}} := \varprojlim_n G_{\text{cyc},n}$ が作用する. (無限次拡大のガロワ理論より, $G_{\text{cyc}} = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^\infty})/\mathbb{Q}(\zeta_N))$ であることにも注意する)

以下では, **岩澤代数** とよばれる完備群環 $\Lambda_{\text{cyc}} := \mathbb{Z}_p[[G_{\text{cyc}}]]$ が大事な役割を演じる. 完備群環は日常生活で馴染みのない人も多いので, つきあうのに不安を感じるかもしれない. ただ, 岩澤-Serre の同型によって Λ_{cyc} は $\mathbb{Z}_p[[X]]$ の $p-1$ 個の直積に非標準的に同型をつくれるので, 安心して付き合っていたきたい.

今, $\mathcal{X} := \mathcal{A}^\vee$ とおくと, \mathcal{X} は自然に有限生成 Λ_{cyc} 加群とみなされる.

注: 一般に, 有限生成 Λ_{cyc} 加群のことを **岩澤加群** とよぶ.

岩澤代数的類数公式の (証明の) 系として次が得られる.

定理 1.2 (岩澤, 1950 年代). \mathcal{X} は有限生成ねじれ Λ_{cyc} 加群である.

今, 普通の有限次代数体のイデアル類群を \mathbb{Z} 加群とみなしたり, イデアル類群の p 部分を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 加群や \mathbb{Z}_p 加群とみなすとき, それらは有限なのでねじれ加群である. 一般に, $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Z}_p$ などの高さ 1 の素イデアルによる剰余体が有限な環においては, 有限生成加群に対して, ねじれであることと有限であることは同値である. よって, この類似からみたときに上の定理は代数的整数論におけるイデアル類群の有限性定理の岩澤理論的な類似物 (対応物) であると捉えられる.

解析的側面 (p 進 L 函数)

次に解析的な側面に話を移す. 後で現れる p 進 L 函数が話の主人公であるが, いきなりそれを紹介する前に, 少し寄り道になるがアルキメデス的な世界と非アルキメデス的な世界の類似に注意しておくことは有用であろう.

アルキメデス世界と非アルキメデス世界の類似の復習

複素平面やその上の正則函数の環はアルキメデス的な世界での大事な対象である. 次のような類似が基本である.

$$\text{複素平面 } \mathbb{C} \overset{\text{類似}}{\longleftrightarrow} G_{\text{cyc}} \text{ 上の } p \text{ 進連続 (1 次) 指標の集合}$$

$$\mathbb{C} \text{ 上の正則函数の環 } \overset{\text{類似}}{\longleftrightarrow} \text{岩澤代数 } \Lambda_{\text{cyc}}$$

G_{cyc} の (1 次) 指標は G_{cyc} の位相的生成元を固定するとその行き先で一意に決まるので, (1 次) 指標全体の集合は p 進単位開円盤と思える. 上では複素平面ではなく複素平面の原点の周りの複素単位開円盤と対比するのがより正確だったかもしれない. しかしながら, 次のような類似も大事なので, ここでは複素平面を対比させた.

$$\mathbb{C} \text{ 中の整数点 } \overset{\text{類似}}{\longleftrightarrow} G_{\text{cyc}} \text{ 上の数論的指標の集合}$$

ただし, $\chi_{\text{cyc}} : G_{\text{cyc}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ を標準的な p 進円分指標とすると,

連続指標 $\eta : G_{\text{cyc}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ が**数論的指標**

$\stackrel{\text{定義}}{\iff}$ ある整数 w と位数有限の指標 ϕ が存在し, $\eta = \chi_{\text{cyc}}^w \phi$

と定義する. 上の整数 w は η に対して一意に定まり, η の「重さ」と呼ばれる. 岩澤代数は複素関数論の正則関数の環の類似であるので, 例えば岩澤代数の元に対しても一致の定理などが成り立つことが知られている.

ψ を導手 N の Dirichlet 指標とし, $\mathbb{Z}_p[\psi]$ を \mathbb{Z}_p に ψ の値を付け加えた環とする. 次が Riemann ゼータ函数 $\zeta(s)$ や Dirichlet L 函数 $L(\psi, s)$ の p 進類似となる p 進 L 函数である.

定理 1.3 (久保田-Leopoldt, Mazur, Coleman, 岩澤, 他). $L_p(\psi) \in \frac{1}{\gamma - \chi_{\text{cyc}}(\gamma)} \Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]$ が存在して, 重さ $j \leq 0$ の勝手な数論指標 $\chi_{\text{cyc}}^j \phi$ に対して

$$\chi_{\text{cyc}}^j \phi(L_p(\psi)) = \left(1 - \frac{(\psi\phi^{-1})(p)}{p^j} \right) L(\psi\phi^{-1}, j)$$

なる補間性質が成り立つ. ここで, γ は G_{cyc} の位相的生成元とする. 加群 $\frac{1}{\gamma - \chi_{\text{cyc}}(\gamma)} \Lambda_{\text{cyc}}$ は γ の選び方に依存しないことに注意する. また, 一致の定理により, $L_p(\psi)$ は上の補間性質で一意に特徴付けられる. また, $\psi \neq 1$ ならば, 極はなく $L_p(\psi) \in \Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]$ となる.

しばしば, この p 進 L 函数は最初の仕事である久保田-Leopoldt の名前をとって² 「久保田-Leopoldt の p 進 L 函数」とよばれる. このような, p 進 L 函数を「構成」するのは非自明な問題であるが, 上の p 進 L 函数には様々な別構成が知られている. 様々な別証明があることによって, 我々に豊かな理解を提供されると同時に応用上でも一長一短がある. p 進 L 函数のいくつかの構成に対してコメントしておく.

- 岩澤による Stickelberger 元を使った構成で p 進 L 函数を群環の元として理解出来るようになった. また, 他の構成に比べて有限指標 ϕ での値も計算しやすいなどの利点もある.
- Mazur による Γ -transform を使った構成では p 進 L 函数が調べやすい多項式的なものからの変換となる. これによって, しばしば μ 不変量をはじめとした p 進 L 函数の性質を調べるのに役立つことがある.
- Coleman による円単数の Euler 系を使った構成は, Rubin による円単数の Euler 系を使った岩澤主予想の証明でイデアル類群と p 進 L 函数を結びつける大事な仲立ちとなる.

岩澤主予想

岩澤主予想を述べるのに大事な言葉を準備する.

²久保田-Leopoldt の構成はここで定式化したような群環の元を与えているわけではなく, その意味ではここでの定式化よりも若干弱いかもかもしれない.

定義 1.1. R を UFD , M を有限生成ねじれ R 加群とするとき, **特性イデアル** を,

$$\text{char}_R M := \prod_{\mathfrak{p}: R \text{ の高さ } 1 \text{ の素イデアル}} \mathfrak{p}^{\ell(\mathfrak{p}; M)}$$

と定義する. ただし, $\ell(\mathfrak{p}; M) = \text{length}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$ とする. また, M がねじれ加群でないときには $\text{char}_R M := 0$ とする.

\mathcal{X}_{ψ} を \mathcal{X} の $(\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ 作用に関する) 最大 ψ 部分とすると, 先の岩澤の定理によって \mathcal{X}_{ψ} は有限生成ねじれ $\Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]$ 加群となることに注意する.

岩澤によって提出された「イデアル類群の円分岩澤主予想」は以下のように述べられる:

定理 1.4 (岩澤主予想; Mazur-Wiles の定理). 次の $\Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]$ のイデアルの等式が成り立つ:

$$\text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]} \mathcal{X}_{\psi} = (L_p(\psi) \text{ の分子}).$$

岩澤主予想の証明に関するコメント

定理 1.4 の証明のためには, 次のイデアル類群の岩澤理論に限定された特殊事情が大事である.

命題 1.1 (解析的類数公式の原理).

$$(a) \text{ 全ての } \psi \text{ で, } \text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]} \mathcal{X}_{\psi} \subset (L_p(\psi) \text{ の分子})$$

または

$$(b) \text{ 全ての } \psi \text{ で, } \text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi]} \mathcal{X}_{\psi} \supset (L_p(\psi) \text{ の分子})$$

の何れかを示せば岩澤主予想の等式が正しい

この特殊事情に基づいて次の 2 種類の証明が知られている.

- Mazur-Wiles による最初の証明においては, Eisenstein イデアルの方法によって, (a) の包含関係が示された.
- Rubin の円単数の Euler 系による別証明においては, (b) の包含関係が示された.

ここでは, これらの証明がどのようなものであるかについては説明しないが, 後の 3 節の楕円曲線の岩澤理論のところで, もう少し説明を加える予定である.

高次元以外の別の一般化の可能性

これから岩澤理論を「高次元化」する話に入る前に「高次元化以外の一般化」について少しだけコメントしておく. 以降の高次元化の設定とそれ以外の一般化の「ファイバー積」をとることでまた新しい問題を考えられるかもしれない.

- 高次 Fitting イデアルを用いた**精密化された岩澤理論**が栗原氏をはじめとした人々によって研究されている.

Fitting イデアルについて簡単に復習する. R を可換環, M を有限表示を持つねじれ R 加群とすると, M の表示

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

をとる. i 次 Fitting イデアルを上が表示が定める $m \times n$ 行列の $n - i$ 次小行列式全体で生成されるイデアルとして $\text{Fitt}_{R,i}M$ と記す. R が一般の UFD としたとき, 0 次 Fitting イデアル $\text{Fitt}_{R,0}M$ の reflexive closure が特性イデアルに等しい. また, R が特に PID のときには, 有限生成ねじれ R 加群 M, N が同型であるための必要十分条件はすべての $i \geq 0$ で $\text{Fitt}_{R,i}M = \text{Fitt}_{R,i}N$ となることである. こういった意味で Fitting イデアルは特性イデアルより精密な情報を復元すると言える.

さて, 栗原氏をはじめとした人々に研究される精密化された岩澤理論においては, 各 i で i 次の Stickelberger イデアル Θ_i を定め,

$$\text{Fitt}_i \mathcal{X}_\psi = \Theta_i$$

が成り立つという形の岩澤主予想を期待する. この定式化に合わせて Euler 系の理論を精密化するなどの研究が行われている.

- 1 の p ベキ根を付け加えて得られる \mathbb{Z}_p 拡大の代わりに, 半直積 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ や $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ などの非可換な p 進 Lie 群をガロワ群に持つ p 進 Lie 拡大上でイデアル類群や p 進 L 関数を考える**非可換岩澤理論**が Coates 氏らによって研究されている. 最終的に非可換岩澤理論を定式化した Coates-Fukaya-Kato-Sujatha-Venjakob の論文では既に楕円曲線を中心に定式化されていた. しかしながら, イデアル類群の場合でも非可換岩澤理論は非自明であり, 上述の Coates-Fukaya-Kato-Sujatha-Venjakob の論文ののち, Burns, 加藤, 原などによる研究を得て, Kakude や Ritter-Weiss によって最終的にイデアル類群に対する非可換岩澤理論が解決した.
- 元々の岩澤理論では円分塔 $\mathbb{Q}(\zeta_{Np^\infty})$ の上の p イデアル類群で得られる岩澤加群を考えた. 言い換えると, $\mathbb{Q}(\zeta_{Np^\infty})$ 上の最大不分岐アーベル p 拡大 L_∞ のガロワ群 $\text{Gal}(L_\infty/\mathbb{Q}(\zeta_{Np^\infty}))$ からなるガロワ加群を考えた. $L_\infty^{(1)} = L_\infty$, $L_\infty^{(n)}$ を $L_\infty^{(n-1)}$ 上の最大不分岐アーベル p 拡大とすることで $L_\infty^{(n)}/L_\infty^{(n-1)}$ のガロワ群からなる岩澤加群が逐次考えられ, 面白い研究対象となる. このような**類体塔の岩澤理論**が尾崎氏をはじめとした人々により研究されている.
- 後で説明するように, イデアル類群の一般化としてガロワ表現の Selmer 群の概念があり, 絶対ガロワ群 $G_{\mathbb{Q}}$ のガロワ表現 A に対する Selmer 群は, ガロワコホモロジー群 $H^1(\mathbb{Q}, A)$ の適当な局所条件による部分群として定義される. Selmer 群を定義する係数ガロワ加群を非可換な群に一般化する**非可換係数の岩澤理論** (佐久川憲児 2013 年度大阪大学博士論文) の研究もある. Minhyong Kim 氏の定義した Selmer variety の torsion 版を定義して円分塔での振る舞いなどが調べられている. 非可換係数のガロワコホモロジーは点付き集合ではあるがもはや群にはならず, 点付き集合の取り扱いの言葉などの一般的な枠組みの整備も必要となることに注意する.

2. 高次元化による一般化の道: 高次元化とは何だろうか?

イデアル類群に続く最初の一般化の試み

イデアル類群の岩澤理論の成功をうけてもっと一般の数論的対象に岩澤理論を高次元化する動きが現れる. イデアル類群の次に研究が試みられたのは, Mazur, Greenberg, Coates らによる「 p 通常的な楕円曲線の岩澤理論」である. 特に以下が主要なポイントである.

- (1) Selmer 群の振る舞い (Mazur のコントロール定理, 1970 年頃)
- (2) p 進 L 関数の構成 (Mazur–Swinnerton-Dyer 他)
- (3) 岩澤主予想の提出 (Mazur, 1970 年頃)

これらをもう少し詳しく説明していきたい.

代数的側面 (Selmer 群)

E を \mathbb{Q} 上の楕円曲線とすると, 代数体 F 上での E の p -Selmer 群を次で定義する:

$$\mathrm{Sel}_E(F) := \mathrm{Ker} \left[H^1(F, E[p^\infty]) \longrightarrow \prod_{v:F \text{ の素点}} \frac{H^1(F_v, [p^\infty])}{E(F_v) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \right].$$

Selmer 群には, 次の完全列がある:

$$0 \longrightarrow E(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Sel}_E(F) \longrightarrow \mathrm{III}_E(F)[p^\infty] \longrightarrow 0.$$

この短完全列において, Mordell-Weil 群 $E(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ は代数体における単数群の楕円曲線類似, Tate-Shafarevich 群 $\mathrm{III}_E(F)$ は代数体におけるイデアル類群の楕円曲線類似である.

$F = \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ の場合を考えよう. $\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ に自然に G_{cyc} が作用し, 簡単な議論によって $\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ は有限生成 Λ_{cyc} 加群となることが知られている.

次は上述の岩澤の定理の楕円曲線類似である

定理 2.1 (Rubin-Rohrlich, 加藤-Rohrlich). p で通常還元 (*ordinary reduction*) を持つと仮定すると, $\mathrm{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ は有限生成ねじれ Λ_{cyc} 加群である

証明には Euler 系が必要であり, イデアル類群のときの場合の岩澤の定理の証明に比べて大変な道のりである. 後で岩澤主予想の証明と合わせて追加説明する.

解析的側面 (p 進 L 関数)

E を \mathbb{Q} 上の楕円曲線とすると,

$$L(E, s) = \prod_{\ell: \text{素数}, E \text{ が良還元}} \frac{1}{(1 - a_\ell(E)\ell^{-s} + \ell^{1-2s})} \times (\text{悪い Euler 因子})$$

と Euler 積で E の L 関数を定める. ただし, $a_\ell(E) := \ell + 1 - \#\tilde{E}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$ とする.
 $L(E, s)$ は $\operatorname{Re}(s) > \frac{3}{2}$ で収束し, Wiles, Taylor-Wiles 及び Breuil-Conrad-Diamond-Taylor によって E はモジュラーであることが知られているから $L(E, s)$ は全 \mathbb{C} 平面に正則に接続される.

$L(E, s)$ の Euler 積を Dirichlet 級数として $L(E, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(E)}{n^s}$ と表すとき, 勝手な Dirichlet 指標 ϕ に対して ϕ ひねりの L 関数を次で定義する:

$$L(E, \phi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(E)\phi(n)}{n^s}.$$

$L(E, \phi, s)$ も $\operatorname{Re}(s) > \frac{3}{2}$ で収束し全 \mathbb{C} 平面に正則に接続される.

特殊値の代数性の復習

E の \mathbb{Z} 上の Néron モデルの正則微分形式 (Néron 微分) を ω_E をおくととき,

$$\Omega_E^+ := \int_{E(\mathbb{R})} |\omega_E| \quad (\text{Néron 周期})$$

とする (同様に, $\Omega_E^- := \int_{H_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^-} |\omega_E|$ と定める).

このとき, 次のような $s = 1$ における $L(E, s)$ の値の代数性が成り立つ.

定理 2.2 (志村, Manin 他). 勝手な Dirichlet 指標 ϕ に対して

$$\frac{L(E, \phi, 1)}{\Omega_E^\pm} \in \mathbb{Q}[\phi]$$

が成り立つ. ただし, \pm は $\phi(-1)$ の符号で決める.

この代数性の結果によって, $\frac{L(E, \phi, 1)}{\Omega_E^\pm}$ を p 進数とみなすことができる.

定理 2.3 (Manin, Mazur-Swinnerton-Dyer 他). E は p で通常還元を持つと仮定する. このとき, 一意的な $L_p(E) \in \Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ が存在して, 重さ 0 の勝手な数論指標 ϕ に対して次の補間性質

$$\phi(L_p(E)) = \text{Eul}(E, \phi) \times \tau(\phi) \times \frac{L(E, \phi^{-1}, 1)}{\Omega_E^\pm}$$

が成り立つ. ただし, $\tau(\phi)$ は Dirichlet 指標 ϕ に付随した Gauss 和とする. また, α_E を

$$X^2 - a_p(E)X + p \text{ の } p \text{ 進単数根として } \text{Eul}(E, \phi) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{\alpha_E})^2 & \phi = \mathbf{1} \\ (\frac{1}{\alpha_E})^{\text{ord}_p(\text{Cond}(\phi))} & \phi \neq \mathbf{1} \end{cases} \text{ とおく.}$$

定理 2.3 の証明は第 4 節で説明する予定である.

岩澤主予想

代数的な側と解析的な側での準備の下で、イデアル類群のときと同様に両者をを結びつける岩澤主予想が考えられる。

予想 2.1 (岩澤主予想; Mazur らが定式化). E は p で通常還元を持つと仮定する. このとき, 次の等式が成り立つだろう:

$$(L_p(E)) = \begin{cases} (\gamma - \chi(\gamma)) \text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee. & E \text{ が } p \text{ で分裂乗法的還元を持つとき,} \\ \text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee. & \text{それ以外の場合.} \end{cases}$$

岩澤主予想の結果や証明は, E が虚数乗法を持つ場合か E が虚数乗法を持たない場合のいずれかで大分様相が異なる。

虚数乗法を持つ場合

楕円曲線が虚数乗法を持つ場合には次が成り立つ:

定理 2.4 (Rubin-Rohrlich). E がある虚 2 次体 K で虚数乗法を持つ p 通常的な \mathbb{Q} 上の楕円曲線とすると次が成り立つ。

(1) $\text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ は有限生成ねじれ Λ_{cyc} 加群である。

(2) 次の等式が成り立つ:

$$\text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee = (L_p(E)).$$

虚数乗法を持つ場合の証明のあらすじは以下の通りである。

(I) Rubin による Euler system bound の定理

前節のイデアル類群の岩澤理論の虚 2 次体 K への一般化がある. K が虚 2 次体のとき, K 上でガロワ群が \mathbb{Z}_p の直和になるような最大 \mathbb{Z}_p^d 拡大 K_∞ は $d = 2$ で得られる。

虚 2 次体では K_∞ (の有限次拡大) 上のイデアル類群を考えることで, 2 変数 Selmer 群, 2 変数の p 進 L 関数, 2 変数の岩澤主予想が考えられるが, Rubin は楕円単数の Euler 系を用いることで, Selmer 群の大きさを抑えて次の包含関係を示した:

(2 変数 Selmer 群の特性イデアル) \supset (楕円単数の Euler 系の 2 変数特性イデアル).

(II) Coates, Yager, de Shalit らによる Coleman 写像

前節で紹介した Coleman による円単数の Euler 系を使った構成があったが, その構成の楕円単数類似が Coates, Yager, de Shalit らによって与えられている:

(楕円単数の Euler 系の 2 変数特性イデアル) = (2 変数の p 進 L 関数).

(III) (I) と (II) の組み合わせ

上の (I) と (II) の包含関係をつなげると次が得られる:

(2 変数 Selmer 群の特性イデアル) \supset (2 変数の p 進 L 関数).

(IV) 虚 2 次体 K に対する解析的類数公式の原理

前節の円分体のときと同じように今の場合も片方の包含関係が示せば自動的に等式が成り立つという原理が成り立つ³:

$$(2 \text{ 変数 Selmer 群の特性イデアル}) = (2 \text{ 変数の } p \text{ 進 } L \text{ 函数}).$$

これは、「虚 2 次体の 2 変数岩澤主予想の解決」に他ならない.

(V) (ある)1 変数に特殊化

虚 2 次体 K で虚数乗法を持つ楕円曲線 E の p べき等分点の座標を K に付け加えることで K の \mathbb{Z}_p^2 拡大が得られるので, 上で得られた等式を適当にひねって 1 変数に特殊化すると次が得られる:

$$\text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee = (L_p(E)).$$

(VI) Rohrlich の定理

p 進 L 函数が補間するような楕円曲線 E の L 函数 $L(E, s)$ の函数等式の中心 $s = 1$ での値は, Mordell-Weil 群が無限のときには 0 となる. A priori にはそれを Γ_{cyc} のいろいろな有限指標 ϕ でひねっても常に $L(E, \phi, 1)$ の $s = 1$ での値が消えてしまう心配がある. Rohrlich は Γ_{cyc} の有限指標を動かすとひねった L 函数の $s = 1$ での値が消えないことがあることを示した. これにより, $L_p(E) \neq 0$ がわかる:

$$\begin{aligned} \text{上式で } (L_p(E)) \neq 0 &\implies \text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \neq 0 \\ &\implies \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \text{ は有限生成ねじれ } \Lambda_{\text{cyc}} \text{ 加群}. \end{aligned}$$

以上で楕円曲線 E が虚数乗法を持つ場合の円分岩澤主予想の結果である定理 2.4 の証明のあらすじを終える.

虚数乗法を持たない場合

楕円曲線が虚数乗法を持たない場合には次が成り立つ:

定理 2.5 (加藤-Rohrlich). E が虚数乗法を持たない p 通常的な \mathbb{Q} 上の楕円曲線とするとき次が成り立つ.

- (1) $\text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$ は有限生成ねじれ Λ_{cyc} 加群である
- (2) (若干の条件の下で) 次の不等式が成り立つ:

$$\text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \supset (L_p(E))$$

³あまり有限 Hecke 指標ひねりをこめた正確な設定を述べなかったが, すべての有限 Hecke 指標ひねりで一斉に同方向の包含関係が成り立たねばならない.

虚数乘法を持たないときの証明のあらすじは以下の通りである。

(I) 加藤による Euler 系の構成 (Beilinson-加藤の Euler 系)

虚数乘法を持つ場合と同じく Euler 系が大事な役割を演じるが、楕円単数の Euler 系とは異なる Beilinson-加藤の Euler 系が活躍する。Beilinson-加藤の Euler 系は、楕円単数の Euler 系に比べて構成自体が既に大仕事である。アファインモジュラー曲線 Y が与えられたときに、 Y 上の Siegel 単数と呼ばれるよい函数がある。函数は $K_1(Y)$ の元なので、それらを組みにしたモジュラー曲線の $K_2(Y)$ の元を Beilinson 元とよぶ。Beilinson はこの元が楕円曲線の L 函数の $s = 2$ での値と regulator 写像で結びつくことを示した。加藤はこれを p 進的な手法で修正して、explicit reciprocity law などの力技を用いることで、 $s = 1$ での値に結びつく Beilinson-加藤の Euler 元を構成した。

(II) Euler system bound の定理

楕円単数や円単数のときと同じように、ノルム条件などの公理をみたす Euler 系があると標準的な議論で Selmer 群の大きさが抑えられる。かくして次の包含関係が得られる：

$$(\text{Selmer 群の特性イデアル}) \supset (\text{Beilinson-加藤の Euler 系の特性イデアル}).$$

(Euler 系の公理がどのようなものであるかについて、一般的な Euler system bound の定理の正確なステートメントについては、次節でも説明する)

(III) Coleman 写像の理論

Beilinson-加藤の Euler 系も構成から L 函数の特殊値と関係が深いので、一般化された Coleman 写像の理論による Euler 系から p 進 L 函数 $L_p(E)$ の別構成があり、次の等式が得られる：

$$(\text{Beilinson-加藤の Euler 系の特性イデアル}) = (L_p(E)).$$

(IV) (II) と (III) の組み合わせ

上の (II) と (III) の包含関係をつなげると次が得られる：

$$\text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \supset (L_p(E)).$$

(V) Rohrlich の定理

Rohrlich の結果やその証明は虚数乗法の有無に関係ないので、虚数乘法を持つ場合と全く同じように $L_p(E) \neq 0$ がわかる：

$$\begin{aligned} \text{上式で } (L_p(E)) \neq 0 &\implies \text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \neq 0 \\ &\implies \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \text{ は有限生成ねじれ } \Lambda_{\text{cyc}} \text{ 加群}. \end{aligned}$$

以上で楕円曲線 E が虚数乘法を持たない場合の円分岩澤主予想の結果である定理 2.5 の証明のあらすじを終える。

逆方向の包含関係

虚数乗法を持たない場合には、解析的類数公式の原理が知られていないので、片方の包含関係を示しても等式は得られない。

Skinner-Urban は、(適当な条件のもとで) Euler 系の方法とは全く異なる $U(2, 2)$ での Eisenstein イデアルの手法によって次を主張した:

$$\text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \subset (L_p(E)).$$

この逆方向の包含関係の議論については次節でもう少し踏み込んで説明する。これを認めると、加藤の結果である定理 2.5 と合わせて (適当な条件下で) 次を得るというアイデアである。

$$\text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_E(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee = (L_p(E)).$$

以上で、楕円曲線の場合の簡単な概観を終える。楕円曲線の円分岩澤理論にとどまらないさらなる円分岩澤理論の一般化の枠組みが、Greenberg, Coates, 加藤 をはじめとした人々によって提唱されており、我々は

楕円曲線の岩澤理論

↓

さらに高次元の岩澤理論

と進んでいきたい。ここでの「高次元化」には次のように幾つかの意味が考えられる。

- 高い階数のガロワ表現へ一般化
(例. イデアル類群は階数 1, 楕円曲線は階数 2 のガロワ表現)
- 高い次元の代数多様体 (モチーフ) へ一般化
(例. イデアル類群は 0 次元, 楕円曲線は 1 次元のモチーフ)
- 高い階数の代数群の保型表現 (モジュラー形式) へ一般化
(例. イデアル類群は GL_1 , 楕円曲線は GL_2 の保型表現)

これら異なる捉え方は、少しずれもあるが Langlands 予想やコホモロジー的な実現を通してお互い密接に関連している。「高次元化」を語る時、我々はときと場合に応じてこれらの異なる見方を使い分けて いずれかの状況を想定している。そして、岩澤理論のこのような「高次元化」において、次が主な課題であろう。

予想 A: Selmer 群の Pontrjagin 双対は有限生成ねじれ岩澤加群だろう。

予想 B: 適切な補間性質を持つ p 進 L 関数が存在するだろう。

予想 C: (Selmer 群の特性イデアル) = (p 進 L 関数) が成り立つだろう。

3. 高次元岩澤主予想の証明の現状: EULER 系 VS EISENSTEIN イデアル

この節では, 特に予想 A と予想 C についての現状を論じる.

予想 A と予想 C には Euler 系が有効な道具立てになると期待されている. 今までにたびたび話に登場した Euler 系について, 一般の枠組みである程度正確な定義とある程度正確な結果を紹介しておきたい.

Euler 系とは?

状況設定として

$T \cong \mathbb{Z}_p^{\oplus d}$: 絶対ガロワ群 $G_{\mathbb{Q}}$ の (幾何的な) 連続表現

が与えられているとする. $A = T \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ に対して, Selmer 群:

$$\mathrm{Sel}_A(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})) \subset_{\text{局所条件}} H_{\mathrm{gal}}^1(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}), A)$$

が Bloch-加藤や Greenberg による標準的な定義で定まっており, イデアル類群や楕円曲線の Selmer 群の一般化となっている. この Selmer 群 $\mathrm{Sel}_A(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))$ の大きさを L 関数の特殊値を使って抑えたい.

$d^+ := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(T^*(1))^{c=+}$ とおく. 各素数 ℓ に対して $P_\ell(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ を $P_\ell(X) := \det(1 - \mathrm{Fr}_\ell X; T^*(1))$ と定める.

ノルム条件をみたすガロワコホモロジー群の元の系

$$\left\{ z_m(\ell_1 \cdots \ell_r) \in \wedge^{d^+} H_{\mathrm{gal}}^1(\mathbb{Q}(\mu_{p^{m\ell_1 \cdots \ell_r}}), T^*(1)) \right\}$$

で, ノルム条件:

$$(\mathrm{Nr}) \quad \mathrm{Nr}_{\mathbb{Q}(\mu_{p^{m\ell_1 \cdots \ell_r}})/\mathbb{Q}(\mu_{p^{m\ell_1 \cdots \ell_{r-1}}})}(z_m(\ell_1 \cdots \ell_r)) = P_{\ell_r}(\mathrm{Fr}_{\ell_r})z_m(\ell_1 \cdots \ell_{r-1})$$

をみたすものを **Euler 系** という ($\ell_1, \dots, \ell_r \neq p$ は相異なる素数).

さらに, Σ : 素点の有限集合 $\supset \{ \text{分岐素点}, p, \infty \}$

\mathbb{Q}_Σ : Σ の外不分岐な \mathbb{Q} の最大ガロワ拡大

と記号を定める. このとき, ガロワコホモロジーの Euler Poincaré 公式によって

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}} \varprojlim_m H_{\mathrm{gal}}^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \\ = d^+ + \mathrm{rank}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}} \varprojlim_m H_{\mathrm{gal}}^0(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \\ + \mathrm{rank}_{\Lambda_{\mathrm{cyc}}} \varprojlim_m H_{\mathrm{gal}}^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \end{aligned}$$

がわかる. ガロワコホモロジーの大域双対定理, Chebotarev の密度定理, などを用いた抑えたいアーベル群の生成元の個数に関する (非常に複雑な!) 帰納的な議論によって, 次の定理 (**Euler system bound**) が示される

定理 3.1 (加藤, Perrin-Riou, Rubin). T へのガロワ表現の像が”十分大きい”と仮定する. このとき, 次が成立する:

- (1) $\varprojlim_m H_{\text{gal}}^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1))$ は有限生成ねじれ Λ_{cyc} 加群である.
(2) 適当な技術的条件下で次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \varprojlim_m H_{\text{gal}}^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \\ \supset \text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \left(\wedge^{d^+} \varprojlim_m H_{\text{gal}}^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \right) / \Lambda_{\text{cyc}} \varprojlim_m z_m(1). \end{aligned}$$

前節の加藤-Rohrlich の定理 (定理 2.5) の証明のあらすじの (II) の説明が大雑把であったので, 前節で約束したようにもう一步踏み込んでそのステップ (II) の部分を解説する. 定理 3.1 を $T = T_p E$ として応用する際に, $d = 2$, $d^+ = 1$ であることに注意する. よって, 例えば外ベキ \wedge^{d^+} はとる必要がなくなる.

今, 適当な条件下で, ガロワコホモロジーの大域双対定理は次の 4 項完全列を導く.

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \varprojlim_m H_{\text{gal}}^1(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) / \Lambda_{\text{cyc}} \varprojlim_m z_m(1) \\ \longrightarrow \varprojlim_m H_{\text{gal}}^1(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^m}), T^*(1)/\text{Fil}_p^+ T^*(1)) / \Lambda_{\text{cyc}} \varprojlim_m \text{loc}_p z_m(1) \\ \longrightarrow \text{Sel}_A(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee \longrightarrow \varprojlim_m H_{\text{gal}}^2(\mathbb{Q}_\Sigma/\mathbb{Q}(\mu_{p^m}), T^*(1)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

この加群の系列の完全性より

$$\begin{aligned} (\text{第 4 項の特性イデアル}) \supset (\text{第 1 項の特性イデアル}) \\ \xLeftrightarrow{\text{同値}} (\text{第 3 項の特性イデアル}) \supset (\text{第 2 項の特性イデアル}) \end{aligned}$$

なる同値性が成り立つ. よって,

E が虚数乗法をもたない

$\xRightarrow{\text{Serre の定理}}$ ガロワ表現 $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p} T_p E$ の像は”十分大きい”

$\xRightarrow{\text{上の定理}}$ (第 4 項の特性イデアル) \supset (第 1 項の特性イデアル)

$\xRightarrow{\text{上の同値}}$ (第 3 項の特性イデアル) \supset (第 2 項の特性イデアル)

この最後の不等式が示すべき「加藤-Rohrlich の証明のあらすじの (II)」の結論に他ならない. かくして, 非自明な Euler 系の存在は「岩澤主予想の半分」に相当する片方の包含関係を導くのである.

よって, 自然に次の問題が浮上してくる.

問題： より多くの幾何的な p 進ガロワ表現 T で, 非自明な Euler 系

$$\left\{ z_m(\ell_1 \cdots \ell_r) \in \wedge^{d^+} H_{\text{gal}}^1(\mathbb{Q}(\mu_{p^m \ell_1 \cdots \ell_r}), T^*(1)) \right\}$$

を見つけよ.

知られている Euler 系の例

Euler 系がみつまっている幾つかの状況を思い出しておく.

抑える Selmer 群	d	d^+	Euler 系	K 群の次数
\mathbb{Q} のアーベル拡大の イデアル類群	1	1	円単数	K_1
虚 2 次体のアーベル拡大の イデアル類群	2	1	楕円単数	K_1
虚 2 次体上の楕円曲線の Selmer 群	2	1	Heegner 点	K_0
楕円カスプ形式の Selmer 群	2	1	Beilinson-加藤元	K_2

Euler 系における現状と今後の課題

- 一般に, 構成法からはつくった元の非自明性はわからない (現状では L 函数の特殊値が消えていないことにより regulator map を介して非自明性を示す方法しかない).
- $d^+ > 1$ の例はほとんど知られていないようである.
- 楕円モジュラー形式の Rankin-Selberg 積 $f \otimes g$ の場合に Darmon-Rotger の仕事を修正して, Lei-Loeffler-Zerbes らが構成した Beilinson-Flach 元を用いた Euler 系がある (このとき $d = 4, d^+ = 2$). 特別な条件下で若干の応用も得られている.

Eisenstein イデアルの方法とは?

$A = T \otimes \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p$ に対して, Selmer 群は

$$\text{Sel}_{A[p^n]}(F) \underset{\text{局所条件}}{\subset} H_{\text{gal}}^1(F, A[p^n])$$

と定義されたことを思い出そう.

また, ガロワコホモロジーや群コホモロジーのよく知られた一般論によって,

$$(1) \quad H_{\text{gal}}^1(F, A[p^n]) \xrightarrow{\sim} \{0 \longrightarrow A[p^n] \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow 0\} / \sim$$

なる同一視があり, 1 次ガロワコホモロジーは自明な表現の $A[p^n]$ による拡大の同型類と一対一に対応する. よって, 自明な表現の $A[p^n]$ による拡大で局所条件をみたすものが沢山あることを言えば, $\text{Sel}_{A[p^n]}(F)$ が十分大きいことが言えるのである.

以後, A が「モジュラー」な場合を考える. つまり,

$$\text{ガロワ表現 } A \xleftrightarrow{\text{Langlands 対応}} \text{ある代数群 } G \text{ の保型表現 } \pi$$

なる状況を考える.

次をみたす組 (\tilde{G}, P) を一組選ぶ:

- G の階数 d より真に大きな階数 \tilde{d} を持つ代数群 \tilde{G}
- 放物部分群 $P \subset \tilde{G}$ で P の Levi 部分群が $G \times GL_1$ を成分として含むもの

さらに, P に関する \tilde{G} の Eisenstein series \tilde{E}_π で $L(\pi, s) | L(\tilde{E}_\pi, s)$ なるものを考える. 今, 次の合同条件を仮定する:

(C) \tilde{G} の尖点保型表現 $\tilde{\pi}$ が存在して $L(\tilde{\pi}, s) \equiv L(\tilde{E}_\pi, s) \pmod{p^n}$ をみたす.

このとき, 次が成り立つ.

補題 3.1 (Ribet の補題). 考えている \tilde{G} の尖点保型表現 $\tilde{\pi}$ に対して次の条件たち⁴を仮定する:

- $\tilde{\pi}$ に付随する $L(\tilde{\pi}, s) = L(V_{\tilde{\pi}}, s)$ となる G_F の p 進ガロワ表現 $V_{\tilde{\pi}}$ が存在する.
- $V_{\tilde{\pi}}$ は既約なガロワ表現である.

このとき, G_F の作用で安定な格子 $\tilde{T} \subset V_{\tilde{\pi}}$ をうまく取り替えて, ある階数 $\tilde{d} - d$ の $\text{mod } p^n$ 表現 $B[p^n]$ の $A[p^n]$ による非分裂な拡大

$$(2) \quad 0 \longrightarrow A[p^n] \longrightarrow \tilde{T}/p^n\tilde{T} \xrightarrow{q} B[p^n] \longrightarrow 0$$

を得ることができる.

今, 次の条件 (B) も仮定する.

(B) P の Levi 部分群の成分 GL_1 に対応して表現 $B[p^n]$ の自明な部分表現 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が存在して, (2) を $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \hookrightarrow B[p^n]$ で引き戻して得られる拡大:

$$(3) \quad 0 \longrightarrow A[p^n] \longrightarrow q^{-1}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

が非自明になる.

この (3) が各素点 (特に p 上の素点) で局所条件をみたすことを示せば, $\text{Sel}_{A[p^n]}(F) \neq 0$ が従う. この, 構成と L 函数の特殊値をつなげるために, 次の対象を考える:

- \tilde{G} の Hecke 環の $\tilde{\pi}$ に付随する成分 $\mathcal{H}_{\tilde{G}, \tilde{\pi}}$
- $\mathcal{H}_{\tilde{G}, \tilde{\pi}}$ の Eisenstein イデアル I_π

Eisenstein イデアル I_π は \tilde{E}_π と \tilde{G} のカスプ形式との合同を統制するイデアルである. 今までの議論を定量的に行うことができれば, 簡単な誤差を除いて

$$\#\mathcal{H}_{\tilde{G}}/(I_\pi, p^n) \leq \#\text{Sel}_{A[p^n]}(F)$$

が得られると期待される. Eisenstein 級数 \tilde{E}_π の定数項は $L(\pi, s)$ の特殊値と関係し, 簡単な誤差を除いて $\#\mathcal{H}_{\tilde{G}}/I_\pi$ は $L(\pi, s)$ の特殊値と結びつくことも期待される. かくして, $L(\pi, s)$ の特殊値で $\text{Sel}_{A[p^n]}(F)$ の位数を下から抑えられるという寸法である. 上のような G, \tilde{G} の重さやレベルを固定した保型形式の空間での議論だけでなく, 肥田

⁴ $\tilde{G} = GL_2$ のときには, 前者の条件は Deligne や志村 (unpublished) の結果, 後者の条件は Ribet の結果として示されていた.

変形などの変形空間においても同様な議論を展開することができる. このような議論で, $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ の部分体 F や係数加群のねじれ指数 p^n が動くときの極限をとることによる包含関係

$$(T \text{ の } p \text{ 進 } L \text{ 関数}) \supset \text{char}_{\Lambda_{\text{cyc}}} \text{Sel}_A(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))^\vee$$

が得られるはずである. 大きな群 \tilde{G} の Eisenstein イデアルを仲立ちとして, 「岩澤主予想の半分」を示すこのようなアイデアを **Eisenstein イデアルの方法** とよぶ.

今までに Eisenstein イデアルの方法が既に試みられた (G, \tilde{G}, P) がいくらかある. 特にイデアル類群の岩澤主予想に関する Ribet, Mazur-Wiles, Wiles の仕事での (G, \tilde{G}, P) は, $G = GL_1$, $\tilde{G} = GL_2$, $d = 1$, $\tilde{d} = 2$, P の Levi 部分群は $GL_1 \times GL_1$ であった. また, 前節で紹介された Skinner-Wiles の仕事での (G, \tilde{G}, P) は, $G = GL_2$, $\tilde{G} = U(2, 2)$, $d = 2$, $\tilde{d} = 4$, P の Levi 部分群は $GL_2 \times GL_1 \times GL_1$ である.

Eisenstein イデアルの方法における現状と今後の課題

- 「1次ガロワコホモロジーの解釈」をそのまま使うには, $\tilde{d} - d = 1$ の状況が望ましいが, その場合 \tilde{G} の対称空間には代数多様体の構造が入らないかもしれない (例えば, $G = GL_2$, $\tilde{G} = GL_3$ のとき).
- 一方で, 上の議論の条件 (B) でみたように, $\tilde{d} - d > 1$ の場合にはうまく非自明な拡大を取り出す部分で苦労する (例えば $G = GL_2$, $\tilde{G} = U(2, 2)$ のとき)
- Euler 系側での「加藤, Perrin-Riou, Rubin による Euler system bound の定理」や Mazur-Rubin の研究で一般論が確立され, 一般論を整備した多くの論文が出ている. 一方で, Eisenstein イデアルの側では文献が少なく数少ない文献における議論も ad hoc であったりほとんど詳細がなかったりする. Euler 系の側では数多く存在するような定量的評価の一般論の文献も見当たらないようである.

4. p 進保型 L 関数に関連する諸問題: 高次元 p 進 L 関数の深い理解を目指して

予想 B は, 前節で論じた予想 A や予想 C に比べるとより多くの部分的な進展がみられ, 予想 B の研究を深めていくことは, 予想 A や予想 C の一つの突破口になるのではと感じている. この節では, 予想 B のもう少し正式な定式化を述べた上で, 基本的な GL_2 の場合の復習や現状を論じる.

状況設定として:

$T \cong \mathbb{Z}_p^{\oplus d}$: 絶対ガロワ群 $G_{\mathbb{Q}}$ のモチーフから来るような幾何的な連続表現, $V = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$

が与えられているとする. $D_{\text{crys}}(V)$ を Fontaine のフィルター加群, φ をフロベニウス作用素とするとき,

$$L(V, s) := \prod_{\ell \neq p} \det(1 - \text{Frob}_\ell X; V^{\ell})|_{X=\ell^{-s}} \times \det(1 - \varphi X; D_{\text{crys}}(V))|_{X=p^{-s}}$$

と Hasse-Weil L 関数を定める. ただし, 次が知られていることに注意する.

- $\det(1 - \text{Frob}_\ell X; V^{I_\ell}), \det(1 - \varphi X; D_{\text{crys}}(V)) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ が成り立つ⁵.
- w を V に付随するモチーフの重さとするとき, $L(V, s)$ は $\text{Re}(s) > \frac{w}{2} + 1$ で絶対収束する.

予想 4.1 (Hasse-Weil 予想). V を幾何的な p 進表現, w を V に付随した純モチーフの重さとするとき次が期待される:

- $L(V, s)$ は全 \mathbb{C} 平面に有理型に解析接続されるだろう
- V が r 回 Tate ひねり表現 $\mathbb{Q}_p(r)$ を含まなければ $L(V, s)$ は正則
- 適当な Γ 関数からなる「無限因子」 $\Gamma(V, s)$ によって $\Lambda(V, s) = \Gamma(V, s)L(V, s)$ とおくととき, 函数等式:

$$\Lambda(V, s) = a(V)^{\frac{w+1}{2}} \epsilon(V) \Lambda(V^*, 1-s)$$

が成り立つだろう. ここで, $a(V) \in \mathbb{Z}$ は V の Artin 導手, $\epsilon(V) \in \mathbb{C}$ は V の epsilon 因子とよばれる不変量である.

以下, 与えられたガロワ表現に対しては常に Hasse-Weil 予想を仮定することとする.

$\text{Crit}(V) \subset \mathbb{Z}$ を

$\text{Crit}(V) := \{j \in \mathbb{Z} \mid L(V, s), L(V^*(1), s) \text{ の無限因子が } s = j \text{ で pole を持たない}\}$ とおく.

- 例 4.1.**
- $V = \mathbb{Q}_p$ ならば $\text{Crit}(V) = \{\text{正の偶数}\} \cup \{\text{負の奇数}\}$ である (このとき, $L(V, s)$ は Riemann のゼータ函数 $\zeta(s)$ に一致することに注意する).
 - V が Artin 表現の Tate ひねりでないならば $\text{Crit}(V)$ は有限集合である.
 - V が重さ $k \geq 2$ の Hecke 固有カスプ形式に対して Deligne や志村 (unpublished) が与えたガロワ表現 V_f のとき, $\text{Crit}(V) = \{1, 2, \dots, k-1\}$ となる.

定義 4.1. \mathbb{M}_V を V に対応するモチーフ, \mathbb{Q}_V を \mathbb{M}_V の係数体とする.

(1) **周期写像**を以下の合成写像として定義する:

$$\begin{aligned} \text{Per}^\pm(V(j)) : H_{\text{Betti}}(\mathbb{M}(j))^\pm \otimes_{\mathbb{Q}_V} \mathbb{C} &\hookrightarrow H_{\text{Betti}}(\mathbb{M}(j)) \otimes_{\mathbb{Q}_V} \mathbb{C} \\ &\xrightarrow[\text{de Rham の定理}]{\sim} H_{\text{dR}}(\mathbb{M}_V(j)) \otimes_{\mathbb{Q}_V} \mathbb{C} \rightarrow \text{Fil}^0 H_{\text{dR}}(\mathbb{M}_V(j)) \otimes_{\mathbb{Q}_V} \mathbb{C}. \end{aligned}$$

(2) $\text{Per}^{(-1)^j}(V(j))$ が同型のとき, **周期**を

$$\Omega^\pm(V(j)) = \det(\text{Per}^\pm(V(j)))$$

と定義する.

$\text{Crit}(V), \text{Per}^\pm(V(j))$ に関する大事な定義や性質をまとめておく.

- $j \in \mathbb{Z}$ に対して「 $j \in \text{Crit}(V) \Leftrightarrow \text{Per}^{(-1)^j}(V(j))$ が同型」なる同値が成り立つ.

⁵ $\ell \neq p$ で良還元を持つ場合は Deligne による. 一般の場合や p での Euler 因子では Rapoport-Zink, de Jong, Katz-Messing などの結果を組み合わせる従う.

- $\Omega^\pm(V(j)) \in \mathbb{C}$ は $H_{\text{Betti}}(\mathbb{M}(j))^{\pm} \otimes_{\mathbb{Q}_V}$ や $\text{Fil}^0 H_{\text{dR}}(\mathbb{M}_V(j)) \otimes_{\mathbb{Q}_V}$ の \mathbb{Q}_V 基底の選び方に依存するが, $\mathbb{C}/(\mathbb{Q}_V)^\times$ の元として well-defined である.
- $j, j+2 \in \text{Crit}(V)$ ならば $\frac{\Omega^{(-1)^j}(V(j+2))}{\Omega^{(-1)^j}(V(j))} \sim (2\pi\sqrt{-1})^{2d+}$ が成り立つ.

p 進 L 函数の存在予想を述べる準備

$L(V, s)$ を Dirichlet 指標でひねった L 函数の特殊値を p 進補間する p 進 L 函数の存在定理 (基本予想 B) を正確に述べたい. そのために幾らか準備をしておく.

予想 4.2 (Deligne による特殊値の代数性予想). ϕ を Dirichlet 指標, $j \in \text{Crit}(V \otimes \phi)$ とするとき,

$$\frac{L(V, \phi, j)}{\Omega^{(-1)^j \phi(-1)}(V(j))} \in \mathbb{Q}_V[\phi, \tau(\phi)]$$

が成り立つだろう.

$\mathbb{Q}_V[\phi] \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ より, Deligne 予想によって $\frac{L(V, \phi, j)}{\Omega^{(-1)^j \phi(-1)}(V(j))}$ は自然に p 進数とみなせることに注意する.

定義 4.2 (Panchishkin 条件). V を $G_{\mathbb{Q}}$ の幾何的な p 進ガロワ表現, $D_p \subset G_{\mathbb{Q}}$ を p での分解群とする. 部分 $\mathbb{Q}_p[D_p]$ 加群 $\text{Fil}_p^+ V \subset V$ が存在して,

$$\begin{cases} \text{Fil}_p^+ V \text{ の Hodge-Tate weight は全て正} \\ V/\text{Fil}_p^+ V \text{ の Hodge-Tate weight は全て 0 以下} \end{cases}$$

がともに成り立つとき, V は p で **Panchishkin 型** であるという.

上の定義において, Hodge-Tate weight の定義を説明しなかった. Hodge-Tate weight の定義を復習しない代わりに Panchishkin 型の具体例を述べておく.

- 例 4.2.**
- $V = V_p E$ (E は楕円曲線) のとき, 次は同値である: V が p で Panchishkin 型 $\Leftrightarrow E$ は p で通常の.
 - $V = V_f$ (f : 重さ $k \geq 2$ の Hecke 固有カスプ形式) のとき, 次は同値である (Deligne, Wiles らの結果):
 V が p で Panchishkin 型 $\Leftrightarrow a_p(f)$ が p 進単数.

以上の準備のもと, 「 p 進 L 函数の存在予想」は以下のように定式化される:

予想 4.3 (Coates–Perrin–Riou, Panchishkin 他). V を幾何的なガロワ表現として, $\text{Crit}(V) \neq \emptyset$, V は p で Panchishkin 型であることを仮定する. さらに, 周期 $\Omega^\pm(V)$ を固定する.

このとき, $L_p(V, \Omega^\pm(V)) \in \Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ が一意に存在して, $j \in \text{Crit}(V \otimes \phi)$ なる勝手な $j \in \mathbb{Z}$, 重さ 0 の勝手な数論的指標 ϕ に対して次が成り立つ:

$$\chi_{\text{cyc}}^j \phi(L_p(V, \Omega^\pm(V))) = \Gamma(V, j) \times \text{Eul}(V, \phi, j) \times \tau(\phi) \times \frac{L(V, \phi, j)}{\Omega^{(-1)^j \phi(-1)}(V)(2\pi\sqrt{-1})^j}$$

ただし, $\tau(\phi) := \sum_{i=1}^{\text{Cond}(\phi)} \phi(i) \zeta_{\text{Cond}(\phi)}^i$ は Gauss 和とする. $\text{Eul}(V, \phi, j)$ の定義は述べないが適当な Euler 因子である.

楕円曲線の場合の構成の一般的なあらすじ

E が \mathbb{Q} 上の楕円曲線で $V = V_p E$ のときには, 定理 2.3 で結果のみを紹介したように基本予想 B は既に示されている. 一般の場合の展望を得るための指針ともなるので, この場合の証明のあらすじを紹介したい.

まず, Wiles, Taylor-Wiles, Breuil-Conrad-Diamond-Taylor らによる志村-谷山予想の解決のおかげで, $L(E, s) = L(f_E, s)$ となる重さ 2 の Hecke 固有カスプ形式 f_E が存在する. 知られている全ての例の p 進 L 関数の構成は非常に「モジュラー的」なので, 今の場合も, 実際のところ E に付随する Hecke 固有カスプ形式 f_E に対する p 進 L 関数を構成する.

構成は主に次の流れで行われる

(I) [有限レベルでの測度]

各 $n \in \mathbb{N}$ で,

$$\phi(\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V))) = \text{Eul}(V, \phi, 0) \times \tau(\phi) \times \frac{L(V, \phi, 0)}{\Omega^{\phi(-1)}(V)}$$

をみたく $\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V)) \in \mathbb{Q}_p[G_{\text{cyc}, n}]$ を構成する.

(II) [distribution property]

各 $n \in \mathbb{N}$ で, 自然な射 $\mathbb{Q}_p[G_{\text{cyc}, n+1}] \rightarrow \mathbb{Q}_p[G_{\text{cyc}, n}]$ において, $\Xi_{n+1}(f_E; \Omega^\pm(V))$ の像が $\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V))$ に等しく $\{\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V))\}_{n \in \mathbb{N}}$ が射影系をなすることを示す.

(III) [有界性]

$\chi_{\text{cyc}, n}(\gamma_n(a)) = a \bmod p^n$ なる一意的な元 $\gamma_n(a) \in G_{\text{cyc}, n}$ を用いて, $\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V))$ を

$$\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V)) = \sum_{\substack{0 < a < p^n \\ (a, p) = 1}} c_n(a) \gamma_n(a)$$

と展開するとき, $n \in \mathbb{N}$ や $0 < a < p^n$ なる自然数 a がうごくときの $c_n(a) \in \mathbb{Q}_p$ の分母たちが有界であることを示す.

(II), (III) より, $L_p(V; \Omega^\pm(V)) := \varprojlim_n \Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V))$ は $\Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の元となり, (I) より $L_p(V; \Omega^\pm(V))$ は望む補間性質をみたく.

もちろん, (I) において $\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V))$ を具体的に構成できることが大事であり, この $\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V))$ の構成には, 「モジュラーシンボルの方法」 or 「Rankin-Selberg の方法」 の大きく二つの異なる方法がある. 以下, それぞれの場合に $\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V))$ の構成のみ紹介しておく

モジュラーシンボルの方法による構成

Manin, Mazur らによる元々の構成はモジュラーシンボルの手法を用いて行われた. \mathfrak{h} の境界であるカスプ $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ の 2 点 P, Q を結ぶ \mathfrak{h} 上の経路 $\{P, Q\}$ を **モジュラーシンボル** とよぶ.

Mellin 変換の公式によって, 導手 p^n の Dirichlet 指標 ϕ に対して

$$\tau(\phi) \frac{L(E, \phi^{-1}, 1)}{2\pi\sqrt{-1}} = \sum_{\substack{0 < a < p^n \\ (a, p) = 1}} \phi(a) \int_{\{\frac{a}{p^n}, \infty\}} f_E(z) dz$$

となる. このことから, 欲しい $\Xi_n(f_E; \Omega^\pm(V)) = \sum_{\substack{0 < a < p^n \\ (a, p) = 1}} c_n(a) \gamma_n(a)$ の $\gamma_n(a) \in G_{\text{cyc}, n}$ の係数 $c_n(a) \in \mathbb{Q}_p$ を以下のように定めればよい:

$$c_n(a) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 < a < p^n \\ (a, p) = 1}} \left(\frac{1}{\alpha_E} \right)^n \frac{\int_0^{\sqrt{-1}\infty} \left(f_E(z + \frac{a}{p^n}) + f_E(z - \frac{a}{p^n}) \right) dz}{\Omega_E^+} \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 < a < p^n \\ (a, p) = 1}} \left(\frac{1}{\alpha_E} \right)^n \frac{\int_0^{\sqrt{-1}\infty} \left(f_E(z + \frac{a}{p^n}) - f_E(z - \frac{a}{p^n}) \right) dz}{\Omega_E^-}$$

Rankin-Selberg の方法による構成

以下, $\begin{cases} \psi_\pm(-1) = \pm 1 \\ L(E, \psi_\pm, 1) \neq 0 \end{cases}$ なる Dirichlet 指標 ψ_\pm を固定する.

(ただし, $(\text{Cond}(\psi_\pm), \text{Cond}(E)) = 1$ とする)

$\psi_\pm \phi(-1) = -1$ となる Dirichlet 指標 ϕ に対して, 重さ 1 の Eisenstein 級数 $G_\phi^{\psi_\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(G_\phi^{\psi_\pm}) q^n$ で $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(G_\phi^{\psi_\pm})}{n^s} = L(\psi, s)L(\phi, s)$ となるものをとる.

補題 4.1. $D(f_E, G_\phi^{\psi_\pm}, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f_E) a_n(G_\phi^{\psi_\pm})}{n^s}$ とおくと,

$$D(f_E, G_\phi^{\psi_\pm}, s) = \frac{L(E, \psi_\pm, s)L(E, \phi, s)}{L(\psi_\pm \phi, s)}$$

が成り立つ. ただし, $L(\psi_{\pm}\phi, s)$ は *Dirichlet L* 函数とする.

定義 4.3 (Pettersson 内積). $f \in S_2(\Gamma_1(M))$, $h \in M_2(\Gamma_1(M))$ に対して **Pettersson 内積** を

$$\langle f, h \rangle := \int_{\mathfrak{H}/\Gamma_1(M)} \overline{f(z)} h(z) dz$$

で定める.

補題 4.2 (志村). $D(f_E, G_{\phi}^{\psi_{\pm}}, 1) = \text{簡単な有理定数} \times \langle f_E, G_{\phi}^{\psi_{\pm}} G_{\psi_{\pm}\phi}^1 \rangle$ が成り立つ (ここで, 新しく現れた重さ 1 の *Eisenstein* 級数 $G_{\psi_{\pm}\phi}^1$ は *unfolding* の *Eisenstein* 級数とよばれる).

定理 4.1 (志村). 正しい偶奇性を持つ勝手な ϕ に対して

$$\frac{\langle f_E, G_{\phi}^{\psi_{\pm}} G_{\psi_{\pm}\phi}^1 \rangle}{\langle f_E, f_E \rangle} \in \mathbb{Q}[\psi_{\pm}, \phi] \quad (\text{複合同順})$$

志村の定理によって, $\Omega_E(\psi_{\pm}) := \text{簡単な有理定数} \times \frac{L(\psi_{\pm}\phi, 1) \langle f_E, f_E \rangle}{L(E, \psi_{\pm}, 1)}$ とおくと

$\frac{L(E, \phi^{-1}, 1)}{\Omega_E(\psi_{\pm})} \in \mathbb{Q}[\psi_{\pm}, \phi]$ である.

$\gamma_n(a) \in G_{\text{cyc}, n}$ の係数 $c_n(a) \in \mathbb{Q}_p$ を以下のように定めて $\Xi_n(f_E; \Omega^{\pm}(V))$ を得る:

$$c_n(a) := \sum_{\substack{0 < a < p^n \\ (a, p) = 1}} \left(\frac{1}{\alpha_E} \right)^n \frac{\langle f_E, R_n^+(a) \rangle}{\langle f_E, f_E \rangle} + \sum_{\substack{0 < a < p^n \\ (a, p) = 1}} \left(\frac{1}{\alpha_E} \right)^n \frac{\langle f_E, R_n^-(a) \rangle}{\langle f_E, f_E \rangle}.$$

ただし, $R_n^{\pm}(a)$ は以下で定めるモジュラー形式とする:

$$R_n^{\pm}(a) := \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \left(\sum_{\substack{\phi \pmod{p^n} \text{ の Dirichlet 指標} \\ \psi_{\pm}\phi(-1) = -1}} \phi^{-1}(a) G_{\phi}^{\psi_{\pm}} G_{\psi_{\pm}\phi}^1 \right).$$

今までに p 進 L 函数の構成が「試みられた」状況

上で有理数体上の GL_2 の場合の p 進 L 函数について解説した. より高次元の場合にも 1 変数円分 p 進 L 函数の構成の試みがなされている. それらをいくらか思い出してリストアップしておきたい.

- 総実体上の GL_1 の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Deligne-Ribet: Hilbert モジュラー多様体のコンパクト化を用いる方法)
(Barsky, Cassou-Noguès: コーン分解と新谷理論の方法)
- CM 体上の GL_1 の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Katz: (実解析的な) *Eisenstein* 級数の p 進変形族の CM 点における特殊化の方法)

- 総実体上の GL_2 の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Manin: Hilbert モジュラー多様体の高次元モジュラーシンボル・サイクルの方法)
- 一般の代数体上の GL_2 の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Haran: 付随する対称空間上の高次元モジュラーシンボル・サイクルの方法)
- GL_2 の保型形式 f の対称積 $\text{Sym}^2 f$ に付随する p 進 L 函数
(Coates-Schmidt, Schmidt: Rankin-Selberg の方法)
- Shalika モデルを持つ GL_{2n} の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Ash-Ginzburg: 高次元モジュラーシンボル・サイクルの方法)
(Warning! レベルは p と素, 最小のコホモロジカルな重さなどの強い制限, 周期は Deligne の予想する幾何的な周期と一致するか不明)
- $GL_n \times GL_{n+1}$ の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Schmidt, Januszewski: 高次元モジュラーシンボル・サイクルの方法)
(Warning! レベルや重さにも制限あり, 周期は Deligne の予想する幾何的な周期と一致するか不明, 異なる critical value j の間の「横方向の congruence」が未解決, 「縦方向の congruence」は示されている)
- GL_3 の保型表現に付随する p 進 L 函数
(Mahnkopf: Rankin-Selberg の方法)
(Warning! レベルにおそらく制限あり, 最小のコホモロジカルな重さなどの強い制限, 周期は Deligne の予想する幾何的な周期と一致するか不明)

以上, いくつかの仕事を挙げてみた. ここでは, 円分変形の p 進 L 函数に限って紹介している. 反円分変形や肥田変形などでの p 進 L 函数などは一切考えていない. また, ここで触れたもの以外にも GS_{p_4} の standard 表現の場合なども含めていくらか仕事があると思われる. ここで全てを網羅することは不可能なのでこれくらいにとどめておく.

高次元 p 進 L 函数に関連した研究の現状と今後の課題

p 進 L 函数の構成や性質に関連する大事な問題をリストアップしておく.

- p 進 L 函数を考えるには, 先の Deligne 予想でも現れたような複素周期 $\Omega^\pm(V)$ が大事である. また, 複素周期の取り方はあまり標準的なものがないが, 対応するモチーフの de Rham 実現や Betti 実現を正しく正規化して, p 進単数による乗法を除いて well-defined な **p -optimal な周期**に正規化したい.
(例えば, 先述の第 2 節の Néron 周期 Ω_E^\pm , Katz の CM 周期などは p -optimal である)
 p -optimal な周期は Birch-Swinnerton-Dyer 予想やその一般化のような特殊値の精密な予想と対応するという動機からしても大事である.
- 正しく p -optimal に正規化された複素周期に対応する p 進 L 函数は, (a priori には単に $\Lambda_{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の元であったが) Λ_{cyc} の元になるという**整性**が成立すると期待される. 整性はもっともらしいが決して自明なことではなく, 楕円モジュラーカスプ形式の p 進 L 函数の場合にも正確な定義と精密な仕事によって初めて示される事実である.

- V が保型表現のテータ対応の理論などによって複数の「geometric origin」を持つとき「 p -optimal な周期」同士の比は p 進単数か?
 例えば, レベルが p と素な重さ 2 の CM 楕円カスプ形式 f を考えるとき, f に対して定まる二つの p -optimal な周期「 p -optimal なモジュラーシンボル型周期」と「Katz の CM 型周期」の比が p 進単数になることが Wiles の 1995 年の有名な論文の中で示されている. ただこの比が p 進単数になることは, レベルが p で割れたり重さが 3 以上の CM 楕円カスプ形式に対しては一般に未解決である. 他に, 楕円カスプ形式 f の adjoint L 函数 $L(\text{ad}(f), s)$ の場合には, Prasanna (2003 年, 博士論文), 市野-Prasanna によって, 「 p -optimal なモジュラー曲線型周期」と「 p -optimal な志村曲線型周期」の比が p 進単数になることが示されている.
- 上で見たように, 高次元での p 進 L 函数の知られた構成では最小のコホモロジカルな重さを持つ保型表現に限られていることが多い. この場合には, 保型表現に付随する Betti 実現が, 志村多様体や対称空間上の定数局所系のコホモロジーで得られている. その Betti 実現が志村多様体や対称空間上の非定数局所系のコホモロジーで得られるような高い重さを持つ保型表現の p 進 L 函数の構成への一般化が期待される⁶.
- 上で見たように, 高次元での p 進 L 函数の知られた構成では分岐する素点の Euler 因子が抜けていたり無限素点の積分が具体的に計算されていなかったりすることがある. これら分岐する素点や無限素点における問題を個別に解決していく必要がある. 織田スクールによる積分表示の無限成分の具体計算の蓄積, B.Sun の一般的な非消滅定理など保型表現に現れる無限素点の積分の計算にも進歩があるようである.
- GL_1 の p 進 L 函数の特殊値には零でない値が沢山あり, このことから p 進 L 函数が自明でない (つまり, 恒等的に零ではない) ことは明らかである. 一方で, 定理 2.3 の楕円曲線の p 進 L 函数を考えると, 楕円曲線の Mordell-Weil ランクが零でないときは p 進 L 函数の $s = 1$ での特殊値が消える. それ以外の点の中に零でない値があるかどうかは明らかではなく, したがって p 進 L 函数が非自明であることを示すことは大事な課題である. 構成した p 進 L 函数の非自明性を示すためには, 保型 L 函数の特殊値を p ベキの導手を持つ指標たちでひねったときに特殊値が零でないということを示さねばならない. $GL_2(\mathbb{Q})$ のときは, Rohrlich によってこのような結果は知られているが, $GL_2(\mathbb{Q})$ 以外の代数群に付随した保型 L 函数ではこのような generically non vanishing はほとんど知られていない⁷.
- 構成した p 進 L 函数が岩澤不変量 $\mu = 0$ を持つこと (つまり, mod p で零でないこと) を示すためには, 保型 L 函数を p ベキの導手を持つ指標たちでひねったときに特殊値が mod p で消えないことを示したい. $GL_1(\mathbb{Q})$ のときは, Ferrero-Washington, Sinnott らによって示されているが, $GL_2(\mathbb{Q})$ のときは周

⁶現状でさばらずに高い重さが扱われているのは GL_2 のときのみかもしれない.

⁷重さ $(2, \dots, 2)$ を持つ Hilbert カスプ形式の場合でも知られていない.

期を p -optimal にとったときの p 進 L 関数の $\mu = 0$ 予想は大事な未解決問題である.

以上, 取り留めもなく問題点やこれからの課題を挙げてみた. p 進 L 関数の構成や性質を調べる問題は, 予想 A, C に比べると手のつく問題も沢山あるように思われる. また, p 進 L 関数の研究での知見の蓄積は Euler 系の構成などにもヒントを与え得るのではないだろうか. 岩澤理論の高次元化への直近の課題としては, 特に p 進 L 関数の研究が大事なように思われるのである.

5. 岩澤理論の高次元化と多変数化から派生する新しい問題: 周辺の数学領域との相互作用を目指して

高次元化に加えて (モチーフやガロワ表現の変形からくる) **多変数化** も組み合わせることで, 「**ガロワ変形の岩澤理論**」とでも言うべきさらなる一般化も考えられる. そして, このような高次元かつ多変数の岩澤理論と長く向き合っていると, 周辺分野との新しい相互作用を孕んだ様々な自然な問題に思い至るのである. この論説の最後に, 今後の方向性を提示すると同時にそれと関係した新しい研究領域の可能性を考えたい.

- 従来の岩澤理論では, \mathbb{Z}_p^d 拡大のガロワ群に対する岩澤代数のような正則局所環上で物事を考えた. ガロワ変形に対する岩澤理論の一般化では肥田の Hecke 環のような特異点を許す環上で物事を考える必要がある.
⇒ **正則でない混標数完備局所環の研究**が必要となる. 例えば, 特異点を持ち得る混標数の完備局所環に対して, local Bertini theorem と超平面切断の族での特性イデアルたちから元の完備局所環上の加群の特性イデアルを復元する問題 (下元-落合), 加群の擬零部分群や加群のホモロジー次元の研究 (Greenberg), など岩澤理論の一般化の研究から派生する可換環論の自然な問題の研究が行われている.
- 非可換環岩澤理論と高次元化や多変数化の岩澤理論の融合も大事な課題になってきている.
⇒ **非可換環上の加群の構造の研究**が必要となる. 非可換の岩澤代数上の加群の構造に対しては, Venjakob をはじめとした人々よりいくらか研究がなされたが, まだ調べることが沢山残されているように思われる.
- 従来の岩澤理論では, p での局所理論として p 進 Hodge 理論が大事な道具立として大事であった.
⇒ 必ずしも \mathbb{Z}_p^d 拡大からは来ないガロワ変形を考える p 進ガロワ変形に適用できる **p 進ガロワ変形の p 進 Hodge 理論**が大事になりそうである. Sen の理論や (Φ, Γ) 加群の理論などはある程度普通の p 進表現を変形に置き換えても成り立つことがあるが, やはりまだ変形の岩澤理論の必要性などの観点から見ると p 進 Hodge 理論は整備され尽くされていないように思われる. また, 岩澤理論ではフィルター加群や周期環の integral structure の理解も大事であるが, やはり integral structure の取り扱いに関してもわからないことも多いように思われる.

- ガロワ変形の Euler 系の理論 (落合 2005) の研究において, 群のコホモロジーの取り扱いの難しさから技術的条件が課されていた. 技術的の一つとして副有限群のコホモロジーに関する未解決の問題が残されている.
⇒ **p 進 Lie 群とは限らない巨大な p 進解析的群の研究**, 特にそのような群の表現やコホモロジー群の研究が必要である. 例えば, 肥田変形の高次元ガロワ像で現れる $GL_n(\Lambda_{\text{cyc}})$ の閉部分群には巨大な p 進解析的群が現れる. このような群に対して, 適切な「有限性定理」は期待できるだろうか? p 進 Lie 群のコホモロジーの有限性定理を得るには, p 進 Lie 群と p 進 Lie 環を結びつける Lazard 理論が大事な役割を演じた. p 進 Lie 群における一連の Lazard 理論は肥田理論の高次元ガロワ像に現れる巨大な副有限群などに一般化されるだろうか?
- 前節で詳しく述べた p 進 L 関数の構成や様々な問題は直近の課題である.
⇒ そのためには, まず**保型 L 関数と保型周期の理解**が大事になる. 特に, 保型周期の様々な関係式, 保型 L 関数に付随した無限素点や悪い有限素点での局所積分の具体表示, 様々な non vanishing の定理が期待される. これらの研究においては, 技術的には可能でも動機の欠如から停滞している問題もあるかもしれない. p 進 L 関数の研究などからくる必要性を明らかにしていくことで発展が期待される.

などが, 岩澤理論の高次元化と多変数化を追求していくことで出会う様々な周辺の数学領域との絡みの一例である.

最後に

岩澤理論は遠くの滝の上に美しくかかる虹のような孤高の美しさだけに終わるものではなく, 今もダイナミズムも失っていないように思う. 今後の新しい数学を生む起爆剤を沢山隠し持っており, 新しい参入者によってさらに大きく成長していくことが期待される.

この原稿のかなりの部分は, 拙著「岩澤理論とその展望(上)」と「岩澤理論とその展望(下)」⁸の内容に含まれる. 岩澤理論においても時代の変化につれて大事なポイントが変わって来ており, 今後の指針として特に初学者に手にとってもらえれば幸いである. 本項の執筆では, 多くのことに対して正確な記述が与えられなかったり, 参考文献をあげる時間的余裕がなかったので一切参考文献を挙げなかった. これらに関しても上述の拙著に譲り, そちらを参照していただくことでお許し願いたい.

⁸下巻は現在原稿修正中です.

ルート系のゼータ関数について

松本耕二*

概要

ルート系のゼータ関数とは、Euler, Hoffman, Zagier らによって研究が開始された多重ゼータ関数と、Lie 代数に付随して定義される Witten のゼータ関数の双方を統合した、多変数の多重ゼータ関数である。本稿では、筆者が小森靖氏、津村博文氏と共に研究を進めて来た、ルート系のゼータ関数の理論の現状を解説する。

1 Euler-Zagier の多重和

多重ゼータ関数の理論の源流は、18 世紀の Euler の研究にまで遡ることができるし、また 20 世紀初頭に行なわれた Barnes や Mellin の研究、1970 年代の新谷卓郎氏の研究も重要なものである。しかし、多重ゼータ関数の研究が爆発的に発展し始めるのは 1990 年代になってからである。1990 年頃、Drinfel'd, Kontsevich, Zagier といった人々によって、ある種の多重ゼータ関数と数学や数理論理学のさまざまな分野との関連が見いだされ、多重ゼータ関数は一挙に多くの研究者の注目を集める対象となった。

この大発展初期の時点において、おそらくもっとも大きい影響を与えた論文は、Zagier が第一回ヨーロッパ数学会議の報告集に寄稿した [74] であろう。

この論文の中で Zagier は、二種類の極めて重要な多重ゼータ関数のクラスを導入している。そのひとつは、複素変数 s_1, \dots, s_r に対して定義される多変数の多重級数¹

$$\zeta_{EZ,r}(s_1, \dots, s_r) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} (m_1 + m_2)^{s_2} \cdots (m_1 + \cdots + m_r)^{s_r}} \quad (1.1)$$

である。この級数は

$$\Re s_r > 1, \Re(s_{r-1} + s_r) > 2, \dots, \Re(s_1 + \cdots + s_r) > r \quad (1.2)$$

においてコンパクト一様に絶対収束する ([39])。

*名古屋大学大学院多元数理科学研究科

¹Zagier は上のように多重和の順序を定めているが、これとは逆の順序で多重和を定義する流儀もあるので注意を要する。

ただし、Zagier がこの論文で議論しているのは s_1, \dots, s_r がすべて整数で、上記の絶対収束領域 (1.2) に入っている時の特殊値だけである。このような特殊値は**多重ゼータ値** (multiple zeta value, 略して MZV) と呼ばれ、Zagier 以降、今日に至るまで多くの数学者によって非常に精力的に研究されて来ている。このような特殊値は、 $r = 2$ のときには既に Euler が研究していた。そのことにちなんで、和 (1.1) を **Euler-Zagier の多重和**² と呼ぶ。

複素関数としての (1.1) は、 $r = 1$ のときは言うまでもなく、Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \quad (1.3)$$

に他ならない。Atkinson [6] は 1949 年、Riemann ゼータ関数の二乗平均値の考察、という文脈の中で $r = 2$ の場合の (1.1) に遭遇し、その解析接続を論じている。Atkinson の出発点になったのは**調和積公式**

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) + \zeta_{EZ,2}(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2) \quad (1.4)$$

である。この式自体は $\zeta(s)$ の定義式 (1.3) を左辺に代入して和を分割するだけで簡単に証明できる。

一般の r の場合の (1.1) の解析接続の研究史は少々錯綜しているので、この機会に少し詳しく述べておく。1995 年、Essouabri [11] は非常に一般的な形の、ただし一変数の多重 Dirichlet 級数の解析接続³ を論じ、その中で、彼の方法が多変数の場合にも適用できることを一言コメントしている。その場合、彼の方法は特に (1.1) の解析接続を与える。ただし [11] は未発表の学位論文であり、その理論を雑誌上で公表した [12] においては多変数の場合についてのコメントは述べられていない。多変数の場合の Essouabri の理論について初めて出版物上で詳しく記述したのはおそらく de Crisenoy [10] である。

Zagier らの研究に端を発する問題意識の流れの中では、例えば Goncharov のプレプリント [13] に (1.1) の解析接続の証明がある。また Zagier も早くから証明を持っていた、との説もある。荒川氏と金子氏の論文 [2] では変数 s_r のみについての解析接続が行なわれているが、筆者は生前の荒川氏から、この方法を他の変数にまで拡張することも可能である、と教えられた。

出版物上で (1.1) の多変数関数としての解析接続を初めて詳しく証明したのは、Zhao の論文 [75] と、またそれとは独立に秋山氏、江上氏、谷川氏の共著 [1] である。Zhao の証明は Gel'fand-Shilov の一般関数の理論に基づく⁴

²ただし、出版年としては Zagier [74] よりも早く、Hoffman [16] も同じ多重和を導入して考察しているので、本当は Hoffman の名前も付け加えるべきである。

³Essouabri の研究は、新谷氏による総実代数体の Hecke の L 関数の特殊値の研究を契機として、その後 Cassou-Noguès, Sargos, Lichtin など、主としてフランス学派によって展開されて来た、多重 Dirichlet 級数の理論の流れの中に位置づけることができる。

⁴ただし Zhao の議論は不完全であるとの批判もある。Zhao の積分表示に基づきながら古典的な解析の道具だけで行なう証明を後に小野塚氏 [61] が提示している。

もので、他方秋山氏たちは Euler-Maclaurin の和公式を用いる論法で証明を行なっている。

その後、Mellin-Barnes 積分を用いる筆者の証明 [40] [41]、二項展開に基づく簡明な Murty と Sinha の証明 [51]⁵、また高次元の contour 積分を使う小森氏の証明 [24] なども現れ、(1.1) の解析接続は今日では種々の手法で証明できる基本的な事実となっている。

解析接続が確立されると、それを基盤として、さらに深い解析的な性質を追求しよう、とする動きが出てくるのは当然のことである。多重ゼータ関数の絶対値の大きさ、平均値、零点の分布ないしは zero-divisor の挙動、負の整数点の周りでの振舞いなどについて、とりあえず手がつけやすい $r = 2$ の場合などを当面の対象として、いくつかの研究がなされつつある。この方向は本稿のテーマからは外れるので詳しくは述べないことにするが、ただ、後節との関係で、 $r = 2$ の場合の関数等式についての結果だけ、ここで書き下しておく。まず

$$g_{EZ,2}(s_1, s_2) = \zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) - \frac{\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(s_2)} \Gamma(s_1 + s_2 - 1) \zeta(s_1 + s_2 - 1) \quad (1.5)$$

とおく。このとき筆者 [43] は、**関数等式**

$$\frac{g_{EZ,2}(s_1, s_2)}{(2\pi)^{s_1+s_2-1} \Gamma(1-s_1)} = \frac{g_{EZ,2}(1-s_2, 1-s_1)}{i^{s_1+s_2-1} \Gamma(s_2)} + 2i \sin\left(\frac{\pi}{2}(s_1 + s_2 - 1)\right) F_+(s_1, s_2) \quad (1.6)$$

が成り立つことを証明した。ただしここに

$$F_{\pm}(s_1, s_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{s_1+s_2-1}(k) \Psi(s_2, s_1 + s_2; \pm 2\pi i k) \quad (1.7)$$

であり、 $\sigma_a(k) = \sum_{d|k} d^a$ 、また Ψ は

$$\Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty e^{i\phi}} e^{-xy} y^{a-1} (1+y)^{c-a-1} dy$$

($\Re a > 0, -\pi < \phi < \pi, |\phi + \arg x| < \pi/2$) で定義される合流型超幾何関数である。

この関数等式の右辺の第二項は、超平面

$$\Omega_{2k+1} = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \mid s_1 + s_2 = 2k + 1\} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

の上では 0 になるので、 Ω_{2k+1} に制限したときの (1.6) は美しい対称的な形を与える。(ただし $k = 0$ のときは Ω_1 は $\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2)$ の singular locus に

⁵同じ着想による証明を、筆者は 2004 年頃、安田正大氏から口頭で聞かされたことがある。

なるので意味がないが。) この意味で (1.6) は無限枚の超平面上で成り立つ対称形関数等式を繋ぐ「メタ関数等式」とでも言うべきもの⁶である。

なお (1.7) で定義した F_{\pm} のうち、 F_{-} の方は (1.6) 式には現れないのであるが、実は

$$g_{EZ,2}(s_1, s_2) = \Gamma(1 - s_1)\{F_{+}(1 - s_2, 1 - s_1) + F_{-}(1 - s_2, 1 - s_1)\} \quad (1.8)$$

という式も成り立つ。この式も [43] の結果からすぐ導けるのだが、[43] においては述べられておらず、[45] において初めて明記された。実は筆者は、[43] を書いてからしばらくして、Hurwitz ゼータ関数のよく知られた関数等式との類推から、(1.8) の方が関数等式の本質を表している、と考えるようになり、[45] や [26] ではそのような記述の仕方をしている。

しかし最近になって、池田氏と松岡氏は [19] において、関数等式が $\zeta(s)$ を特徴付ける、という有名な Hamburger の定理の二重類似として、(1.6) が、調和積公式 (1.4) と合わせることにより $\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2)$ を特徴付ける、という興味深い定理を証明している。そんな事情もあって、最近では筆者は、(1.6) と (1.8) のどちらもが、二重ゼータ関数の関数等式⁷の一側面を表しているのだろう、と感じている。

2 Witten のゼータ関数

さて、Zagier の論文 [74] で導入されたもうひとつの重要な多重ゼータ関数のクラス、Witten のゼータ関数の話に進もう。

Zagier が [74] において **Witten のゼータ関数** と名付けたのは、 \mathbb{C} 上の半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} に対して Dirichlet 級数

$$\zeta_W(s, \mathfrak{g}) = \sum_{\varphi} (\dim \varphi)^{-s} \quad (2.1)$$

で定義されるゼータ関数である。ここに和は \mathfrak{g} の \mathbb{C} 上の有限次元既約表現 φ の同値類全体にわたる。Witten は [73] において、この級数⁸の正の整数点での値が、彼のゲージ理論に登場するある種のモジュライ空間の体積を表すことを発見した。これが Witten の名を冠する理由である。

まず最初の注意として、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ となっているときには、

$$\zeta_W(s, \mathfrak{g}) = \zeta_W(s, \mathfrak{g}_1)\zeta_W(s, \mathfrak{g}_2)$$

⁶ただし筆者が [43] を書いたときにはこの認識には到達していなかった。この点を初めて明記した論文は [26] である。

⁷なお、周期的な数論的関数を分子に乗せたような二重級数への関数等式の一般化は、[31] にある。保型形式の Fourier 係数を乗せた場合については [8] [9] 参照。

⁸ただし実は Witten は、より一般に、連結なコンパクト半単純 Lie 群 G に付随して同様に定義される級数を考えている。 G が単連結でなければ、対応する Lie 代数 \mathfrak{g} のゼータ関数 (2.1) とは一致しない。後述するルート系のゼータ関数の理論をこの立場に一般化した研究は [33] [37] でなされている。

であることが容易に分かる。従って、 \mathfrak{g} が単純 Lie 代数のときの構造さえ分かれば十分である。単純 Lie 代数はよく知られているように、Killing-Cartan によって A 型から G 型までに分類されている。そして、個々の具体的な Lie 代数が与えられれば、その既約表現の次元は Weyl の次元公式によって計算できる。従って個別の Lie 代数に対しては $\zeta_W(s, \mathfrak{g})$ のもっと explicit な表示を書き下すことができる。それによって、(2.1) が実は多重ゼータ関数の一種であることが分かるのである。

その記述のために、まずルート系の言葉を準備しよう。Lie 代数 \mathfrak{g} のすべてのルートがなす集合を $\Delta = \Delta(\mathfrak{g})$ と書くことにする。その部分集合としての基本系を $\Psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ ($r = \text{rank } \mathfrak{g}$) とすると、任意のルートは基本系の元の整数係数一次結合として書け、その係数が非負なら正のルート、非正なら負のルートと呼ぶ。正のルートの全体を Δ_+ 、負のルートの全体を Δ_- と書けば $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ である。

ルートは \mathfrak{g} の Cartan 部分代数 \mathfrak{h} の双対空間 \mathfrak{h}^* の元であるが、 \mathfrak{h} と \mathfrak{h}^* は Killing form による内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で同一視できる。その同一視の下でルート α に対応する \mathfrak{h} の元を α' として、

$$\alpha^\vee = \frac{2}{\langle \alpha', \alpha' \rangle} \alpha' \in \mathfrak{h}$$

を α に対応するコルートと呼ぶ。

次に基本ウェイト λ_i ($1 \leq i \leq r$) を、 $\lambda_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$ (右辺は Kronecker のデルタ) で定め、 $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ とおく。すると任意のウェイトは Λ の元の整数係数一次結合として表せ、その係数がすべて非負のものが支配的ウェイトである。つまり支配的ウェイトは

$$\lambda = n_1 \lambda_1 + \dots + n_r \lambda_r \quad (n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (2.2)$$

と書ける。特に $\rho = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$ とおく。

さて \mathfrak{g} の任意の有限次元既約表現 φ には、よく知られているように支配的ウェイト $\lambda = \lambda(\varphi)$ が一対一に対応する。Weyl の次元公式は φ の表現空間の次元を λ の言葉で書き下す式であって、

$$\dim \varphi = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\langle \alpha^\vee, \lambda + \rho \rangle}{\langle \alpha^\vee, \rho \rangle} \quad (2.3)$$

で与えられる。ただし $\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle = \lambda(\alpha^\vee)$ である。式 (2.2) を代入すれば、

$$\dim \varphi = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\langle \alpha^\vee, (n_1 + 1)\lambda_1 + \dots + (n_r + 1)\lambda_r \rangle}{\langle \alpha^\vee, \rho \rangle}$$

となる。これを (2.1) に代入すると、 φ がすべての既約表現をわたるということは上記の一対一対応により n_1, \dots, n_r がすべての非負整数をわたるとい

うことなので、

$$\zeta_W(s, \mathfrak{g}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=0}^{\infty} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\langle \alpha^\vee, (n_1+1)\lambda_1 + \cdots + (n_r+1)\lambda_r \rangle}{\langle \alpha^\vee, \rho \rangle} \right)^{-s}$$

となる。ここで分母は n_1, \dots, n_r に無関係なので、

$$K(\mathfrak{g}) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \langle \alpha^\vee, \rho \rangle \quad (2.4)$$

とおいて和の外に出す。さらに $n_j + 1 = m_j$ とおけば、

$$\zeta_W(s, \mathfrak{g}) = K(\mathfrak{g})^s \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \langle \alpha^\vee, m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_r \rangle^{-s} \quad (2.5)$$

を得る。これが Witten のゼータ関数の次元公式を用いた explicit 表示である。

Zagier [74] は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(3), \mathfrak{so}(5)$ (すなわち対応するルート系がそれぞれ A_1, A_2, B_2 型) のときに、(2.5) による計算結果を書き下している。それは、 \mathfrak{g} のルート系が $\Delta = \Delta(\mathfrak{g})$ のときの Witten のゼータ関数を $\zeta_W(s, \Delta)$ と書くことにし、さらに Δ が X_r 型 (ただし $X = A, B, C, D, E, F$ または G) のルート系 $\Delta(X_r)$ のとき、 $\zeta_W(s, \Delta(X_r))$ を単に $\zeta_W(s, X_r)$ と書くことにすれば、

$$\zeta_W(s, A_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \zeta(s), \quad (2.6)$$

$$\zeta_W(s, A_2) = 2^s \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^s m_2^s (m_1 + m_2)^s}, \quad (2.7)$$

$$\zeta_W(s, B_2) = 6^s \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^s m_2^s (m_1 + m_2)^s (2m_1 + m_2)^s} \quad (2.8)$$

である。実際に A_r 型のときの (2.5) を計算してみよう。この場合、任意の正のルートは基本ルート $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を用いて

$$\alpha_{ij} = \sum_{i \leq k < j} \alpha_k, \quad \alpha_{ij}^\vee = \sum_{i \leq k < j} \alpha_k^\vee$$

の形に書けるから、(2.5) の右辺の積の部分は $\lambda_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$ に注意すれば

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} \langle \alpha_i^\vee + \cdots + \alpha_{j-1}^\vee, m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_r \rangle^{-s} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} (m_i + \cdots + m_{j-1})^{-s} \end{aligned}$$

で、従って

$$\zeta_W(s, A_r) = K(A_r)^s \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} (m_i + \cdots + m_{j-1})^{-s} \quad (2.9)$$

となる。特に $r = 1, 2$ の場合が (2.6), (2.7) を与える。

ルート系が A_1 型のときは Witten のゼータ関数は Riemann のゼータ関数に他ならないわけだが、実は A_2 の場合も古典的である。上の (2.7) 式の二重和の部分、あるいはそれはさらに多変数化した

$$\zeta_{MT,2}(s_1, s_2, s_3) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} (m_1 + m_2)^{s_3}} \quad (2.10)$$

なる級数の、絶対収束域内の整数点での値について、既に 1950 年に Tornheim [66] が研究を行っている。少し遅れて Mordell [50] もこの級数の $s_1 = s_2 = s_3$ の場合を論じ、 k が正の整数なら $\zeta_{MT,2}(2k, 2k, 2k)$ の値が π^{6k} の有理数倍になることを発見している。これは言うまでもなく、 $\zeta(2k)$ の値に関する Euler の古典的な結果の二重類似である。

本節の冒頭で述べた Witten の結果は、**Witten の体積公式**と言われるが、その結果から

$$\zeta_W(2k, \mathfrak{g}) = C_W(2k, \mathfrak{g}) \pi^{2kn} \quad (2.11)$$

と書けることがわかる。ここに $C_W(2k, \mathfrak{g})$ はある有理数、また n は \mathfrak{g} の正ルートの個数である。これは明らかに、上述した Mordell の結果をさらに一般化したものになっている。

なお筆者は 2002 年頃、[42] において、(2.10) を一般化した

$$\zeta_{MT,r}(s_1, \dots, s_{r+1}) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_r^{s_r} (m_1 + \cdots + m_r)^{s_{r+1}}} \quad (2.12)$$

を導入⁹ し、**Mordell-Tornheim の r 重ゼータ関数**と名付けた。同じ頃、全く別の動機から、津村氏も同様の多重級数を考察¹⁰ していた。このあたりの経緯については数理研講究録 1549 号 (2007) 所載の津村氏や筆者の記事を参照していただきたいが、こうして導入された Mordell-Tornheim の多重ゼータ関数もなかなか興味深いクラス¹¹ を構成しており、本稿でもこの後しばしば登場する。

⁹ $s_1 = \cdots = s_r = 1$ で s_{r+1} が正の整数の場合のこの級数の値については Hoffman [16] も扱っている。全変数が 1 の場合は既に Mordell [50] が論じている。

¹⁰そういう成り行きではあるが、記号 $\zeta_{MT,r}$ の MT は "Mordell と Tornheim" であって、"Matsumoto と Tsumura" ではない。

¹¹なお同じ [42] において筆者は、(2.12) の和に条件 $m_1 < \cdots < m_r$ を付けた部分をも考え、**Apostol-Vu の多重ゼータ関数**と呼んだ。この名称は Apostol と Vu の論文 [5] にちなむが、その性質はその後、岡本氏 [54] [55] によって調べられている。

3 ルート系のゼータ関数

本稿の主題であるルート系のゼータ関数とは、Witten のゼータ関数の explicit 表示式 (2.5) の右辺における多重和の部分を変数化したものである。すなわち、 Δ を有限被約ルート系、 $\mathbf{s} = (s_\alpha)_{\alpha \in \Delta_+} \in \mathbb{C}^n$ (n は Δ の正ルートの個数) として、

$$\zeta_r(\mathbf{s}, \Delta) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \langle \alpha^\vee, m_1 \lambda_1 + \cdots + m_r \lambda_r \rangle^{-s_\alpha} \quad (3.1)$$

を**ルート系 Δ のゼータ関数**¹² と名付ける。また $\Delta = \Delta(X_r)$ のとき $\zeta_r(\mathbf{s}, \Delta(X_r))$ を単に $\zeta_r(\mathbf{s}, X_r)$ と書き、 X_r 型のゼータ関数、あるいは単に X_r のゼータ関数などと呼んだりもすることにする。明らかに

$$\zeta_W(\mathbf{s}, \mathfrak{g}) = K(\mathfrak{g})^s \zeta_r((s, \dots, s), \Delta(\mathfrak{g})) \quad (3.2)$$

である。

前節で述べたように、 $\Delta = \Delta(A_2)$ の場合には既に Tornheim [66] がこのような多変数の状況を考察していた。ただし Tornheim も、その後続いた何人かの研究者も、もっぱら特殊値のみを問題にしている。 A_2 のゼータ関数の \mathbb{C}^3 全体への解析接続は筆者の論文 [39] で初めて公表¹³された。

続いて筆者は [42] において、複素多変数関数としての $\zeta_2(\mathbf{s}, B_2)$ を導入し、その解析接続を示した。次いで筆者と津村氏が [47] で任意の正の整数 r に対する $\Delta = \Delta(A_r)$ の場合を論じ、最終的に [25] において一般のルート系に対する (3.1) が定義されたのである。

筆者がこのように多変数化を試みた理由は、Tornheim の論文に示唆されたからではなく、「多変数にして変数の自由度を増やす方が、解析的には扱いやすい」という、[38] 以来感じていた哲学¹⁴によるものである。(例えば 8 節で述べる Mellin-Barnes 積分による論法は、多変数化することで初めて滑らかに機能する。)

ルート系のゼータ関数は、($K(\mathfrak{g})$ の因子を除いて) Witten のゼータ関数の多変数化であることは (3.2) から明らかだが、多変数化したことによって、Euler-Zagier の多重和もその特殊な場合として含む。実際、 $\Delta = A_r$ のときのルート系のゼータ関数は、前節と全く同様の計算により

$$\zeta_r(\mathbf{s}, A_r) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} (m_i + \cdots + m_{j-1})^{-s_{ij}} \quad (3.3)$$

¹²Witten のゼータ関数は Lie 代数に付随して定義されたものであるが、ルート毎に変数を割り振る (3.1) は、ルート系と Lie 代数との繋がりをむしろ忘れて、抽象的、公理的にルート系を設定する立場で理解するのが妥当な概念なので、このように名付けたのである。

¹³ただし筆者より早く 1999 年頃、秋山氏と江上氏が、それぞれ異なる方法で $\zeta_2(\mathbf{s}, A_2)$ の解析接続に成功している (どちらも未公表)。筆者の方法はそのどちらとも異なる Mellin-Barnes 積分による方法 (8 節参照) である。

¹⁴特に、当時の筆者の問題意識は、フランス学派とも Zagier 的な視点とも異なり、むしろ Atkinson [6] や本橋洋一氏の研究、さらに桂田昌紀氏と筆者との共同研究など、ゼータ関数や L 関数の種々の平均値の解析的挙動の研究に触発されたもの ([45] の記述参照) であった。

(ただしルート α_{ij} に対応する変数を s_{ij} と書いた) となることがわかる。例えば (変数の名前は付け替えて)

$$\zeta_2((s_1, s_2, s_3), A_2) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} (m_1 + m_2)^{-s_3}, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \zeta_3((s_1, \dots, s_6), A_3) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} m_3^{-s_3} \\ &\quad \times (m_1 + m_2)^{-s_4} (m_2 + m_3)^{-s_5} (m_1 + m_2 + m_3)^{-s_6} \end{aligned} \quad (3.5)$$

などとなる。この (3.3) において $s_{12}, s_{13}, \dots, s_{1,r+1}$ 以外のすべての変数を 0 とおけば、Euler-Zagier の多重和 (1.1) の形になる。

また、(3.4) は明らかに Tornheim の二重和 (2.10) そのものであるが、より一般の (2.12) も、(3.3) において変数 $s_{12}, s_{23}, \dots, s_{r,r+1}$ と $s_{1,r+1}$ のみを残すことによって得られる。すなわちルート系のゼータ関数という多変数関数のクラスは、Witten のゼータ関数、Euler-Zagier の多重和、Mordell-Tornheim の多重ゼータ関数のすべてを特殊な場合として含む概念であることがわかる。

まず基本的な事実として、任意の Δ に対するゼータ関数が解析接続できることを定理として述べておく。

定理 1 Δ を有限被約ルート系とするとき、 $\zeta_r(\mathbf{s}, \Delta)$ は \mathbb{C}^n 全体に有理型に解析接続される。

この結果は実際、既述した Essouabri の (多変数の場合の) 一般論 [11] や小森氏の理論 [24] に含まれているし、筆者も Mellin-Barnes 積分による方法をこの場合を含むように拡張した ([42] [44])。筆者の方法については 8 節で再訪する。

4 Weyl 群の作用とルート系の Bernoulli 数

ルート系に付随したゼータ関数を定義したのであれば、Weyl 群を使って何か結果が導きだせるのではないか、と考えるのは自然な着想であろう。既に Zagier [74] の中で、Weyl 群についての対称性を用いて、(2.11) の数論的な証明がスケッチされている。

W を Δ の Weyl 群として、 $\mathbf{s} = (s_\alpha)_{\alpha \in \Delta_+} \in \mathbb{C}^n$ に対する W の作用を次のように定める。ルート α に付随する (すなわち α に直交する超平面に関する) 鏡映を σ_α と書けば、これら鏡映の全体が W を生成するから、 σ_α の作用だけ定義すればいいが、それを $(\sigma_\alpha \mathbf{s})_\beta = s_{\sigma_\alpha \beta}$ で定めるのである。(ただし、 $\sigma_\alpha \beta$ が負のルートになる可能性もあるが、その場合は $s_{\sigma_\alpha \beta} = s_{-\sigma_\alpha \beta}$ と約束する。) その上で、 \mathbf{s} の関数 $f(\mathbf{s})$ に対する $w \in W$ の作用を、 $(wf)(\mathbf{s}) = f(w^{-1}\mathbf{s})$ で定義する。

以上の定義の下で、

$$S(\mathbf{s}, \Delta) = \sum_{w \in W} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+ \cap w\Delta_-} (-1)^{-s_\alpha} \right) (w\zeta_r)(\mathbf{s}, \Delta) \quad (4.1)$$

というルート系のゼータ関数の「一次結合」を作ると、この $S(\mathbf{s}, \Delta)$ に対しては Weyl 群の対称性がうまく働いて、次の定理が成り立つ。

定理 2 ([30, III, Theorem 6])¹⁵ すべての $\alpha \in \Delta_+$ に対して $\Re s_\alpha > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} S(\mathbf{s}, \Delta) = & (-1)^n \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(2\pi i)^{s_\alpha}}{\Gamma(s_\alpha + 1)} \right) \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} \phi(s_\alpha, x_\alpha) \right) \\ & \times \left(\prod_{j=1}^r \phi \left(s_{\alpha_j}, - \sum_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} x_\alpha \langle \alpha^\vee, \lambda_j \rangle \right) \right) \prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} dx_\alpha \quad (4.2) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし上式において

$$\phi(s, x) = -\frac{\Gamma(s+1)}{(2\pi i)^s} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{2\pi i n x}}{n^s}$$

である。

特に $\mathbf{s} = \mathbf{k} = (k_\alpha)_{\alpha \in \Delta_+}$, $k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ のときには、よく知られているように

$$\phi(k_\alpha, x) = B_{k_\alpha}(\{x\}) \quad (4.3)$$

である。(ただし $B_k(\cdot)$ は k 次の Bernoulli 多項式で、 $\{x\}$ は x の小数部分。例えば [4, Theorem 12.19] を見よ。) よって

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{k}}(\Delta) = & \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} B_{k_\alpha}(x_\alpha) \right) \\ & \times \left(\prod_{j=1}^r B_{k_{\alpha_j}} \left(\left\{ - \sum_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} x_\alpha \langle \alpha^\vee, \lambda_j \rangle \right\} \right) \right) \prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Psi} dx_\alpha \quad (4.4) \end{aligned}$$

とおけば、定理 2 から直ちに

$$S(\mathbf{k}, \Delta) = (-1)^n \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(2\pi i)^{k_\alpha}}{k_\alpha!} \right) B_{\mathbf{k}}(\Delta) \quad (4.5)$$

¹⁵ この結果は 2006 年頃には既に得られていて、[25] にもアナウンスされているのだが、投稿した 2008 年の Edinburgh での国際会議の報告集の出版が大幅に遅れ、結局 2012 年ようやく出版された。

が言える。

$\Delta = \Delta(A_1)$ の場合、 $\Delta_+ = \Psi = \{\alpha_1\}$ である。この唯一の正ルート α_1 に対応する変数を $k = k_{\alpha_1}$ と書こう。この場合 $\Delta_+ \setminus \Psi$ は空集合なので、空和は 0、空積は 1 と理解すれば、(4.4) は $B_k(A_1) = B_k(0)$ で、これは古典的な Bernoulli 数 B_k (あるいは Seki-Bernoulli 数) に他ならない。従って (4.4) の $B_{\mathbf{k}}(\Delta)$ は Bernoulli 数のルート系的な一般化であり、**ルート系の Bernoulli 数**¹⁶ と呼ぶべきものである。

古典的な Bernoulli 数については、種々の定義の仕方が知られているが、そのうちのひとつが生成関数による定義

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} \quad (4.6)$$

であった。ルート系の Bernoulli 数についても、同様の生成関数を見つけることができる。つまり、

$$F(\mathbf{t}, \Delta) = \sum_{\mathbf{k} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} B_{\mathbf{k}}(\Delta) \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{t_{\alpha}^{k_{\alpha}}}{k_{\alpha}!} \quad (4.7)$$

(ただし $\mathbf{t} = (t_{\alpha})$, $\mathbf{k} = (k_{\alpha})$) となるような、explicit に書ける関数 $F(\mathbf{t}, \Delta)$ を求めることができる ([30, III, Theorem 7], [28, Theorem 4.1])。その一般式は少々複雑なのでここには書き下さないが、 $\Delta = \Delta(A_1)$ のときの $F(\mathbf{t}, A_1)$ はもちろん (4.6) の左辺と一致する。 $\Delta = \Delta(A_2)$ のときには、 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ と書くと

$$F(\mathbf{t}, A_2) = \frac{t_1 t_2 t_3 (e^{t_3} - e^{t_1+t_2})}{(e^{t_1} - 1)(e^{t_2} - 1)(e^{t_3} - 1)(t_3 - t_1 - t_2)} \quad (4.8)$$

で与えられる ([29, Example 9.2] [30, III, (251)])。その他の具体例は (さらに複雑になるが) C_2 と A_3 の場合が [30, III] に、 G_2 の場合が [30, IV] に述べられている。これらの生成関数を展開することにより、個々のルート系に対して、その Bernoulli 数 $B_{\mathbf{k}}(\Delta)$ の値を具体的に計算することができる。特にその値は有理数である。

さて $S(\mathbf{k}, \Delta)$ は (4.1) で $(w\zeta_r)(\mathbf{s}, \Delta)$ たちの一次結合として定義されていたが、ここでもしすべての s_{α} が同じ値ならば、 \mathbf{s} は Weyl 群の作用で不変である。そこで特に、すべての s_{α} が正の整数 $2k$ であれば、(4.1) における符号因子の寄与もなくなり、単に $S(2\mathbf{k}, \Delta) = |W|\zeta_r(2\mathbf{k}, \Delta)$ ($\mathbf{k} = (k, \dots, k)$) となる。従ってこの場合の (4.5) は、Witten の (2.11) を導くと同時に、そこに現れる定数 $C_W(2k, \mathfrak{g})$ の具体的な値の計算法¹⁷をも与えていることになる。

¹⁶実は [30, III] においては、(3.1) にさらに指数因子を付加した、Lerch 型とも言うべきゼータ関数が導入されており、対応して $B_{\mathbf{k}}(\Delta)$ を一般化した、**ルート系の Bernoulli 多項式**も定義されている。このように一般化しておいた方が技術的に都合が良い場面もある ([37, Remark 1] 参照) し、また特に [28] で考察したような、(3.1) を Dirichlet 指標で捻った**ルート系の L 関数**の特殊値の記述にはルート系の Bernoulli 多項式が不可欠である。

¹⁷Witten ゼータ関数の特殊値の計算法としては Szenes [65] や Gunnells-Sczech [14] によって提案されたものもある。

A, D, E 型のルート系ではルートの長さはすべて同じ (simply-laced) だが、他のルート系では、ルートの長さに長短が生じる。この場合、Weyl 群の軌道は長さの等しいルートの全体になる。従って、すべての s_α が同じ値でなくても、長さの等しいルートに対応する変数の値が一致していれば、やはり上述と同様の不変性が成り立つ。以上の議論は、結局、次の結果を導く。

定理 3 ([30, III, Theorem 8]) Δ は既約とし、 $\mathbf{k} = (k_\alpha)$ 、ただし長さの等しいルートに対応する k_α の値はすべて等しいものとする。このとき

$$\zeta_r(2\mathbf{k}, \Delta) = \frac{(-1)^n}{|W|} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(2\pi i)^{2k_\alpha}}{(2k_\alpha)!} \right) B_{2\mathbf{k}}(\Delta) \quad (4.9)$$

が成り立つ。

具体例を少し述べよう。変数の値がすべて等しい場合としては、例えば

$$\zeta_2((2, 2, 2), A_2) = \frac{\pi^6}{2835} \quad (\text{Mordell [50] が得ていた結果}),$$

$$\zeta_2((2, 2, 2, 2), C_2) = \frac{\pi^8}{302400},$$

$$\zeta_3((2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2), C_3) = \frac{19}{8403115488768000} \pi^{18}$$

などとなる。軌道毎に変数の値が一致している場合の例としては

$$\zeta_2((2, 4, 4, 2), C_2) = \frac{53}{6810804000} \pi^{12}$$

を挙げておこう。ただしここで C_2 型、 C_3 型のゼータ関数の具体形はそれぞれ

$$\begin{aligned} \zeta_2((s_1, s_2, s_3, s_4), C_2) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} \\ &\quad \times (m_1 + m_2)^{-s_3} (m_1 + 2m_2)^{-s_4}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \zeta_3((s_1, \dots, s_9), C_3) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} m_3^{-s_3} \\ &\quad \times (m_1 + m_2)^{-s_4} (m_2 + m_3)^{-s_5} (2m_2 + m_3)^{-s_6} (m_1 + m_2 + m_3)^{-s_7} \\ &\quad \times (m_1 + 2m_2 + m_3)^{-s_8} (2m_1 + 2m_2 + m_3)^{-s_9} \end{aligned} \quad (4.11)$$

で与えられる。

5 整数点における値とそれらの間の関係式

前節の定理 3 は、正の偶数点におけるルート系のゼータ関数の特殊値を与える結果だったが、変数の値に奇数が含まれる場合はどうであろうか。古典

的な Riemann ゼータ関数の場合ですら、奇数点での値は未だによく分かっていないことから考えれば、変数がすべて偶数である場合の状況より問題は相当に困難になることが予想される。一般的にはたしかにその通りであるが、それでも実は、奇数を含む場合でも種々の結果を得ることができる。

$\Delta = \Delta(A_2)$ の場合には、既に Tornheim [66] が、 $m_1 + m_2 + m_3$ が奇数のとき、 $\zeta_2((m_1, m_2, m_3), A_2)$ が Riemann ゼータ関数の整数点での値の有理数係数の多項式で書けることを証明している。(後に [17] がより明示的な形の式を与えている。) これはいわゆる ”parity result” (すなわち、 r と $m_1 + \dots + m_r$ の偶奇が異なるとき、その r 重ゼータ値を $r-1$ 重以下の多重ゼータ値で表す類の結果¹⁸⁾) の一種であって、後に津村氏 [70] によって一般の r 重 Mordell-Tornheim ゼータ関数の場合に一般化されている。多重三角関数の対数を含む積分表示を用いた小野寺氏の研究 [60] もある。

一方 Subbarao と Sitaramachandrarao [64] は

$$\zeta_2((2l, 2m, 2n), A_2) + \zeta_2((2l, 2n, 2m), A_2) + \zeta_2((2n, 2m, 2l), A_2)$$

の明示的な式を示し、続いて津村氏 [67] が奇数を含む場合への拡張を与えた。すなわち津村氏は、 $k, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k+m \geq 2$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とするとき

$$\zeta_2((k, l, m), A_2) + (-1)^k \zeta_2((k, m, l), A_2) + (-1)^l \zeta_2((l, m, k), A_2) \quad (5.1)$$

が Riemann ゼータ関数の整数点での値の有理数係数の多項式で書ける¹⁹⁾ ことを示した。この論文で津村氏が用いた方法は、考えている Dirichlet 級数 (例えば $\sum m^{-s}$) にまず収束を早くする因子 (例えば $(-u)^{-m}$, $u > 1$) を付け加えて、収束の良い状態で式変形をしておいてから最後に $u \rightarrow 1$ とするもので、Riemann ゼータ関数の負の偶数点での値が 0 になる、という事実が議論の途中で本質的な役割を果たす。この方法を我々は *u-method* と呼ぶことにしよう。この津村氏の結果と方法は、次節で述べる関数関係式の理論への道を開くことになった先駆的なものである。

他のルート系の場合にも、parity result の研究は行われている。その嚆矢は B_2 の場合を扱った津村氏の論文 [68] であろう。(B_2 については Zhao [76] もある。) A_3 型については筆者と津村氏の [47] や、Zhao-Zhou [78] がある。 G_2 型の場合は Zhao [77] が先鞭をつけ、続いて岡本氏 [56] [57] が、先行する [53], [60], [68] のアイデアを融合させた理論を構築して、その中で特に、 G_2 型のルート系のゼータ関数のある種の特殊値が Riemann ゼータ関数と Clausen 関数の値で書けることを示した。その後、[30, V] においても G_2 型の parity result が論じられているが、その論文の最終節で提起されているように、 G_2 型の parity result は、Dirichlet の L 関数や Clausen 関数を含めた形で定式化する必要があるのかもしれない。

¹⁸⁾Euler-Zagier 和の場合の parity result は Euler に遡る歴史を持ち、津村氏 [69] と、また独立に井原氏、金子氏、Zagier の共著 [18] によって一般的な定理が得られた。

¹⁹⁾上式は、[67] の Theorem 1 で文字 (r, s, t) を (k, m, l) に置き換え、 $(-1)^k$ をかけたものである。

論文 [30, V] においては、前節で紹介した一般論を奇数を含む特殊値の場合に適用しようとする試みが提示されている。偶数点を扱っている限り、前節でも述べたように、(4.1) 式において符号部分を考える必要はない。しかし変数に奇数値が含まれると符号部分が自明ではなくなり、多くの項がキャンセルしてしまう可能性がある。そうなってしまうと (4.1) からは何の情報も取り出せない。論文 [30, V] では、どのような場合に非自明な情報が取り出せるかについて、ルート系の理論の立場からある程度の解答が与えられており、その応用として、奇数変数を含む G_2 のゼータ関数の特殊値についての結果が述べられている。一例だけ挙げておこう：

$$\zeta_2((2, 1, 1, 5, 3, 3), G_2) = \frac{5}{4}\zeta(4)\zeta(11) + \frac{1043857}{23328}\zeta(2)\zeta(13) - \frac{41971473}{559872}\zeta(15), \quad (5.2)$$

ただし G_2 のゼータ関数の具体形は

$$\zeta_2((s_1, \dots, s_6), G_2) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} (m_1 + m_2)^{-s_3} \times (m_1 + 2m_2)^{-s_4} (m_1 + 3m_2)^{-s_5} (2m_1 + 3m_2)^{-s_6} \quad (5.3)$$

である。

6 関数関係式

前節で述べたような「特殊値間の関係式」は、Euler-Zagier 型の多重和の場合には（特殊値、すなわち MZV が \mathbb{Q} 上で張るベクトル空間の次元についての Zagier の予想などを動機付けとして）遥かに多くの研究²⁰がなされて来ている。そして、MZV の間になりたつ非常に多くの関係式が発見されている。

すると、解析的な立場から見たときに自然に浮かぶひとつの疑問は、それらの関係式が整数点においてだけ成立しているものであるのか、それとも複素関数としての $\zeta_{EZ,r}$ たちの間に成り立っている関係式を整数点のところで見ているに過ぎないのか、どちらであろう、ということである。筆者はこの疑問について 2000 年頃から、しばしば研究集会の場などで発言²¹してきた。

もちろん、調和積公式 (1.4)（と、その r 重への一般化）は明らかにそのひとつの解答を与えている。筆者の疑問を正確に言えば、MZV の間の関係式が関数としての関係式になっているのは、調和積公式の類以外にはないのか、ということである。この疑問に最初から強い興味を示してくれた方もいらっしやった²²が、この問題を考えようとするとき大きな障害となるのは、

²⁰例えば [3] 参照。

²¹文献上での言及は [44] が最初である。

²²例えば伊原康隆先生。

MZV の関係式の多くが Drinfel'd-Kontsevich 型の反復積分表示を基盤にして示されている、ということであった。この積分表示は整数の値そのものが積分の回数を与えるので、整数点以外には拡張のしようがないのである。

しかし、前節で言及した津村氏の u -method は、反復積分表示を用いない、関係式の導出方法を与えている。従ってこの方法で得られた結果は整数点以外への拡張が可能かもしれない。津村氏 [71] はこのことに着目して考察を行ない、筆者の疑問に対する最初の非自明な解答を見いだした。それは (5.1) を複素変数を含む形に一般化した、次のような結果²³ である。

定理 4 ([71]) $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $s \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned} & \zeta_2((k, l, s), A_2) + (-1)^k \zeta_2((k, s, l), A_2) + (-1)^l \zeta_2((l, s, k), A_2) \\ &= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k+l-2j-1}{l-1} \zeta(2j) \zeta(s+k+l-2j) \\ & \quad + 2 \sum_{j=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \binom{k+l-2j-1}{k-1} \zeta(2j) \zeta(s+k+l-2j) \end{aligned} \quad (6.1)$$

が成り立つ。

この定理では s が複素変数なので、関数としての関係式、つまり**関数関係式**を与えている。そして $s = m \in \mathbb{Z}$ と特殊化すると左辺は (5.1) に一致するので、[67] で得られた値の関係式を含む式になっているわけである。

また、定理 1 によって (6.1) の両辺は s について \mathbb{C} 全体に解析接続できることがわかるから、上式自身も (特異点を除く) \mathbb{C} 全体で成り立つ。

上の定理において $(k, l) = (3, 2)$ ととると

$$\begin{aligned} & \zeta_2((3, s, 2), A_2) - \zeta_2((3, 2, s), A_2) - \zeta_2((2, s, 3), A_2) \\ &= 10\zeta(s+5) - 6\zeta(2)\zeta(s+3) \end{aligned}$$

を得る。ここでさらに $s = 0$ とすると、 $\zeta_2((k, 0, l); A_2) = \zeta_{EZ,2}(k, l)$ および $\zeta_2(3, 2, 0), A_2) = \zeta(3)\zeta(2)$ に注意すれば

$$\zeta_{EZ,2}(3, 2) - \zeta_{EZ,2}(2, 3) = 10\zeta(5) - 5\zeta(2)\zeta(3)$$

となる。これと、(1.4) で $(s_1, s_2) = (3, 2)$ とおいた

$$\zeta_{EZ,2}(3, 2) + \zeta_{EZ,2}(2, 3) = \zeta(2)\zeta(3) - \zeta(5)$$

とを合わせれば、

$$\zeta_{EZ,2}(3, 2) = \frac{9}{2}\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3), \quad \zeta_{EZ,2}(2, 3) = -\frac{11}{2}\zeta(5) + 3\zeta(2)\zeta(3) \quad (6.2)$$

²³ただし、[71] における original statement では右辺はもっと複雑な形をしている。しかし [46] の Lemma 2.1 を適用することにより、ここで述べた形になる。論文 [27] の Theorem 3.1 を参照。

が示される。この (6.2) はもともとは Euler-Zagier 和の理論の枠内で、二重シャッフル関係式として示されていたものであるが、我々はそれが関数関係式 (6.1) の特殊化として得られることを知った。これはつまり、本節冒頭で述べた筆者の疑問に対するひとつの解答となっている。

定理 4 を巡るひとつのエピソードに触れておこう。津村氏の論文をプレプリント段階で読んだ中村氏は、(4.3) などの Bernoulli 多項式の性質を巧妙に用いた、定理 4 の別証明 [52]²⁴ に成功した。当時まだ名古屋大学の大学院生だった氏は、2005 年の年末 (12 月 26 日)、名大の解析数論セミナーでこの別証明について報告した。このセミナーの席上、筆者は中村氏の議論をルート系の立場から見て一般化できないか、という点を問題にした。すると、セミナーが終わった後しばらくして、小森氏が筆者の研究室にやってきた。セミナーでの報告の中で中村氏は、 $\zeta_2(s, A_2)$ の二重和をいかに分割するか、二次元の座標平面上で図示して解説したのだが、たまたまこのセミナーに出席していた小森氏は、それが A_2 型ルート系の Weyl chamber への分割に他ならないことを指摘したのである。この会話が 4 節で述べた、ルート系のゼータ関数への Weyl 群の作用に関する理論の出発点であり、定理 4 の左辺は (4.1) の $S(s, \Delta)$ の原型を与えるものであった。

A_3 の場合の関数関係式は [47] [25] [27] で論じられた。[47] においては一部の変数が 0 であるような特殊な場合しか扱われていないが、これは技術的な理由によるもので、[25] [27] では u -method を単純に適用するだけでなく、分子にある種の parameter を付加する工夫を加味することによってこの技術的困難を打破し、より一般的な形の関数関係式を得ることに成功している。また [27] の Section 7 で、同様の方法によって一般に A_r 型のルート系のゼータ関数の関数関係式が得られるであろうことが示唆されており、実際に A_4 の場合のある結果が証明抜きでアナウンスされている。

さらに [27] では $C_2 (\simeq B_2)$, B_3 , C_3 の場合の関数関係式も得られている。 G_2 型の場合の関数関係式は [30, IV] [30, V] で示されている。また中村氏も彼の方法を発展させて、[53] において A_2 型、 A_3 型、 B_2 型のゼータ関数の関数関係式を論じている。 A_3 型のゼータ関数についての Zhou, Bradley と Cai の研究 [79] もある。その研究をさらに発展させて、池田氏と松岡氏は [20] において、 A_2 , A_3 , A_4 型のゼータ関数の関数関係式を得ている。

上述の定理 4 においては、式に含まれている複素変数は s 一個だけであった。しかし、その後得られたいろいろな関数関係式の中には、複素変数を複数個含む形のものも存在する。(例えば [47, Theorem 5.10], [25, Theorem 3.4], [27, Theorem 9.3]、また [53], [79] など。) A_3 型の例をひとつだけ引用しておこう。

定理 5 ([25, Theorem 3.4]) 正の整数 p, q と非負整数 r 、そして複素数

²⁴Zagier の九州大学での講義録に述べられているアイデアが元になっている。

s_1, s_2, s_3 に対して、

$$\begin{aligned}
& \zeta_3((2p, 2r, 2q, s_1, s_3, s_2), A_3) + \zeta_3((2p, s_1, s_3, 2r, 2q, s_2), A_3) \\
& + \zeta_3((2q, 2r, 2p, s_2, s_3, s_1), A_3) + \zeta_3((2q, s_2, s_3, 2r, 2p, s_1), A_3) \\
& = 2 \sum_{j=0}^p \zeta(2j) \sum_{k=0}^{2p-2j} \binom{2q-1+k}{k} \binom{2p+2r-2j-k-1}{2p-2j-k} \\
& \quad \times \zeta_2((s_1+2p+2r-2j-k, s_3+2q+k, s_2), A_2) \\
& + 2 \sum_{j=0}^q \zeta(2j) \sum_{k=0}^{2q-2j} \binom{2p-1+k}{k} \binom{2q+2r-2j-k-1}{2q-2j-k} \\
& \quad \times \zeta_2((s_1, s_3+2q+k, s_2+2q+2r-2j-k), A_2) \\
& + 2 \sum_{j=0}^r \zeta(2j) \sum_{k=0}^{2p-1} \binom{2q-1+k}{k} \binom{2p+2r-2j-k-1}{2p-k-1} \\
& \quad \times \zeta_2((s_1+2p+2r-2j-k, s_3+2q+k, s_2), A_2) \\
& + 2 \sum_{j=0}^r \zeta(2j) \sum_{k=0}^{2q-1} \binom{2p-1+k}{k} \binom{2q+2r-2j-k-1}{2q-k-1} \\
& \quad \times \zeta_2((s_1, s_3+2q+k, s_2+2q+2r-2j-k), A_2) \tag{6.3}
\end{aligned}$$

がなりたつ。

我々は 4 節において、(5 節で論じたような) 特殊値の間の関係式が成り立つ理由を与える、Weyl 群の作用に関する結果を紹介した。同様の理由付けは関数関係式に対しても可能であり、それは事実、定理 2 のある種の一般化 ([30, III, Theorem 5], [30, V, Theorem 2.1]) によって与えられる。

ここで強調しておきたいことは、Euler-Zagier 和の枠内のみで考えた場合には、依然として筆者の疑問は未解決のまま、ということである。Euler-Zagier 和の枠内では、調和積公式以外には非自明な関数関係式は全く存在しない²⁵ のかもしれない。筆者の知る限り、こうした可能性はおそらく中村隆氏が初めて言い出したのだと思うが、印刷物上でこういうことを論じた文献はまだ書かれていないようである。

7 ルート系のゼータ関数としての Euler-Zagier 和

前節の末尾で述べたように、関数関係式を考察するには、Euler-Zagier 和の枠内に留まらず、ルート系のゼータ関数という、より広い枠組みを視座に据えるのが適当なのであった。

²⁵超平面 Ω_{2k+1} に制限すれば関数等式 (1.6) が Euler-Zagier 和の枠内での関数関係式を与える、と言えるかもしれないが、これでは満足できる解答とは言えないだろう。

これ以外にも、ルート系のゼータ関数という広い立場から眺めることによって、Euler-Zagier 和の理論に対してもいろいろと新しい結果を導き出せることが次第にわかってきた。本節ではこうした話題について解説する。

既に 3 節で、 A_r 型のルート系のゼータ関数のいくつかの変数を 0 とおくと Euler-Zagier の多重和になることを注意した。この立場からシャッフル積について論じた論文が [32] である。

MZV は Drinfel'd の反復積分表示を持っているので、ふたつの MZV の積はふたつの反復積分の積になるが、これはいくつかの反復積分の和に書き直せることが知られている。この事実を MZV の言葉に翻訳すれば MZV の積を MZV の和で書く関係式が得られるが、これが**シャッフル積**、と呼ばれる手法である。

調和積とシャッフル積は、MZV の積のそれぞれ異なる表示を与えるので、このふたつを等置すると MZV たちの間に成り立つ関係式が導出される。こうして得られる関係式を**二重シャッフル関係式**と総称する。

シャッフル積はこのように Drinfel'd の積分表示に持ち込んで、それを Hoffman 代数という代数的な枠組みで捉え、代数的操作で変形してから再び MZV の世界に戻る、というのが本来の手法であったため、エレガントではあるが、解析的に何をやっているのかがわからなくなってしまう問題点があった。特に Drinfel'd の表示が存在するのは整数点に限られるので、前節でも言及したように、この手法に頼ってはいは関数関係式は決して示せない。

しかし [32] において、ルート系のゼータ関数の範囲にまで拡げて考察すると、シャッフル積のプロセスは単なる部分分数分解として解釈できることが見いだされた。これは二重シャッフル関係式の新しい証明を与えたことにもなる。このアイデアは最近、小野氏と山本氏 [59] によって、有限多重ポリログの研究にも応用された。

また、部分分数展開は整数点以外の状況にも容易に拡張できるので、我々の手法を使えば、二重シャッフル関係式を特殊な場合として含む関数関係式の導出も可能になる。例えば

定理 6 ([32, Theorem 3]) 任意の $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対し、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{l-1} \binom{k-1+i}{i} \zeta_{EZ,3}(s, l-i, k+i) \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{l-1+i}{i} \zeta_3((k-i, s, 0, 0, 0, l+i), A_3) \\ & = \zeta_{EZ,3}(s, k, l) + \zeta_{EZ,3}(s, l, k) + \zeta_{EZ,3}(k, s, l) + \zeta_{EZ,2}(s, k+l) \\ & \quad + \zeta_{EZ,2}(k+s, l) \end{aligned} \tag{7.1}$$

が成り立つ。

これが二重シャッフフル関係式を含むことは、実際に (7.1) の特殊化として、

$$6\zeta_{EZ,3}(1, 1, 3) + \zeta_{EZ,3}(1, 2, 2) = \zeta_{EZ,2}(1, 4) + \zeta_{EZ,2}(3, 2)$$

のような二重シャッフフル関係式が導かれることからわかる。

さて [32] では、Euler-Zagier 和を A 型のルート系のゼータ関数の特殊化として考察したわけだが、これが可能な唯一の観点というわけではない。論文 [35] では、今度は Euler-Zagier 和を C 型ルート系のゼータ関数の特殊化と見る理論が展開されている。

既に 4 節で C_2 型、 C_3 型のルート系のゼータ関数の具体形を紹介したが、ここで一般の C_r 型ルート系のゼータ関数の具体形を書き下そう。

そのために、まず C_r 型ルート系の構造を思い出す。実 r 次元ベクトル空間の任意のベクトルにその i 番目の座標を対応させる座標関数を ε_i と書けば、基本ルートは $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_{r-1} = \varepsilon_{r-1} - \varepsilon_r$ と $\alpha_r = 2\varepsilon_r$ で与えられる。そして正のルートの全体は

$$\{2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq r\}$$

である。ここで明らかに $2\varepsilon_i$ たちの方が $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ たちよりも長いルートである。対応するコルートは、 e_i を第 i 成分だけが 1 の単位ベクトルとすると、それぞれ e_i ($1 \leq i \leq r$), $e_i \pm e_j$ ($1 \leq i < j \leq r$) となる。これらは基本コルート $\alpha_1^\vee = e_1 - e_2, \alpha_2^\vee = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{r-1}^\vee = e_{r-1} - e_r, \alpha_r^\vee = e_r$ を用いて

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{i \leq k \leq r} \alpha_k^\vee, & e_i - e_j &= \sum_{i \leq k < j} \alpha_k^\vee, \\ e_i + e_j &= \sum_{i \leq k < j} \alpha_k^\vee + 2 \sum_{j \leq k \leq r} \alpha_k^\vee \end{aligned}$$

と書けるので、(3.1) にこれらのデータを入れて書き下せば、一般の C_r 型ルート系のゼータ関数は次の式で与えられることがわかる：

$$\begin{aligned} \zeta_r(\mathbf{s}, C_r) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{1 \leq i \leq r} (m_i + \cdots + m_r)^{-s_i} \\ &\times \prod_{1 \leq i < j \leq r} (m_i + \cdots + m_{j-1})^{-s_{ij}^-} \\ &\times \prod_{1 \leq i < j \leq r} (m_1 + \cdots + m_{j-1} + 2(m_j + \cdots + m_r))^{-s_{ij}^+}, \quad (7.2) \end{aligned}$$

ただし $\mathbf{s} = ((s_i), (s_{ij}^-), (s_{ij}^+))$ であつて、 s_i, s_{ij}^-, s_{ij}^+ はそれぞれルート $2\varepsilon_i, \varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j$ に対応させた複素変数である。

上で注意したように、長いルートは $2\varepsilon_i$ たちであつた。そこで、これらに対応する変数 s_i だけを残して他の変数をすべて 0 とおくと、上式は

$$\zeta_r(((s_i), \mathbf{0}, \mathbf{0}), C_r) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{1 \leq i \leq r} (m_i + \cdots + m_r)^{-s_i} \quad (7.3)$$

となり、これは再び Euler-Zagier 和に他ならない。つまり Euler-Zagier 和は C 型のルート系のゼータ関数の特殊化とも見なせるのである。

この観点の持つひとつの重要性は、Weyl 群の軌道が長さの等しいルートの全体であるという、4 節でも触れた事実である。(7.3) において残っているのは長さの等しいルートに対応する変数のみであるから、この立場では Euler-Zagier 和に対する Weyl 群の作用を論じることが可能になる。そして [35] ではこのことを実際に用いて、Euler-Zagier 和に関する新しい「制限された和公式」²⁶ を証明することに成功している。

また、 B 型ルート系と C 型ルート系とは、互いに「双対」とも言うべき密接な関係にある。従って C 型ルート系のゼータ関数に対して展開した上の議論と類似した議論を、 B 型の場合に展開することもできるはずである。このアイデアを実行してみると、 B 型のルート系のゼータ関数で、今度は短いルートに対応する変数だけ残したものが、

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{1 \leq i \leq r} (2(m_{r-i+1} + \cdots + m_{r-1}) + m_r)^{-s_i} \quad (7.4)$$

の形になることがわかる。これは言わば Euler-Zagier 和の「双対」であり、この和についても Euler-Zagier 和に対するものと平行した理論が建設できると思われる。事実、我々は [35] において (7.4) に対するある種の parity result を証明したし、その結果はまた、二重ゼータ値の張る空間の次元に関する最近の金子氏と田坂氏の研究 [21] に応用されている。

8 積分表示と帰納的構造

以上の各節で見て来たように、ルート系のゼータ関数は種々の興味深い性質を持ち、さらに深い研究が望まれる研究対象である。我々は 1 節において、Euler-Zagier 和の解析的な研究を進めたい、という問題意識を述べたが、同様にルート系のゼータ関数についても、その真の理解のためには、解析的な方向からの研究が必要不可欠である。

ルート系のゼータ関数の解析接続に関する定理は既に 3 節で述べたが、本節ではその証明法のうち、筆者が提出した Mellin-Barnes 積分による方法を紹介し、その方法を適用することによって浮かび上がる、ルート系のゼータ関数たちとの帰納的な関係について述べる。

本稿で **Mellin-Barnes の積分公式**と呼んでいるのは、 $s, \lambda \in \mathbb{C}$, $\Re s > 0$, $\lambda \neq 0$, $|\arg \lambda| < \pi$ に対して

$$\Gamma(s)(1+\lambda)^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \Gamma(s+z)\Gamma(-z)\lambda^z dz \quad (8.1)$$

²⁶Hoffman [16] 参照。

で与えられる式²⁷である。ただし $-\Re s < c < 0$ で、積分路は $c - i\infty$ から $c + i\infty$ に至る、鉛直方向の直線である。

ゼータ関数、 L 関数の平均値の研究にこの (8.1) を応用した桂田氏の研究 [22] [23] に触発された筆者は、(8.1) を用いれば、Euler-Zagier 和や Mordell-Tornheim の多重ゼータ関数、さらにルート系のゼータ関数などの多重級数の解析接続ができることを発見した ([39] [40] [41] [42] [44])。その方法を、 A_2 型のルート系のゼータ関数 (3.4) を例にとって説明しよう。

まず $\Re s_j > 1$ ($1 \leq j \leq 3$) とすると、(3.4) の級数は明らかに絶対収束している。この式の分母の $(m_1 + m_2)^{-s_3}$ を

$$m_1^{-s_3} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^{-s_3}$$

と変形してから、この第二の因子に ($\lambda = m_2/m_1$ として) (8.1) を適用すると

$$(m_1 + m_2)^{-s_3} = m_1^{-s_3} \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(s_3 + z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_3)} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^z dz$$

($-\Re s_3 < c < 0$) となる。これを (3.4) に代入し、積分と和の順序を交換すれば

$$\zeta_2(\mathbf{s}, A_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(s_3 + z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_3)} \sum_{m_1=1}^{\infty} m_1^{-s_1-s_3-z} \sum_{m_2=1}^{\infty} m_2^{-s_2+z} dz$$

である。条件 $\Re s_j > 1$, $-\Re s_3 < c < 0$ の下で右辺のふたつの級数は絶対収束し、順序交換も正当化されて、

$$\zeta_2(\mathbf{s}, A_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\Gamma(s_3 + z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_3)} \zeta(s_1 + s_3 + z)\zeta(s_2 - z) dz \quad (8.2)$$

を得る。この変形のポイントは、定義式 (3.4) においては $(m_1 + m_2)^{-s_3}$ なる因子のせいで分離が不可能だった、 m_1 に関する和と m_2 に関する和を、(8.1) の効力によって分離できた点にある。

さて (8.2) の被積分関数は $z = -s_3 - l$, $z = l$, $z = 1 - s_1 - s_3$, $z = s_2 - 1$ (ただし $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に極を持つ。これらのうち、積分路を右に動かした時に遭遇するのは $z = l$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) と $z = s_2 - 1$ である。そこで積分路を $\Re z = M - \varepsilon$ (M は十分大きい正整数) まで平行移動し、途中で通過する極の留数を数え上げれば、

$$\begin{aligned} \zeta_2(\mathbf{s}, A_2) &= \frac{\Gamma(s_2 + s_3 - 1)\Gamma(1 - s_2)}{\Gamma(s_3)} \zeta(s_1 + s_2 + s_3 - 1) \\ &+ \sum_{k=0}^{M-1} \binom{-s_3}{k} \zeta(s_1 + s_3 + k)\zeta(s_2 - k) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{(M-\varepsilon)} \frac{\Gamma(s_3 + z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_3)} \zeta(s_1 + s_3 + z)\zeta(s_2 - z) dz \quad (8.3) \end{aligned}$$

²⁷この式は例えば [72, Section 14.51] に紹介されているが、超幾何関数の Barnes による積分表示 [7] の特殊な場合である。Barnes の研究には Pincherle, Mellin らの先行者がいるが、特に Mellin [48] [49] は既に、この種の積分を多重ゼータ関数の研究に応用している。

となる。この右辺の積分は、上述した被積分関数の極のリストからわかるように、

$$\Re s_3 > -M + \varepsilon, \Re(s_1 + s_3) > 1 - M + \varepsilon, \Re s_2 < 1 + M - \varepsilon \quad (8.4)$$

において取束して正則となる。また右辺の残りの項はガンマ関数と Riemann ゼータ関数で書けているから、もちろん有理型に解析接続できる。 M をいくらでも大きくとっていいことに注意すれば、以上の議論で $\zeta_2(s, A_2)$ の \mathbb{C}^3 全空間への有理型接続ができたことになる。しかも (8.3) から、特異点がどこにあるかも容易に見て取ることができる。

同様の議論を、任意のルート系に対して適用することができる。例えば A_r 型のゼータ関数であれば、(8.1) を使って m_1 に関する和を分離することにより、Riemann ゼータ関数と A_{r-1} 型のルート系のゼータ関数を含む積分（一般には多重積分になるが）で書けることがわかる。そこで、 A_{r-1} 型のゼータ関数の解析接続が既に言っていると仮定すれば、積分路を変形する議論により、 A_r 型のゼータ関数の解析接続も示すことができる。

ただし、上では積分路の変形は単純な平行移動だったが、それだけで常に十分なわけではない。一般にはより複雑な積分路を考える必要があることを、筆者は [42] で最初に指摘²⁸した。 A_3 型を考えるときに既にそうした複雑な積分路が必要になることは [47] で詳述されている。

また、この方法は当然、 $s_1 = \dots = s_r = s$ と置くことで Witten のゼータ関数の解析接続も与えるが、このように一変数にした状況でも、積分の中に現れるのは多変数のルート系のゼータ関数である。つまり多変数化しなければこの議論は成り立たないのであって、これが多変数化したことの大きいメリットのひとつである。

ここで A_r 型ルート系の Dynkin 図形を思い出してみると、上の積分表示は、Dynkin 図形の一番左にある辺を切断することに対応している、と見なすこともできるであろう。一番左側の辺を切り離せば、残るのはその左に A_1 型の Dynkin 図形、右には A_{r-1} 型の Dynkin 図形であり、積分の中に出てくるゼータ関数とうまく対応している。

同様のことが他の系列のルート系に対しても成り立つ。すなわち、(8.1) を適用することで、 $X = B, C, D$ などに対しても、 X_r 型のゼータ関数を、Riemann ゼータ関数と X_{r-1} 型ゼータ関数の積を含む積分で表示でき、それによって解析接続も証明できる。対応する Dynkin 図形の分割は図 1 の通りである。

逆に、Dynkin 図形の任意の切断に対して、対応する Mellin-Barnes 積分表示を求めることができる。例えば B_r 型、 C_r 型の場合、二重線になっている辺があるが、ここを切断する操作に対応して、 B_r, C_r 型のゼータ関数を

²⁸[42] ではかなり凝縮した書き方がなされているので、読みにくいかもしれない。[44] や [47] の方が記述が丁寧である。

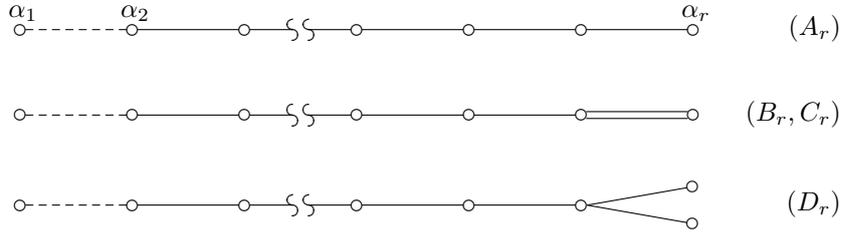


図 1:

A_{r-1} 型ゼータ関数と Riemann ゼータ関数で書く積分表示が可能である。同様に D_r 型についても A 型に帰する積分表示ができる (図 2)。

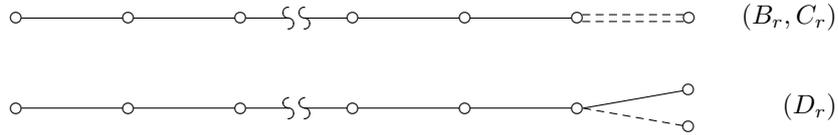


図 2:

また、 B_r, C_r 型の二重線のところを、そのうちの一本だけ切断すると、Dynkin 図形はふたつに分離はせず、 A_r 型のルート系の Dynkin 図形となる。これに対応する積分表示として、 B_r, C_r 型のゼータ関数の、 A_r 型ゼータ関数のみを含む積分表示も成り立つ (図 3)。



図 3:

一般には次の定理が成り立つ (図 4)。

定理 7 ([30, II, Theorem 5.4]) ルート系 Δ の Dynkin 図形の任意の辺を切断したとき、 Δ のゼータ関数は、切断してできる図形の各連結成分に対応するゼータ関数を含む (多重) 積分として表示できる。

この定理は、ルート系のゼータ関数の族が内包する、Mellin-Barnes 積分によって実現される帰納的構造を提示している。この関係により、すべてのルート系のゼータ関数は、最終的には A_1 型のゼータ関数、つまり Riemann ゼータ関数に行き着く。Riemann ゼータ関数の解析的な性質はかなり詳しく知られているから、その知識を出発点にして帰納構造を逆に遡ることにより、

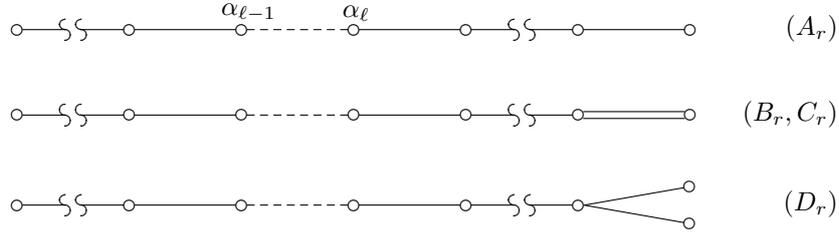


図 4:

原理的には任意のルート系のゼータ関数の解析的性質が導き出せるはずである。もちろん現実には、多重積分の扱いが複雑になっていくため、解析的挙動を調べるのは簡単ではない。それでも r が小さいいくつかの場合には、特異点集合の構造が調べられている。

A_2 型のゼータ関数の場合、(8.3) から直ちに、特異点集合は $s_1 + s_3 = 1 - l$, $s_2 + s_3 = 1 - l$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), $s_1 + s_2 + s_3 = 2$ であること ([39]) がわかる。 A_3 型については [47] において次の結果が証明されている。

定理 8 ([47, Theorem 3.5]) A_3 型のゼータ関数 $\zeta_3((s_1, \dots, s_6), A_3)$ の特異点集合は

$$\begin{aligned}
 s_1 + s_4 + s_6 &= 1 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
 s_3 + s_5 + s_6 &= 1 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
 s_2 + s_4 + s_5 + s_6 &= 1 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
 s_1 + s_2 + s_4 + s_5 + s_6 &= 2 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
 s_1 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 &= 2 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
 s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 &= 2 - l \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
 s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 &= 3
 \end{aligned}$$

で尽くされる。

また C_2, B_3, C_3 型については [30, II], G_2 型については [30, IV] で特異点集合が論じられている。ただし、(8.3) の類の式から特異点集合の候補者は直ちに見つかるが、それらが実際に特異点集合であること（つまり特異性が別の因子によってキャンセルされてしまっていないこと）を確かめるのは必ずしも容易ではない。上の定理 8 ではこのリストの各超平面が実際に特異点集合であることを丁寧に検証しているが、その他の論文中の結果の中には、特異点集合の候補者のリストを挙げるに留まっているものもある。

9 最近の結果

前節で述べた結果は、解析的な方向からの研究としてはいわば第一段階に過ぎない。前節の結果を土台にして、解析的にもより深いレベルにまで研究を進めることが望まれることは言うまでもない。

解析接続が言えたとなると、自然に生じる次の疑問は、果たして関数等式はあるのか、ということであろう。Euler-Zagier 型の場合²⁹には、少なくとも二重和の場合、1節で紹介したような関数等式が知られている。

岡本氏と小野塚氏は最近のプレプリント [58] において、(1.6) を特別な場合として含むような、 A_2 のゼータ関数の関数等式を証明した。まず、(1.5) の一般化として

$$g_2((s_1, s_2, s_3), A_2) = \zeta_2((s_1, s_2, s_3), A_2) - \frac{\Gamma(1-s_2)\Gamma(s_2+s_3-1)}{\Gamma(s_3)}\zeta(s_1+s_2+s_3-1) \quad (9.1)$$

とおく。また (1.7) に対応して

$$F_{\pm}(s_1, s_2, s_3) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{s_1+s_2+s_3-1}(k)\Psi(s_3, s_2+s_3; \pm 2\pi ik),$$

$$F_{\pm}^{\#}(s_1, s_2, s_3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_{s_1+s_2+s_3-1}(k)}{k^{s_1}}\Psi(s_3, s_2+s_3; \pm 2\pi ik)$$

とおけば、彼らの結果は

定理 9 ([58])

$$\begin{aligned} & \frac{g_2((s_1, s_2, s_3), A_2)}{(2\pi)^{s_2+s_3-1}\Gamma(1-s_2)} + e^{-\pi i(s_2+s_3-1)/2}(F_+(s_1, s_2, s_3) + F_-(s_1, s_2, s_3)) \\ &= \frac{g_2((-s_1, 1-s_3, 1-s_2), A_2)}{i^{s_2+s_3-1}\Gamma(s_3)} + e^{\pi i(s_2+s_3-1)/2}F_+^{\#}(s_1, s_2, s_3) \\ & \quad + e^{-\pi i(s_2+s_3-1)/2}F_-^{\#}(s_1, s_2, s_3) \end{aligned} \quad (9.2)$$

というものである。

さらに、 A_2 のゼータ関数は Mordell-Tornheim の二重和 (2.10) と一致していたが、岡本氏と小野塚氏は同じ論文で、一般の Mordell-Tornheim 型 r 重ゼータ関数にまで彼らの結果を拡張している。Mordell-Tornheim 型の多重ゼータ関数がルート系のゼータ関数の特殊化であることを考えれば、彼らの結果はルート系のゼータ関数の一般的な関数等式を探索するためのひとつの鍵を与えるものであるかもしれない。

他方、前節で述べたように Mellin-Barnes 積分表示はルート系のゼータ関数の解析的な挙動について精密に研究することを可能にするが、Romik は最近の

²⁹他のタイプの多重ゼータ関数の関数等式としては、Barnes の多重ゼータ関数についての [34] [63] がある。また新谷 L 関数についての広瀬氏と佐藤氏の結果 [15] も興味深い。

プレプリント [62] において、Mellin-Barnes 積分表示を用いて $\zeta_2((s, s, s), A_2)$ の極の位置などを精密に研究し、その結果として $SU(3)$ の n 次元表現の個数についての精密な漸近式を証明した。

$SU(2)$ の場合、その n 次元表現の個数は n の分割数に他ならないので、その個数については古典的な Hardy-Ramanujan の漸近公式が知られているが、Romik の得た結果は Hardy-Ramanujan の式の $SU(3)$ でのアナロジーを与える。従って、同様の分析を他の群に対して実行すれば、他の群の n 次元表現の個数についても同じような漸近式を得る可能性がある。既に C_2 の場合について、筆者は [62] と類似の計算を実行して、そのゼータ関数の極の位置の精密な情報を得ている。

また、5 節、6 節で論じたような話題に関しては、筆者と小森氏、津村氏は最近、Poincaré 多項式との関連を迫及している。多少の結果は既に得られていて、2014 年秋の立教大学での日仏共同研究集会でアナウンスし、関連する論文もひとつ公表している ([36]) が、根幹部分の内容はまだ論文としてまとめられていない。

以上のように、現在進行中の研究も多々あるが、筆者の印象としては、ルート系のゼータ関数の研究はまだ「最低限の基礎工事」が終わった段階に過ぎない。ルート系のゼータ関数の理論の本格的な発展へ向けて、成すべきことはまだまだ膨大に残されていると思われる。

謝辞 筆者に代数学シンポジウムでの講演の機会を与えてくださった方々や、会場となった静岡大学でお世話になった方々に、この場を借りてお礼申し上げます。また、長期間に亘っての共同研究者であり、本稿に対しても多くの貴重なコメントをくださった小森靖氏、津村博文氏の両氏、およびミスプリントを指摘してくださった佐藤信夫氏にも感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers, *Acta Arith.* **98** (2001), 107-116.
- [2] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 189-209.
- [3] 荒川恒男・金子昌信 (編), 多重ゼータ値入門、Math-for-industry Lecture Note **23**, 九州大学、2010.
- [4] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.

- [5] T. M. Apostol and T. H. Vu, Dirichlet series related to the Riemann zeta function, *J. Number Theory* **19** (1984), 85-102.
- [6] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, *Acta Math.* **81** (1949), 353-376.
- [7] E. W. Barnes, A new development of the theory of the hypergeometric functions, *Proc. London Math. Soc.* (2)**6** (1908), 141-177.
- [8] Y.-J. Choie and K. Matsumoto, Functional equations for double series of Euler type with coefficients, preprint, arXiv:1306.0987.
- [9] Y.-J. Choie and K. Matsumoto, Functional equations for double series of Euler-Hurwitz-Barnes type with coefficients, preprint, arXiv:1403.1940, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*.
- [10] M. de Crisenoy, Values at T -tuples of negative integers of twisted multi-variable zeta series associated to polynomials of several variables, *Compositio Math.* **142** (2006), 1373-1402.
- [11] D. Essouabri, Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications à la théorie analytique des nombres, Thèse, Univ. Nancy I, 1995.
- [12] D. Essouabri, Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications en théorie analytique des nombres, *Ann. Inst. Fourier* **47** (1997), 429-483.
- [13] A. B. Goncharov, Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, preprint, arXiv:math/0103059.
- [14] P. E. Gunnells and R. Sczech, Evaluations of Dedekind sums, Eisenstein cocycles, and special values of L -functions, *Duke Math. J.* **118** (2003), 229-260.
- [15] M. Hirose and N. Sato, On the functional equation of the normalized Shintani L -function of several variables, *Math. Z.* **280** (2015), 1085-1092.
- [16] M. E. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.* **152** (1992), 275-290.
- [17] J. G. Huard, K. S. Williams and N.-Y. Zhang, On Tornheim's double series, *Acta Arith.* **75** (1996), 105-117.

- [18] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compositio Math.* **142** (2006), 307-338.
- [19] S. Ikeda and K. Matsuoka, Double analogue of Hamburger's theorem, *Publ. Math. Debrecen* **86** (2015), 89-98.
- [20] S. Ikeda and K. Matsuoka, On functional relations for Witten multiple zeta-functions, *Tokyo J. Math.*, to appear.
- [21] M. Kaneko and K. Tasaka, Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2, *Math. Ann.* **357** (2013), 1091-1118.
- [22] M. Katsurada, An application of Mellin-Barnes' type integrals to the mean squares of Lerch zeta-functions, *Collect. Math.* **48** (1997), 137-153.
- [23] M. Katsurada, An application of Mellin-Barnes type of integrals to the mean square of L -functions, *Liet. Mat. Rink.* **38** (1998), 98-112.
- [24] Y. Komori, An integral representation of multiple Hurwitz-Lerch zeta functions and generalized multiple Bernoulli numbers, *Quart. J. Math. (Oxford)* **61** (2010), 437-496.
- [25] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta functions of root systems, in *The Conference on L-Functions*, L. Weng and M. Kaneko (eds.), World Scientific, 2007, pp.115-140.
- [26] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional equations and functional relations for the Euler double zeta-function and its generalization of Eisenstein type, *Publ. Math. Debrecen* **77** (2010), 15-31.
- [27] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional relations for zeta-functions of root systems, in *Number Theory, Dreaming in Dreams*, Proc. 5th China-Japan Seminar, T. Aoki et al. (eds.), World Scientific, 2010, pp.135-183.
- [28] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On multiple Bernoulli polynomials and multiple L -functions of root systems, *Proc. London Math. Soc.* (3)**100** (2010), 303-347.
- [29] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, An introduction to the theory of zeta-functions of root systems, in *Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions*, G. Bhowmik et al. (eds.), MSJ Memoirs **21**, Math. Soc. Japan, 2010, pp.115-140.

- [30] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras,
 II, *J. Math. Soc. Japan* **62** (2010), 355-394.
 III, in *Multiple Dirichlet Series, L-functions and Automorphic Forms*, D. Bump et al. (eds.), Progress in Math. **300**, Birkhäuser, 2012, pp.223-286.
 IV, *Glasgow Math. J.* **53** (2011) , 185-206.
 V, *ibid.* **57** (2015), 107-130.
- [31] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional equations for double L -functions and values at non-positive integers, *Intern. J. Number Theory* **7** (2011), 1441-1461.
- [32] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Shuffle products for multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems, *Math. Z.* **268** (2011), 993-1011.
- [33] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional relations for zeta-functions of weight lattices of Lie groups of type A_3 , in *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory*, Proc. 5th Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, A. Laurinćikas et al. (eds.), TEV, 2012, pp.151-172.
- [34] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Barnes multiple zeta-functions, Ramanujan's formula, and relevant series involving hyperbolic functions, *J. Ramanujan Math. Soc.* **28** (2013), 49-69.
- [35] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, A study on multiple zeta values from the viewpoint of zeta-functions of root systems, *Funct. Approx. Comment. Math.* **51** (2014), 43-76.
- [36] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Lattice sums of hyperplane arrangements, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **63** (2014), 161-213.
- [37] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of weight lattices of compact connected semisimple Lie groups, in *Proc. 5th Intern. Conf. on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations*, *Šiauliai Math. Semin.* **10(18)** (2015), 149-179.
- [38] K. Matsumoto, Asymptotic series for double zeta, double gamma, and Hecke L -functions, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **123** (1998), 385-405; Corrigendum and addendum, *ibid.* **132** (2002), 377-384.

- [39] K. Matsumoto, On the analytic continuation of various multiple zeta-functions, in *Number Theory for the Millennium II*, Proc. Millennial Conf. on Number Theory, M. A. Bennett et al. (eds.), A K Peters, 2002, pp.417-440.
- [40] M. Matsumoto, Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series, *Nagoya Math. J.* **172** (2003), 59-102.
- [41] K. Matsumoto, The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions I, *J. Number Theory* **101** (2003), 223-243.
- [42] K. Matsumoto, On Mordell-Tornheim and other multiple zeta-functions, in *Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations*, D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz (eds.), Bonner Math. Schriften **360**, Bonn, 2003, n.25, 17pp.
- [43] K. Matsumoto, Functional equations for double zeta-functions, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **136** (2004), 1-7.
- [44] K. Matsumoto, Analytic properties of multiple zeta-functions in several variables, in *Number Theory, Tradition and Modernization*, Proc. 3rd China-Japan Seminar, W. Zhang and Y. Tanigawa (eds.), Springer, 2006, pp.153-173.
- [45] K. Matsumoto, The analytic theory of multiple zeta-functions and its applications, *Sūgaku* **59** (2007), 24-45 (in Japanese); English transl. *Sugaku Expositions* **23** (2010), 143-167.
- [46] K. Matsumoto, T. Nakamura, H. Ochiai and H. Tsumura, On value-relations, functional relations and singularities of Mordell-Tornheim and related triple zeta-functions, *Acta Arith.* **132** (2008), 99-125.
- [47] K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras I, *Ann. Inst. Fourier* **56** (2006), 1457-1504.
- [48] H. Mellin, Eine Formel für den Logarithmus transcenderter Funktionen von endlichem Geschlecht, *Acta Soc. Sci. Fenn.* **29**, no.4 (1900).
- [49] H. Mellin, Die Dirichlet'schen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht, *Acta Math.* **28** (1904), 37-64.

- [50] L. J. Mordell, On the evaluation of some multiple series, *J. London Math. Soc.* **33** (1958), 368-371.
- [51] M. Ram Murty and K. Sinha, Multiple Hurwitz zeta functions, in *Multiple Dirichlet series, Automorphic Forms, and Analytic Number Theory*, S. Friedberg et al. (eds.), Proc. Sympos. Pure Math. **75**, Amer. Math. Soc., 2006, pp.135-156.
- [52] T. Nakamura, A functional relation for the Tornheim double zeta function, *Acta Arith.* **125** (2006), 257-263.
- [53] T. Nakamura, Double Lerch value relations and functional relations for Witten zeta functions, *Tokyo J. Math.* **31** (2008), 551-573.
- [54] T. Okamoto, Generalizations of Apostol-Vu and Mordell-Tornheim multiple zeta functions, *Acta Arith.* **140** (2009), 169-187.
- [55] T. Okamoto, Some relations among Apostol-Vu double zeta values for coordinatewise limits at non-positive integers, *Tokyo J. Math.* **34** (2011), 353-366.
- [56] T. Okamoto, Multiple zeta values related with the zeta-function of the root system of type B_r , *JP J. Alg. Number Theory Appl.* **22** (2011), 1-44.
- [57] T. Okamoto, Multiple zeta values related with the zeta-function of the root system of type A_2 , B_2 and G_2 , *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **61** (2012), 9-27.
- [58] T. Okamoto and T. Onozuka, Functional equation for the Mordell-Tornheim multiple zeta-function I, preprint.
- [59] M. Ono and S. Yamamoto, Shuffle product of finite multiple polylogarithms, preprint, arXiv:1502.06693.
- [60] K. Onodera, Generalized log sine integrals and the Mordell-Tornheim zeta values, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 1463-1485.
- [61] T. Onozuka, Analytic continuation of multiple zeta-functions and the asymptotic behavior at non-positive integers, *Funct. Approx. Comment. Math.* **49** (2013), 331-348.
- [62] D. Romik, On the number of n -dimensional representations of $SU(3)$, the Bernoulli numbers, and the Witten zeta function, preprint, arXiv:1503.03776.

- [63] G. Shibukawa, Bilateral zeta functions and their applications, *Kyushu J. Math.* **67** (2013), 429-451.
- [64] M. V. Subbarao and R. Sitaramachandrarao, On some infinite series of L. J. Mordell and their analogues, *Pacific J. Math.* **119** (1985), 245-255.
- [65] A. Szenes, Iterated residues and multiple Bernoulli polynomials, *Intern. Math. Res. Notices* **18** (1998), 937-958.
- [66] L. Tornheim, Harmonic double series, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 303-314.
- [67] H. Tsumura, On some combinatorial relations for Tornheim's double series, *Acta Arith.* **105** (2002), 239-252.
- [68] H. Tsumura, On Witten's type of zeta values attached to $SO(5)$, *Arch. Math.* **82** (2004), 147-152.
- [69] H. Tsumura, Combinatorial relations for Euler-Zagier sums, *Acta Arith.* **111** (2004), 27-42.
- [70] H. Tsumura, On Mordell-Tornheim zeta values, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 2387-2393.
- [71] H. Tsumura, On functional relations between the Mordell-Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **142** (2007), 395-405.
- [72] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1927.
- [73] E. Witten, On quantum gauge theories in two dimensions, *Commun. Math. Phys.* **141** (1991), 153-209.
- [74] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in *First European Congress of Mathematics, Vol. II*, A. Joseph et al. (eds.), *Progr. Math.* **120**, Birkhäuser, 1994, pp.497-512.
- [75] J. Zhao, Analytic continuation of multiple zeta function, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 1275-1283.
- [76] J. Zhao, Alternating Euler sums and special values of the Witten multiple zeta function attached to $\mathfrak{so}(5)$, *J. Austral. Math. Soc.* **89** (2010), 419-430.

- [77] J. Zhao, Multi-polylogs at twelfth roots of unity and special values of Witten multiple zeta function attached to the exceptional Lie algebra \mathfrak{g}_2 , *J. Alg. Appl.* **9** (2010), 327-337.
- [78] J. Zhao and X. Zhou, Witten multiple zeta values attached to $\mathfrak{sl}(4)$, *Tokyo J. Math.* **34** (2011), 135-152.
- [79] X. Zhou, D. M. Bradley and T. Cai, Depth reduction of a class of Witten zeta functions, *Electr. J. Combin.* **16** (2009), Issue 1, Notes #N27.

Rankin-Selberg L 関数の特殊値に関する Beilinson 予想 について

千田雅隆

この論説では François Brunault 氏との共同研究によって得られた Rankin-Selberg L 関数の特殊値に関する Beilinson 予想についての結果を紹介する. 前半では L 関数の特殊値に関する Beilinson の予想について解説し, 後半では今回得られた結果とその背景について説明する.

1 Dedekind ζ 関数の特殊値

1.1 Riemann ζ 関数の整数点での値

n を正の偶数とする. Riemann ζ 関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ の $s = n$ での特殊値に関して, Euler は

$$\zeta(n) = -(2\pi i)^n \frac{B_n}{2 \cdot (n!)}$$

となることを示した. ここで B_n は Bernoulli 数であり, $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ によって定義されるのであった. 関数等式 $\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$ を用いると $\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}$ となることもわかる. それでは n が 3 以上の奇数の場合は $\zeta(n)$ の値はどうなるのであろうか? 関数等式と $\Gamma(s)$ の性質から $\zeta(1-n) = 0$ となり, $\zeta(n)$ の値は $\zeta(s)$ の $s = 1-n$ での一階微分値 $\zeta'(1-n)$ と結びついていることがわかる. n が 3 以上の場合, 実は $\zeta(n)$ の値は (高次) regulator と呼ばれるものを用いて表せることが知られている. 以下では, まずはじめに代数体の Dedekind ζ 関数の特殊値と regulator の関係について知られている結果を復習しよう.

1.2 Dedekind ζ 関数の値と regulator

F を判別式 D_F を持つ代数体とし, \mathcal{O}_F を F の整数環とする. r_1 を F の実素点の個数, r_2 を複素素点の個数とする. F の Dedekind ζ 関数は

$$\zeta_F(s) = \sum_{0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_F: \text{ideal}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

と定義され, $\text{Re}(s) > 1$ で絶対収束するのであった. Dedekind ζ 関数の Euler 積表示

$$\zeta_F(s) = \prod_{\mathfrak{p}: \mathcal{O}_F \text{ の素 ideal}} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

により $\text{Re}(s) > 1$ で極も零点も持たないことがわかる. さらに $\zeta_F(s)$ は $s = 1$ で 1 位の極を持ち, $s = 1$ 以外で正則な関数に解析接続される. $\zeta_F(s)$ の $s = 1$ での留数が代数体 F に関する数論的

に重要な量を用いて表せることを主張するのが類数公式であった。 h_F を F の類数, w_F を F に含まれる 1 の冪根の個数とし, R_F を F の regulator とする。このとき類数公式は次のように述べられる:

$$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta_F(s) = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2} h_F R_F}{w_F |D_F|^{1/2}}.$$

Dedekind ζ 関数に対する関数等式を用いることで

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-(r_1+r_2-1)} \zeta_F(s) = -\frac{h_F R_F}{w_F}$$

という等式も得られる。関数等式の形から $s = 0$ での零点の位数は $r_1 + r_2 - 1$ であることがわかるので, この値は $\zeta_F(s)$ の $s = 0$ での Taylor 展開の先頭項になっている。類数公式に現れる regulator R_F についてももう少し思い出すことにしよう。Dirichlet の regulator 写像

$$r_F : \mathcal{O}_F^\times = K_1(\mathcal{O}_F) \rightarrow \prod_{\tau: F \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

は $x \in \mathcal{O}_F$ に対して τ 成分を $\log(|\tau(x)|^{n_\tau})$ と定めることによって定義される写像であった。但し, n_τ は τ が実素点のとき $n_\tau = 1$, τ が複素素点のとき $n_\tau = 2$ とする。これを少し修正した写像

$$\tilde{r}_F : \mathcal{O}_F^\times \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \prod_{\tau: F \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

を考える (ここで, \mathbb{Z} は $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ に対角的に埋め込む)。すると Dirichlet の単数定理により $\tilde{r}_F \otimes \mathbb{R}$ は同型であることがわかり, $\operatorname{Im}(\tilde{r}_F)$ はその中の格子を定める。このとき regulator R_F はその格子の基本領域の体積として定義されるのであった。類数公式に現れる h_F や w_F は整数であることから, 特に

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta_F(s) s^{r_1+r_2-1} \equiv R_F \pmod{\mathbb{Q}^\times}$$

となることがわかる。高次 K 群からの (高次) regulator 写像を用いて, この結果を他の整数点の場合にも拡張したのが Borel [7, 8] である。 $n > 1$ に対し, $\mathbb{R}(n) = (2\pi i)^n \mathbb{R}$ とおき, 整数 $d_{F,n}$ を

$$d_{F,n} = \operatorname{ord}_{s=1-n} \zeta_F(s) = \begin{cases} r_2 & n \text{ が偶数のとき,} \\ r_1 + r_2 & n \text{ が奇数のとき,} \end{cases}$$

によって定める。このとき Borel は Borel regulator 写像

$$r_{F,n}^{\text{Borel}} : K_{2n-1}(\mathcal{O}_F) \rightarrow (\mathbb{Z}^{\operatorname{Hom}(F,\mathbb{C})} \otimes \mathbb{R}(n-1))^+ \cong \mathbb{R}^{d_{F,n}}$$

(ここで $+$ は複素共役の作用で不変な部分を表す) を定義し, $r_{F,n}^{\text{Borel}} \otimes \mathbb{R}$ が同型になることを示した。さらに Borel は $\operatorname{Im}(r_{F,n}^{\text{Borel}})$ が $\mathbb{R}^{d_{F,n}}$ の格子になり, この格子の基本領域の面積を $R_{F,n}$ と書いたとき

$$\lim_{s \rightarrow 1-n} s^{-d_{F,n}} \zeta_F(s) \equiv R_{F,n} \pmod{\mathbb{Q}^\times}$$

となることも証明した。この式と関数等式を使うことで

$$\zeta_F(n) \equiv \frac{\pi^{n([F:\mathbb{Q}]-d_{F,n})} R_{F,n}}{|D_F|^{1/2}} \pmod{\mathbb{Q}^\times}$$

となることがわかる。特に, $F = \mathbb{Q}$ で n を 3 以上の奇数とすると, $\zeta(n) \equiv R_{\mathbb{Q},n} \pmod{\mathbb{Q}^\times}$ となり, Riemann ζ 関数の 3 以上の奇数での値が (有理数倍の曖昧さを除き) regulator によって記述されていることがわかる。

Lichtenbaum, Borel, Bloch や Deligne らの先駆的な仕事の後, Beilinson [2] は代数多様体の L 関数の整数点での特殊値に対してこの一般化にあたる公式を予想した。次の章では Beilinson による予想の定式化について述べる。

2 Beilinson 予想

Beilinson は論文 [2] の中で代数多様体, より一般に Chow motive に対して定まる L 関数の整数点での値に関する予想を提出した. 考えている整数点が (Deligne の意味で) critical な場合には Deligne [10] による予想があり, Beilinson 予想は Deligne の予想の critical とは限らない場合への拡張になっている. 以下では Beilinson 予想の定式化を簡単に復習しよう. なお, Beilinson 予想については既に様々な紹介記事 ([16], [12], [15] など) が書かれているので, より詳細な定義や性質などについてはそちらを参考にしたい.

X を \mathbb{Q} 上の滑らかな射影的代数多様体とし, $d = \dim X$ とおく. ここでは簡単のため, $h^i(X)$ の形になっている motive のみを考えることにする (i は $0 \leq i \leq 2d$ を満たす整数). X の $\overline{\mathbb{Q}}$ への基底変換を $X_{\overline{\mathbb{Q}}}$ と書く. $L(h^i(X), s)$ を X の étale cohomology $H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の作用から定まる L 関数とする. Deligne によって証明された Weil 予想により, この L 関数は $\text{Re}(s) > \frac{i}{2} + 1$ で絶対収束し, この領域では極や零点を持たないことがわかる. この場合, 対応する Γ 因子は次のように定めることができる. まず,

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s) \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$$

とおき, de Rham cohomology $H_{dR}^i(X)$ の Hodge filtration を $F^p H_{dR}^i(X)$ と書くことにしよう. $p+q=i$ となる整数 $p \geq 0, q \geq 0$ に対して

$$H^{p,q}(X) = F^p H_{dR}^i(X) \cap \overline{F^q H_{dR}^i(X)}$$

とおき, Hodge 数 $h^{p,q}$ を $h^{p,q} = \dim H^{p,q}(X)$ と定める. さらに i が偶数のときは

$$h^{\frac{i}{2}, \pm} = \dim H^{\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}(X)^{\pm(-1)^{i/2}}$$

とおく. このとき $M = h^i(X)$ に対する無限素点での L 因子を

$$L_{\infty}(h^i(X), s) = \begin{cases} \prod_{p < q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}} & i \text{ が奇数のとき,} \\ \prod_{p < q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \frac{i}{2})^{h^{\frac{i}{2},+}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \frac{i}{2} + 1)^{h^{\frac{i}{2},-}} & i \text{ が偶数のとき,} \end{cases}$$

によって定める. $\Lambda(h^i(X), s) = L_{\infty}(h^i(X)) L(h^i(X), s)$ とおけば, $\Lambda(h^i(X), s)$ は \mathbb{C} 上に正則に解析接続され, 関数等式

$$\Lambda(h^i(X), s) = \varepsilon(h^i(X), s) \Lambda(h^i(X), i+1-s)$$

を満たすと予想されている. ただし, $\varepsilon(h^i(X), s)$ は Galois 表現 $H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ に対して定まる ε 因子を表す. 以下, $L(h^i(X), s)$ が解析接続を持つという仮定の下で $s = j$ での $L(h^i(X), s)$ の Taylor 展開の先頭項を $L^*(h^i(X), j)$ と書くことにする.

一般の場合の regulator 写像は motivic cohomology から Deligne cohomology への写像として与えられる. X の motivic cohomology は代数的 K 群を用いて

$$H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j)) = (K_{2j-i}(X)_{\mathbb{Q}})^{(j)}$$

と定義することができる. motivic cohomology は高次 Chow 群や Voevodsky の motive の圏を用いて定義することもできるが, それらは (我々の考えている代数多様体の範囲では) 一致するこ

とが証明されている. motivic cohomology $H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))$ の中に integral part と呼ばれる部分空間 $H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}$ が定まる. 例えば, X が \mathbb{Z} 上の regular, proper flat な model \mathcal{X} を持つ場合は

$$H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} = \text{Im} \left((K_{2j-i}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}})^{(j)} \rightarrow (K_{2j-i}(X)_{\mathbb{Q}})^{(j)} \right)$$

となる. Scholl [18] により, X が regular model を持たない場合でも alteration を使うことで部分空間 $H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}$ が定義されている. これが §1 で述べた Dirichlet の regulator 写像における単数群の一般化にあたる対象である.

また, 代数体の場合の (少し修正した) regulator の定義にあらわれた \mathbb{R} 線形空間 $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ の一般化にあたるものとして Deligne cohomology $H_{\mathcal{D}}^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ を考えることができる. まず, (一時的に設定を変えて) X を \mathbb{C} 上の滑らかな射影的代数多様体とする. j を整数とし, X_{an} 上の層の複体

$$\mathbb{R}(j)_{\mathcal{D}} = \left(\mathbb{R}(j) \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{an}}} \xrightarrow{d} \Omega_{X_{\text{an}}}^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_{X_{\text{an}}}^{j-1} \right)$$

($\mathbb{R}(j)$ は次数 0, $\Omega_{X_{\text{an}}}^{j-1}$ は次数 j のところにおく) を考える. このとき,

$$H_{\mathcal{D}}^i(X, \mathbb{R}(j)) = H^i(X_{\text{an}}, \mathbb{R}(j)_{\mathcal{D}})$$

とおき, X が \mathbb{R} 上の滑らかな射影的代数多様体のときは

$$H_{\mathcal{D}}^i(X, \mathbb{R}(j)) = H_{\mathcal{D}}^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(j))^+$$

とおく. ただし, $+$ は複素共役による固定部分である. この cohomology を Deligne cohomology とよぶ. Deligne cohomology を定義するとき用いた複体 $\mathbb{R}(j)_{\mathcal{D}}$ について

$$\text{Cone} \left(\Omega_{X_{\text{an}}}^{\geq j} \oplus \mathbb{R}(j) \rightarrow \Omega_{X_{\text{an}}}^{\bullet} \right) [-1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}(j)_{\mathcal{D}}$$

という擬同型が存在するので, このことより長完全系列

$$\cdots \rightarrow H_B^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(j)) \rightarrow H_{dR}^i(X_{\mathbb{C}})/F^j H_{dR}^i(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(j)) \rightarrow \cdots$$

を得る. ここで $H_B^i(X, \mathbb{R}(j))$ は X の Betti cohomology を表す. もし $i - 2j \leq -1$ なら上の長完全系列から短完全系列

$$0 \rightarrow H_B^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(j)) \rightarrow H_{dR}^i(X_{\mathbb{C}})/F^j H_{dR}^i(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(j)) \rightarrow 0$$

が得られ, さらに複素共役の作用をみることで

$$0 \rightarrow H_B^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(j))^+ \xrightarrow{\alpha} H_{dR}^i(X)/F^j H_{dR}^i(X) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X, \mathbb{R}(j)) \rightarrow 0 \quad (1)$$

という短完全系列が得られる. この短完全系列にあらわれる写像 α は比較定理から得られる写像と一致することに注意する.

元の設定に戻って, X を \mathbb{Q} 上の滑らかな射影的代数多様体とする. $M = h^i(X)(j)$ の Betti cohomology $M_B = H_B^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(j))$ と de Rham cohomology $M_{dR} = H_{dR}^i(X)$ を考える. M_{dR} は Hodge filtration $F^p M_{dR} = F^{p+j} H_{dR}^i(X)$ を持つ. 比較同型 $I_{\infty} : M_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の determinant を $\delta(M) \in \mathbb{C}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}$ と書くことにする. 比較同型により Deligne の period 写像

$$\alpha_M : M_B^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \rightarrow (M_{dR}/F^0 M_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

が得られる. 短完全系列 (1) により, $i - 2j \leq -1$ のとき $\text{Coker}(\alpha_M)$ は $H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ と同型になるので $L_{\infty}(h^i(X), s)$ の整数点における零点の位数を計算することにより, 関数等式が成り立つという仮定の下で

$$\dim_{\mathbb{R}} H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j)) = \text{ord}_{s=i+1-j} L(h^i(X), s) - \text{ord}_{s=j} L(h^i(X), s)$$

となることもわかる. さらに $M_B^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, $(M_{dR}/F^0 M_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ の \mathbb{Q} 有理構造 M_B^+ , $M_{dR}/F^0 M_{dR}$ を用いることで $\det_{\mathbb{R}} H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ に \mathbb{Q} 有理構造を入れることができる. これを $\mathcal{D}(M)$ と書くことにする. α_M が同型となると, M は critical であるといい, このとき Deligne の周期 $c^+(M)$ を $c^+(M) = \det(\alpha_M) \in \mathbb{C}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}$ によって定める. この場合は $\text{Coker}(\alpha_M)$ は 0 になるので $\det_{\mathbb{R}} \text{Coker}(\alpha_M)$ は canonical に \mathbb{R} に同型となり, $\mathcal{D}(M) = c^+(M)^{-1} \cdot \mathbb{Q}$ となる. また $\mathcal{B}(M) = (2\pi i)^{-\dim M_B} \delta(M) \mathcal{D}(M)$ とおく. 関数等式及び rank が 1 の motive の分類に関する予想 ([10, Conjecture 6.6]) の仮定の下で, この \mathbb{Q} 有理構造は $M^{\vee}(1)$ に対応する \mathbb{Q} 有理構造になっていることがわかる.

さらに Beilinson は一般化された Chern 指標を用いて regulator 写像

$$r_{\mathcal{D}} : H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j)) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^i(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$$

を定義した. regulator 写像の構成について説明するにはさらなる準備が必要になってしまうので, ここでは詳細は割愛させて頂くことにするが, 興味のある方は Beilinson の原論文 [2] 及び Beilinson 予想に関する紹介記事 [15, 16] などを参照して頂きたい. 以上の準備の下で Beilinson による予想は次のように述べられる.

予想 2.1 (Beilinson). $j > \frac{i}{2} + 1$ と仮定する.

(1) $r_{\mathcal{D}} \otimes \mathbb{R}$ を $H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ に制限した写像

$$r_{\mathcal{D}, \mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} : H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$$

は同型になる.

(2) $\det_{\mathbb{R}} H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ の中での等式

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{D}, \mathbb{Z}}(\det_{\mathbb{Q}} H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}) &= L(h^i(X), j) \mathcal{D}(h^i(X)(j)) \\ &= L^*(h^i(X), i+1-j) \mathcal{B}(h^i(X)(j)) \end{aligned}$$

が成立する.

$j = \frac{i}{2} + 1$ のときは予想を少し修正する必要がある. 例えば, 類数公式はこの場合にあたり, Dirichlet の regulator 写像を修正したものを考えたのであった. 同様の修正をこの場合に行う必要性がある. まず, $CH^{j-1}(X)_{\text{hom}}$ を余次元が $j-1$ の X 上の代数的 cycle のなす群を homological equivalence で割った群とし, $N^{j-1}(X) = CH^{j-1}(X)_{\text{hom}} \otimes \mathbb{Q}$ とおく. $N^{j-1}(X)$ から Betti cohomology への cycle 写像と比較同型を用いることで, 修正した regulator 写像

$$\tilde{r}_{\mathcal{D}} : H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(j)) \oplus N^{j-1}(X) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$$

が定まる. このとき $j = \frac{i}{2} + 1$ の場合の Beilinson の予想は次のように述べられる.

予想 2.2 (Beilinson). $j = \frac{i}{2} + 1$ と仮定する.

(1) $\tilde{r}_{\mathcal{D}} \otimes \mathbb{R}$ を $(H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X)) \otimes \mathbb{R}$ に制限した写像

$$\tilde{r}_{\mathcal{D}, \mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} : (H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X)) \otimes \mathbb{R} \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$$

は同型になる.

(2) $\det_{\mathbb{R}} H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ の中での等式

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{\mathcal{D}, \mathbb{Z}}(\det_{\mathbb{Q}} H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X)) &= L(h^i(X), j) \mathcal{D}(h^i(X)(j)) \\ &= L^*(h^i(X), i+1-j) \mathcal{B}(h^i(X)(j)) \end{aligned}$$

が成立する.

ここでは扱わなかったが, $j = \frac{i}{2} + 2$ のときは BSD 予想の一般化にあたる場合であり, その場合には予想の定式化に height pairing を使う必要がある. さらに残りの有理数の部分を決定する予想として Bloch-加藤の玉河数予想 (または単に Bloch-加藤予想とも呼ばれることもある) がある (Bloch-Kato [5]). これらの予想は Chow motive の場合にも自然に拡張される.

F を代数体とすると, $X = \text{Spec } F$, $i = 0$, $j = 1$ の場合の Beilinson 予想は類数公式から従い, j が一般の場合も Borel の結果及び Borel regulator と Beilinson regulator の比較から予想が成立していることが確かめられる. X の次元が 1 以上の場合, 予想 2.1, 2.2 の (1) の主張の一部となっている $r_{\mathcal{D}, \mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ または $\tilde{r}_{\mathcal{D}, \mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ の単射性は非常に難しい問題であり, ほとんど何も結果が知られていない. その場合は $H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}$ や $H_{\mathcal{M}}^{i+1}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{j-1}(X)$ の代わりに, これらの部分空間を用いて定式化される弱い形の Beilinson 予想を考えることができる. また, Chow motive の代わりに (homological equivalence を用いて定義される) Grothendieck motive に対しても予想を定式化することができる. 例えば, あとで考察する重さが 2 よりも大きい楕円保型形式に伴う motive は一般には Grothendieck motive としてしか構成されていないが, そのような場合でも Beilinson 予想が定式化される (重さが 2 の場合は Chow motive が構成できる).

Beilinson は予想を提出した論文 [2] の中で, 重さが 2 の楕円保型形式 f に伴う Chow motive $M(f)$ に対し, $i = 1$, $j = 2$ のときに弱い形の Beilinson 予想を証明している. さらに Beilinson [3] はこの結果を $j > 2$ の場合にも拡張している. この結果の重さ $k \geq 2$ の楕円保型形式の場合への拡張は Deninger-Scholl [12] で解説されている. また, Beilinson は重さが 2 の楕円保型形式 f, g で f が g の指標 χ による twist になっていないときに Rankin-Selberg 積 $f \otimes g$ に対応する Chow motive $M(f \otimes g) = M(f) \otimes M(g)$ に対して, $i = j = 2$ の場合の弱い形の Beilinson 予想を証明している. この場合, 予想に現れる L 関数として, Rankin-Selberg L 関数 $L(f \otimes g, s)$ を考えることになる. 後半ではこの Beilinson の結果の一般化について説明したい.

3 Rankin-Selberg 積に対する Beilinson 予想

保型形式に対応する motive は久賀・佐藤多様体を用いて構成される. まず久賀・佐藤多様体の構成について簡単に復習しよう. N を 3 以上の整数として $Y = Y(N)$ を \mathbb{Q} 上の modular 曲線とする. このとき Y の \mathbb{C} 値点は

$$Y(\mathbb{C}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash (\mathfrak{H} \times \text{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$$

と記述することができる. ここで \mathfrak{H} は上半平面を表す. E を Y 上の普遍楕円曲線とし, E の Y 上の k 重 fiber 積

$$E^k = E \times_Y \cdots \times_Y E$$

を考える. このとき E^k の \mathbb{C} 値点は

$$E^k(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{Z}^{2k} \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \backslash (\mathfrak{H} \times \mathbb{C}^k \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$$

と記述することができる. $\nu_k : \mathfrak{H} \times \mathbb{C}^k \rightarrow E^k(\mathbb{C})$ を

$$(\tau; z_1, \dots, z_k) \mapsto \left[\left(\tau; z_1, \dots, z_k; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right]$$

によって定める.

Beilinson 予想は滑らかな射影的代数多様体に対する予想であったが, E^k は射影的ではない. そこで $X = X(N)$ を Y のコンパクト化として, \bar{E} を X 上の普遍広義楕円曲線とし, 先ほどと同様に \bar{E} の X 上の k 重 fiber 積 $\bar{E}^k = \bar{E} \times_X \cdots \times_X \bar{E}$ を考える. しかし k が 2 以上のときは \bar{E}^k は滑らかになっていないので, さらに Deligne による特異点解消 $\bar{\bar{E}}^k \rightarrow \bar{E}^k$ を考えることで \mathbb{Q} 上の滑らかな射影的代数多様体 $\bar{\bar{E}}^k$ が得られる.

k_1, k_2, j を $0 \leq j \leq k_1 \leq k_2$ を満たす整数とする.

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_{k_1+2}(\Gamma_0(N_f), \chi_f)^{\mathrm{new}}, \quad g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)q^n \in S_{k_2+2}(\Gamma_0(N_g), \chi_g)^{\mathrm{new}}$$

を正規化された固有形式とし, $K_{f,g} = \mathbb{Q}(\{a_n(f), a_n(g)\})$ とおく. このとき $K_{f,g}$ は \mathbb{Q} 上の有限次拡大体になる. 以下, 簡単のため N_f と N_g は素数であると仮定する. $f^*(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n(f)}q^n$, $g^*(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n(g)}q^n$ とおく. ℓ を素数とし, $\bar{\mathbb{Q}}$ から $\bar{\mathbb{Q}}_{\ell}$ への埋め込みを一つ固定する. $E_{f,g} = \mathbb{Q}_{\ell}(\{a_n(f), a_n(g)\})$ とおき, V_f, V_g をそれぞれ f, g に伴う $E_{f,g}$ 係数の ℓ 進 Galois 表現とする ($E_{f,g}$ 上の 2 次元線形空間になる). $L(f \otimes g, s)$ を Galois 表現 $V(f \otimes g) = V_f \otimes_{E_{f,g}} V_g$ に伴う L 関数とすると, $L(f \otimes g, s)$ は不分岐な素点では 4 次の Euler 因子を持ち, $\mathrm{Re}(s) > \frac{k_1+k_2+4}{2}$ で絶対収束する. また, Γ 因子は $L_{\infty}(f \otimes g, s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k_1-1)$ で与えられ, $\Lambda(f \otimes g, s) = L_{\infty}(f \otimes g, s)L(f \otimes g, s)$ とおくと,

$$\Lambda(f \otimes g, s) = \varepsilon(f \otimes g, s)\Lambda(f^* \otimes g^*, k_1 + k_2 + 3 - s)$$

という形の関数等式が成り立つことが知られている (Jacquet [13]). さらに, 関数等式に現れる ε 因子 $\varepsilon(f \otimes g, s)$ は Galois 表現から定まる ε 因子に一致することも知られている. この関数等式の形から $L(f^* \otimes g^*, s)$ は $s = j + 1$ ($0 \leq j \leq k_1$) でちょうど 1 位の零点を持つことがわかる. 以下, $N = N_f N_g$ とおき, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の部分群 G_1 を

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \right\}$$

によって定める. このとき, $E^{k_1}(\mathbb{C})$ および $E^{k_2}(\mathbb{C})$ 上の G_1 不変な正則微分形式 ω_{f^*}, ω_g で

$$\nu_{k_1}^* \omega_{f^*} = (2\pi i)^{k_1+1} f^*(\tau_1) d\tau_1 \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{k_1}, \quad \nu_{k_2}^* \omega_g = (2\pi i)^{k_2+1} g(\tau_2) d\tau_2 \wedge dz_{k_1+1} \wedge \cdots \wedge dz_{k_1+k_2}$$

を満たすものが唯一存在する. $\omega_{f^*} \otimes \bar{\omega}_g$ は $E^{k_1}(\mathbb{C}) \times E^{k_2}(\mathbb{C})$ 上の微分形式を定め, この微分形式は $\bar{\bar{E}}^{k_1}(\mathbb{C}) \times \bar{\bar{E}}^{k_2}(\mathbb{C})$ 上に滑らかに延びる. それを $\Omega_{f,g}$ と書くことにする. $M(f), M(g)$ を Scholl [17] によって構成された f, g に対応する $K_{f,g}$ 係数の (Grothendieck) motive とする. 例えば $M(f)$ は $\bar{\bar{E}}^{k_1}$ と f に対応する projector pr_f の組によって与えられる. $M = M(f \otimes g) = M(f) \otimes M(g)$

とおくと, これが Rankin-Selberg 積 $f \otimes g$ に対応する motive となる. このとき M は $\overline{E}^{k_1} \times \overline{E}^{k_2}$ と $\mathrm{pr}_{f,g} = \mathrm{pr}_f \otimes \mathrm{pr}_g$ の組によって与えられる. $n = k_1 + k_2 + 2 - j$ とおく. $\mathrm{pr}_{f,g}$ は $\overline{E}^{k_1} \times \overline{E}^{k_2}$ の Deligne cohomology から $f \otimes g$ 部分への射影

$$\mathrm{pr}_{f,g} : H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(\overline{E}^{k_1} \times \overline{E}^{k_2}, \mathbb{R}(n)) \otimes K_{f,g} \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$$

を与える. さらに, (1) と比較同型により

$$0 \rightarrow F^n H_{dR}^{k_1+k_2+2}(M) \otimes \mathbb{R} \rightarrow H_B^{k_1+k_2+2}(M(n-1))^+ \otimes \mathbb{R} \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n)) \rightarrow 0$$

という短完全系列が得られ, Deligne cohomology $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$ は rank 1 の $K_{f,g} \otimes \mathbb{R}$ 加群となる. この短完全系列によって $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$ に $K_{f,g}$ 有理構造が入る. この $K_{f,g}$ 有理構造は §2 で定義した $\mathcal{B}(M(n))$ に一致する. その $K_{f,g}$ 基底 t を一つ固定する.

同型 $M(f \otimes g)(n-1)^\vee \cong M(f^* \otimes g^*)(j+1)$ と比較同型を使うと $\Omega_{f,g}$ は $H_B^{k_1+k_2+2}(M(n-1)^\vee) \otimes \mathbb{C}$ の元とみなすことができる. このことと Poincaré duality を用いることで $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(M(n))$ の元 α と $\Omega_{f,g}$ の間に well-defined な pairing $\langle \alpha, \Omega_{f,g} \rangle$ が定まる. このとき次が成立する:

$$\langle t, \Omega_{f,g} \rangle \equiv (2\pi i)^{k_1+k_2-2j} \pmod{K_{f,g}^\times}. \quad (2)$$

以上の準備のもとで主結果は次のように述べられる.

定理 3.1 (Brunault-Chida [6]). $0 \leq j \leq k_1 \leq k_2$ とする. $k_1 = k_2 = j$ の場合は $g \neq f^*$ で $N > 1$ と仮定する. このとき $H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+3}(\overline{E}^{k_1} \times \overline{E}^{k_2}, \mathbb{Q}(k_1 + k_2 + 2 - j)) \otimes K_{f,g}$ の元 ξ が存在して,

$$\langle \mathrm{pr}_{f,g} \circ r_{\mathcal{D}}(\xi), \Omega_{f,g} \rangle \equiv (2\pi i)^{k_1+k_2-2j} L'(f^* \otimes g^*, j+1) \pmod{K_{f,g}^\times}$$

が成り立つ.

注意. 同様の結果は Scholl (unpublished), Kings-Loeffler-Zerbes [14] でも与えられている. [14] では $H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+3}(E^{k_1} \times E^{k_2}, \mathbb{Q}(k_1 + k_2 + 2 - j)) \otimes K_{f,g}$ に元を構成しており, 我々の場合は boundary まで元を拡張している点異なる. また, [14] では Beilinson 予想の p 進類似 (Perrin-Riou の予想) についても結果を与えている.

定理 3.1 と (2) を合わせると $H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+3}(\overline{E}^{k_1} \times \overline{E}^{k_2}, \mathbb{Q}(k_1 + k_2 + 2 - j)) \otimes K_{f,g}$ の元 ξ が存在して

$$\mathrm{pr}_{f,g} \circ r_{\mathcal{D}}(\xi) \equiv L'(f^* \otimes g^*, j+1) \cdot t \pmod{K_{f,g}^\times}$$

となることがわかる. つまり, ある motivic cohomology の元から定まる $K_{f,g}$ 有理構造と Hodge 理論により定まる $K_{f,g}$ 有理構造のずれに Rankin-Selberg L 関数の微分値が現れることがわかり, 主定理が Beilinson 予想の evidence を与えていることがわかる. ただし, 構成された元が integral part に属しているかどうかはまだわかっていない.

証明は大きく分けて三つの部分 (motivic cohomology の元の構成とその regulator の計算, boundary への拡張) からなる. 元の構成は Beilinson [3] によって導入された Eisenstein symbol の理論と対角埋め込みをうまく用いることで行われる. この論説の残りの部分では元の構成と regulator の計算方法について主に紹介する.

4 Eisenstein symbol と Beilinson-Flach 元

4.1 Eisenstein symbol

ここでは Beilinson [3] によって導入された Eisenstein symbol について紹介する. $k \geq 0, N \geq 3$ を整数とし, modular 曲線 $Y = Y(N)$ の関数体を F_N と書く. E を level 構造

$$\alpha : E[N] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$$

を持つ F_N 上の普遍楕円曲線とする. 以下, α を通して $E[N]$ と $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ を同一視する. §2 と同様に普遍楕円曲線 E の k 重 fiber 積 E^k を考える. 以下, E^k を $\Sigma : E^{k+1} \rightarrow E$ の kernel と同一視し, これにより E^k への対称群 \mathfrak{S}_{k+1} の作用を定める. $i = 0, \dots, k$ に対して, 合成写像 $E^k \hookrightarrow E^{k+1} \xrightarrow{\text{pr}_i} E$ を q_i によって表し, $U_N = \bigcap_{i=0}^k q_i^{-1}(E \setminus E[N]) \subset E^k$ とおく. $f_0, \dots, f_k \in \mathcal{O}(E \setminus E[N])^\times$ を選び, $f = q_0^*(f_0) \cup \dots \cup q_k^*(f_k) \in H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))$ と書くことにする. $G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2k} \rtimes \mathfrak{S}_{k+1}$ とおき,

$$\varepsilon_k : G \rightarrow \{\pm 1\}$$

を $g = (t, \sigma) \in G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2k} \rtimes \mathfrak{S}_{k+1}$ に対し, $\varepsilon_k(g) = \varepsilon_k(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$ とおくことによって定める. いま, $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2k} \cong E[N]^k$ は U_N に translation によって作用するので, G も U_N に作用する. これにより G の $H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))$ への作用が定まる. ε_k に対応する projector を e_k と書くことにする. e_k による像を $H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))^{e_k}$ と書き, 対応する射影を

$$\text{pr}_{e_k} : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1)) \rightarrow H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))^{e_k}, \quad x \mapsto |G|^{-1} \sum_{g \in G} \varepsilon_k(g) g \cdot x$$

とする. 補助的に正の整数 M を取って, 一つ固定する. $j : U_{MN} \hookrightarrow U_N$ を自然な包含関係から定まる写像, $[\times M] : U_{MN} \rightarrow U_N$ を M 倍写像とすると, j と $[\times M]$ はそれぞれ

$$j^* : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1)) \rightarrow H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_{MN}, \mathbb{Q}(k+1))^{(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{2k}}$$

及び

$$[\times M]^* : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1)) \xrightarrow{\sim} H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_{MN}, \mathbb{Q}(k+1))^{(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{2k}}$$

を定める. これらを用いて $[\times M^{-1}] = ([\times M]^*)^{-1} \circ j^*$ と定義する. $H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))_k^{e_k}$ を任意の $M \geq 1$ に対して $[\times M^{-1}]$ が M^{-k} 倍で作用するような $H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))_k^{e_k}$ の最大の商とする. これから定まる自然な写像を

$$\overline{\text{pr}}_{e_k} : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1)) \rightarrow H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))_k^{e_k}$$

と書くことにする. このとき, 自然な埋め込み $\alpha : U_N \hookrightarrow E^k$ は同型

$$\alpha^* : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(E^k, \mathbb{Q}(k+1))_k^{e_k} \xrightarrow{\sim} H_{\mathcal{M}}^{k+1}(U_N, \mathbb{Q}(k+1))_k^{e_k}$$

を与えることが証明できる. $f_0, \dots, f_k \in \mathcal{O}(E \setminus E[N])^\times$ に対して

$$\widetilde{\text{Eis}}^k(f_0, \dots, f_k) = (\alpha^*)^{-1}(\overline{\text{pr}}_{e_k}(f)) \in H_{\mathcal{M}}^{k+1}(E^k, \mathbb{Q}(k+1))$$

とおく. このとき, $\widetilde{\text{Eis}}^k$ は次数が 0 の因子群 $\mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]^0$ を経由する. つまり次のような可換図式が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=0}^k \mathcal{O}(E \setminus E[N])^\times & \xrightarrow{\widetilde{\text{Eis}}^k} & H_{\mathcal{M}}^{k+1}(E^k, \mathbb{Q}(k+1)) \\ \text{Div} \downarrow & \nearrow & \uparrow \text{Eis}^k \\ \left(\bigotimes_{i=0}^k \mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]^0 \right)^{e_k} & \xleftarrow{\theta} & \mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]^0. \end{array}$$

上の図式で θ は $\beta \mapsto [\beta \otimes \alpha \otimes \cdots \otimes \alpha]$ により定まる写像である (但し $\alpha = N^2[0] - \sum_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} [x]$ とおいた). 上で構成された写像

$$\text{Eis}^k : \mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]^0 \rightarrow H_{\mathcal{M}}^{k+1}(E^k, \mathbb{Q}(k+1))^{e_k}$$

を Eisenstein symbol と呼ぶ. $k \geq 1$ のときは Eis^k は $\mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]$ まで拡張することができる. 以下, $k \geq 1$ の場合は $\beta \in \mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]$ とし, $k = 0$ の場合は β は $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 - \{0\}$ に support を持つと仮定する.

Eisenstein 級数を用いて Eisenstein symbol の regulator 写像

$$r_{\mathcal{D}} : H_{\mathcal{M}}^{k+1}(E^k, \mathbb{Q}(k+1))^{e_k} \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{k+1}(E_{\mathbb{R}}^k, \mathbb{R}(k+1))^{e_k}$$

の下での像の具体的な記述を与えることができる (E^k は射影的な代数多様体ではないが, この場合にも Deligne cohomology や regulator 写像を定義することができる). この場合, Deligne cohomology は

$$H_{\mathcal{D}}^{k+1}(E_{\mathbb{R}}^k, \mathbb{R}(k+1)) \cong \frac{\{\varphi \in H^0(E_{\mathbb{R}, \text{an}}^k, \mathcal{A}^k \otimes \mathbb{R}(k)) \mid d\varphi = \frac{1}{2}(\omega + (-1)^k \bar{\omega}), \omega \in \Omega^{k+1}(\overline{E}^k)(\log D)\}}{dH^0(E_{\mathbb{R}, \text{an}}^k, \mathcal{A}^{k-1} \otimes \mathbb{R}(k))}$$

と記述することができる. ここで \mathcal{A}^\bullet は \mathbb{R} 値 C^∞ 級微分形式の de Rham 複体であり, $D = \overline{E}^k(\mathbb{C}) \setminus E^k(\mathbb{C})$ とおいた. $0 \leq j \leq k$ に対して

$$\psi_{k,j} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) d\bar{z}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{\sigma(j)} \wedge dz_{\sigma(j+1)} \wedge \cdots \wedge dz_{\sigma(k)}$$

とおく. このとき, $r_{\mathcal{D}}(\text{Eis}^k(\beta))$ は上で述べた Deligne cohomology の記述の下で

$$\Phi^k(\beta) = -\frac{k!(k+2)}{N(2\pi i)} \cdot \frac{\tau - \bar{\tau}}{2} \sum_{a=0}^k \psi_{k,a} \cdot \left(\sum'_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2} \sum_{v \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \frac{\beta(h^{-1}v) \cdot e^{\frac{2\pi i(cv_1 + dv_2)}{N}}}{(c\tau + d)^{k+1-a} (c\bar{\tau} + d)^{a+1}} \right) \pmod{d\tau, d\bar{\tau}}$$

の定める類として与えられる (Deninger [11]). ここで \sum' は $(c, d) = (0, 0)$ を除いた全ての整数の組 (c, d) に関する和を表す.

4.2 Beilinson-Flach 元の一般化

整数 k_1, k_2, j を $0 \leq j \leq k_1 \leq k_2$ となるように取り, $k'_1 = k_1 - j \geq 0, k'_2 = k_2 - j \geq 0$ とおく. このとき, 次のような 3 つの写像を考える:

$$\begin{array}{ccc} E^{k'_1+j+k'_2} & \xrightarrow{\Delta} & E^{k'_1+2j+k'_2} = E^{k_1+k_2} \xrightarrow{i} E^{k_1} \times E^{k_2} \\ \downarrow p & & \\ E^{k'_1+k'_2} & & \end{array}$$

これらの写像は次のようにして与えられるものである.

- (1) $p : E^{k'_1+j+k'_2} \rightarrow E^{k'_1+k'_2}$ は中央の j 個の成分を忘れる写像.
- (2) $\Delta : E^{k'_1+j+k'_2} \rightarrow E^{k'_1+2j+k'_2} = E^{k_1+k_2}$ は中央の j 個の成分を対角に埋め込む写像.
- (3) $i : E^{k'_1+2j+k'_2} = E^{k_1+k_2} \rightarrow E^{k_1} \times E^{k_2}$ は X 上の fiber 構造を一カ所だけ忘れる写像.

これにより次のような写像の合成を考えることができる:

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{M}}^{k'_1+k'_2+1}(E^{k'_1+k'_2}, \mathbb{Q}(k'_1+k'_2+1)) &\xrightarrow{p^*} H_{\mathcal{M}}^{k'_1+k'_2+1}(E^{k'_1+j+k'_2}, \mathbb{Q}(k'_2+k'_2+1)) \\ &\xrightarrow{\Delta_*} H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+1}(E^{k_1+k_2}, \mathbb{Q}(k_1+k_2-j+1)) \\ &\xrightarrow{i_*} H_{\mathcal{M}}^{k_1+k_2+3}(E^{k_1} \times E^{k_2}, \mathbb{Q}(k_1+k_2-j+2)). \end{aligned}$$

$\beta \in \mathbb{Q}[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]$ とする. $j = k_1 = k_2$ のときは, β は $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \setminus \{0\}$ に support を持つと仮定する. このとき上の合成写像の下での $\text{Eis}^{k'_1+k'_2}(\beta)$ の像を $\Xi^{k_1, k_2, j}(\beta)$ と書くことにする.

ここでは詳しく述べられないが, motivic cohomology の residue 写像の計算や Voevodsky によって定義された motive の圏を用いた motivic cohomology の記述などを使うことにより $\Xi^{k_1, k_2, j}(\beta)$ は $\overline{E}^{k_1} \times \overline{E}^{k_2}$ の boundary まで拡張することができる.

$k_1 = k_2 = j = 0$ の場合, boundary まで拡張された元は Beilinson [2] が重さ 2 の保型形式の場合の証明に用いた Beilinson-Flach 元と呼ばれるものに一致する. その意味で我々の構成した元は Beilinson-Flach 元の一般化になっている.

5 Rankin-Selberg 積分と regulator

5.1 Rankin-Selberg 積分

$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\chi_f \chi_g$ から定まる Dirichlet 指標とし,

$$D(f, g, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)a_n(g)}{n^s}$$

とおく. このとき Shimura [19] の結果によって

$$L(\chi, 2s - k_1 - k_2 - 2)D(f, g, s) = R_{f, g, N}(s)L(f \otimes g, s) \quad (3)$$

となることが知られている. ただし, $R_{f, g, N}(s)$ は

$$R_{f, g, N}(s) = \left(\prod_{p|N} P_p(f \otimes g, s) \right) \sum_{n \in S(N)} \frac{a_n(f)a_n(g)}{n^s}$$

で与えられる関数であり, $R_{f, g, N}(s)$ は $p | N$ となる素数 p についての p^{-s} たちの多項式になる. ここで $S(N)$ は N を割る素数のみを素因子としてもつような正の整数全体の集合を表す.

Dirichlet 指標 $\omega : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して Eisenstein 級数 $E_{k_2-k_1, N}(\tau, s, \omega)$ を

$$E_{k_2-k_1, N}(\tau, s, \omega) = \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{\omega(n)}{(Nm\tau + n)^{k_2-k_1} |Nm\tau + n|^{2s}}$$

と定義する. このとき Rankin-Selberg 法によって次のことが証明される.

定理 5.1 (Shimura [19]).

$$\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} f(\tau)g(-\bar{\tau})E_{k_2-k_1,N}(\tau, s-1-k_2, \chi)y^{s-1}dxdy = 2(4\pi)^{-s}\Gamma(s)L(\chi, 2s-k_1-k_2-2)D(f, g, s).$$

この結果が以下の regulator の計算に必要となる.

5.2 Regulator の計算

$\beta_\chi \in \mathbb{Q}(\chi)[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2]$ を

$$\beta_\chi(v_1, v_2) = \begin{cases} \bar{\chi}(-v_2) & v_1 = 0 \text{ の場合,} \\ 0 & v_1 \neq 0 \text{ の場合,} \end{cases}$$

によって定める.

Deligne cohomology の元は current を用いて表すことができる. current を用いた Deligne cohomology $H_{\mathcal{D}}^{k_1+k_2+3}(E_{\mathbb{R}}^{k_1} \times E_{\mathbb{R}}^{k_2}, \mathbb{R}(k_1 + k_2 - j + 2))$ の元の表示により, 微分形式 $\Omega_{f,g}$ との pairing を積分を使って自然に定めることができる. この pairing は §2 で定めた pairing と一致することが積分表示の比較からわかる. さらに Burgos Gil-Kramer-Kühn [9] の結果を使うことで次の式が得られる:

$$\langle r_{\mathcal{D}}(\Xi^{k_1, k_2, j}(\beta_\chi)), \Omega_{f,g} \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^{k'_1+j+k'_2+1}} \int_{E^{k'_1+j+k'_2}(\mathbb{C})} \Delta^* i^* \Omega_{f,g} \wedge p^* \Phi^{k'_1+k'_2}(\beta_\chi).$$

§3 で見たように $\Phi^{k'_1+k'_2}(\beta_\chi)$ はある種の Eisenstein 級数を用いて記述される微分形式であった. その表示をもとに上の式の右辺の計算を行うと

$$\begin{aligned} & \langle r_{\mathcal{D}}(\Xi^{k_1, k_2, j}(\beta_\chi)), \Omega_{f,g} \rangle \\ &= C \cdot (2\pi i)^{k_1+k_2-j+1} \lim_{s \rightarrow -k'_2} \Gamma(s + k_2 - k_1) \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} f^*(\tau)g^*(-\bar{\tau})E_{k_2-k_1,N}(\tau, s, \bar{\chi})y^{s+k_2}dxdy \end{aligned}$$

という結果が得られる. ここで C は具体的に書き下すことのできる有理数である. これに定理 5.1 と (3) を用いることで最終的に次のような計算結果を得ることができる.

命題 5.2. $K_{f,g} \otimes \mathbb{C}$ の元としての等式

$$\langle r_{\mathcal{D}}(\Xi^{k_1, k_2, j}(\beta_\chi)), \Omega_{f,g} \rangle = \pm (2\pi i)^{k'_1+k'_2} \cdot \frac{(k'_1 + k'_2 + 2) \cdot j! \cdot \phi(N)^2}{2 \cdot N^{k'_1+k'_2}} \cdot R_{f^*, g^*, N}(j+1) \cdot L'(f^* \otimes g^*, j+1)$$

が成り立つ (符号も具体的に記述することができる).

注意. (1) $k_1 = k_2 = 0$ のとき, 同様の結果は Baba-Sreekantan [1] や Bertolini-Darmon-Rotger [4] でも与えられている.

(2) $(N_f, N_g) \neq 1$ の場合は $R_{f^*, g^*, N}(j+1) = 0$ となってしまうこともある.

参考文献

- [1] S. Baba and R. Sreekantan, *An analogue of circular units for products of elliptic curves*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **47** (2004), no. 1, 35–51.
- [2] A. A. Beilinson, *Higher regulators and values of L -functions*, J. Soviet Math. **30** (1985), 2036–2070.
- [3] A. A. Beilinson, *Higher regulators of modular curves*, In: Applications of algebraic K -theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), 1–34, Contemp. Math., 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [4] M. Bertolini, H. Darmon and V. Rotger, *Beilinson-Flach elements and Euler systems I: syntomic regulators and p -adic Rankin L -series*, J. Algebraic Geom. **24** (2015), 355–378.
- [5] S. Bloch and K. Kato, *L -functions and Tamagawa numbers of motives*, In: The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math., 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [6] F. Brunault and M. Chida, *Regulators for Rankin-Selberg products of modular forms*, to appear in Ann. Sci. Math. Québec, Special issue marking the 60th birthday of Glenn Stevens.
- [7] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) **7** (1974), 235–272.
- [8] A. Borel, *Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta aux points entiers*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4) **4** (1977), 613–636.
- [9] J. I. Burgos Gil, J. Kramer and U. Kühn, *Cohomological arithmetic Chow rings*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (1) (2007), 1–172.
- [10] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, In: Proc. Sympos. Pure Math., vol. 33, Automorphic Forms, Representations and L -functions (Oregon State Univ. Corvallis. 1977), Part 2, Amer. Math. Soc. Providence. R.I., 1979, pp. 313–346.
- [11] C. Deninger, *Extensions of motives associated to symmetric powers of elliptic curves and to Hecke characters of imaginary quadratic fields*, In: Arithmetic geometry (Cortona, 1994), 99–137, Sympos. Math., XXXVII, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [12] C. Deninger and A. Scholl, *The Beilinson conjectures*, In: L -functions and arithmetic (Durham, 1989), 173–209, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 153, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [13] H. Jacquet, *Automorphic forms on $GL(2)$. Part II*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 278, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. xiii+142 pp.
- [14] G. Kings, D. Loeffler and S. L. Zerbes, *Rankin-Eisenstein classes for modular forms*, preprint.

- [15] J. Nekovář, *Beilinson's conjectures*, In: Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Symp. Pure Math., **55** Part I, 537–570, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [16] P. Schneider, *Introduction to the Beilinson conjectures*, In: Beilinson's conjectures on special values of L -functions, 1–35, Perspect. Math., 4, Academic Press, Boston, MA, 1988.
- [17] A. J. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), 419–430.
- [18] A. J. Scholl, *Integral elements in K -theory and products of modular curves*, In: The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 467–489, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [19] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), no. 6, 783–804.

ユニタリ型表現のモデルの変換公式について

森本 和輝

(京都大学大学院理学研究科)

概要

本稿では p 進簡約代数群の表現の実現であるモデルについて、その変換公式を考察する。特に、 F を標数 0 の非アルキメデス局所体、 E をその二次拡大とした時に、 $\mathrm{GL}_{2n}(E)$ の緩増加な表現に対して、Whittaker モデルと $(\mathrm{GL}_{2n}(F), 1)$ -モデルの間の同型写像とその逆写像を積分を用いて明示的に構成する。

1 p 進簡約代数群の表現とそのモデル

本稿を通して、 F は標数 0 の非アルキメデス局所体、 E は F の二次拡大とする。また、 G を F 上定義された簡約代数群とし、 G を G の F -有理点のなす群とする。

1.1 Preliminaries

p 進簡約代数群の表現に関して基本的な定義を与える (Casselman [1] 参照)。

Definition 1.1. \mathbb{C} 上のベクトル空間 V と準同型 $\pi : G \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ からなる組 (π, V) が条件

- 任意のベクトル $v \in V$ に対して、その固定部分群 $\{g \in G : \pi(g)v = v\}$ が開集合

を満たす時、 (π, V) を G の滑らかな表現と呼ぶ。表現空間に言及しない場面では、しばしば (π, V) を単に π と書く。特に $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ の場合には、 π を指標と呼ぶ。

Definition 1.2. (π, V) を G の滑らかな既約表現とする。この時、 π は G の中心 Z_G 上ではスカラー倍で作用する。このようにして定まる Z_G の指標を ω_{π} と書き、中心指標と呼ぶ。

Definition 1.3. (π, V) を G の滑らかな表現とする。 $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ と定め、 $\pi^* : G \rightarrow V^*$ を

$$\langle \pi^*(g)v^*, v \rangle = \langle v^*, \pi(g^{-1})v \rangle \quad g \in G, v \in V, v^* \in V^*$$

で定めると、 (π^*, V^*) は G の (滑らかとは限らない) 表現になる。 V^{\vee} を π^* の作用に関して滑らかな V^* のベクトル全体とする。また、 V^{\vee} への作用 π^{\vee} を π^* の V^{\vee} への制限により定める。このようにして定義された G の滑らかな表現 (π^{\vee}, V^{\vee}) を反傾表現と呼ぶ。

Remark 1.1. (π, V) が既約ならば、 (π^{\vee}, V^{\vee}) も既約。また、この時

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi \otimes \pi^{\vee}, 1) \simeq \mathbb{C}$$

が成り立つ。

A を G の任意の閉部分群、 (σ, V_σ) を滑らかな A の表現とする。この時、 G の滑らかな表現 $\text{Ind}_A^G \sigma$ を次のように定義する： G 上の V_σ -値函数で次の二つの条件を満たすもののなす空間を $\text{Ind}_A^G \sigma$ の表現空間として取る。

1. $f(ag) = \sigma(a)f(g) \quad a \in A, g \in G.$
2. ある G の開部分群 K に対して、 $f(gk) = f(g) \quad g \in G, k \in K.$

また、 $\text{Ind}_A^G \sigma$ の作用は右移動、つまり $(g \cdot f)(x) = f(xg) \quad (x, g \in G)$ によって定める

1.2 p 進簡約代数群の表現のモデル

Definition 1.4. H を G の閉部分群とし、 χ を H の指標とする。 G の滑らかな既約表現 (π, V_π) が

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(\pi, \text{Ind}_H^G \chi) = 1$$

を満たすとき、 $\text{Ind}_H^G \chi$ の G -不変な部分空間 $\mathfrak{M}^{(H, \chi)}(\pi)$ で

$$V_\pi \simeq \mathfrak{M}^{(H, \chi)}(\pi)$$

となるものが一意的に存在する。この時、 $\mathfrak{M}^{(H, \chi)}(\pi)$ のことを π の (H, χ) -モデルとよぶ。

いくつかモデルの例をあげておく。

1. G は F 上分裂であるとする。 B を G の Borel 部分群とし、その Levi 分解を $B = TN$ と書く。 ψ_N を N の指標とする。 $t \in T$ に対して $\psi_N(t \cdot t^{-1}) = \psi_N$ となるのは、 t が G の中心の元である場合に限る時、 ψ_N は非退化であると言う。 ψ_N を非退化な指標とした時、 G の任意の滑らかな既約表現 π に対して、

$$(1.2.1) \quad \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(\pi, \text{Ind}_N^G \psi_N) \leq 1$$

が成り立つ (Rodier [9] 参照)。このモデルは特に Whittaker モデルと呼ばれる。

2. $G = \text{GL}_m(E)$ の場合には上の例のデータは次のようにして具体的に与えられる。 N として上三角ユニポテント行列全体のなす群 N_m がとれる。また、 F の非自明な指標 ψ に対して N_m の指標 ψ_{N_m} を

$$\psi_{N_m}(n) := \psi \left(\frac{1}{2} \text{Tr}_{E/F}(n_{1,2} + \cdots + n_{m-1,m}) \right)$$

で定義すれば、これは非退化な指標である。さらに、次の場合には (1.2.1) の次元が 1 になる事が知られている。

(π, V) を $\text{GL}_m(E)$ の滑らかな既約表現で、中心指標 ω_π は $|\omega_\pi| = 1$ を満たすとする。 $0 \neq (\cdot, \cdot) \in \text{Hom}_G(\pi \otimes \pi^\vee, \mathbb{C})$ をとる。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $[g \mapsto (\pi(g)v, v^\vee)] \in L^{2+\varepsilon}(Z_{\text{GL}_m(E)} \backslash \text{GL}_m(E))$ である時、 π は緩増加であるという。 π が緩増加である時、

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\text{GL}_m(E)}(\pi, \text{Ind}_{N_m}^{\text{GL}_m(E)} \psi_{N_m}) = 1$$

が成り立つ。

3. $\mathrm{GL}_m(E)$ の任意の滑らかな既約表現 π に対して、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(E)}(\pi, \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_m(F)}^{\mathrm{GL}_m(E)} \mathbf{1}) \leq 1$$

が成り立つ (Flicker [3] 参照)。ここで、 $\mathbf{1}$ は $\mathrm{GL}_m(F)$ の自明表現。 π が $(\mathrm{GL}_m(F), \mathbf{1})$ -モデルを持つとき、 π はユニタリ型であると呼ぶ。

4. ユニタリ群 $\mathrm{U}_{4m}(F)$ を次のように定義する。

$$\{g \in \mathrm{GL}_{4m}(E) : {}^t \bar{g} J_{2m} g = J_{2m}\}$$

ここで、 $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元を $x \mapsto \bar{x}$ と書き、 J_{2m} は次で定義される $\mathrm{GL}_{4m}(E)$ の歪対称行列:

$$J_{2m} = \begin{pmatrix} & w_{2m} \\ -w_{2m} & \end{pmatrix}, w_1 = (1), w_m = \begin{pmatrix} & w_{m-1} \\ 1 & \end{pmatrix}$$

π を $\mathrm{GL}_{2m}(E)$ のユニタリ型の滑らかな既約表現とする。 P をその Levi 成分 M_P が $\mathrm{GL}_{2m}(E)$ と同型な $\mathrm{U}_{4m}(E)$ の標準的な放物型部分群とする。 $\pi \otimes |\det|^{1/2}$ を M_P と表現とみなした時、 P の冪単根基 (unipotent radical) U_P 上自明な表現として $\pi \otimes |\det|^{1/2}$ は P の表現にのばせる。この時、誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{P(F)}^{\mathrm{U}_{4m}(F)}(\pi \otimes |\det|^{1/2} \delta_P^{1/2})$$

を考える (ここで、 δ_P を P のモジュラス函数)。この誘導表現は可約であることがわかり、また Langlands の結果からこの誘導表現は唯一の既約商 (Langlands 商) をもつ。その既約商を $\mathrm{LQ}(\pi)$ と書く。

N_U を $\mathrm{U}_{4m}(F)$ の上三角ユニポテント行列のなす部分群とする。このとき、

$$N_U = \left\{ \begin{pmatrix} n & \\ & w_{2m} {}^t \bar{n}^{-1} w_{2m} \end{pmatrix} : n \in N_{2m} \right\} U_P$$

と書ける。 N_{2m} の指標 $\psi_{N_{2m}}$ を U_P 上自明になるように N_U にのばし、 $\psi_{N_{2m}}$ を N_U の指標とみなす。 $\psi_{N_{2m}}$ は N_U の指標として非退化ではないに注意しておく。この時、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}_{4m}(F)}(\mathrm{LQ}(\pi), \mathrm{Ind}_{N_U}^{\mathrm{U}_{4m}(F)} \psi_{N_{2m}}) = 1$$

(Morimoto [7] 参照)。しかし、一般には $\mathrm{U}_{4m}(F)$ の滑らかな既約表現 Π に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}_{4m}(F)}(\Pi, \mathrm{Ind}_{N_U}^{\mathrm{U}_{4m}(F)} \psi_{N_{2m}}) \leq 1$$

とは限らない。

1.3 モデルの変換

与えられた一つの既約表現が異なる二つのモデルを場合がしばしばある。それらは、表現の実現であるため同型であるが、より詳しい関係を見るために次の問題を考えたい。この問題のことをモデルの変換と呼ぶ。

問題 1. (π, V_π) を G の滑らかな既約表現とする。 $i = 1, 2$ に対して、 H_i を G の閉部分群、 χ_i を H_i の指標とする。また、 $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_{H_i}^G \chi_i) = 1$ とする。この時、同型写像

$$\mathfrak{M}^{(H_1, \chi_1)}(\pi) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}^{(H_2, \chi_2)}(\pi)$$

と、その逆写像を明示的に表すことが出来るだろうか?

この問題については、次の場合に Lapid と Mao [6] による結果がある。

1. $G = \mathrm{GL}_{2m}(F)$
2. $H_1 = \mathrm{GL}_m(F) \times \mathrm{GL}_m(F)$, $\chi_1 = \mathbf{1}$ (自明な指標)
3. $H_2 = N_{2m} \cap \mathrm{GL}_{2m}(F)$, $\chi_2 = \psi_{N_{2m}}|_{H_2}$
4. π は緩増加 (条件 2 より $\omega_\pi = \mathbf{1}$ に注意)

実際、Lapid と Mao はこの場合に、適当な積分を用いることで、二つのモデルの間の同型写像とその逆写像を明示的に構成した。

本稿では次の場合に、モデルの変換について考察する。

1. $G = \mathrm{GL}_{2n}(E)$
2. $H_1 = \mathrm{GL}_{2n}(F)$, $\chi_1 = \mathbf{1}$
3. $H_2 = N_{2n}$, $\chi_2 = \psi_{N_{2n}}$
4. π は緩増加 (条件 2 により $|\omega_\pi| = 1$ に注意)

Remark 1.2. $G = \mathrm{GL}_{2n+1}(E)$ の場合にも、類似の状況でモデルの変換が考察出来るが、本稿では簡単のために、上の状況のみ考える。

2 $\mathrm{GL}_{2n}(E)$ の表現のモデルの変換公式

2.1 記号

いくつか記号の準備をする。 ψ は F の非自明な指標とする。また、 $\tau \in E$ を $\bar{\tau} = -\tau$ をみたす元とする。以下、 τ は固定する。この τ に対して、 $\mathrm{GL}_{2n}(E)$ の元 t_τ を

$$t_\tau = \begin{pmatrix} \tau & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \tau & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

で定める。 N_{2n} の指標 $\psi_{N_{2n},\tau}$ を

$$\psi_{N_{2n},\tau}(n) = \psi_{N_{2n}}(t_\tau n t_\tau^{-1})$$

により定める。この時、 $\psi_{N_{2n},\tau}$ は $N_{2n} \cap \mathrm{GL}_{2n}(F)$ 上で自明である。

$\mathrm{Res}_{E/F} \mathrm{GL}_{2n}$ の Lie 環を \mathfrak{M} とすると、 \mathfrak{M} は E 上の $2n \times 2n$ 行列全体からなる。 \mathfrak{M}_0 を \mathfrak{M} の整行列のなす格子とする。任意の $\mathrm{Res}_{E/F} \mathrm{GL}_{2n}$ の F 上定義された部分代数群 Q に対して、その Lie 環を \mathfrak{q} と書く。この時、 \mathfrak{q} の格子 $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{M}_0$ は Q のゲージ形式を与える。このゲージ形式と ψ から、与えられる測度 (Kneser [4] 参照) を $Q = \underline{Q}(F)$ の測度として採用する。

以下では、モデルの変換公式について考察するので、 π は $(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})$ -モデル、 $(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})$ -モデルをもつ $\mathrm{GL}_{2n}(E)$ の滑らかな緩増加既約表現とする (前章で注意したように、緩増加であることから $(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})$ -モデルをもつことは従う)。

2.2 $\mathfrak{M}^{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}(\pi) \rightarrow \mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}(\pi)$

この章では、 $\mathfrak{M}^{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}(\pi)$ から $\mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}(\pi)$ への同型写像を積分により構成する。

\mathcal{P}_n を $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ の (標準的な) mirabolic 部分群、つまり

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \begin{pmatrix} g & * \\ & 1 \end{pmatrix} : g \in \mathrm{GL}_{2n-1}(F) \right\} \subset \mathrm{GL}_{2n}(F)$$

とする。 $W \in \mathfrak{M}^{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}(\pi)$ に対して、次の積分を考える。

$$(2.2.1) \quad L_W(g) := \int_{(N_{2n} \cap \mathrm{GL}_{2n}(F)) \backslash \mathcal{P}_n} W(t_\tau p g) dp$$

この積分に関しては次の事が知られている。

Theorem 2.1 (Flicker [2], Offen [8]). 任意の $W \in \mathfrak{M}^{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}(\pi)$ に対して、積分 (2.2.1) は絶対収束する。また、 L_W は V_π 上で恒等的にゼロではない。(2.2.1) が絶対収束することから、 L_W は \mathcal{P}_n -不変であるが、さらに $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ -不変である。

上の定理から、

$$\mathcal{T}_{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}(W) = L_W$$

により $\mathfrak{M}^{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}(\pi)$ から $\mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}(\pi)$ への同型写像が定義できる。

2.3 $\mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}(\pi) \rightarrow \mathfrak{M}^{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}(\pi)$

この章では、前章で構成した写像の逆写像を積分により構成する。そのために、 $L \in \mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}(\pi)$ に対して、

$$\int_{(N_{2n} \cap \mathrm{GL}_{2n}(F)) \backslash N_{2n}} L(nt_\tau^{-1} g) \psi_{N, \tau}^{-1}(n) dn, \quad g \in \mathrm{GL}_{2n}(E)$$

を考察したい。しかし、この積分は絶対収束しない。以降では、この積分が適当な意味で収束し、 $(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})$ -モデルを与える事を説明する。実際、この積分は regularized intergal (Lemma 2.1 参照) として定義できる。

2.3.1 stable integral, regularized integral

regularized intergal を定義するための準備として、stable integral を定義する。これらの積分は任意の簡約代数群に対して定義する事が出来るので、この章では、 G を F 上定義された簡約代数群の F -有理点のなす群とする。

Definition 2.1. U を G のユニポテント部分群、 A を U に連続的に作用するコンパクト群とする。この時、 U 上の連続関数 f に対して、 U の開コンパクト部分群 U_0 で次の性質を満たすものが存在するとき、 f は $(\#, A)$ -stale integral を持つという: U_0 を含む任意の U の開コンパクト部分群 U' に対して、

$$\int_{U_0} f(u) du = \int_{U'} f(u) du.$$

f が $(\#, A)$ -stale integral を持つ時、上の条件をみたす異なる U'_0 が存在した場合、

$$\int_{U_0} f(u) du = \int_{U'_0} f(u) du$$

となることがわかる。従って、上記の積分は U_0 の取り方によらず等しく、その値を

$$\int_U^{(\#,A)} f(u) du$$

と書く。

Remark 2.1. f が $(\#, A)$ -stable integral を持つとき、任意の $u_0 \in U$ に対して、

$$\int_U^{(\#,A)} f(uu_0) du$$

が定義でき、

$$\int_U^{(\#,A)} f(u) du$$

と等しい事がわかる。

Example 1. G は F 上分裂であるとし、 (π, V_π) を G の滑らかな既約表現とする。 ψ_N を G の極大ユニポテント群 N の非退化指標とする。

この時、 $0 \neq (\cdot, \cdot) \in \text{Hom}_G(\pi \otimes \pi^\vee, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ と、 $v \in V_\pi, v^\vee \in V_{\pi^\vee}$ に対して、 N 上の滑らかな函数を

$$n \mapsto \psi_N^{-1}(n)(\pi(n)v, v^\vee)$$

で定義する。この函数は $(\#, 1)$ -stable integral をもつ (Lapid–Mao [5])。従って、 G 上の滑らかな函数

$$W_{v, v^\vee}(g) := \int_N^{(\#, 1)} \psi_N^{-1}(n)(\pi(n)g v, v^\vee) dg$$

が定義出来る。この時、Remark 2.1 から $W_{v, v^\vee}(g)$ は

$$W_{v, v^\vee}(ng) = \psi_N(n)W_{v, v^\vee}(g), \quad n \in N, g \in G$$

を満たす。

Definition 2.2. U を G のユニポテント部分群、 A を U に連続的に作用する局所コンパクト完全不連結群とする。 f を U 上の連続函数とする。 A の任意の開コンパクト部分群 A' に対して、 f が $(\#, A')$ -stable integral を持つとき、 f は U 上の A -stable integral を持つという。この時その共通の値を

$$\int_U^{st, A} f(u) du$$

と書く。

Remark 2.2. $(\#, A)$ -stable integral と同様に、 f が U 上の A -stable integral を持つ時、任意の $u_0 \in U$ に対して

$$\int_U^{st, A} f(uu_0) du$$

が定義でき、

$$\int_U^{st, A} f(uu_0) du = \int_U^{st, A} f(u) du.$$

Remark 2.3. Example 1 で挙げた函数は、1-stable intergal を持つ。

つぎの Lemma により regularized intergal を定義する。

Lemma 2.1 (Lapid–Mao [6]). U_0 を G のユニポテント部分群、 f を U_0 上の連続函数とする。 U_1, U_2 を U_0 の部分群、 T を G のトーラス、 ψ_{U_0} を U_0 の指標で次の条件を満たすものとする。

- U_1 は U_0 の正規部分群で $U_1 \backslash U_0$ は可換
- T は共役による作用で U_0 と U_1 を保つ
- $\psi_{U_0}(tut^{-1}) = \psi_{U_0}(u)$, $u \in U_1, t \in T$.
- U_2 は T -不変な U_1 の部分群で、 $\psi_{U_0}|_{U_2} = 1$
- $T \rightarrow (\widehat{U_1 \backslash U_0}) : t \mapsto \psi_U(t \cdot t^{-1}) \cdot \psi_U^{-1}$ は開写像。ここで、 $(\widehat{U_1 \backslash U_0})$ は U_1 上自明な U_0 の指標からなる群。

また、 f を G 上の滑らかな函数で次の 3 つの条件を満たすとする。

1. 左 U_2 -不変、つまり $f(ug) = f(g)$, $g \in G, u \in U_2$.
2. T の適当な開コンパクト部分群 T' に対して、 f は左 T' -不変
3. 任意の $g \in G$ に対して、 $f(\cdot g) \in L^1(U_2 \backslash U_1)$

この時、次の積分が定義出来る

$$\int_{U_1 \backslash U_0}^{st, T} \left(\int_{U_2 \backslash U_1} f(ung) \psi_{U_0}(u)^{-1} du \right) \psi_{U_0}^{-1}(n) dn.$$

この積分を $U_2 \backslash U_0$ 上の *regularized integral* と呼び、

$$\int_{U_2 \backslash U_0}^{reg} f(ng) \psi_{U_0}^{-1}(n) dn$$

と書く。

2.4 main result

Lemma 2.2 (Morimoto [7]). $G = \mathrm{GL}_{2n}(E)$ とする。ユニポテント群 U_i 、指標 ψ_{U_0} 、函数 f を次のようにとる。

1. $U_0 = N_{2n}$
2. $U_1 = \langle N_{2n}^{der}, N_{2n} \cap \mathrm{GL}_{2n}(F) \rangle$ 。ここで、 N_{2n}^{der} は N_{2n} の交換子部分群。
3. $U_2 = N_{2n} \cap \mathrm{GL}_{2n}(F)$
4. $\psi_{U_0} = \psi_{N_{2n}}$
5. $f = L \in \mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}(\pi)$

これらは Lemma 2.1 の条件を満たす。従って、

$$W_L(g) := \int_{(N_{2n} \cap \mathrm{GL}_{2n}(F)) \backslash N_{2n}}^{reg} L(nt_\tau^{-1}g)\psi_{N,\tau}(n)^{-1} dn, \quad g \in G$$

が定義出来る。

Remark 2.2 から、 $W_L(g)$ は次の invariance をもつ:

$$W_L(n g) = \psi_{N_{2n}}(n) W_L(g), \quad n \in N_{2n}, g \in \mathrm{GL}_{2n}(E)$$

(Example 1 参照)。従って、

$$\mathcal{T}_{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}^{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}(L) = |\tau|^{\frac{n}{2}} \cdot W_L$$

により、 $\mathfrak{M}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}(\pi)$ から $\mathfrak{M}^{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}(\pi)$ への準同型写像が構成できた。この時、次のモデルの変換公式が得られる。

Theorem 2.2 (Morimoto [7]). 任意の $W \in \mathfrak{M}^{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}(\pi)$ に対して、

$$\mathcal{T}_{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}^{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})} \circ \mathcal{T}_{(N_{2n}, \psi_{N_{2n}})}^{(\mathrm{GL}_{2n}(F), \mathbf{1})}(W) = W.$$

References

- [1] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p -adic reductive groups*. unpublished manuscript.
- [2] Y. Flicker, *Twisted tensors and Euler products*. Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 295–313.
- [3] Y. Flicker, *On distinguished representations*, J. Reine Angew. Math. **418** (1991), 139–172.
- [4] M. Kneser, *Semi-Simple Algebraic Groups*. In Algebraic Number. Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965), 250–65. Washington, DC: Thompson, 1967.
- [5] E. Lapid and Z. Mao, *A conjecture on Whittaker-Fourier coefficients of cusp forms*. J. Number Theory 146 (2015), 448–505.
- [6] E. Lapid and Z. Mao, *Model transition for representations of metaplectic type*. International Mathematics Research Notices, 84 pages. doi:10.1093/imrn/rnu225,
- [7] K. Morimoto, *Model transition for representations of unitary type*, preprint.
- [8] O. Offen, *On local root numbers and distinction*. J. Reine Angew. Math. **652** (2011), 165–205.
- [9] F. Rodier, *Whittaker models for admissible representations of reductive p -adic split groups*. Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math. **26**, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972), pp. 425–430. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

対称 Macdonald 多項式の $t = 0$ での特殊化と アフィン量子群上の extremal weight 加群

内藤 聡 (東京工業大学・理工学研究科・数学専攻)

§1 (対称) Macdonald 多項式

§1.1 Weyl 指標 (Schur 多項式)

ここでは, \mathfrak{g} を有限次元複素単純リー環, $\mathfrak{h} (\subset \mathfrak{g})$ をその Cartan 部分代数とする. そして, $Q := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$ を root lattice, $Q^\vee := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subset \mathfrak{h}$ を coroot lattice とし, $Q^+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i \subset Q$, $Q^{\vee,+} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i^\vee \subset Q^\vee$ とおく. さらに, $P := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\varpi_i \subset \mathfrak{h}^*$ を \mathfrak{g} の weight lattice とする; 但し, $\varpi_i \in \mathfrak{h}^*$, $i \in I$, は \mathfrak{g} の基本ウェイトである. そして, $P^+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i \subset P$ を dominant weight の全体, $P^{++} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{> 0}\varpi_i \subset P$ を regular dominant weight の全体とする. また, $W = \langle r_i \mid i \in I \rangle \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ を \mathfrak{g} の (有限) Weyl 群とする; 但し, $r_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ は simple reflection であり, $r_i\lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, で定義される (ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathfrak{h} と \mathfrak{h}^* の間の duality pairing である). さらに, 有限 Weyl 群 W の最長元を $w_0 \in W$ と書く.

さて, q, t を不定元とし, $N \in 2\mathbb{Z}_{> 0}$ を $P \subset \frac{1}{N}Q$ となる最小の正の偶数としておく. そして, 体 $K := \mathbb{Q}(t)(q^{1/N})$ 上の P の群環 $A := K[P] \ni e^\lambda$, $\lambda \in P$, を考える.

注意 1.1. W は $K[P]$ に次の様に作用する:

$$we^\lambda := e^{w\lambda}, \quad w \in W, \lambda \in P.$$

そこで, $A^W \subset A$ を W -不変な元の成す部分代数とし, 各 $\lambda \in P^+$ に対して $m_\lambda := \sum_{\mu \in W\lambda} e^\mu$ (orbit-sum) とおく. このとき, 次が成り立つ.

Fact 1.2. $\{m_\lambda \mid \lambda \in P^+\}$ は A^W の K 上の基底である.

以下では, $\Delta^+ \subset Q^+$ を \mathfrak{g} の正の root の全体とし, $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha = \sum_{i \in I} \varpi_i \in P$ とおく. そして,

$$a_\rho := \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w\rho} = e^\rho \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha}), \quad a_{\lambda+\rho} := \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda+\rho)}, \quad \lambda \in P^+,$$

とおき, $s_\lambda := \frac{a_{\lambda+\rho}}{a_\rho}$ (Weyl 指標), $\lambda \in P^+$, と定める. すると, 次が成り立つ.

Fact 1.3. $\{s_\lambda \mid \lambda \in P^+\}$ は A^W の K 上の基底である.

注意 1.4. 各 $\lambda \in P^+$ に対して

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\substack{\mu < \lambda \\ \mu \in P^+}} K_{\lambda, \mu} m_\mu, \quad K_{\lambda, \mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0};$$

ここで, $\lambda > \mu \stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda - \mu \in Q^+$ である. また, $K_{\lambda, \mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は Kostka number と呼ばれる.

Fact 1.5. 各 $\lambda \in P^+$ に対して, s_λ は $\lambda \in P^+$ を最高ウェイトとする \mathfrak{g} の有限次元既約最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ の指標 (Weyl 指標) である:

$$s_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} (\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)_\mu) e^\mu;$$

ここで, $V(\lambda)_\mu$ は $V(\lambda)$ の μ -weight 空間である.

§1.2 (対称) Macdonald 多項式 の存在定理

ここでは, \mathfrak{g}_{af} を untwisted な affine Lie 環, $\mathfrak{h}_{\text{af}} \subset \mathfrak{g}_{\text{af}}$ をその Cartan 部分代数とする. このとき, 次が成り立つ.

Fact 1.6.

$$\mathfrak{g}_{\text{af}} = (\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

$$\mathfrak{h}_{\text{af}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$$

但しここで, $c := \sum_{i \in I_{\text{af}}} a_i^\vee \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}_{\text{af}}$ は \mathfrak{g}_{af} の中心元, $\delta := \sum_{i \in I_{\text{af}}} a_i \alpha_i \in (\mathfrak{h}_{\text{af}})^*$ は \mathfrak{g}_{af} の null root, そして $I_{\text{af}} = I \cup \{0\}$ は \mathfrak{g}_{af} の単純 root の全体の添字集合である. 今, $\Delta_{\text{af}} \subset (\mathfrak{h}_{\text{af}})^*$ を \mathfrak{g}_{af} の (affine) real roots の集合, $\Delta_{\text{af}}^+ \subset \Delta_{\text{af}}$ を \mathfrak{g}_{af} の正の (affine) real roots の集合とする. このとき, 次が成り立つ.

Fact 1.7. Δ_{af}^+ は, 次の様に分けられる:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{af}}^+ &= \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Delta^+, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\ &\sqcup \{-\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Delta^+, k \in \mathbb{Z}_{> 0}\}. \end{aligned}$$

以下では, 各 $f = \sum_{\lambda \in P} f_\lambda e^\lambda \in A$, $f_\lambda \in K$, に対して

$$\bar{f} := \sum_{\lambda \in P} \bar{f}_\lambda e^{-\lambda} \in A$$

とおく; 但し, $\bar{\cdot} : K \rightarrow K$ は, $\bar{q} = q^{-1}$, $\bar{t} = t^{-1}$ なる $K = \mathbb{Q}(t)(q^{1/N})$ の自己同型である. また,

$$\nabla := \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{(e^\alpha; q)_\infty (qe^{-\alpha}; q)_\infty}{(te^\alpha; q)_\infty (tqe^{-\alpha}; q)_\infty}, \quad (a; q)_\infty := \prod_{i=0}^{\infty} (1 - aq^i),$$

とおく; これは, $(\mathbb{Z}[t])[[q]]$ に係数を持つ形式的 Laurent 級数である.

注意 1.8. $a = \alpha + k\delta \in \Delta_{\text{af}}^+$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\alpha \in \pm\Delta^+$, に対して $e^a := q^k e^\alpha$ とおく. このとき

$$\nabla = \prod_{\alpha \in \Delta_{\text{af}}^+} \frac{1 - e^\alpha}{1 - te^\alpha}$$

と表される.

今,

$$\nabla_0 := \frac{\nabla}{\nabla \text{ における } e^0 \text{ の係数}}$$

とおけば, ∇_0 は $\mathbb{Q}(q, t) \subset K$ に係数を持つ形式的 Laurent 級数になる.

そこで, 各 $f, g \in A$ に対して

$$(f, g) := fg\nabla_0 \text{ における } e^0 \text{ の係数} \in K$$

と定める.

Fact 1.9 (Macdonald). A^W には, 次の 2 つの条件を満たす K 上の基底 $\{P_\lambda(q, t) \mid \lambda \in P^+\}$ が (唯一つ) 存在する.

$$(1) P_\lambda(q, t) = m_\lambda + \sum_{\substack{\mu < \lambda \\ \mu \in P^+}} a_{\lambda\mu} m_\mu, \quad a_{\lambda\mu} \in K;$$

$$(2) (P_\lambda, m_\mu) = 0 \quad (\forall \mu \in P^+, \mu < \lambda).$$

この $P_\lambda(q, t) \in A^W$ を (対称) Macdonald 多項式 と呼ぶ; 詳しくは, [M1], [M2] を参照.

§1.3 Macdonald 多項式の様々な特殊化

(1) 特殊化: $q = t$.

このとき,

$$P_\lambda(q, q) = s_\lambda \quad (\text{Weyl 指標})$$

であり, これは q に依らない.

(2) 特殊化: $t = 1$.

このとき,

$$P_\lambda(q, 1) = m_\lambda \quad (\text{orbit-sum})$$

であり, これは q に依らない.

(3) 特殊化: $q = 0$.

このとき, $P_\lambda(0, t)$ は次の表示を持つ:

$$P_\lambda(0, t) = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in W} w \left(e^\lambda \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - te^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \right), \quad W_\lambda(t) = \sum_{\substack{w \in W \\ w\lambda = \lambda}} t^{\ell(w)}.$$

$P_\lambda(0, t)$ は Hall-Littlewood 多項式 と呼ばれる ([M1] 参照).

注意 1.10. G を (simply-connected な) semisimple p -adic Lie group/ \mathbb{Q}_p , $K (\subset G)$ をその極大 compact 部分群で (G, K) の制限 root 系が Δ の双対 root 系 Δ^\vee となっているものとする. このとき, $P_\lambda(0, t)$ は, (G, K) の zonal spherical 関数の ($\lambda \in P^+$ でパラメトライズされる) double coset $\in K \backslash G / K$ 上での値を与えている. 但し, $t^{-1} = \#(\mathbb{Q}_p \text{ の residue field})$ である.

(4) 特殊化: $t = q^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$; $q \rightarrow 1$ (従って $t \rightarrow 1$).

このときは, Jacobi 多項式 (Jack 多項式) $J_\lambda^{(\gamma)}$ が得られる ([M1] 参照).

注意 1.11. $G_{\mathbb{R}}$ を semisimple Lie group/ \mathbb{R} , $(G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}})$ を (compact または noncompact) symmetric space でその制限 root 系が Δ であるものとする. また, これらの制限 root の重複度は全て 2γ であるとする. このとき, $J_\lambda^{(\gamma)}$ は symmetric space $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ 上の (nonzero な $K_{\mathbb{R}}$ -fixed vector を持つ G の有限次元既約最高ウェイト表現 M に付随する) zonal spherical 関数の値を与えている. 但しここで, M の最高ウェイトが λ である.

§2 Macdonald 多項式に対する Ram-Yip formula

§2.1 Double Bruhat graph

W と Δ^+ に付随する double Bruhat graph (DBG) とは, W を頂点の集合とし, 次の2種類の directed edge を持つ directed graph のことである:

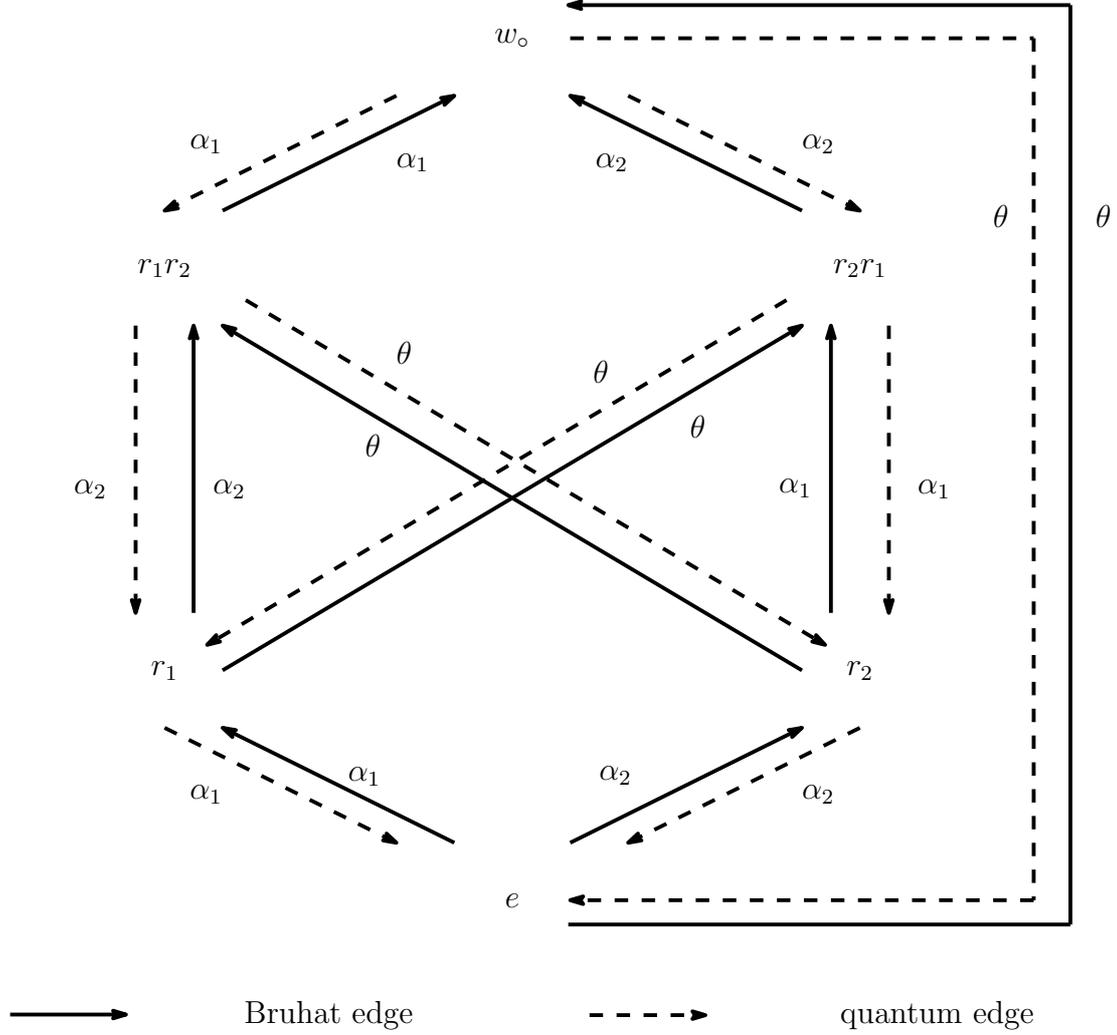
$$\text{directed edge} : v \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} vr_\beta, \quad v \in W, \beta \in \Delta^+;$$

ここで, directed edge $v \xrightarrow{\beta} vr_\beta$ は

$$\begin{cases} \ell(vr_\beta) > \ell(v) \text{ のとき Bruhat edge,} \\ \ell(vr_\beta) < \ell(v) \text{ のとき quantum edge} \end{cases}$$

と呼ばれる.

例 2.1. A_2 型の DBG. $\mathfrak{g} : A_2$ 型, $\theta := \alpha_1 + \alpha_2$.



§2.2 pQLS paths

以下では $\lambda \in P^{++} = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{>0} \varpi_i$ とする; これは説明を簡単にするためである. さて,

$$\eta = (w_1, w_2, \dots, w_s; 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = 1)$$

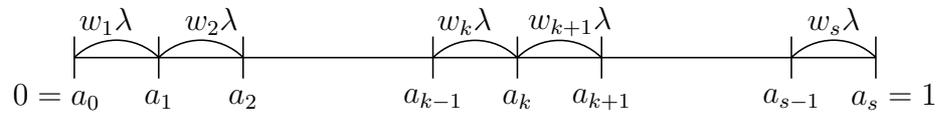
$$w_k \in W \ (1 \leq k \leq s), \quad a_k \in \mathbb{Q} \ (0 \leq k \leq s),$$

という形の列 η が shape λ の pseudoQLS path (pQLS path) であるとは, $1 \leq \forall k \leq s-1$ に対して, 次の様な directed a_k -path in DBG が (少なくとも1つ) 存在することである:

$$w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} v_{m_k-1}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k-1}^{(k)}} \cdots \xleftarrow{\beta_2^{(k)}} v_1^{(k)} \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1},$$

$$\text{s.t. } a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle \in \mathbb{Z} \quad (1 \leq \forall l \leq m_k).$$

この状況を、次の様な図で表す:



例 2.2. $\mathfrak{g} : A_2$ 型, $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$. このとき,

$$r_2 r_1 \xleftarrow{\theta} r_1$$

は Bruhat edge であり, また directed (1/2)-path in DBG である. 一方,

$$r_2 r_1 \xleftarrow{\alpha_2} w_0 \xleftarrow{\theta} e \xleftarrow{\alpha_1} r_1$$

は directed 1-path in DBG ではあるが, directed (1/2)-path in DBG ではない.

以下では, $\text{pQLS}(\lambda)$ を shape λ の pQLS path の全体とする. また,

$$\eta = (w_1, w_2, \dots, w_s; 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1) \in \text{pQLS}(\lambda)$$

に対して,

$$\text{wt}(\eta) := \sum_{k=1}^s (a_k - a_{k-1}) w_k \lambda \in P$$

とおく (η の weight).

§2.3 Crsytal structure on pQLS paths

ここでは、講演の際には述べられなかった、pQLS path の集合の上のクリスタル構造について簡単に説明する。今、 $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ を区分的に線形で連続な写像で、 $\pi(0) = 0$ かつ $\pi(1) \in P$ を満たすものとする。このとき、(単純ルートとは限らない) 各ルート $\alpha \in \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ に対して、 $e_\alpha \pi$ を次の様に定義する: 先ず、

$$H(t) = H_\alpha^\pi(t) := \langle \pi(t), \alpha^\vee \rangle, \quad t \in [0, 1],$$

$$m = m_\alpha^\pi := \min\left(\{H_\alpha^\pi(t) \mid t \in [0, 1]\} \cap \mathbb{Z}\right),$$

とおく; $H(0) = 0$ なので $m \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ であることに注意する。 $m = 0$ であれば $e_\alpha \pi := 0$ とする。 $m \leq -1$ のときは、次の様に $0 \leq t_0 < t_1 \leq 1$ を定める:

$$t_1 := \min\{t \in [0, 1] \mid H_\alpha^\pi(t) = m_\alpha^\pi\},$$

$$t_0 := \max\{t \in [0, t_1] \mid H_\alpha^\pi(t) = m_\alpha^\pi + 1\}.$$

そして、

$$(e_\alpha \pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & (0 \leq t \leq t_0), \\ \pi(t_0) + r_\alpha(\pi(t) - \pi(t_0)) & (t_0 \leq t \leq t_1), \\ \pi(t) + \alpha & (t_1 \leq t \leq 1). \end{cases}$$

とおく。このとき、各 $\lambda \in P^{++}$ に対して、shape λ の pQLS path の全体 $\text{pQLS}(\lambda)$ には (拡張された) クリスタルの構造が入り、さらにその (拡張された) クリスタル・グラフは連結である。より正確には、次の定理が成り立つ。

定理 2.3. (1) $\pi \in \text{pQLS}(\lambda)$, $\alpha \in \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ とする。もし $e_\alpha \pi \neq 0$ ならば、 $e_\alpha \pi \in \text{pQLS}(\lambda)$ である。

(2) 各 $\pi \in \text{pQLS}(\lambda)$ に対して、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ であって、

$$e_{\beta_1} e_{\beta_2} \cdots e_{\beta_k} \pi = \pi_\lambda$$

を満たすものが存在する。

なお、Example として、Appendix に $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$ の場合の $\text{pQLS}(\lambda)$ の (拡張された) クリスタル・グラフを描いた; 但し、 $\alpha \in \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ と $\pi, \pi' \in \text{pQLS}(\lambda)$ に対して、記号 $\pi \xrightarrow{f_\alpha} \pi'$ は、 $e_\alpha \pi' = \pi$ と同じ意味である。

§2.4 Ram-Yip formula in terms of pQLS paths

定理 2.4. $\lambda \in P^{++}$ とする. このとき, Macdonald 多項式 $P_\lambda(q, t)$ は次の様に表される:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\eta=(w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{pQLS}(\lambda)} t^{\frac{1}{2}(\ell(w_1) - \ell(w_s))} \times e^{\text{wt}(\eta)} \\
 & \times \prod_{k=1}^{s-1} \left(\sum_{\substack{w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}: \\ \text{label-increasing directed } a_k\text{-path in DBG}} \left(t^{-\frac{1}{2}}(1-t) \right)^{m_k} \right. \\
 & \quad \times \prod_{1 \leq l \leq m_k} \frac{1}{1 - q^{a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle} t^{\langle \rho, \beta_l^{(k)\vee} \rangle}} \\
 & \quad \quad \quad v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{Bruhat edge} \\
 & \quad \times \left. \prod_{1 \leq l \leq m_k} \frac{q^{a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle} t^{\langle \rho, \beta_l^{(k)\vee} \rangle}}{1 - q^{a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle} t^{\langle \rho, \beta_l^{(k)\vee} \rangle}} \right) \\
 & \quad \quad \quad v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{quantum edge}
 \end{aligned}$$

但し, DBG における directed path

$$w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} v_{m_k-1}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k-1}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_2^{(k)}} v_1^{(k)} \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}$$

が label-increasing であるとは, Δ^+ 上の固定された (dual) reflection order \prec に関して

$$\beta_1^{(k)} \prec \beta_2^{(k)} \prec \dots \prec \beta_{m_k}^{(k)}$$

となっていることである; Ram-Yip formula の元々の形については, [RY], [L] を参照.

注意 2.5. Δ^+ 上の全順序 \prec が (dual) reflection order であるとは, 次の条件を満たすことである:

$$\gamma^\vee = \alpha^\vee + \beta^\vee \ (\alpha, \beta, \gamma \in \Delta^+) \implies \alpha \prec \gamma \prec \beta \ \text{or} \ \beta \prec \gamma \prec \alpha.$$

§2.5 Hall-Littlewood 多項式 $P_\lambda(0, t)$

$$\eta = (w_1, w_2, \dots, w_s; 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = 1) \in \text{pQLS}(\lambda)$$

が pseudoLS path (pLS path) であるとは, $1 \leq \forall k \leq s-1$ に対して, (DBG における) directed a_k -path

$$w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} v_{m_k-1}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k-1}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_2^{(k)}} v_1^{(k)} \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}$$

であって, その全ての directed edge が Bruhat edge であるようなものが (少なくとも1つ) 存在することである.

さて, $\text{pLS}(\lambda)$ を shape λ の pseudoLS path の全体とすると, Ram-Yip formula (定理 2.4) から次が従う.

系 2.6. $\lambda \in P^{++}$ とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$P_\lambda(0, t) = \sum_{\eta=(w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{pLS}(\lambda)} t^{\frac{1}{2}(\ell(w_1) - \ell(w_s))} \times e^{\text{wt}(\eta)}$$

$$\times \prod_{k=1}^{s-1} \left(\sum_{\substack{w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}: \\ \text{label-increasing directed } a_k\text{-path in DBG} \\ \text{s.t. } v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} \text{ is a Bruhat edge } (1 \leq \forall l \leq m_k)} \left(t^{-\frac{1}{2}}(1-t) \right)^{m_k} \right).$$

§2.6 Jacobi 多項式 $J_\lambda^{(\gamma)}$

Ram-Yip formula (定理 2.4) から, 次が従う.

系 2.7. $\lambda \in P^{++}$ とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
J_\lambda^{(\gamma)}(x) &= \sum_{\eta=(w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{pQLS}(\lambda)} e^{\text{wt}(\eta)} \\
&\times \prod_{k=1}^{s-1} \left(\sum_{\substack{w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}: \\ \text{label-increasing directed } a_k\text{-path in DBG}} \right. \\
&\quad \left. \prod_{l=1}^{m_k} \frac{1}{\gamma^{-1} a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle + \langle \rho, \beta_l^{(k)\vee} \rangle} \right).
\end{aligned}$$

§2.7 Examples

ここでは, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ (A_2 型), $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$ とする. そして, $\eta_w := (w; 0, 1)$, $w \in W$, とおく. このとき, 通常 $\text{Lakshmibai-Seshadri path of shape } \lambda$ の全体 $\mathbb{B}(\lambda)$ は, 次の 8 個の元からなる:

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}(\lambda) &= \{ \eta_e, \eta_{r_1}, \eta_{r_2}, \eta_{r_1 r_2}, \eta_{r_2 r_1}, \eta_{w_\circ}, \\
&\quad \eta_3 := (r_2 r_1, r_1; 0, 1/2, 1), \eta_4 := (r_1 r_2, r_2; 0, 1/2, 1) \}.
\end{aligned}$$

また,

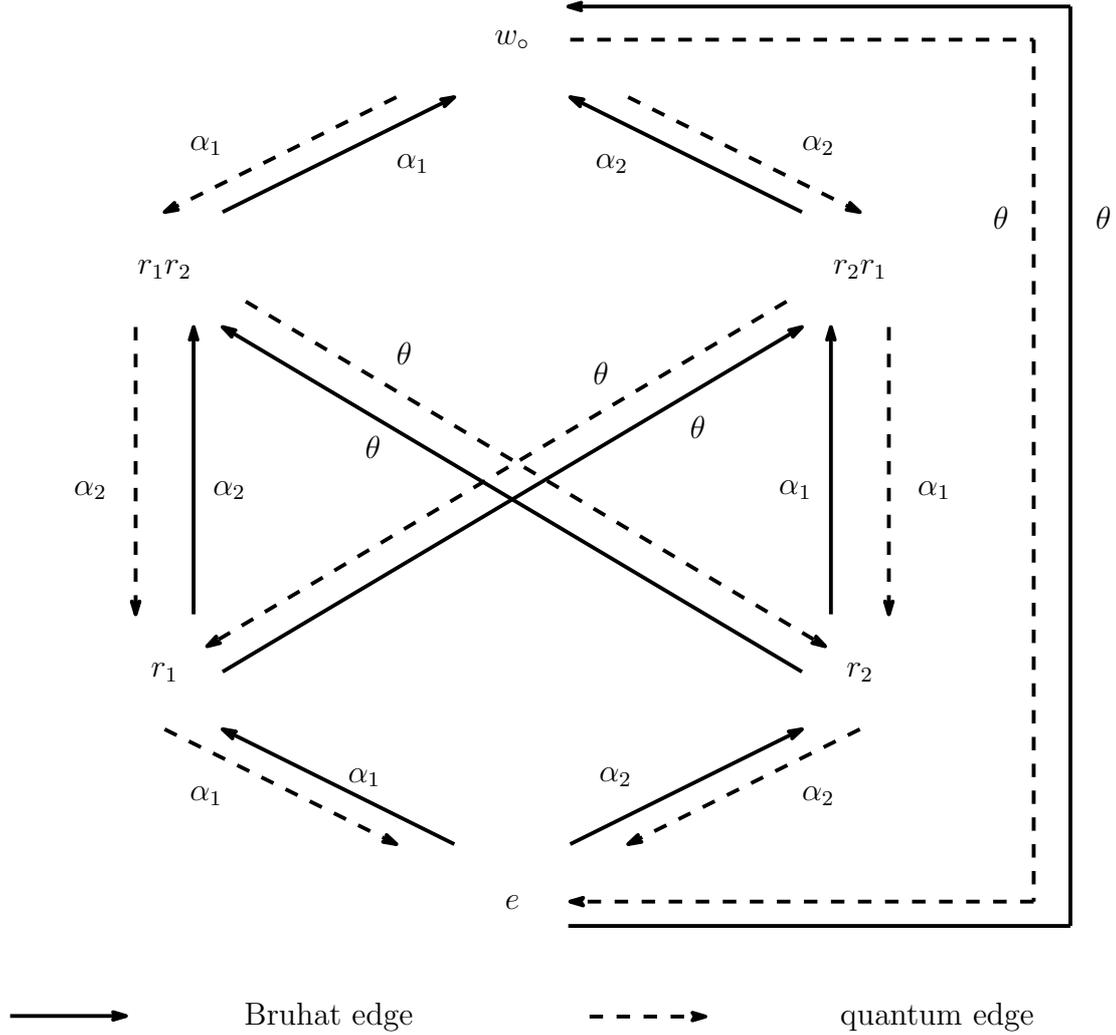
$$\begin{aligned}
\text{QLS}(\lambda) &= \mathbb{B}(\lambda) \cup \{ \eta_1 := (e, w_\circ; 0, 1/2, 1) \}, \\
\text{pLS}(\lambda) &= \mathbb{B}(\lambda) \cup \{ \eta_6 := (w_\circ, e; 0, 1/2, 1) \}, \\
\text{pQLS}(\lambda) &= \text{QLS}(\lambda) \cup \\
&\quad \{ \eta_2 := (r_1, r_2 r_1; 0, 1/2, 1), \eta_5 := (r_2, r_1 r_2; 0, 1/2, 1), \eta_6 \}
\end{aligned}$$

となっている. そして, Macdonald 多項式 $P_\lambda(q, t)$ と, その特殊化である Hall-Littlewood 多項式 $P_\lambda(0, t)$, Jack 多項式 $J_\lambda^{(\gamma)}(x)$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
P_\lambda(q, t) &= (e^\lambda + e^{r_1 \lambda} + e^{r_2 \lambda} + e^{r_1 r_2 \lambda} + e^{r_2 r_1 \lambda} + e^{w_\circ \lambda}) \\
&\quad + e^0 \times \frac{1-t}{1-qt^2} + e^0 \times \frac{1-t}{1-qt^2} + e^0 \times q \times \frac{1-t}{1-qt^2} \\
&\quad + e^0 \times qt \times \frac{1-t}{1-qt^2} + e^0 \times qt \times \frac{1-t}{1-qt^2} \\
&\quad + e^0 \times t \times \frac{1-t}{1-qt^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_\lambda(0, t) &= (e^\lambda + e^{r_1\lambda} + e^{r_2\lambda} + e^{r_1r_2\lambda} + e^{r_2r_1\lambda} + e^{w_0\lambda}) \\
&\quad + (1-t)e^0 + (1-t)e^0 + t(1-t)e^0, \\
J_\lambda^{(\gamma)}(x) &= (e^\lambda + e^{r_1\lambda} + e^{r_2\lambda} + e^{r_1r_2\lambda} + e^{r_2r_1\lambda} + e^{w_0\lambda}) + 6 \times \frac{1}{\gamma^{-1} + 2} e^0.
\end{aligned}$$

但し, A_2 型の DBG は, 次の形であった; ここで, $\theta = \alpha_1 + \alpha_2$. である.



§3 特殊化 $t = 0$

§3.1 Quantum Bruhat graph

W と Δ^+ に付随する quantum Bruhat graph (QBG) とは, W を頂点の集合とし, 次の2種類の directed edge を持つ directed graph のことである:

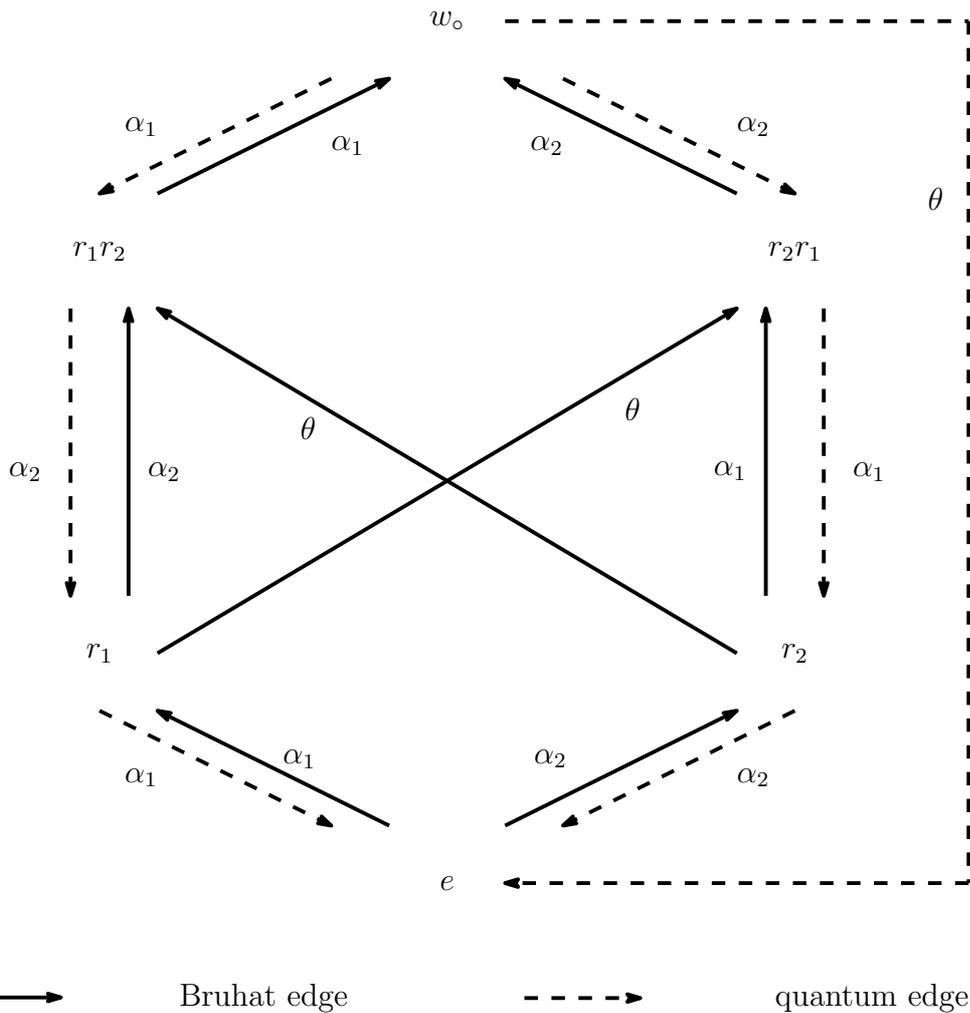
directed edge : $v \xrightarrow{\beta} vr_{\beta}$, $v \in W$, $\beta \in \Delta^+$;

ここで, directed edge $v \xrightarrow{\beta} vr_{\beta}$ は

$$\begin{cases} \ell(vr_{\beta}) = \ell(v) + 1 & \text{(Bruhat edge),} \\ \ell(vr_{\beta}) = \ell(v) - 2\langle \rho, \beta^{\vee} \rangle + 1 & \text{(quantum edge)} \end{cases}$$

のどちらか一方の条件を満たす.

例 3.1. A_2 型の QBG. $\mathfrak{g} : A_2$ 型, $\theta = \alpha_1 + \alpha_2$.



§3.2 Quantum LS paths

$$\eta = (w_1, w_2, \dots, w_s; 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = 1) \in \text{pQLS}(\lambda)$$

が quantum LS path (QLS path) であるとは, $1 \leq \forall k \leq s-1$ に対して, QBG における directed a_k -path

$$w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} v_{m_k-1}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k-1}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_2^{(k)}} v_1^{(k)} \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}$$

が (少なくとも1つ) 存在することである.

但しここで, 上の directed path が a_k -path であるとは, 条件

$$a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle \in \mathbb{Z} \quad (1 \leq \forall l \leq m_k)$$

が満たされていることである. 以下では, $\text{QLS}(\lambda)$ を shape λ の QLS path の全体とする.

注意 3.2. $\forall w \neq \forall w' \in W$ に対して, QBG における w から w' への (固定された reflection order に関する) label-increasing directed path は唯一つ存在する.

よって, QLS path

$$\eta = (w_1, w_2, \dots, w_s; 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_s = 1)$$

に対しては, $1 \leq \forall k \leq s-1$ で, QBG における label-increasing directed a_k -path

$$w_k = v_{m_k}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k}^{(k)}} v_{m_k-1}^{(k)} \xleftarrow{\beta_{m_k-1}^{(k)}} \dots \xleftarrow{\beta_2^{(k)}} v_1^{(k)} \xleftarrow{\beta_1^{(k)}} v_0^{(k)} = w_{k+1}$$

は, 唯一つ存在する.

§3.3 特殊化 $t = 0$ における公式

$\lambda \in P^{++}$ とする. $P_\lambda(q, t)$ についての Ram-Yip formula (定理 2.4) において, 各

$$\eta = (w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{pQLS}(\lambda)$$

に対応する項の t のべき指数 は、次の通りとなる:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s-1} \left(\sum_{1 \leq l \leq m_k} \underbrace{(\ell(v_l^{(k)}) - \ell(v_{l-1}^{(k)}) - 1)}_{\geq 0} \right) \\ & \quad v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{Bruhat edge} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s-1} \left(\sum_{1 \leq l \leq m_k} \underbrace{(\ell(v_l^{(k)}) - \ell(v_{l-1}^{(k)}) - 1 + 2\langle \rho, \beta_l^{(k)\vee} \rangle)}_{\geq 0} \right) \\ & \quad v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{quantum edge} \end{aligned}$$

これから、特殊化 $t = 0$ において残る項は、quantum LS path $\eta \in \text{QLS}(\lambda)$ に対応する項のみであることが分かる。従って、Ram-Yip formula (定理 2.4) から次が導かれる; 詳しくは、[LNS³2] を参照。

定理 3.3. $\lambda \in P^{++}$ とする。このとき、次の等式が成り立つ:

$$P_\lambda(q, 0) = \sum_{\eta=(w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{QLS}(\lambda)} e^{\text{wt}(\eta)} q^{\sum_{k=1}^{s-1} (*)};$$

但しここで、

$$(*) = \sum_{1 \leq l \leq m_k} a_k \langle \lambda, \beta_l^{(k)\vee} \rangle.$$

$$v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{quantum edge}$$

例 3.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$ に対して

$$P_\lambda(q, 0) = (e^\lambda + e^{r_1\lambda} + e^{r_2\lambda} + e^{r_1r_2\lambda} + e^{r_2r_1\lambda} + e^{w_0\lambda}) + e^0 + e^0 + qe^0.$$

注意 3.5. 上の定理において、各 k ($1 \leq k \leq s-1$) に対して QBG における w_{k+1} から w_k への (label-increasing とは限らない) 最短の directed path は複数個有り得るが、そのうちのどれを用いても

$$\sum_{1 \leq l \leq m_k} \beta_l^{(k)\vee} \in Q^{\vee,+} = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^\vee$$

$$v_l^{(k)} \xleftarrow{\beta_l^{(k)}} v_{l-1}^{(k)} : \text{quantum edge}$$

は同一の元となる。

そこで、この元を $\underline{\underline{\text{wt}(w_{k+1} \Rightarrow w_k)} \in Q^{\vee,+}}$ と書く。この記号の下で、次が成り立つ:

$$P_\lambda(q, 0) = \sum_{\eta=(w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{QLS}(\lambda)} e^{\text{wt}(\eta)} q^{\sum_{k=1}^{s-1} a_k \langle \lambda, \text{wt}(w_{k+1} \Rightarrow w_k) \rangle}.$$

§4 ある Demazure 加群の次数付き指標

§4.1 Extremal weight 加群

ここでは、 \mathfrak{g}_{af} を untwisted な affine リー環、 $\mathfrak{h}_{\text{af}} \subset \mathfrak{g}_{\text{af}}$ をその Cartan 部分代数とする。そして、 $\Lambda_i \in \mathfrak{h}_{\text{af}}^*$, $i \in I_{\text{af}} = I \cup \{0\}$, を (affine) 基本ウェイト、 $\varpi_i = \Lambda_i - a_i^\vee \Lambda_0$, $i \in I$, をレベル・ゼロ基本ウェイトとし、 E_i, F_i , $i \in I_{\text{af}}$, を \mathfrak{g}_{af} の Chevalley 生成元とする。また、 $W_{\text{af}} = W \times Q^\vee$ を \mathfrak{g}_{af} の (affine) Weyl 群とする。

ここで、 $\mathfrak{g}_{\text{af}} = (\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, $\mathfrak{h}_{\text{af}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ であった事を思い出そう; 但し、 $c = \sum_{i \in I_{\text{af}}} a_i^\vee \alpha_i^\vee$ は \mathfrak{g}_{af} の中心元、 $\delta = \sum_{i \in I_{\text{af}}} a_i \alpha_i \in (\mathfrak{h}_{\text{af}})^*$ は \mathfrak{g}_{af} の null root である。

今、 $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$, $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, を level-zero regular dominant weight, $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ をアフィン量子群とし、 $V(\lambda)$ を extremal weight λ を持つ extremal weight $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -加群とする。即ち、 $V(\lambda)$ は、 v_λ を生成元 (over $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$) とし、次の基本関係により定義される $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -加群である:

基本関係 : v_λ は “extremal vector of weight λ ” である;

つまり、 $\exists \{S_w v_\lambda\}_{w \in W_{\text{af}}} \subset V(\lambda)$ で、以下の条件を満たすものが存在する:

$S_e v_\lambda = v_\lambda$ であり、勝手な $w \in W_{\text{af}}$ と $i \in I_{\text{af}}$ に対して、次が成り立つ。

$$\begin{cases} E_i S_w v_\lambda = 0, & F_i^{\langle w\lambda, \alpha_i^\vee \rangle} S_w v_\lambda = S_{r_i w} v_\lambda & (\langle w\lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0), \\ F_i S_w v_\lambda = 0, & E_i^{-\langle w\lambda, \alpha_i^\vee \rangle} S_w v_\lambda = S_{r_i w} v_\lambda & (\langle w\lambda, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0). \end{cases}$$

但し、ここでの E_i, F_i , $i \in I_{\text{af}}$, はアフィン量子群 $U_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ の Chevalley 生成元であり、 $i \in I_{\text{af}}$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $E_i^{(n)} := E_i^n / [n]_i!$, $F_i^{(n)} := F_i^n / [n]_i!$ はそれらの q -divided power である; 詳しくは、[K] を参照。

§4.2 Demazure 加群

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$ を level-zero regular dominant weight とする. そして, $U_v^+(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ を $U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ の positive part とする. この時, 各 $x \in W_{\text{af}}$ に対して, Demazure 加群 $V_x^+(\lambda) \subset V(\lambda)$ を次の様に定義する:

$$V_x^+(\lambda) := U_v^+(\mathfrak{g}_{\text{af}}) S_x v_\lambda \subset V(\lambda);$$

但し, $S_x v_\lambda \in V(\lambda)$ は weight $x\lambda$ の extremal vector である; 詳しくは, [NS] を参照.

§4.3 Demazure 加群の次数付き指標

$\lambda \in P^{++}$ とする. W の最長元 w_0 に付随する Demazure 加群 $V_{w_0}^+(\lambda)$ の (\mathfrak{h}_{af} に関する) weight 空間分解

$$V_{w_0}^+(\lambda) = \bigoplus_{\substack{\gamma \in Q \\ k \in \mathbb{Z}}} V_{w_0}^+(\lambda)_{\lambda + \gamma + k\delta}$$

を考える. そして, $V_{w_0}^+(\lambda)$ の次数付き指標 $\text{gr-ch}(V_{w_0}^+(\lambda))$ を, 次の様に定義する.

$$\text{gr-ch}(V_{w_0}^+(\lambda)) := \sum_{\substack{\gamma \in Q \\ k \in \mathbb{Z}}} (\dim_{\mathbb{C}(v)} V_{w_0}^+(\lambda)_{\lambda + \gamma + k\delta}) e^{\lambda + \gamma} q^k.$$

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 4.1. $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$ とすると, 次の等式が成り立つ:

$$\text{gr-ch}(V_{w_0}^+(\lambda)) = \frac{P_\lambda(q, 0)}{\prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{m_i} (1 - q^r)}.$$

注意 4.2. 上の定理の証明には, §3 の最後で述べた等式

$$P_\lambda(q, 0) = \sum_{\eta = (w_1, \dots, w_s; a_0 < a_1 < \dots < a_s) \in \text{QLS}(\lambda)} e^{\text{wt}(\eta)} q^{\sum_{k=1}^{s-1} a_k \langle \lambda, \text{wt}(w_{k+1} \Rightarrow w_k) \rangle}$$

を用いる; 詳しくは, [INS], [NS] を参照.

§5 アフィン量子群のレベル・ゼロ基本表現との関係

§5.1 Demazure 加群 $V_{w_0}^+(\lambda)$ の商加群

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$ として, $U_v^+(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -加群 $V_{w_0}^+(\lambda)$ の商加群 $W_{w_0}(\lambda)$ を, 次の様に定義する:

$$W_{w_0}(\lambda) := V_{w_0}^+(\lambda) / \sum_{\mathbf{c}_0 \in \overline{\text{Par}}(\lambda) \setminus \{\emptyset\}} U_v^+(\mathfrak{g}_{\text{af}}) S_{\mathbf{c}_0} S_{w_0} v_\lambda;$$

ここで, $S_{\mathbf{c}_0} S_{w_0} v_\lambda \in V(\lambda)$ は weight $w_0 \lambda + |\mathbf{c}_0| \delta$ の extremal vector である. また, $\overline{\text{Par}}(\lambda)$ は, 分割 $\rho^{(i)}$, $i \in I$, の組 $(\rho^{(i)})_{i \in I}$ であって, 各 $\rho^{(i)}$ の長さが m_i 以下であるものの全体である; 詳しくは, [BN] を参照.

このとき, 次の定理が成り立つ; 詳しくは, [INS], [NS] を参照.

定理 5.1. $\lambda \in P^{++}$ とすると, 次の等式が成り立つ:

$$\text{gr-ch}(W_{w_0}(\lambda)) = P_\lambda(q, 0).$$

§5.2 レベル・ゼロ基本表現との関係

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$ とする. $U'_v(\mathfrak{g}_{\text{af}}) := U_v((\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c) \subset U_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ とおき, $W(\varpi_i) := V(\varpi_i)/(z_i - 1)V(\varpi_i)$ を $U'_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ のレベル・ゼロ基本表現 (有限次元既約表現) とする; 但し, $z_i : V(\varpi_i) \rightarrow V(\varpi_i)$ は, $U'_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -同型である; 詳しくは, [K] を参照.

Fact 5.2. $U_v(\mathfrak{g})$ ($\subset U'_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$)-加群としての次の同型が成り立つ:

$$W_{w_0}(\lambda) \cong \bigotimes_{i \in I} W(\varpi_i)^{\otimes m_i}.$$

また, $U_v(\mathfrak{g})$ -crystal としての次の同型が成り立つ:

$$\mathcal{B}(W_{w_0}(\lambda)) \cong \text{QLS}(\lambda) \cong \bigotimes_{i \in I} \text{QLS}(\varpi_i)^{\otimes m_i};$$

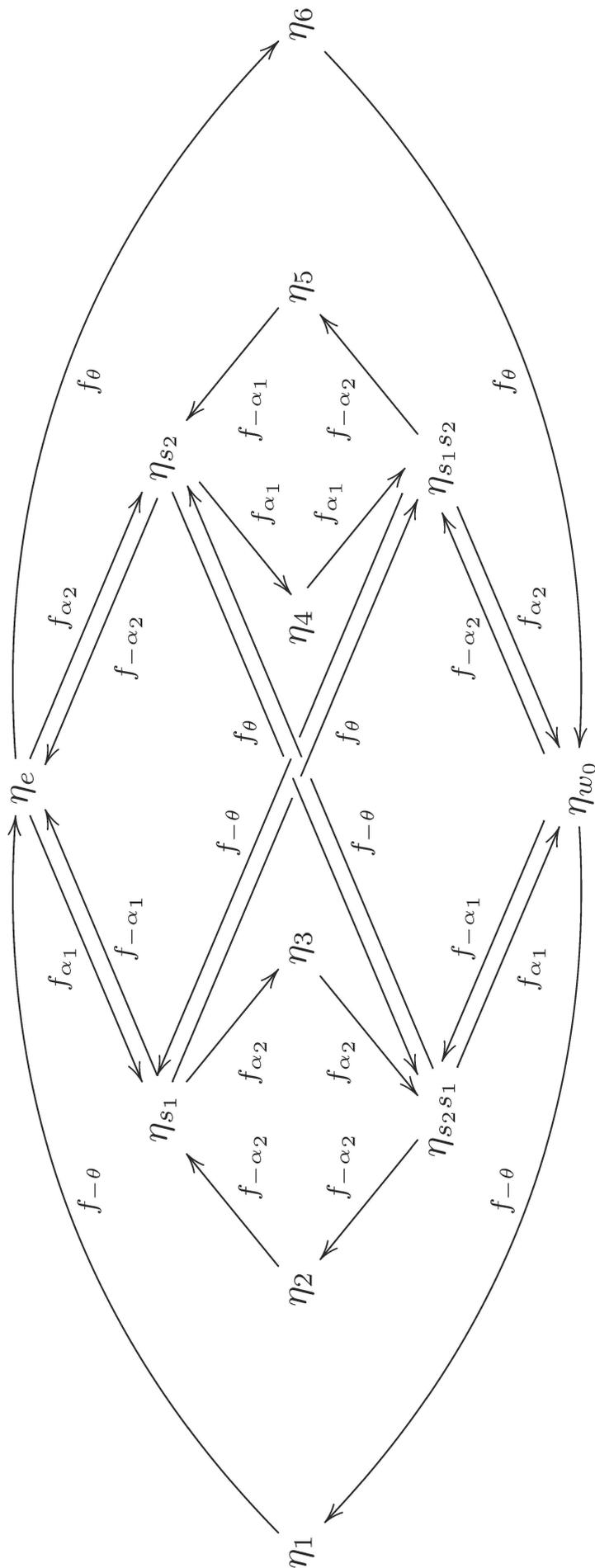
後者の同型は, $U'_v(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ -crystal としての同型でもある.

参考文献

- [BN] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **123** (2004), 335–402.
- [INS] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, preprint 2014, arXiv:1402.3884.
- [K] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117–175.
- [L] C. Lenart, On combinatorial formulas for Macdonald polynomials, *Adv. Math.* **220** (2009), 324–340.
- [LNS³1] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph, *Int. Math. Res. Not.* **2015** (2015), 1848–1901.
- [LNS³2] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II: Alcove model, path model, and $P = X$, preprint 2014, arXiv:1402.2203.
- [LNS³3] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Quantum Lakshmibai-Seshadri paths and root operators, arXiv:1308.3529, to appear in the Proceedings of the 5th Mathematical Society of Japan Seasonal Institute: Schubert Calculus, Osaka, Japan.
- [LNS³4] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Explicit description of the degree function in terms of quantum Lakshmibai-Seshadri paths, arXiv:1504.04707, to appear in *Toyama Math. J.* **37** (2015).
- [LNS³5] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals III: Nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = 0$ and Demazure characters, preprint 2015, arXiv:1511.00465.
- [M1] I. G. Macdonald, “Symmetric Functions and Hall Polynomials”, 2nd ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.
- [M2] I. G. Macdonald, “Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials”, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 157, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [NS] S. Naito and D. Sagaki, Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials, preprint 2014, arXiv:1404.2436.
- [RY] A. Ram and M. Yip, A combinatorial formula for Macdonald polynomials, *Adv. Math.* **226** (2011), 309–331.

Appendix.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$ に対する $p\text{QLS}(\lambda)$ の (拡張された) クリスタル・グラフ:



Association schemes and their standard modules

花木 章秀* (信州大学・理学部)

第 60 回代数学シンポジウム
静岡大学 2015 年 9 月 3 日

アソシエーション・スキームとは代数的組合せ論の研究対象であり、その定義が簡単であるため、多くの数学的な対象から自然に得られるものである。それは、アソシエーション・スキームがその特別な場合として有限群を含んでいることから分かる。例えば、有限群を正規部分群でない部分群で割るとそれは有限群にはならないが、それはある見方をすればアソシエーション・スキームの構造をもつ。アソシエーション・スキームが誰によって何時頃から考えられているのかは不勉強のためはっきりとは分からないが、Delsarte [3], 坂内-伊藤 [1] が研究を発展させる大きな力になったことは間違いない。有限単純群の分類が完成した 1980 年代頃に、多くの研究者がアソシエーション・スキームや関連する内容の研究に移ってきているようである。Delsarte [3], 坂内-伊藤 [1] など扱っているアソシエーション・スキームはほとんど“可換”あるいは“対称”なもののみであり、このままでは有限群を含んでいるとはいえない。非可換を含むものは Higman [7] にある coherent configuration のうち“homogenous”といわれるものである。非可換の場合も含めて扱っているテキストは少なく Zieschang [13], [14] ぐらいであるが、これは初学者にとって読みやすいものとはいえないであろう。最近ではアソシエーション・スキームを何らかの研究に応用することが多くなっているが、私は応用面については詳しくないのでここでは触れない。残念ながら、応用を意識しないアソシエーション・スキームそのものの研究は少なくなっている。

私はもともと有限群の表現を研究していたが、坂内英一先生らの影響によってアソシエーション・スキームの研究をするようになった。その頃はアソシエーション・スキームの研究が盛んで、分からないことがたくさんあり非常に魅力的な研究対象に思えた。先の述べたように、この分野にはもともと有限単純群を扱っていた人が多いため、私は環論、表現論的な立場からアソシエーション・スキームを研究し、現在もその方針は変わっていない。ここでは私の立場からアソシエーション・スキームの定義やそれに関する問題を解説し、最近の一つの結果を紹介する。

1 アソシエーション・スキーム

まず定義を与えよう。 X を有限集合とし $X \times X$ の分割 $X \times X = \bigcup_{s \in S} s$ を考える。組 (X, S) がアソシエーション・スキーム (association scheme) であるとは

*〒 390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学理学部, hanaki@shinshu-u.ac.jp

- (1) $1 := \{(x, x) \mid x \in X\} \in S$
- (2) $s \in S$ ならば $s^* := \{(y, x) \mid (x, y) \in s\} \in S$
- (3) $s, t, u \in S$ に対して、ある非負整数 p_{st}^u が存在して、 $(x, y) \in u$ であるならば (x, y) の取り方に依らず $\#\{z \in X \mid (x, z) \in s, (z, y) \in t\} = p_{st}^u$

が成り立つことである。理解しにくいので行列を使った定義に書きなおしておく。行、列、ともに集合 X の要素で添字付けられた可換環 R 上の行列の全体のなす環を $M_X(R)$ と表す。一般に $s \subset X \times X$ に対して、その隣接行列 $\sigma_s \in M_X(\mathbb{Z})$ を

$$(\sigma_s)_{xy} = \begin{cases} 1, & (x, y) \in s \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

で定める。アソシエーション・スキームの定義は隣接行列を使って以下のように書き換えられる。

- (0)' $\sum_{s \in S} \sigma_s = J$ (すべての成分が 1 の行列)
- (1)' ある $1 \in S$ があって $\sigma_1 = E$ (単位行列)
- (2)' $s \in S$ に対して、ある $s^* \in S$ があって ${}^t\sigma_s = \sigma_{s^*}$ (${}^t\sigma_s$ は σ_s の転置行列)
- (3)' $s, t, u \in S$ に対して、ある非負整数 p_{st}^u が存在して、 $\sigma_s \sigma_t = \sum_{u \in S} p_{st}^u \sigma_u$

条件 (0)' は S が分割であることを表している。条件 (3)' より $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}\sigma_s$ は環となる。任意の単位元をもつ可換環 R 上で隣接代数 $RS = R \otimes_{\mathbb{Z}} (\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}\sigma_s)$ が定義される。 $\mathbb{Z}S$ が可換であるとき、アソシエーション・スキーム (X, S) は可換であるという。条件 (2) で $s = s^*$ (すなわち σ_s が対称行列) が任意の $s \in S$ に対して成り立つとき、 (X, S) は対称であるという。対称ならば可換であることがすぐに分かる。(3) の p_{st}^u を交叉数 (intersection number) という。すぐに分かるように交叉数は隣接代数の基底 $\{\sigma_s \mid s \in S\}$ に関する構造定数である。

アソシエーション・スキームの典型的な例は以下のように有限可移置換群から得られる。

例 1.1 (Schur 的スキーム). G を有限集合 X 上の可移置換群とする。 G は $X \times X$ にも $(x, y)g = (xg, yg)$ によって自然に作用する。この軌道の集合を S とすると (X, S) はアソシエーション・スキームとなる。このようにして得られるアソシエーション・スキームを Schur 的であるという。

G の G への正則な作用を考えれば、それによって得られるアソシエーション・スキームは G そのものであると考えることができる。このようにして有限群はアソシエーション・スキームの特別なものとみなすことができる。このときの隣接代数は群代数に一致する。

アソシエーション・スキームに関する大きな問題の一つは、

問題. (ある性質をもつ) アソシエーション・スキームを分類せよ

である。対称、可換など、色々な性質をもつものが考えられているが分類のための有効な方法は得られておらず、基礎となる有限集合 X の大きさでいえば $|X| = 30$ までしか分類は済んでいない [5]。 $|X| = 31$ には 100,000 個以上の非同型なものが存在することが分かっている (計算機によって構成されたが分類は完成していない)。しかし $|X| = 31$ の場合の交叉数 (構造定数) は Schur 的なものと同じものに限り、それは完全に分かっている。交叉数が等しい非同型なものがたくさん存在するのである。このように交叉数が同じ、すなわち代数としては完全に一致しているもので、組合せ論的に異なるものがたくさんあることが、その分類を困難にしている一つの要因である。

交叉数の一致する二つのアソシエーション・スキームは代数的に同型であると言われる。きちんと定義しておこう。 $(X, S), (Y, T)$ をアソシエーション・スキームとする。 (X, S) と (Y, T) が同型であるとは、全単射 $\varphi: X \rightarrow Y, \psi: S \rightarrow T$ があって $(x, x') \in s$ と $(\varphi(x), \varphi(x')) \in \psi(s)$ が同値となることである。 (X, S) と (Y, T) が代数的に同型であるとは、全単射 $\psi: S \rightarrow T$ があって $p_{st}^u = p_{\psi(s)\psi(t)}^{\psi(u)}$ となることである。例えば、パラメータの等しい 2-デザインや強正則グラフは代数的に同型なアソシエーション・スキームを定める。一般に代数的に同型なアソシエーション・スキームが同型かどうかを判定することは難しく、統一的な良い方法は知られていない。体 F 上の多項式 $f(x)$ に対して $f(\sigma_s)$ と $f(\sigma_{\psi(s)})$ の F 上の行列としてのランクを調べることで、代数的に同型なものを区別できることがあるということが [2, 8, 9] などで扱われている。この際、標数 0 の体上ではランクに差がないことが分かっており、正標数の体上で差が生じる場合がある。このランクの差が表現論的に説明できることを示したのが [6] である。

表現について説明しよう。アソシエーション・スキーム (X, S) に対して、先に述べたように隣接代数 RS が定義される。 RS の (行列) 表現、すなわち全行列環 $M_n(R)$ への代数準同型、を (X, S) の表現という。 RS は行列環の部分代数として定義されているので、その埋め込みは表現である。これを標準表現という。代数的に同型なアソシエーション・スキームは同型な隣接代数をもつので、その表現を考えても区別は出来ないが、標準表現には差が生じる可能性がある。簡単な例を見てみよう。係数環として代数閉体を考え、隣接代数は一つの元で生成されるものと仮定する。代数は生成元の最小多項式で決定されるが、それを表現する行列の Jordan 標準形には自由度があり、行列のランクは定まらない。一元生成とは限らない、より一般の場合には表現 (加群) の直既約分解を考えることになる。直既約分解を考えるには、その前に隣接代数の構造を決める必要もある。係数環が標数 0 の代数閉体である場合には隣接代数は半単純であり、その標準加群にも違いがないことが分かっている。正標数の場合には隣接代数の構造もあまり分かっていない。(隣接代数が半単純になるための条件は [4] で決定されてはいるが、使いやすい結果ではない。改良が期待される。) アソシエーション・スキームは有限群も含むので、その場合には多くの研究があるが、それ以外には

- 3 次元の隣接代数 (花木-吉川 [6])
- Hamming scheme (吉川 [12])
- Grasmann scheme (一部のパラメータのみ、島袋-吉川 [11])
- dual polar scheme (一部のパラメータのみ、島袋 [10])

などがある。正標数の場合の標準加群の様子はほとんど研究されていない。ここではサイクルトミック・スキームというアソシエーション・スキームに対して、その隣接代数

と標準加群の様子を調べ、さらにそれらと代数的に同型なものとの比較をしたので、それを紹介したい。

2 サイクロトミック・スキームとその隣接代数

サイクロトミック・スキームを定義する前に、若干一般的な議論をする。 N を有限群、 H を $\text{Aut}(N)$ の部分群とする。 N の正則置換表現を考え、 H -軌道で和をとれば、それはアソシエーション・スキームとなる。 F を体とする。 H は群環 FN にも代数自己同型として作用し、その H による固定点の集合 $(FN)^H$ が隣接代数となる。このとき標準加群は FN である。(この設定では問題は不変式環の言葉で理解され、色々な結果が適用できると思われるが、不勉強のため私には分からない。)

p を素数とし \mathbb{F}_{p^a} を p^a 個の元をもつ有限体とする。 ζ を \mathbb{F}_{p^a} の原始元とする。 N を位数 p^a の基本可換 p -群とし、アーベル群としての同型 $\mathbb{F}_{p^a} \rightarrow N (\alpha \mapsto [\alpha])$ を一つ固定しておく。 $H = \langle h_0 \rangle$ を位数 $p^a - 1$ の巡回群とし N への作用を $[\alpha]^{h_0} = [\zeta\alpha]$ で定める。 $d \mid p^a - 1$ に対して $H_d = \langle h_0^{(p^a-1)/d} \rangle$ とおく。 H_d は $|H : H_d| = d$ なる H の部分群である。 H_d の N への作用によって定まるアソシエーション・スキームをサイクロトミック・スキームといい $\text{Cyc}(p^a, d)$ と表す。

以下では F を標数 p の代数閉体とし、 F 上の隣接代数と標準加群の構造を求める。決定の手法はパラメータに依らない一般的なものであるが、その構造を一般的に記述することは難しいと思われ、また加群の直既約性を決定することも容易ではない。ここでは手法の説明と特殊なパラメータの場合のその構造を完全に記述する。上で説明したように、 $\text{Cyc}(p^a, d)$ の隣接代数は $(FN)^{H_d}$ であり、標準加群は FN である。

N は位数 p^a の基本可換 p -群なので、その生成元を n_1, \dots, n_a とし $x_i = n_i - 1$ ($i = 1, \dots, a$) とおけば $FN = F[x_1, \dots, x_n]$ であり、関係式 $x_i^p = 0$ ($i = 1, \dots, a$) をもつ。 FN は局所環であって Jacobson 根基は $J(FN) = \{\sum_{n \in N} c_n n \mid \sum_{n \in N} c_n = 0\}$ である。 $H = \langle h_0 \rangle$ の作用を考える。 H は群の自己同型として N に作用するから、代数自己同型として FN に作用する。したがって $J(FN)$ は H -不変であり $J(FN)/J^2(FN)$ は FH -加群である。 $J(FN)/J^2(FN)$ への h_0 の作用を計算することによって次の補題を得る。

補題 2.1. H の $J(FN)/J^2(FN)$ 上の表現は $\mathbb{F}_{p^a}^\times = \mathbb{F}_{p^a} \setminus \{0\} = \langle \zeta \rangle$ の \mathbb{F}_p 上の正則表現に一致する。

ζ の \mathbb{F}_p 上の正則表現は ζ とその代数共役 $\zeta^p, \zeta^{p^2}, \dots, \zeta^{p^{a-1}}$ を固有値にもつ。 H はアーベル p' -群なので、その表現は完全可約である。したがって、ある $v_1, \dots, v_a \in J(FN)$ が存在して

$$J(FN) = \left(\bigoplus_{i=1}^a Fv_i \right) \oplus J^2(FN), \quad v_i^{h_0} = \zeta^{p^{i-1}} v_i$$

となる。 FN は基底 $\{v_1^{e_1} \dots v_a^{e_a} \mid 0 \leq e_i < p (1 \leq i \leq a)\}$ をもち、基底への h_0 の作用は

$$(v_1^{e_1} \dots v_a^{e_a})^{h_0} = \zeta^{(\sum_{i=1}^a e_i p^{i-1})} v_1^{e_1} \dots v_a^{e_a}$$

となる。特に FN は FH -加群として $Fv_1^{e_1} \dots v_a^{e_a}$ の直和となる。したがって FH_d 加群としても同様に分解する。隣接代数 $(FN)^{H_d}$ はこの分解において、自明な加群の直和

となる。 $e = (p^a - 1)/d$ とおくと

$$v_1^{e_1} \cdots v_a^{e_a} \in (FN)^{H_d} \iff e \mid \sum_{i=1}^a e_i p^{i-1}$$

である。隣接代数の構造を記述しやすくするために、一つの記号を定義しよう。 $0 \leq f < p^a$ に対して、その p 進法表示を

$$f = \sum_{i=0}^{a-1} f_i p^{i-1} \quad (0 \leq f_i < p)$$

とするとき

$$\mathbf{v}^{(f)} = v_1^{f_1} \cdots v_a^{f_a}$$

と定める。このとき $v_i^p = 0$ であるから

$$\mathbf{v}^{(f)} \mathbf{v}^{(g)} = \begin{cases} \mathbf{v}^{(f+g)}, & \text{すべての } i \text{ について } f_i + g_i < p \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases} \quad (*)$$

が成り立つ。これらのことをまとめて次の定理が成り立つ。サイクルトミック・スキーム $\text{Cyc}(p^a, d)$ の F の隣接代数を簡単のため $\text{FCyc}(p^a, d)$ と表す。

定理 2.2. F を標数 p の代数閉体とする。 $d \mid (p^a - 1)$ とし $e = (p^a - 1)/d$ とおく。このとき $\text{FCyc}(p^a, d)$ は基底 $\{\mathbf{v}^{(ie)} \mid i = 0, 1, \dots, d\}$ をもち、基底の積は (*) で定まる。

簡単な考察から次の系が得られる。

系 2.3. F を標数 p の代数閉体とする。 $d \mid (p^a - 1)$, $d \mid (p^b - 1)$ とする。このとき $\text{FCyc}(p^a, d) \cong \text{FCyc}(p^b, d)$ である。(一般に $\text{Cyc}(p^a, d)$ と $\text{Cyc}(p^b, d)$ の構造定数が p を法として合同になるわけではない。)

(*) で基底の積は決まるが、その代数構造を一般的に記述することは簡単ではないように思われる。 $\mathbf{v}^{(ie)} \mathbf{v}^{(je)} \neq 0$ のとき (i, j) -成分を 1 に、そうでないとき 0 として行列を書けば

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & * & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (**)$$

となることが分かる。ここで、左上三角形のふちはすべて 1 で、内部 (* の部分) は状況によって変わる。右下はすべて 0 である。

命題 2.4. (1) $p \equiv 1 \pmod{d}$ のとき、上の三角形の内部はすべて 1 であり $\text{FCyc}(p^a, d) \cong F[x]/(x^{d+1})$ である。($\text{FCyc}(p^a, d) \cong F[x]/(x^{d+1})$ となるのは、このときに限る。)

(2) $d \neq 2$, $p \equiv -1 \pmod{d}$ のとき、上の三角形の内部はすべて 0 であり $\text{FCyc}(p^a, d) \cong F[x_1 \cdots, x_{d-1}]/I$ である。ただし、ここで I は

$$x_i x_j \ (i + j \neq d), \quad x_i x_j - x_k x_\ell \ (i + j = k + \ell = d)$$

で生成されるイデアルである。(他のパラメータでもこの形になることはある。)

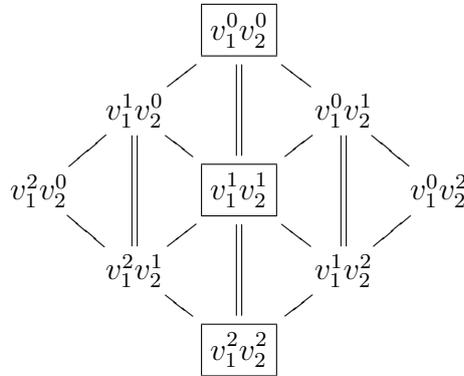
注意. 一般論から $\text{FCyc}(p^a, d)$ は対称代数かつ局所環になることが分かっている。

3 サイクロトミック・スキームの標準加群

前節でサイクロトミック・スキームの隣接代数の構造を記述したが、それを用いて、ここでは標準加群の構造を考える。隣接代数を定理 2.2 のように記述することで、標準加群の様子もある程度、場合によっては完全に、決定できる。命題 2.4 で扱った $p \equiv 1 \pmod{d}$ の場合と $d = 3$ の場合には直既約分解が完全に記述できるので、それを紹介する。また、この場合に加群の構造から行列のランクが決まることを示し、更にサイクロトミック・スキームと代数的に同型であるアソシエーション・スキームとランクの違いがあることを小さな例で紹介する。一般の場合にも同様の分解が可能であるが、そこに現れる加群が直既約かどうかは私には分からない。

3.1 $p \equiv 1 \pmod{d}$ のとき

まず簡単な例を見る。 $\text{Cyc}(3^2, 2)$ を考える。



四角で囲った元が隣接代数の基底である。縦の二重線で結んだものが直既約加群となる。すなわちこの場合には、長さ 3 のものが 1 個、長さ 2 のものが 2 個、長さ 1 のものが 2 個、と直和分解することが分かる。(長さ n の加群はサイズ n の Jordan ブロックに対応すると思ってよい。)

この例と同様に $FCyc(p^a, d) \cong F[x]/(x^{d+1})$ であれば、標準加群の直既約分解を簡単に求めることが出来る。長さ j の単列加群を U_j と表すことにすれば、一般に次の定理が成り立つ。

定理 3.1. $p \equiv 1 \pmod{d}$ であるとき、 $FCyc(p^a, d) \cong F[x]/(x^{d+1})$ であって、 $FCyc(p^a, d)$ の標準加群の直既約分解を $\bigoplus_{j=1}^{d+1} m_j U_j$ と表わせば、重複度 m_j は連立方程式

$$\left(p - \frac{i(p-1)}{d}\right)^a = \sum_{j=i+1}^{d+1} (j-i)m_j \quad (i = 1, \dots, d)$$

の解として定まる。

これを用いて隣接行列のランクが定まる。

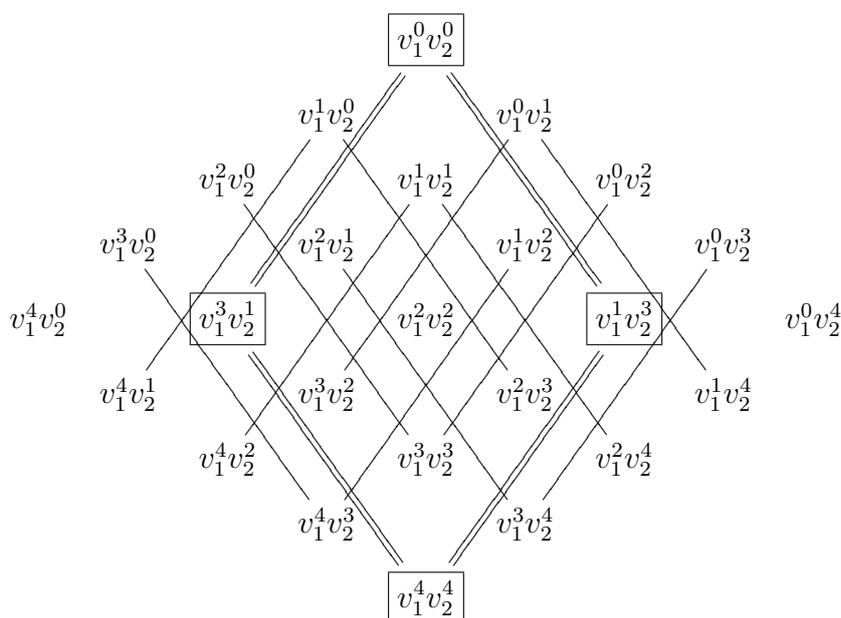
系 3.2. $p \equiv 1 \pmod{d}$ とし $(X, S) = \text{Cyc}(p^a, d)$ とする。 $s \in S \setminus \{1\}$ と $0 \leq i \leq d$ に対して $(\sigma_s - n_s \sigma_1)^i$ の標数 p でのランクは $(p - i(p-1)/d)^a$ である。

この系で $d = 2$ のときは [2, Proposition 4.2] である。ここでサイクロトミック・スキームと代数的に同型なものと比較してみるが、 $a = 1$ かつ $d = 2$ のときにはそのランクに違いがないことが [8, Corollary 3.1] で示されている。

例 3.3. $\text{Cyc}(5^2, 2)$ と代数的に同型なものは 8 個ある。[5] の位数 25 の No. 4 から 11 である。 $\sigma_s - 12\sigma_1$ の標数 5 でのランクは、順に 12, 12, 12, 12, 12, 11, 10, 9 である。 $\text{Cyc}(5^2, 2)$ に対しては系 3.2 より 9 になるので、それは No. 11 であり、この場合にはランクだけで $\text{Cyc}(5^2, 2)$ が特徴付けられることが分かる。

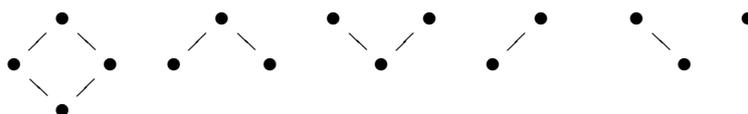
3.2 $d = 3$ のとき

$d = 3$ の場合を考える。 $p \equiv 1 \pmod{3}$ ならば前の節で考えた場合になるので $p \equiv 2 \pmod{3}$ のときを考える。このとき $a \equiv 2 \pmod{3}$ であって、隣接代数は $F[x, y]/(x^2, y^2)$ である。今度も簡単な例を見よう。 $\text{Cyc}(5^2, 3)$ を考える



分かりにくいのが、この図が標準加群の直既約分解を表している。前と同じように四角で囲ったものが隣接代数の基底であり、線で結ばれたものが直既約因子を表している。一般にこのような図の分解が標準加群の直和分解となることはすぐに分かるが、それが本当に直既約分解であるかどうかは私には分からない。しかし $d = 3$ の場合は隣接代数が $F[x, y]/(x^2, y^2)$ であり、その直既約加群はすべて分かっているので、これが本当に直既約分解であることが分かる。

$\text{Cyc}(p^a, 3)$ の場合、簡単な考察から分解に現れる直既約加群は



の 6 通りしかないことが分かる ($a > 2$ のときは平面的な図で考えることは出来ないの
で、やや面倒であるが難しくはない)。左から順に M_1, \dots, M_6 とする。

定理 3.4. $p \equiv 2 \pmod{3}$ であるとき、 $FCyc(p^a, 3)$ の標準加群の直既約分解を $\bigoplus_{j=1}^6 m_j M_j$ と表わせば、

$$\begin{aligned} m_1 &= 1, & m_2 &= m_3 = \frac{(p+1)^a}{3^a} - 1, \\ m_4 &= m_5 = \frac{(2^{a/2} - 2)(p+1)^a}{3^a}, & m_6 &= p^a + 2 - \frac{(2^{a/2+2} - 2)(p+1)^a}{3^a}. \end{aligned}$$

である。

やや議論が必要であるが行列のランクも決定できる。基底を代数的に都合よく取り直しているために $v^{(ie)}$ は組合せ論的に扱いやすい元ではないことに注意が必要である。

系 3.5. $p \equiv 2 \pmod{3}$ とし $(X, S) = Cyc(p^a, 3)$ とする。 $s \in S \setminus \{1\}$ に対して $\sigma_s - \frac{p^a-1}{d}\sigma_1$ の標数 p でのランクは $2^{a/2}(p+1)^a/3^a$ である。

最後に代数的に同型なものと比較してみよう。

例 3.6. [5] の位数 16 の No. 20 は $Cyc(2^4, 3)$ であり、No. 21 はそれと代数的に同型である。いずれの場合も $s \in S \setminus \{1\}$ に対して $\sigma_s - 5\sigma_1$ のランクは 6 である。しかし $(FX)J(FS)$ の次元、すなわち $\{\sigma_s - 5\sigma_1 \mid s \in S \setminus \{1\}\}$ のすべての行の張る空間、には 7, 8 と差がある。サイクロトミック・スキームの場合のこの次元は、標準加群の直既約分解から得られるものである。(このことから、標準加群の構造は行列のランクだけを考えるよりも多くの情報を含むことが確認できる。)

例 3.7. [5] の位数 25 の No. 18 は $Cyc(5^2, 3)$ であり、No. 17 はそれと代数的に同型である。いずれの場合も $s \in S \setminus \{1\}$ に対して $\sigma_s - 8\sigma_1$ のランクは 8 である。しかし $\dim_F(\bigcap_{s \in S \setminus \{1\}} FX(\sigma_s - 8\sigma_1))$ は、それぞれ 4, 3 となり、やはり差が生じる。サイクロトミック・スキームの場合のこの次元も標準加群の構造から計算できる。

4 今後考えたいこと

標準加群の構造についてある族について調べたものは、今回の結果が初めてのもので、一般論を考えるためにももっと多くの具体例を計算してみたい。サイクロトミック・スキームについても、その構造を完全に記述できていないので、これを考えてみたい。また、アーベル群にアーベル群が作用している場合には同様の方法が通用するので、それも考えてみたい。

ハミング・スキームについては隣接代数は完全に分かっている。そして 2 元体上のハミング・スキーム $H(n, 2)$ は位数 2^n の基本可換 2-群への対称群 S_n の自然な作用によって得られるため、類似の考察が出来る。2 元体上のハミング・スキーム $H(n, 2)$ は応用上も極めて重要なものであるから、その標準加群の構造を決定することは意義のあることであろう。

References

- [1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics. I*, The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., Menlo Park, CA, 1984.
- [2] A. E. Brouwer and C. A. van Eijl, *On the p -rank of the adjacency matrices of strongly regular graphs*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), no. 4, 329–346.
- [3] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. (1973), no. 10, vi+97.
- [4] A. Hanaki, *Semisimplicity of adjacency algebras of association schemes*, J. Algebra **225** (2000), no. 1, 124–129.
- [5] A. Hanaki and I. Miyamoto, *Classification of association schemes with small vertices*, published on web (<http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/as/>).
- [6] A. Hanaki and M. Yoshikawa, *On modular standard modules of association schemes*, J. Algebraic Combin. **21** (2005), no. 3, 269–279.
- [7] D. G. Higman, *Coherent configurations. I. Ordinary representation theory*, Geometriae Dedicata **4** (1975), no. 1, 1–32.
- [8] R. Peeters, *Uniqueness of strongly regular graphs having minimal p -rank*, Linear Algebra Appl. **226/228** (1995), 9–31.
- [9] ———, *On the p -ranks of the adjacency matrices of distance-regular graphs*, J. Algebraic Combin. **15** (2002), no. 2, 127–149.
- [10] O. Shimabukuro, *Modular adjacency algebras of dual polar schemes*, preprint.
- [11] O. Shimabukuro and M. Yoshikawa, *Modular adjacency algebras of Grassmann graphs*, Linear Algebra Appl. **466** (2015), 208–217.
- [12] M. Yoshikawa, *Modular adjacency algebras of Hamming schemes*, J. Algebraic Combin. **20** (2004), no. 3, 331–340.
- [13] P.-H. Zieschang, *An algebraic approach to association schemes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1628, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [14] ———, *Theory of association schemes*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

符号，格子と頂点作用素代数

一橋大学大学院経済学研究科 山田裕理¹

1 はじめに

レベルが整数 $k \geq 2$ の sl_2 の可積分表現 $L_{\widehat{sl}_2}(k, 0)$ は，基本的な頂点作用素代数のひとつである． $L_{\widehat{sl}_2}(k, 0)$ の内部には sl_2 のカルタン部分代数から生成されるハイゼンベルグ代数が含まれるが，このハイゼンベルグ代数によるコミュタント $K(sl_2, k)$ は，パラフェルミオン頂点作用素代数と呼ばれる頂点作用素代数である． $K(sl_2, k)$ の既約加群の同型類は $k(k+1)/2$ 個あるが，このうち単純カレントは k 個あり，それらは M^j , $j \in \mathbb{Z}_k$ と $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ で添字付けられる．

単純カレントの間のフュージョン規則には \mathbb{Z}_k の対称性がある．単純カレント M^j , $j \in \mathbb{Z}_k$ を，長さ n の \mathbb{Z}_k -符号 D を用いて組み合わせることにより，新しい頂点作用素代数あるいは頂点作用素超代数 M_D が得られる．ここで長さ n の \mathbb{Z}_k -符号とは， \mathbb{Z}_k の n 個の直積 $(\mathbb{Z}_k)^n$ のなす加法群の部分群を意味する．最初に符号 D から格子 Γ_D を作り， Γ_D から定義される頂点作用素代数あるいは頂点作用素超代数 V_{Γ_D} における部分代数のコミュタントとして， V_{Γ_D} の内部に具体的に M_D を構成する． $k=2$ と $k=3$ の場合の M_D は，[10] および [8] で研究されている．

M_D の構成は，既に [12] で紹介されている．本稿の第2節と第3節は [12] と重複する内容が多いが，パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2, k)$ の性質および M_D の構成法について説明する．第4節では簡単な M_D の例をいくつか提示する．格子 Γ_D は，一般には有理格子である．第5節では Γ_D が整格子になるための条件を考察し，その条件を満たす符号 D の例を紹介する．

本稿は荒川知幸氏，山内博氏との共同研究に基づくものである．Ching Hung Lam 氏には，様々なアドバイスをいただいた．また，島倉裕樹氏，原田昌晃氏，宗政昭弘氏には，符号に関して有益なアドバイスをいただいた．

2 $K(sl_2, k)$ に関する基本的な事項

パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2, k)$ およびその既約加群については，[1], [2], [3], [4], [5], [6] 等で研究されている．この節では，後で必要になる基本的な事項をまとめておく．

¹本研究は学術研究助成基金助成金 基盤研究 (C) 23540009 の助成を受けたものである．

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ を基底とする階数 k の格子 $L = \mathbb{Z}\alpha_1 + \dots + \mathbb{Z}\alpha_k$ から出発する $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ は互いに直交する長さ $\sqrt{2}$ の元である． $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 2\delta_{ij}$ ．ここで， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は格子における内積を表す．格子 L は， A_1 型ルート格子の k 個の直交和 $A_1^{\oplus k}$ にほかならない． $\gamma = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ とし， $N = \sum_{p=1}^{k-1} \mathbb{Z}(\alpha_p - \alpha_{p+1}) \cong \sqrt{2}A_{k-1}$ とおく． N は， γ と直交する L の元全体であり， A_{k-1} 型ルート格子を $\sqrt{2}$ 倍したものと同型である．

格子 L から定義される頂点作用素代数 V_L には，次のように sl_2 のレベル k の可積分表現 $L_{\widehat{sl}_2}(k, 0)$ が含まれる． V_L の 3 つの元

$$H = \gamma(-1)\mathbf{1}, \quad E = e^{\alpha_1} + \dots + e^{\alpha_k}, \quad F = e^{-\alpha_1} + \dots + e^{-\alpha_k} \quad (2.1)$$

を考える．これらで生成される V_L の部分頂点作用素代数を V^{aff} とおくと， $V^{\text{aff}} \cong L_{\widehat{sl}_2}(k, 0)$ となる．さらに， V^{aff} は e^γ と $e^{-\gamma}$ で生成される部分頂点作用素代数 V^γ を含む． V^γ は， γ で生成される階数 1 の格子 $\mathbb{Z}\gamma$ から定義される頂点作用素代数 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ に同型である．パラフェルミオン頂点作用素 $K(sl_2, k)$ は， V^γ の V^{aff} におけるコミュタントである．

$$K(sl_2, k) = \text{Com}_{V^{\text{aff}}}(V^\gamma).$$

$K(sl_2, k) \otimes V^\gamma$ は $V^{\text{aff}} \cong L_{\widehat{sl}_2}(k, 0)$ の部分頂点作用素代数なので， V^{aff} は $K(sl_2, k) \otimes V^\gamma$ の加群となるが，この加群として次のように既約分解される．

$$V^{\text{aff}} \cong \bigoplus_{j=0}^{k-1} M^j \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma - j\gamma/k}. \quad (2.2)$$

ここで，

$$M^j = \{v \in V^{\text{aff}} \mid H_{(m)}v = -2j\delta_{m,0}v, m \geq 0\}$$

は，既約 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ -加群 $V_{\mathbb{Z}\gamma - j\gamma/k}$ の V^{aff} における重複度である．特に $j = 0$ のときの M^0 は， V^γ の V^{aff} におけるコミュタント $K(sl_2, k)$ である． M^j , $0 \leq j \leq k-1$ は既約 M^0 -加群になる．なお， $\mathbb{Z}\gamma - j\gamma/k$ は $j \pmod{k}$ により定まるので， M^j の j は \pmod{k} で考える．

一般に格子 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ に対して，その双対格子を X° で表す．

$$X^\circ = \{\alpha \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X \mid \langle \alpha, X \rangle \subset \mathbb{Z}\}.$$

L の双対格子は $L^\circ = \frac{1}{2}L$ であるが，それから定義される一般化された頂点代数 V_L の内部に， $L_{\widehat{sl}_2}(k, 0)$ の既約加群 $L_{\widehat{sl}_2}(k, i)$, $0 \leq i \leq k$ が構成できる． $L_{\widehat{sl}_2}(k, i)$ は，次のように $K(sl_2, k) \otimes V^\gamma$ の既約加群の直和に分解する．

$$L_{\widehat{sl}_2}(k, i) = \bigoplus_{j=0}^{k-1} M^{i,j} \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma + (i-2j)\gamma/2k} \quad (2.3)$$

ここで，

$$M^{i,j} = \{v \in L_{\widehat{sl}_2}(k, i) \mid H_{(m)}v = (i-2j)\delta_{m,0}v, m \geq 0\}$$

は、既約 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ -加群 $V_{\mathbb{Z}\gamma+(i-2j)\gamma/2k}$ の $L_{\widehat{sl}_2}(k, i)$ における重複度である。 $M^{i,j}$, $0 \leq i \leq k$, $0 \leq j \leq k-1$ は既約 M^0 -加群になる。 $\mathbb{Z}\gamma + (i-2j)\gamma/2k$ は $j \pmod{k}$ により定まるので、 $M^{i,j}$ の j は \pmod{k} で考える。 $i=0$ のときは (2.3) 式は (2.2) 式に一致するので、 $M^j = M^{0,j}$ であることに注意する。

$\alpha \in L$ に $-\alpha \in L$ を対応させることは格子 L の等長変換であるが、これにより引き起こされる頂点作用素代数 V_L の位数 2 の自己同型を θ で表す。 (2.1) 式の H, E, F は θ により次のように写される。 $\theta(H) = -H, \theta(E) = F, \theta(F) = E$ 。 M^0 は θ により不変で、 θ を M^0 に制限したものは、 M^0 の位数 2 の自己同型になる。

頂点作用素代数 V は、その任意の加群が完全可約であるとき有理的であるという。 また $\{a_{(-2)}b \mid a, b \in V\}$ で張られる V の部分空間を $C_2(V)$ で表したとき、 $V/C_2(V)$ が有限次元ならば頂点作用素代数 V は C_2 -余有限であるという。 頂点作用素代数 V が CFT 型であるとは、 $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_{(n)}$ で $V_{(0)} = \mathbb{C}1$ であることを意味する。

$M^0, M^{i,j}, 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k-1$, θ について、次のことが知られている ([1], [2], [3], [4], [6])。

(i) $M^0 = K(sl_2, k)$ は有理的かつ C_2 -余有限な CFT 型の単純頂点作用素代数で、中心電荷は $2(k-1)/(k+2)$ である。

(ii) $M^{i,j} \cong M^{k-i, k-i+j}$ である。

(iii) $M^{i,j}, 0 \leq j < i \leq k$ は既約 M^0 -加群の同型類の完全代表系である。特に、既約 M^0 -加群の同型類の個数は $k(k+1)/2$ である。

(iv) $M^{i,j}, 0 \leq j < i \leq k$ のトップレベルは 1 次元で、そのウエイトは

$$\frac{1}{2k(k+2)} \left(k(i-2j) - (i-2j)^2 + 2k(i-j+1)j \right).$$

(v) M^0 の自己同型群は $\text{Aut } M^0 = \langle \theta \rangle$ で位数 2 である。

(vi) θ は既約 M^0 -加群たちに次の置換を引き起こす。

$$M^{i,j} \circ \theta \cong M^{i, i-j}, \quad 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k-1.$$

特に、 $M^j \circ \theta \cong M^{-j}, 0 \leq j \leq k-1$ である。

(vii) $M^j, 0 \leq j \leq k-1$ は単純カレントで、 M^p と $M^{i,j}$ のフュージョン規則は $M^p \times M^{i,j} = M^{i, p+j}, 0 \leq p, j \leq k-1, 0 \leq i \leq k$ である。特に、 $M^p \times M^j = M^{p+j}$ である。

(ii) により $M^j = M^{0,j} = M^{k,j}, 0 \leq j \leq k$ であること、したがって (iv) により M^j のトップレベルは 1 次元で、そのウエイトは $j(k-j)/k$ であることに注意する。

(ii) と (vii) により、 $M^p \times M^{i,j} = M^{i,j}$ が成り立つのは k が偶数で $p = i = k/2$ のときに限ることがわかる。

パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2, k)$ は, sl_k 型のアフィン W -代数 $\mathcal{W}(sl_k)$ であることが知られている (cf. [2]). $K(sl_2, k)$ は, $k = 2$ のとき中心電荷 $1/2$ の Virasoro 頂点作用素代数 $L(1/2, 0)$ と同型である. $k = 3$ のときの $K(sl_2, k)$ は, 中心電荷 $4/5$ の Virasoro 頂点作用素代数 $L(4/5, 0)$ とその最高ウエイト 3 の既約加群 $L(4/5, 3)$ の直和に同型である. また $k = 4$ のとき, $K(sl_2, k)$ は $V_{\mathbb{Z}\beta}^+$ に同型である. ここで, $\langle \beta, \beta \rangle = 6$ である. $k \geq 5$ のとき, $K(sl_2, k)$ の strong generator として $\{W^2, W^3, W^4, W^5\}$ をとることができる. ここで W^2 は $K(sl_2, k)$ の共形元で, W^3, W^4, W^5 はそれぞれウエイトが $3, 4, 5$ の Virasoro primary である. 頂点作用素代数としては, $K(sl_2, k)$ は W^2 と W^3 の 2 つの元で生成される. なお $k \leq 4$ のときは退化しており, $k = 2$ ならば $W^3 = W^4 = W^5 = 0$, $k = 3$ ならば $W^4 = W^5 = 0$, $k = 4$ ならば $W^5 = 0$ である.

(2.2) 式では M^j が $M^j \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma - j\gamma/k}$ の形でテンソル積の成分として現れるが, 以下のように M^j と同型な既約 M^0 -加群を単独で取り出すことができる.²

格子 N から定義される頂点作用素代数 V_N は, $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ の V_L におけるコミュタント $V_N = \text{Com}_{V_L}(V_{\mathbb{Z}\gamma})$ である. よって, $M^0 = \text{Com}_{V^{\text{aff}}}(V_{\mathbb{Z}\gamma})$ は V_N に含まれる. M^0 の V_N におけるコミュタントを

$$T = \text{Com}_{V_N}(M^0) \quad (2.4)$$

とおく. T は V^{aff} の V_L におけるコミュタントでもある. T については, 既約加群の分類および有理的であることが [7] により知られている. T の共形元を ω_T で表す.

T の V_N におけるコミュタントは M^0 に一致し, 次のことが成り立つ.

$$M^0 = \text{Com}_{V_N}(T) = \{v \in V_N \mid (\omega_T)_{(1)}v = 0\}. \quad (2.5)$$

N の双対格子 N° における N のコセット

$$N^j = N - j\alpha_1 + j\gamma/k \quad (2.6)$$

を考える. N° から定義される一般化された頂点代数 (generalized vertex algebra) V_{N° において, V_{N^j} は頂点作用素代数 V_N の既約加群であるが, その部分空間 $M^{(j)}$ を

$$M^{(j)} = \{v \in V_{N^j} \mid (\omega_T)_{(1)}v = 0\}, \quad 0 \leq j \leq k-1 \quad (2.7)$$

と定義する. この $M^{(j)}$ は, M^j に同型な既約 M^0 -加群である ([12, 定理 2.3]). $j = 0$ のときの $M^{(0)}$ は, パラフェルミオン頂点作用素代数 M^0 に一致する.

N の N° におけるコセット N^j が $j \pmod k$ により定まることに対応して, $M^{(j)}$ の添字 j は $\pmod k$ で扱う.

²これに関する詳しい議論は [12, 第 2 節] にある.

3 M_D の構成

D を \mathbb{Z}_k 上の長さ n の符号, すなわち \mathbb{Z}_k の n 個の直積 $(\mathbb{Z}_k)^n$ のなす加法群の部分群とする. この節では, D を用いて前節で導入した既約 M^0 -加群 $M^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}_k$ を組み合わせることにより, M_D を構成する.

$\xi = (i_1, \dots, i_n), \eta = (j_1, \dots, j_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して,

$$(\xi|\eta) = \sum_{s=1}^n i_s j_s \in \mathbb{Z}_k \quad (3.1)$$

として標準的に $(\mathbb{Z}_k)^n$ 上の内積を定義する.

$\xi = (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して, N° の n 個の直交和 $(N^\circ)^{\oplus n}$ における $N^{\oplus n}$ のコセット N_ξ を, (2.6) 式の N^j を用いて

$$N_\xi = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_s \in N^{i_s}, 1 \leq s \leq n\} \subset (N^\circ)^{\oplus n} \quad (3.2)$$

と定める. さらに, ξ が D 全体をわたるときの N_ξ の和集合を Γ_D とおく.

$$\Gamma_D = \bigcup_{\xi \in D} N_\xi. \quad (3.3)$$

$\xi, \eta \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して $N_\xi + N_\eta = N_{\xi+\eta}$ だから, D が加法群 $(\mathbb{Z}_k)^n$ の部分群であることから, Γ_D は加法群 $(N^\circ)^{\oplus n}$ の部分群になる.

N の双対格子 N° には, N における内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が自然に拡張できる. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, N° において有理数値の正定値内積である. この N° における内積から得られる N° の n 個の直交和 $(N^\circ)^{\oplus n}$ における内積を, 同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す. これも有理数値の正定値内積である. この内積に関して, $\alpha \in N_\xi, \beta \in N_\eta$ ならば

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in -\frac{2}{k}(\xi|\eta) + 2\mathbb{Z} \quad (3.4)$$

が成り立つことが, N_ξ の定義からわかる.

\mathbb{Z}_k -符号 D に関して, 次の 2 通りの場合を考える.

Case 1. すべての $\xi \in D$ について $(\xi|\xi) = 0$ である.

Case 2. k は偶数で, すべての $\xi, \eta \in D$ について $(\xi|\eta) \in \{0, k/2\}$ であり, $(\xi|\xi) = k/2$ となる $\xi \in D$ が存在する.

(3.4) 式により, 符号 D が Case 1 の条件を満たすことは, 格子 Γ_D が正定値偶格子であるための必要十分条件である. また k が偶数のとき, 符号 D が Case 2 の条件を満たすことは, 格子 Γ_D が正定値奇格子であるための必要十分条件である.

双対格子 N° の n 個の直交和 $(N^\circ)^{\oplus n}$ から定義される一般化された頂点代数 $V_{(N^\circ)^{\oplus n}}$ において, $V_{N^{\oplus n}} = (V_N)^{\otimes n}$ および (2.4) 式で定義された T の n 個のテンソル積 $T^{\otimes n}$ は部分頂点作用素代数になる.

$\xi = (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して, (3.2) 式で $N^{\oplus n}$ の $(N^\circ)^{\oplus n}$ におけるコセット N_ξ を定義したが, このコセットにより頂点作用素代数 $V_{N^{\oplus n}} = (V_N)^{\otimes n}$ の既約加群

$$V_{N_\xi} = V_{N^{i_1}} \otimes \cdots \otimes V_{N^{i_n}} \subset V_{(N^\circ)^{\oplus n}} \quad (3.5)$$

が得られる. $(V_N)^{\otimes n}$ の加群として, V_{Γ_D} はこれらの既約加群の直和になる.

$$V_{\Gamma_D} = \bigoplus_{\xi \in D} V_{N_\xi}. \quad (3.6)$$

$\xi = (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して,

$$M_\xi = \{v \in V_{N_\xi} \mid (\omega_{T^{\otimes n}})_{(1)}v = 0\} \quad (3.7)$$

として M_ξ を定義する. ここで, $\omega_{T^{\otimes n}}$ は $(V_N)^{\otimes n}$ の部分頂点作用素代数 $T^{\otimes n}$ の共形元を表す. ξ がゼロ符号語 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ のときは, (2.5) 式から $M_{\mathbf{0}}$ が M^0 の n 個のテンソル積に同型な $(V_N)^{\otimes n}$ の部分頂点作用素代数であることがわかる.

$$M_{\mathbf{0}} = (M^0)^{\otimes n}. \quad (3.8)$$

(2.7) 式により, M_ξ は $M^{(i_s)}$, $1 \leq s \leq n$ のテンソル積に同型な既約 M_0 -加群である.

$$M_\xi = M^{(i_1)} \otimes \cdots \otimes M^{(i_n)}. \quad (3.9)$$

M^j のトップレベルが 1 次元でそのウエイトが $j(k-j)/k$ であることから, $\xi = (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ について, M_ξ のトップレベルが 1 次元であること, またそのウエイトが

$$\sum_{1 \leq s \leq n} \frac{i_s(k-i_s)}{k} = \sum_{1 \leq s \leq n} i_s - \frac{(\xi|\xi)}{k} \quad (3.10)$$

であることがわかる.

格子 Γ_D から定義される一般化された頂点代数 V_{Γ_D} は, Γ_D が正定値偶格子ならば頂点作用素代数であり, Γ_D が正定値奇格子であれば頂点作用素超代数である. V_{Γ_D} における $T^{\otimes n}$ のコミュタントを M_D で表す. (3.5) 式と (3.6) 式から次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned} M_D &= \text{Com}_{V_{\Gamma_D}}(T^{\otimes n}) \\ &= \{v \in V_{\Gamma_D} \mid (\omega_{T^{\otimes n}})_{(1)}v = 0\} \\ &= \bigoplus_{\xi \in D} M_\xi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

次の定理は [12, 定理 3.3] で既知である.

定理 3.1 D を長さ n の \mathbb{Z}_k -符号とする .

(1) 符号 D が Case1 の条件を満たせば , M_D は有理的かつ C_2 -余有限な CFT 型の単純頂点作用素代数で , 中心電荷は $2(k-1)n/(k+2)$ である .

(2) k が偶数のとき , D が Case2 の条件を満たせば , $M_D = M_D^{\bar{0}} \oplus M_D^{\bar{1}}$ は単純頂点作用素超代数で , 偶部分 $M_D^{\bar{0}}$ と奇部分 $M_D^{\bar{1}}$ はそれぞれ

$$M_D^{\bar{0}} = \bigoplus_{\substack{\xi \in D \\ (\xi|\xi)=0}} M_\xi, \quad M_D^{\bar{1}} = \bigoplus_{\substack{\xi \in D \\ (\xi|\xi)=k/2}} M_\xi$$

で与えられる . 偶部分 $M_D^{\bar{0}}$ は有理的かつ C_2 -余有限な CFT 型の単純頂点作用素代数である . 奇部分 $M_D^{\bar{1}}$ のウエイトは $1/2 + \mathbb{Z}$ に属する .

符号 D は Case 1 または Case 2 の条件を満たすとす . このとき , 頂点作用素代数あるいは頂点作用素超代数 M_D の自己同型を考察する . 前節で述べたように , パラフェルミオン頂点作用素代数 M^0 の自己同型群は $\text{Aut } M^0 = \langle \theta \rangle$ で位数 2 であり , $M^j \circ \theta \cong M^{-j}$, $0 \leq j \leq k-1$ が成り立つ . 符号 D がゼロ符号 , すなわちゼロ符号語 $0 = (0, \dots, 0)$ だけからなる場合 , $M_D = M_0$ は M^0 の n 個のテンソル積 $(M^0)^{\otimes n}$ だから , n 個のテンソル成分の置換は頂点作用素代数 M_0 の自己同型である . ひとつのテンソル成分の M^0 に θ として作用し , 他の $n-1$ 個のテンソル成分には恒等写像として作用するものも M_0 の自己同型である . 実は , M_0 の自己同型はこれらを組み合わせただけのものに限ることがわかる . すなわち , M_0 の自己同型群は θ と n 次対称群 Sym_n の wreath product である .

$$\text{Aut } M_0 = \langle \theta \rangle \wr \text{Sym}_n.$$

2 つの長さ n の \mathbb{Z}_k -符号 D と D' について , (i) 成分を一斉に置換する , (ii) 第 s 成分に -1 をかける ($1 \leq s \leq n$) の 2 つの操作を繰り返すことで一方から他方に変形できるとき , 2 つの符号 D と D' は同値であるといい $D \cong D'$ と書く . 符号の同値と頂点作用素代数あるいは頂点作用素超代数の同型に関して , 次の補題が成り立つ .

補題 3.2 (1) 符号 D と D' が同値ならば , M_D と $M_{D'}$ は同型である .

(2) $f(M_0) = M_0$ を満たす同型 $f : M_D \rightarrow M_{D'}$ が存在するならば , 符号 D と D' は同値である .

4 M_D の例

$k=2$ のときの M_D の性質およびその表現論は , [10], [11] で詳しく研究されている . $k=3$ のときの M_D は , [8] で考察されている .

このほかにも, k と n が小さい場合の M_D がいくつか知られている. たとえば, $k = 5, n = 2, D = \{(00), (12), (24), (31), (43)\}$ のときの

$$M_D = M_{(00)} \oplus M_{(12)} \oplus M_{(24)} \oplus M_{(31)} \oplus M_{(43)}$$

は, [9] の記号で U_{5A} と表されるモンスター単純群の $5A$ 元と関係する頂点作用素代数である. また $k = 9, n = 1, D = \{(0), (3), (6)\}$ のときの

$$M_D = M^{(0)} \oplus M^{(3)} \oplus M^{(6)}$$

は, [9] の記号で U_{3C} と表されるモンスター単純群の $3C$ 元と関係する頂点作用素代数である.

次の例は, 今までに知られていない新しいものである. $k = 6, n = 1, D = \{(0), (3)\}$ のとき,

$$M_D = M^{(0)} \oplus M^{(3)} \cong L_{NS}(5/4, 0) \oplus L_{NS}(5/4, 3)$$

という同型が成り立つ. ここで $L_{NS}(5/4, 0)$ は, 中心電荷 $5/4$ の単純な $N = 1$ 超共形代数 (superconformal algebra, Neveu-Schwarz algebra) で, $L_{NS}(5/4, 3)$ はその最高ウエイト 3 の既約最高ウエイト加群である. 実際, v を $M^{(3)}$ のトップレベルの元で $v_{(2)}v = (5/6)1$ を満たすものとする. $M^{(3)}$ のトップレベルは 1 次元で, ウエイトは $3/2$ だから, v のウエイトは $3/2$ である. この v について, $v_{(n)}v \in M^{(0)}$ が任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つ. 特に, $M^{(0)}$ のウエイト 1 の部分空間が 0 であることより, $v_{(1)}v = 0$ が得られる. さらに, 簡単な計算で $v_{(0)}v = 2\omega$ がわかる. ただし, ω は $M^{(0)}$ の共形元である. 以上により,

$$L_n = \omega_{(n+1)}, \quad G_{n-1/2} = v_{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

とおくと, $L_n, G_{n-1/2}, n \in \mathbb{Z}$ が Neveu-Schwarz algebra の生成元の関係式を満たすことがわかる. 格子 Γ_D から定義される頂点作用素超代数 V_{Γ_D} の中で考えているので, ω と v で生成される M_D の部分代数は単純な Neveu-Schwarz algebra $L_{NS}(5/4, 0)$ に同型である.

M^0 の strong generator $\{W^2, W^3, W^4, W^5\}$ に含まれるウエイト 3 の Virasoro primary W^3 は, ω と v で生成される $L_{NS}(5/4, 0)$ の最高ウエイトベクトルで, V_{Γ_D} において W^3 で生成される既約 $L_{NS}(5/4, 0)$ -加群は $L_{NS}(5/4, 3)$ に同型である.

k を偶数とすると, $n = 1, D = \{(0), (k/2)\}$ のときの $M_D = M^{(0)} \oplus M^{(k/2)}$ は, $k \equiv 0 \pmod{4}$ ならば頂点作用素代数で, $k \equiv 2 \pmod{4}$ ならば頂点作用素超代数である. たとえば $k = 2$ のとき,

$$M_D = M^{(0)} \oplus M^{(1)} \cong L(1/2, 0) \oplus L(1/2, 1/2)$$

となり, $k = 4$ のときは

$$M_D = M^{(0)} \oplus M^{(2)} \cong V_{\mathbb{Z}\beta}^+ \oplus V_{\mathbb{Z}\beta}^- = V_{\mathbb{Z}\beta}$$

(ただし $\langle \beta, \beta \rangle = 6$) となる .

また一般に $k = r^2$ が平方数ならば , $n = 1, D = \{(0), (r), \dots, ((r-1)r)\}$ のときの

$$M_D = M^{(0)} \oplus M^{(r)} \oplus \dots \oplus M^{((r-1)r)}$$

は頂点作用素代数である .

5 符号 D

この節では , Case 1 あるいは Case 2 の条件を満たす長さ n の \mathbb{Z}_k -符号 , すなわち加法群 $(\mathbb{Z}_k)^n$ の部分群 D について考察する . D が Case 1 ならばその部分群も Case 1 であり , D が Case 2 ならばその部分群は Case 1 または Case 2 である . 一般に D の部分群は多数あるので , 条件を満たす D のなかで極大なものに注目する .

最初に用語の復習をする . D の元を符号語と呼ぶ . $(\cdot | \cdot)$ を (3.1) 式で定義された D 上の標準内積とする . すべての $\xi, \eta \in D$ について $(\xi | \eta) = 0$ が成り立つとき , D は自己直交 (self orthogonal) であるという . $\xi = (i_1, \dots, i_n) \in D$ に対して , 0 でない成分の個数を ξ のハミングウエイト (Hamming weight) といい , $\text{wt } \xi$ で表す . $\text{wt } \xi$ が偶数のとき , ξ は偶符号語であるという . D のすべての元が偶符号語のとき , D は偶符号であるという . $\text{wt } \xi$ が 4 の倍数のとき , ξ は 2 重偶符号語であるという . D のすべての元が 2 重偶符号語のとき , D は 2 重偶符号 (doubly even code) であるという . ξ_1, \dots, ξ_m が符号 D の加法群としての生成系するとき , 第 i 行が ξ_i の $m \times n$ 行列を D の生成行列という . 具体的な符号は , その生成行列を用いて表す . 生成行列は , 符号 D に対して一通りではない .

符号 D が自己直交ならば , Case 1 の条件を満たすことは明らかである . k が奇数のときは , $(\xi + \eta | \xi + \eta) = (\xi | \xi) + 2(\xi | \eta) + (\eta | \eta)$ において $(\xi | \xi) = (\eta | \eta) = (\xi + \eta | \xi + \eta) = 0$ ならば $(\xi | \eta) = 0$ が得られるので , Case 1 の条件は D が自己直交であることと同値である .

例 $k = 3, n = 4$ のとき , Case 1 の符号のなかで極大なものは , 符号の同値を除いて $[4, 2, 3]$ ternary tetra code だけである . その生成行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

である .

自己直交という条件は符号を扱う上で標準的な条件なので , 以下では k が偶数と仮定する .

$k = 2$ のときは D は 2 元体 $GF(2)$ 上の通常のバイナリ 符号で , 任意の D は Case 1 と Case 2 のいずれか一方の条件を満たす . $k = 2$ のときの Case 1 の条件は , D が偶符号であることと同値である .

k が 2 以上の一般の偶数の場合を扱うために、少し準備をする．最初に、Case 1 と Case 2 の両方を含む \mathbb{Z}_k -符号 D に関する次の条件を考える．

(*) すべての $\xi, \eta \in D$ について $(\xi|\eta) \in \{0, k/2\}$ である．

(3.4) 式から、次の補題が得られる．

補題 5.1 格子 Γ_D が整格子 (integral lattice) であるための必要十分条件は、符号 D が条件 (*) を満たすことである．

符号 D が条件 (*) を満たすならば、写像

$$\rho: D \rightarrow \{0, k/2\}; \quad \xi \mapsto (\xi|\xi) \quad (5.1)$$

は加法群の準同型であることに注意する．

$\xi = (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ の各成分 i_s を $i_s + (k/2)\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{k/2}$ で置き換えることにより得られる $(\mathbb{Z}_{k/2})^n$ の元を $\bar{\xi}$ で表し、写像 $\varphi: (\mathbb{Z}_k)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_{k/2})^n$ を $\varphi(\xi) = \bar{\xi}$ により定義する．

$$\varphi: (\mathbb{Z}_k)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_{k/2})^n; \quad \xi \mapsto \bar{\xi}. \quad (5.2)$$

φ による D の像を $\bar{D} = \varphi(D)$ とおく． D が条件 (*) を満たすための必要十分条件は、 \bar{D} が自己直交 $\mathbb{Z}_{k/2}$ -符号であることである．

φ は加法群の準同型だからその核 $\text{Ker } \varphi$ は長さ n の \mathbb{Z}_k -符号であり、その元の成分は 0 と $k/2$ だけである．特に、 $\text{Ker } \varphi$ は $k \equiv 0 \pmod{4}$ ならば Case 1 であり、 $k \equiv 2 \pmod{4}$ ならば Case 2 である．

$\lambda \in \text{Ker } \varphi$ ならば、任意の $\eta \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して $(\lambda|\eta) \in \{0, k/2\}$ だから、 D が条件 (*) を満たすならば $D + \text{Ker } \varphi$ も条件 (*) を満たす．よって、条件 (*) を満たす符号のうち極大なものは $\text{Ker } \varphi$ を含む．

$\xi = (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ の各成分 i_s を $i_s + 2\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_2$ で置き換えることにより得られる $(\mathbb{Z}_2)^n$ の元を $\tilde{\xi}$ で表し、写像 $(\mathbb{Z}_k)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n; \xi \mapsto \tilde{\xi}$ による D の像を \tilde{D} で表す．

$k \geq 4$ が偶数のとき、 $k \equiv 2 \pmod{4}$ と $k \equiv 0 \pmod{4}$ の 2 つの場合に分かれる．

補題 5.2 $k \equiv 2 \pmod{4}$, $k \geq 6$ とする．

(1) D が Case 1 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は、 \bar{D} が $\mathbb{Z}_{k/2}$ -符号として極大自己直交符号であり \tilde{D} が \mathbb{Z}_2 -符号として極大偶符号であることである．

(2) D が Case 2 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は、極大自己直交 $\mathbb{Z}_{k/2}$ -符号 C が存在して $D = \varphi^{-1}(C)$ となることである．

この補題により、 $k \equiv 2 \pmod{4}$ で $k \geq 6$ のときは $\mathbb{Z}_{k/2}$ -符号と \mathbb{Z}_2 -符号を調べることに帰着する．

例 $k = 6, n = 4$ のとき, 次の生成行列で定まる符号は, それぞれ Case 1 および Case 2 の符号のなかで極大であり, どちらも符号の同値を除いて一意的である.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$k \equiv 0 \pmod{4}$ のときは, $k = 4$ の場合と $k \geq 8$ の場合に分ける. $k = 4$ のときは $\bar{D} = \tilde{D}$ であることに注意する.

補題 5.3 $k = 4$ とする.

(1) D が Case 1 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は, 極大 2 重偶 \mathbb{Z}_2 -符号 C が存在して $D = \varphi^{-1}(C)$ となることである.

(2) D が Case 2 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は, 極大自己直交 \mathbb{Z}_2 -符号で 2 重偶符号ではない C が存在して $D = \varphi^{-1}(C)$ となることである.

この補題により, $k = 4$ のときは \mathbb{Z}_2 -符号を調べることに帰着する.

例 $k = 4, n = 4$ のとき, 次の生成行列で定まる符号は, それぞれ Case 1 および Case 2 の符号のなかで極大であり, どちらも符号の同値を除いて一意的である.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

例 $k = 4, n = 8$ のとき, 次の生成行列で定まる符号は, Case 1 の符号のなかで極大であり, 符号の同値を除いて一意的である.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

この生成行列の最初の 4 行は, \mathbb{Z}_2 -符号の元と見做すと $[8, 4, 4]$ -ハミング符号の生成行列になっている. $[8, 4, 4]$ -ハミング符号は長さ 8 の自己双対なバイナリ 符号と

して符号の同値を除いて一意的である．このことから，上記の \mathbb{Z}_4 -符号の一意性がわかる．

$k \equiv 0 \pmod{4}$ を満たす一般の k の場合を扱うためにユークリッドウエイト (Euclidean weight) wt_E を導入する． $x \in \mathbb{Z}_{k/2}$ を $0 \leq x \leq k/2 - 1$ の範囲の整数と見做して， $x \in \mathbb{Z}_{k/2}$ に対して

$$\text{wt}_E(x) = \min\{x^2, (k/2 - x)^2\} \in \mathbb{Z}$$

により整数 $\text{wt}_E(x)$ を定義する． $\lambda = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}_{k/2})^n$ に対して，

$$\text{wt}_E(\lambda) = \sum_{s=1}^n \text{wt}_E(x_s) \in \mathbb{Z}$$

を λ のユークリッドウエイトという．

$\mathbb{Z}_{k/2}$ -符号 C に関する次の条件を考える．

(**) すべての $\lambda \in C$ について $\text{wt}_E(\lambda) \equiv 0 \pmod{k}$ である．

補題 5.4 $k \equiv 0 \pmod{4}$, $k \geq 8$ とする．

(1) D が Case 1 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は，条件 (**) を満たす $\mathbb{Z}_{k/2}$ -符号のなかで極大な符号 C が存在して $D = \varphi^{-1}(C)$ となることである．

(2) D が Case 2 の符号のなかで極大であるための必要十分条件は，自己直交 $\mathbb{Z}_{k/2}$ -符号 C で条件 (**) を満たさない $\mathbb{Z}_{k/2}$ -符号のなかで極大なものが存在して $D = \varphi^{-1}(C)$ となることである．

条件 (**) は \pmod{k} に係わるものなので，上記の補題は \mathbb{Z}_k -符号 D に関する条件を k がより小さいときの符号に関するものに帰着するわけではない．

k を $k = 2^r m$ のように 2 のべき 2^r と奇数 m の積として表す．ユークリッドウエイトを定義したときのように， $\xi = (i_1, \dots, i_s) \in (\mathbb{Z}_k)$ の各成分 $i_s \in \mathbb{Z}_k$ を $0 \leq i_s \leq k-1$ の範囲の整数と見做して， $\xi, \eta \in D$ に対して $(\xi|\eta)$ の値を整数として扱う．このようにすると， $(\xi|\eta) \equiv 0 \pmod{k}$ は， $(\xi|\eta) \equiv 0 \pmod{2^r}$ かつ $(\xi|\eta) \equiv 0 \pmod{m}$ と同値である．したがって， \mathbb{Z}_k -符号 D が Case 1 の条件を満たすことは， D の元の各成分を $\pmod{2^r}$ で考えることにより得られる \mathbb{Z}_{2^r} -符号と \pmod{m} で考えることにより得られる \mathbb{Z}_m -符号の両方が Case 1 の条件を満たすことと同値になる．このように， k を 2 のべきの部分と奇数の部分に分けて議論することも可能である．

参考文献

- [1] T. Arakawa, C.H. Lam and H. Yamada, Zhu's algebra, C_2 -algebra and C_2 -cofiniteness of parafermion vertex operator algebras, *Adv. Math.* **264** (2014), 261–295.

- [2] T. Arakawa, C.H. Lam and H. Yamada, in preparation.
- [3] C. Dong, C.H. Lam, Q. Wang and H. Yamada, The structure of parafermion vertex operator algebras, *J. Algebra* **323** (2010), 371–381.
- [4] C. Dong, C.H. Lam and H. Yamada, W -algebras related to parafermion algebras, *J. Algebra* **322** (2009), 2366–2403.
- [5] C. Dong and J. Lepowsky, *Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators*, Progress in Math., Vol. 112, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [6] C. Dong and Q. Wang, Quantum dimensions and fusion rules for parafermion vertex operator algebras, arXiv:1411.7429.
- [7] C. Jiang and Z. Lin, The commutant of $L_{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}(n, 0)$ in the vertex operator algebra $L_{\widehat{\mathfrak{sl}}_2}(1, 0)^{\otimes n}$, arXiv:1311.0608.
- [8] M. Kitazume, M. Miyamoto and H. Yamada, Ternary codes and vertex operator algebras, *J. Algebra* **223** (2000), 379–395.
- [9] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, McKay’s observation and vertex operator algebras generated by two conformal vectors of central charge $1/2$, *Internat. Math. Research Papers*, **2005:3** (2005), 117–181.
- [10] M. Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras, *J. Algebra* **181** (1996), 207–222.
- [11] M. Miyamoto, Representation theory of code vertex operator algebra, *J. Algebra* **201** (1998), 115–150.
- [12] 山田裕理, Vertex operator algebras associated with \mathbb{Z}_k -codes, *数理解析研究所講究録* **1926** (2014), 88–97.

対称群の一般バーンサイド環のユニット元

近畿大学・理工学部 小田文仁 (Fumihito Oda)*
Faculty of Science and Engineering, Kindai University
室蘭工業大学大学院・工学研究科 竹ヶ原裕元 (Yugen Takegahara)
Muroran Institute of Technology
北星学園大学・経済学部 吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)†
Graduate School of Economics, Hokusei Gakuen University

1 はじめに

G は有限群, $C(G)$ は G のすべての部分群の族の G 共役類の集合とする. 部分群 $H \leq G$ に対し, G/H は H の G におけるすべての左剰余類 gH , ただし, $g \in G$, の集合とする. G の Burnside 環 $\Omega(G)$ は, G/H , ただし, $(H) \in C(G)$, に対応するシンボル $[G/H]$ の形式的 \mathbb{Z} 線形結合全体に

$$[G/H] \cdot [G/U] = \sum_{HgU \in [H \setminus G/U]} [G/(H \cap {}^gU)]$$

ただし, $(H), (U) \in C(G)$, ${}^gU = gUg^{-1}$, $[G/(H \cap {}^gU)] = [G/K]$, $(K) = (H \cap {}^gU) \in C(G)$, で与えられる積が定義された可換環である (たとえば, [CR81, §80], [Yo90b, §2.1] を参照). $\Omega(G)$ の単位元は $[G/G]$ である. 簡略のため $1 = [G/G]$ と書く. $\Omega(G)$ の単元群は可換 2 群 (cf. §2) であり, $\Omega(G)$ の単元の解析は非常に興味深い問題である.

S_n は n 文字の集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の対称群, \mathfrak{Y}_n は S_n の Young 部分群全体の族とする. シンボル $[S_n/Y]$, ただし, $Y \in \mathfrak{Y}_n$, の \mathbb{Z} 線形結合全体を $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ ([BBTH92] 参照) と書く. \mathfrak{Y}_n は共役と共通部分をとる操作で閉じているので, $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ は $\Omega(S_n)$ の部分環である (簡略のため, その部分環は対称群の Young 部分群に関する partial Burnside 環と呼ばれている). S_n の指標環を $R(S_n)$ と書く. このとき環同型 $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n) \cong R(S_n)$ が成立すること (たとえば, [Yo90b, Proposition 7.2] を参照), また, $R(S_n)$ の単元群が $\pm 1_{S_n}, \pm \nu_n$, ただし, 1_{S_n} は S_n の自明な指標, ν_n は交代指標である (たとえば, [Ya91] を参照), で構成されることがよく知られている. 特に, $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元群は, Klien の 4 群と同型である.

最近, [IO15] で Idei と Oda は, \mathfrak{Y}_n の包含関係 \leq に関するポセット (\mathfrak{Y}_n, \leq) の Möbius 関数 $\mu_{\mathfrak{Y}_n}$ を用いて $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の非自明な単元の公式を与えた. そのような単元は, また, $\Omega(S_n)$ の単元でもあり, $\Omega(S_n)$ の単元の何らかの特徴付けを与えているようである. しかしながら, 一般に, $\Omega(S_n)$ の単元はもっとたくさん存在する ([BP07]). 本稿の目的は, $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の非自明な単元の tom Dieck 準同型 (詳細は §2 を参照) を用いた特徴付けを与えた論文 [OTY] の要旨を報告することである. 結果的に, 我々は, その論文で $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元群が tom Dieck 準同型の像に含まれることを証明することに成功した. ν_n は, S_n 集合 S_n/Y , ただし, $Y \in \mathfrak{Y}_n$, が与える置換指標の \mathbb{Z} 線形結合として具体的に表される (cf. Theorem 4.4). それらの事実を証明するために, 任意の左 G 集合が与える置換指標の tom Dieck 準同型による像が, G ポセットの被約 Lefschetz 不変量であること, それは, 本質的に [Th87] で与えられた, がわかる.

2 tom Dieck 準同型

部分群 $H \leq G$ と有限左 G 集合 X に対し,

$$\text{inv}_H(X) = \{x \in X \mid hx = x \text{ for all } h \in H\}$$

とおく. [Di79, Proposition 1.2.2] により,

$$[G/U] \mapsto (\#\text{inv}_H(G/U))_{(H) \in C(G)}$$

* supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400003.

† supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400001.

で与えられる写像 $\varphi : \Omega(G) \rightarrow \tilde{\Omega}(G) := \prod_{(H) \in C(G)} \mathbb{Z}$, ただし, $(U) \in C(G)$, は単射環準同型であり, Burnside 準同型, または, マーク準同型と呼ばれている. 明らかに $\tilde{\Omega}(G)$ の単元群は $\prod_{(H) \in C(G)} \langle -1 \rangle$ であり, したがって, $\Omega(G)$ の単元群は基本可換 2 群である.

$R_{\mathbb{R}}(G)$ は G の実表現環, $\Omega(G)^\times$ は $\Omega(G)$ の単元群とする. 任意の元 $x \in \Omega(G)$ は, $\varphi(x) = (x_H)_{(H) \in C(G)}$ であるとき, $x = \varphi^{-1}((x_H)_{(H) \in C(G)})$ と書く. [Di79, Proposition 5.5.9] により, 任意の左 $\mathbb{R}G$ 加群 M に対し, 群準同型 $u = u_G : R_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^\times$ で

$$M \mapsto \varphi^{-1}(((-1)^{\dim M^H})_{(H) \in C(G)})$$

ただし, M^H は M の H 不変部分空間, をみたくものが存在する.

$H \leq G$ とする. $W_G(H) = N_G(H)/H$, ただし, $N_G(H)$ は H の G における正規化群, とおく. 有限生成左 $\mathbb{C}G$ 加群 M は, \mathbb{C} 指標 χ を与えるとする. 部分群 $H \leq G$ に対し, M^H は $\mathbb{C}W_G(H)$ 加群とみなすことが可能であり, 任意の $gH \in W_G(H)$ に対し

$$\bar{\chi}(gH) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(gh)$$

で定義される $W_G(H)$ の \mathbb{C} 指標 $\bar{\chi}$ を与える (たとえば, [ACNT13, Lemma 3.1] を参照). 特に, $\dim M^H$ は, \mathbb{C} 指標 χ の H への制限 $\chi|_H$ と H の自明な指標 1_H との H における内積 $\langle \chi|_H, 1_H \rangle_H$ に等しい.

[Yo90b, Corollary 4.3] より任意の $\chi \in \bar{R}_{\mathbb{R}}(G)$ に対し

$$\bar{u}(\chi) = \sum_{(U) \in C(G)} \frac{1}{|W_G(U)|} \left(\sum_{H \leq G} \mu(U, H) (-1)^{\langle \chi|_H, 1_H \rangle_H} \right) [G/U], \quad (2.1)$$

ただし, μ は G のすべての部分群の族 $S(G)$ の包含関係 \leq に関するポセット $(S(G), \leq)$ の Möbius 関数, を得る.

Example 1. 明らかに, $\bar{u}(1_G) = -1$ が成り立つ.

Example 2. A_n は $[n]$ 上の交代群とする. $1 - [S_n/A_n]$ は $\Omega(S_n)$ の単元であり, ν_n の tom Dieck 準同型による像である.

Remark 1. G が可解でないならば, [Ma82, Theorem 5.4] により $u : R_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^\times$ は全射ではない. 特に, $n \geq 4$ ならば $\bar{u} : \bar{R}_{\mathbb{R}}(S_n) \rightarrow \Omega(S_n)^\times$ は全射ではない: しかし, $\bar{u}_{S_2}, \bar{u}_{S_3}$ は全射である ([Ma82] を参照) ($2|\text{Im} \bar{u}_{S_4}| = |\Omega(S_4)^\times| = 2^6$ が成り立つことを注意する).

3 $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元

$R(G)$ は G の指標環とする. 左 G 集合 X が与える置換指標 π_X は, 任意の元 $g \in G$ に対し

$$\pi_X(g) = \#\{x \in X \mid gx = x\}$$

で定義される. 環準同型 $\text{char}_G : \Omega(G) \rightarrow R(G)$ を, 任意の左 G 集合に対し

$$[X] \mapsto \pi_X$$

で定める (cf. [Yo90a, §6]). [Yo90b, Proposition 7.2] により, 環準同型 $\text{char}_{S_n} : \Omega(S_n) \rightarrow R(S_n)$ は環同型写像

$$\overline{\text{char}}_{S_n} : \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n) \rightarrow R(S_n)$$

([JK81, 2.3] 参照) を誘導する. 従って, $\overline{\text{char}}_{S_n}(\alpha) = \nu_n$ を満たすただ一つの元 $\alpha \in \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ が存在する. $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元群のすべての元は, $\pm 1, \pm \alpha$ であり, また, $\Omega(S_n)$ の単元でもある.

部分群 $H \leq S_n$ に対し, Young 部分群 Y_H を, H を保存する S_n のすべての Young 部分群の共通部分として定める. n の分割 (n_1, n_2, \dots, n_r) に対応する Young 部分群 $Y \leq S_n$ は, 互いに非交和な n_i サイクル, ただし, $i = 1, 2, \dots, r$, の積 σ_Y で $Y = Y_{(\sigma_Y)}$ を満たすものを含む. 以下の補題 (cf. [Yo90b, §7.1]) を示す.

Lemma 3.1. *If $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H) \in C(S_n)}$, then $\alpha_H = \alpha_{Y_H}$, $(H) \in C(S_n)$ and $\alpha_Y = \nu_n(\sigma_Y)$, $Y \in \mathfrak{Y}_n$, where $\sigma_Y \in S_n$ with $Y = Y_{\langle \sigma_Y \rangle}$.*

[Yo90b, Corollary 4.3] と Lemma 3.1 を用いて α は

$$\alpha = \sum_{(Y) \in C(\mathfrak{Y}_n)} \frac{1}{|W_{S_n}(Y)|} \left(\sum_{H \in \mathfrak{Y}_n} \mu_{\mathfrak{Y}_n}(Y, H) \nu_n(\sigma_H) \right) [S_n/Y], \quad (3.1)$$

ただし, $\sigma_H \in S_n$, $Y = Y_{\langle \sigma_H \rangle}$, $C(\mathfrak{Y}_n)$ は \mathfrak{Y}_n の S_n 共役類, と表される. この公式は, [IO15, Corollary 5.2] で表されている.

α が, tom Dieck 準同型像に含まれることを示す. S_n 集合 $[n]$ が与える置換指標 $\pi_{[n]}$ は, 任意の $\sigma \in S_n$ に対し,

$$\sigma \mapsto \#\{k \in [n] \mid \sigma(k) = k\}$$

として定義される. 部分群 $H \leq S_n$ に対し, $\text{Orb}_H([n])$ を $[n]$ の H -軌道とする. Cauchy-Frobenius の補題 (たとえば, [Yo90b, Lemma 2.7] 参照) により, 任意の部分群 $H \leq S_n$ に対し, $\langle \pi_{[n]}|_H, 1_H \rangle_H = \#\text{Orb}_H([n])$ である. $\chi_n = \pi_{[n]} - 1_{S_n}$ とおく. このとき, χ_n は S_n の既約 \mathbb{C} 指標であることがわかる. 明らかに, $\chi_n \in \overline{R}_{\mathbb{R}}(G)$ が成り立つ. $\Omega(S_n)$ の単元 β を

$$\varphi(\beta) = ((-1)^{\#\text{Orb}_H([n])})_{(H) \in C(S_n)} = ((-1)^{\langle \pi_{[n]}|_H, 1_H \rangle_H})_{(H) \in C(S_n)} = -((-1)^{\langle \chi_{[n]}|_H, 1_H \rangle_H})_{(H) \in C(S_n)},$$

と定めると, β は $\pi_{[n]}$ の tom Dieck 準同型による像である. $\alpha = (-1)^n \beta$ (cf. Theorem 3.4) が, Lemma 3.1 と次の補題を組み合わせる事により得られる.

Lemma 3.2. *For each $H \leq S_n$, $\#\text{Orb}_H([n]) = \#\text{Orb}_Y([n])$. In particular, for each $Y \in \mathfrak{Y}_n$, $\#\text{Orb}_Y([n]) = \#\text{Orb}_{\sigma_Y}([n])$, where $\sigma_Y \in S_n$ with $Y = Y_{\langle \sigma_Y \rangle}$.*

Lemma 3.3. *For each $\sigma \in S_n$, $(-1)^{\#\text{Orb}_{\sigma}([n])} = (-1)^n \nu_n(\sigma)$.*

以下の定理が, $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元の tom Dieck 準同型による特徴付けである.

Theorem 3.4. *The unit group of $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ is included in the image by the tom Dieck homomorphism. In particular, $\alpha = (-1)^n \beta$.*

Proof. $-1 = \overline{u}(1_{S_n})$ が成り立つから, $\alpha = (-1)^n \beta$ が成り立つことを示せば十分である. $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H) \in C(S_n)}$ と $\varphi(\beta) = (\beta_H)_{(H) \in C(S_n)}$ が成り立つと仮定する. $\alpha_Y = (-1)^n \beta_Y$, $Y \in \mathfrak{Y}_n$, とすると Lemma 3.1 と Lemma 3.2 により任意の部分群 $H \leq S_n$ に対し $\alpha_H = (-1)^n \beta_H$ が成り立つから, $\alpha = (-1)^n \beta$ を得る. $Y \in \mathfrak{Y}_n$ とする. このとき, Lemma 3.1 より, $Y = Y_{\langle \sigma_Y \rangle}$ を満たす $\sigma_Y \in S_n$ に対し $\alpha_Y = \nu_n(\sigma_Y)$ が成り立つ. 従って Lemma 3.2 と Lemma 3.3 より

$$\alpha_Y = (-1)^{\text{Orb}_{\langle \sigma_Y \rangle}([n]) + n} = (-1)^{\text{Orb}_Y([n]) + n} = (-1)^n \beta_Y$$

が従う. □

4 The reduced Lefschetz invariant of a G -poset

Theorem 3.4 のよい応用がある. ν_n の置換指標 $\pi_{S_n/Y}$, ただし, $Y \in \mathfrak{Y}_n$, の \mathbb{Z} 線形結合としての表現は, 非明示的に等式 (3.1) で表されているが, 一方, 明示的に表す事は価値のあることである.

順序 \leq が定められた任意の有限左 G 集合 P は, \leq が G の作用で不変であるとき G ポセットと呼ばれる. P を G ポセット, $Sd_i[P]$ を基数 $i+1$ の P の元からなる鎖 $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_i$ 全体の集合とする. P の Lefschetz 不変量 Λ_P は

$$\Lambda_P = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i [Sd_i(P)] \in \Omega(G),$$

P の被約 Lefschetz 不変量 $\tilde{\Lambda}_P$ は $\tilde{\Lambda}_P = \Lambda_P - 1$ と定める (cf. [Bo00], [Th87]). 有限左 G 集合 X に対し, $\overline{P}(X)$ は包含関係に関する X のすべての部分集合の G ポセットとする. $P(X)$ は G ポセット $\overline{P}(X) - \{\emptyset, X\}$

とする．このとき，部分群 $K \leq G$ に対し， $\varphi(\tilde{\Lambda}_{P(X)})$ の (K) 成分は， $P(X)^K (= \text{inv}_K(P(X)))$ の被約 Euler-Poincaré 標数に等しい：

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i |Sd_i(P(X)^K)| - 1.$$

次に，本質的には [Th87, Proposition 5.1] で証明された以下の命題の組合せ論的な証明を与える．

Proposition 4.1. *Let X be a finite left G -set. The reduced Lefschetz invariant $\tilde{\Lambda}_{P(X)}$ of $P(X)$ is the image of π_X by the tom Dieck homomorphism.*

Proposition 4.1 の組合せ論的な証明のためには，以下の補題が必要である．

Lemma 4.2. *For each positive integer j , set*

$$c_j = \sum_{i=0}^j (-1)^i \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_i) \in A(i, j)} \binom{j}{n_1, n_2, \dots, n_i},$$

where $A(i, j) = \{(n_1, n_2, \dots, n_i) \mid \sum_k n_k = j \text{ and } n_1, n_2, \dots, n_i \in \mathbb{N}\}$ and

$$\binom{j}{n_1, n_2, \dots, n_i} = \frac{j!}{n_1! n_2! \cdots n_i!} \quad (\text{multinomial coefficients}).$$

Then $c_j = (-1)^j$ for any positive integers j .

β の明示的な表現の計算に戻る (cf. 等式 (4.1)).

Corollary 4.3. *The reduced Lefschetz invariant $\tilde{\Lambda}_{P([n])}$ of $P([n])$ coincides with β .*

与えられた部分群 $H \leq G$ に対し， H の自明な指標 1_H を G に誘導した \mathbb{C} 指標を 1_H^G と書く． 1_H^G は置換指標 $\pi_{G/H}$ と同値である．

$[n]$ の任意の置換のサイクル型 $\lambda = (1^{m_1}, \dots, n^{m_n})$ に対し， $S_1^{(m_1)} \times \cdots \times S_n^{(m_n)}$ ，ただし，各 $S_j^{(m_j)}$ は対称群 S_j の m_j 個の直積，と同型な S_n の Young 部分群を S_λ と書く． ν_n を $1_Y^{S_n}$ ，ただし， $Y \in \mathfrak{Y}_n$ ，の \mathbb{Z} 線形結合として詳細に表す準備が整った．この結果は，[JK81, Theorem 2.3.15] における ν_n の表現の簡易化である．

Theorem 4.4. *The alternating character ν_n of S_n is expressed explicitly in the form*

$$\nu_n = \sum_{\lambda=(1^{m_1}, \dots, n^{m_n})} (-1)^{n+m_1+\dots+m_n} \frac{(m_1+\dots+m_n)!}{m_1! \cdots m_n!} 1_{S_\lambda}^{S_n},$$

where the sum runs over all cycle types of permutations on n -letters.

Proof. Theorem 3.4 より $\beta = (-1)^n \alpha$ が示され $\nu_n = \overline{\text{char}_{S_n}(\alpha)}$ が成り立つから，定理の主張は等式

$$((-1)^n \alpha) = \beta = \sum_{\lambda=(1^{m_1}, \dots, n^{m_n})} (-1)^{n+m_1+\dots+m_n} \frac{(m_1+\dots+m_n)!}{m_1! \cdots m_n!} [S_n/S_\lambda] \quad (4.1)$$

と同値である． i を非負整数とする．このとき， $[Sd_i(P([n]))] = \sum_t [O_t]$ ，ただし， O_t は $Sd_i(P([n]))$ の S_n 軌道，となる． S_n 軌道 O_t の任意の代表 $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_i$ は，部分集合 $\{y_0, y_1, \dots, y_i, y_{i+1}\} \subset P([n])$ で， $k = 0, 1, \dots, i$ に対し $x_k = \dot{\cup}_{j=0}^k y_j$ と $[n] = \dot{\cup}_{j=0}^{i+1} y_j$ を満たすもの，— それは， $\ell = 1, \dots, n$ に対し， $m_\ell = \#\{k \mid y_k = \ell\}$ を満たすサイクル型 $(1^{m_1}, \dots, n^{m_n})$ に対応する — を定める．逆に， $\lambda = (1^{m_1}, \dots, n^{m_n})$ が， $\sum_\ell m_\ell = i+2 \geq 2$ を満たす $[n]$ の置換のサイクル型であるならば， $Sd_i(P([n]))$ の

$$\frac{(m_1+\dots+m_n)!}{m_1! \cdots m_n!}$$

個の S_n 軌道，それは， S_n/S_λ と同型な S_n 集合である，を構成することができる．ゆえに，等式 (4.1) は Corollary 4.3 より従う． \square

Remark 2. Frobenius の相互律 (たとえば, [CR81, (10.9)] 参照) により, 任意の部分群 $H \leq G$ に対し, $\langle 1_H^G, 1_G \rangle_G = \langle 1_H, 1_H \rangle_H = 1$ を得る. Theorem 4.4 から, 等式

$$\sum_{\lambda=(1^{m_1}, \dots, n^{m_n})} (-1)^{m_1+\dots+m_n} \frac{(m_1+\dots+m_n)!}{m_1! \cdots m_n!} = (-1)^n \langle \nu_n, 1_{S_n} \rangle_{S_n} = 0$$

が従う.

Example 3. 等式 (4.1) により, $G = S_n$ かつ $\chi = \pi_{[n]}$ のとき, 等式 (2.1) の $[S_n/U]$ の係数と等式 (3.1) における $[S_n/Y]$ の係数は完全に決定される. $n = 3$ のときは,

$$\alpha = [S_3/S_{(1^3)}] - 2[S_3/S_{(1^1, 2^1)}] + [S_3/S_{(3^1)}].$$

([JK81, pp. 41–42 and Theorem 2.3.15] も参照). $n = 4$ のときは,

$$\alpha = [S_4/S_{(1^4)}] - 3[S_4/S_{(1^2, 2^1)}] + [S_4/S_{(2^2)}] + 2[S_4/S_{(1^1, 3^1)}] - [S_4/S_{(4^1)}]$$

が成り立つ.

5 Concluding remarks

e が, $2e \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ を満たす $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ のべき等元であるならば, $1 - 2e$ と $-1 + 2e$ は $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元である. α は $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ の単元だから $(1 - \alpha)/2$ は $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ のべき等元である. しかし, $(1_{S_n} - \nu_n)/2 \notin R(S_n)$ だから, $(1 - \alpha)/2 \notin \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ である. したがって, 以下の命題を得る.

Proposition 5.1. *The idempotents of $\Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ are only $0, 1$.*

Proposition 5.1 の S_n 集合を用いた *Proof* はどうなるだろうか? もちろん, 等式 (4.1) において, $[S_n/S_{(1^n)}]$ の係数はいつでも $(-1)^n$ だから, $(1 - \alpha)/2 \notin \Omega(S_n, \mathfrak{Y}_n)$ である. この事実は, Theorem 3.4 の結論でもある. なぜなら, それは [Ma82, (5.4.1)] — e が非自明なべき等元, すなわち, $e \neq 0, 1$ である $\Omega(S_n)$ のべき等元, ならば, 単元 $1 - 2e$ は tom Dieck 準同型による像には含まれない — から従うからである.

以下の補題は, [Yo90a, Lemma 2.1] (また, [Di79, Proposition 1.3.5] 参照) であり, [Yo90a] において tom Dieck 準同型の存在性の証明に用いられた.

Lemma 5.2. *An element $(x_H)_{(H) \in C(G)}$ of $\tilde{\Omega}(G)$ is included in the image $\text{Im} \varphi$ by the Burnside homomorphism if and only if*

$$\sum_{gU \in W_G(U)} x_{\langle g \rangle U} \equiv 0 \pmod{|W_G(U)|}$$

for all $(U) \in C(G)$.

$(1 - \alpha)/2 \notin \Omega(S_n)$ の直接的な証明を与えてこの報告を終える.

Proof of Proposition 5.1 $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H) \in C(G)}$ とする. Lemma 3.3 および Theorem 3.4 (あるいは, α の定義) より

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{1 - \alpha_{\langle \sigma \rangle}}{2} = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1 - \nu_n(\sigma)}{2} = |A_n| \not\equiv 0 \pmod{|S_n|},$$

ここで, σ が $\tau \in S_n$ と共役で $(\langle \tau \rangle) \in C(G)$ を満たすならば, $\alpha_{\langle \sigma \rangle} = \alpha_{\langle \tau \rangle}$ である, が成り立つ. これと, Lemma 5.2 は, $((1 - \alpha_H)/2)_{(H) \in C(S_n)} \notin \text{Im} \varphi$ を示す. ゆえに, $(1 - \alpha)/2 \notin \Omega(S_n)$ を得る. \square

参考文献

- [ACNT13] Asai, T.; Chigira, N.; Niwasaki, T.; Takegahara, Y.: *On a theorem of P. Hall*, J. Group Theory **16** (2013), 69–80.
 [BBTH92] Bergeron, F.; Bergeron, N.; Howlett, R.B.; Taylor, D.E.: *A Decomposition of the Descent Algebra of a Finite Coxeter Group*, J. Algebraic Combinatorics **1** (1992) 23–44.

- [BP07] Boltje, R.; Pfeiffer, G.: *An algorithm for the unit group of the Burnside ring of a finite group* In: Groups St. Andrews 2005. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press (2007).
- [Bo00] Bouc, S.: Burnside rings, Handbook of algebra, **2**, 739–804, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [CR81] Curtis, C.W.; Reiner, I.: Methods of Representation Theory, **I**, **II**, Wiley- Interscience, New York, 1981, 1987.
- [Di79] tom Dieck, T.: Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, **766**, Springer, Berlin, 1979.
- [IO15] Idei, H.; Oda, F.: *The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group*, J. Algebra **429** (2015), 318–323.
- [JK81] James, G.D.; Kerber, A.: The Representation Theory of the Symmetric Group, Encyclopedia of mathematics and its applications, **16**, Addison–Wesley, Reading, MA, 1981.
- [Ma82] Matsuda, T.: *On the unit groups of Burnside rings*, Japan. J. Math. (N.S.) **8** (1982), 71–93.
- [OTY] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T.: *The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group*, submitted.
- [Th87] Thévenaz, J.: *Permutation representations arising from simplicial complexes*, J. Combin. Theory Ser. A **46** (1987), 121–155.
- [Ya91] Yamauchi, K.: *On the units in a character ring*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 477–479.
- [Yo90a] Yoshida, T.: *On the unit groups of Burnside rings*. J. Math. Soc. Japan **42** (1990) no. 1, 31–64.
- [Yo90b] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.

On an algebro-geometric realization of the cohomology ring of conical symplectic resolutions

疋田辰之 (京都大学)

Abstract

A 型 Springer fiber のコホモロジー環の記述に関する DeConcini-Procesi, Tanisaki の結果を conical symplectic resolution のコホモロジー環の記述に一般化する予想について述べる. 予想の定式化には Braden-Licata-Proudfoot-Webster により提唱された symplectic duality と呼ばれる双対性を用いる.

1 Introduction

1.1 Springer theory for type A

Jordan 標準形の理論により, $n \times n$ 冪零行列の共役類は n の分割と 1 対 1 に対応している. 一方で n の分割は n 次対称群 \mathfrak{S}_n の \mathbb{C} 上の既約表現と 1 対 1 に対応していることはよく知られている. これらを合わせると $n \times n$ 冪零行列の共役類と \mathfrak{S}_n の対称群の既約表現が 1 対 1 に対応していることになるが, この対応は冪零元に付随する Springer fiber と呼ばれる代数多様体の最高次のコホモロジーを考えることにより, n の分割を経由することなく与えることができる. これは Springer 対応の特別な場合である.

少し記号を準備する. ここでは簡単のため G を SL_n とする. G は \mathbb{C} 上の代数群とみなす. \mathfrak{g} を G の Lie 代数, $B \subset G$ を上三角行列全体からなる Borel 部分群, \mathfrak{b} をその Lie 代数とする. $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ を冪零行列全体からなる閉部分代数多様体 (冪零錐) とする. $e \in \mathcal{N}$ に対して, e に付随する Springer fiber \mathcal{B}_e を

$$\mathcal{B}_e = \{gB \in G/B \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}e \in \mathfrak{b}\}$$

で定義する. これは旗多様体 G/B の閉部分代数多様体であり, 容易にわかるように \mathcal{B}_e は自然な同型を除いて e の共役類のみに依存する.

このとき $G = \mathrm{SL}_n$ に対する Springer 対応は次で与えられる.

Theorem 1 (Springer). $H^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ には自然に \mathfrak{S}_n が作用し, e の Jordan block の type が $\lambda \vdash n$ のとき \mathfrak{S}_n の表現として $H^{2 \dim(\mathcal{B}_e)}(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq L_\lambda$ となる. ここで L_λ は λ に対応する \mathfrak{S}_n の既約表現である.

G が一般の半単純な \mathbb{C} 上の代数群の場合にも同様に Springer fiber は定義でき, そのコホモロジーには Weyl 群 W が作用する. W の既約表現の分類を得るためには別の有限群の作用でコホモロジーを分解する必要がある. 詳細は [8] などの教科書を参照. W 作用の構成については後で述べる.

Example 2. $\lambda = (n)$ のとき, e は regular で $\mathcal{B}_e = \mathrm{pt}$ となり, $H^0(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{triv} = L_{(n)}$.

Example 3. $\lambda = (1^n)$ のとき, $e = 0$ で $\mathcal{B}_e = G/B$ は旗多様体全体になる. 旗多様体のコホモロジー環はよく知られているように余不変式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n})$ と次数付き環として同型であり, 余不変式環には \mathfrak{S}_n が自然に作用する. 最高次のコホモロジーは差積 $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ で張られる 1 次元部分空間であり, $H^{2 \dim(G/B)}(G/B, \mathbb{C}) \simeq \text{sgn} = L_{(1^n)}$ となる.

Example 4. $\lambda = (n-1, 1)$ のとき, e は subregular であり \mathcal{B}_e は $n-1$ 個の \mathbb{P}^1 の chain となる. このとき $H^2(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ は $n-1$ 次元で対称群の表現としては \mathfrak{g} の Cartan 部分代数 \mathfrak{t} と同型, また $H^0(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \text{triv}$ となる.

Remark 5. $H^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ 全体の \mathfrak{S}_n 表現としての構造を考えると, 例えば Kostka 数やその q 変形といった組み合わせ論的な対象が現れる. 単なるコホモロジーの代わりに同変 K 群を考えるとアファイン Hecke 環の既約表現の分類などに応用することもできる ([8] を参照). さらに Springer fiber や後述する Slodowy variety の接続層の導来圏には exotic t-structure と呼ばれる t-structure があり, その heart は正標数の Lie 環のモジュラー表現論などと関係していることが知られている (cf. [2], [19] など).

1.2 Cohomology ring of Springer fibers of type A

一般に Springer fiber の奇数次のコホモロジーは消えることが知られている (DeConcini-Lusztig-Procesi [9]). よってそのコホモロジー環は可換環になる. A 型 Springer fiber の場合は自然な準同型写像 $H^*(G/B, \mathbb{C}) \rightarrow H^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ が全射となり, この可換環は余不変式環の商として具体的に記述することができる.

$\lambda \vdash n$ に対応する冪零軌道を \mathcal{O}_λ で表し, $\overline{\mathcal{O}_\lambda}$ をその閉包とする. λ^T で λ の転置を表す.

Theorem 6 (DeConcini-Procesi [10], Tanisaki [24]). $e \in \mathcal{O}_\lambda$ とする. このとき次数付き代数として

$$H^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}].$$

ここで $\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}$ は \mathfrak{g} でのスキーム論的共通部分であり, その座標環の次数は $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathfrak{g}$, $s \cdot X = s^{-2}X$, から誘導される $\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}$ への \mathbb{C}^* により定まる.

$\mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}]$ には自然に \mathfrak{S}_n が作用し, この同型は $H^*(\mathcal{B}_\lambda, \mathbb{C})$ への \mathfrak{S}_n 作用と compatible になる. A 型の場合, 冪零軌道の閉包の定義方程式としては例えば [24] で予想され Weyman ([26]) によって証明されたものが知られている. それを用いれば定理の右辺をより具体的に表示することもできる.

Remark 7. A 型以外の Springer fiber の場合, 部分的な結果としては [7] がある. 一般には A 型の場合と類似の同型は成立しない.

本稿ではこの定理を Braden-Licata-Proudfoot-Webster ([3]) による symplectic duality と呼ばれる双対性との関係付けることでこれを一般化する. この双対性は conical symplectic resolution とそこへの良い \mathbb{C}^* 作用の組の間の双対性である. §2 では conical symplectic resolution について説明する. §3 では symplectic duality と上の定理との間の関係について述べる.

2 Conical symplectic resolutions

2.1 Definition

\mathfrak{M} を smooth algebraic symplectic variety, ω をその上の symplectic form とする.

Definition 8 (conical symplectic resolution). \mathfrak{M} とそこへの $\mathbb{S} = \mathbb{C}^*$ 作用の組 $(\mathfrak{M}, \mathbb{S})$ が conical symplectic resolution であるとは,

1. $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $s^*\omega = s^\ell\omega$, $s \in \mathbb{S}$,
2. $\pi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}_0 := \text{Spec } \mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ は projective birational,
3. $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_{<0} = 0$,

が成り立つことを言う. ここで $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_i$ は \mathbb{S} -weight が i の部分を表し, $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_{<0} = \bigoplus_{i<0} \mathbb{C}[\mathfrak{M}]_i$ である.

\mathfrak{M}_0 は normal であり, 唯一の \mathbb{S} 固定点 o を持つ. 基本的な conical symplectic resolution の性質としては例えば次のようなものがある.

Proposition 9. $(\mathfrak{M}, \mathbb{S})$ を conical symplectic resolution とする. このとき次が成り立つ.

1. $R\pi_*\mathcal{O}_{\mathfrak{M}} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}_0}$, つまり \mathfrak{M}_0 は有理特異点を持つ.
2. \mathfrak{M} と $\mathfrak{L} := \pi^{-1}(o)$ はホモトピー同値, 特に $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{L}, \mathbb{C})$.
3. $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}$ は Lagrangian subvariety.

例えば \mathfrak{M} が後述する Slodowy variety の場合を考えれば \mathfrak{L} は Springer fiber と一致し, そのコホモロジー環は Slodowy variety のコホモロジー環と同型になる.

Theorem 10 (Kaledin [14]). 1. 有限個の strata による stratification $\mathfrak{M}_0 = \sqcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$ であって各 \mathfrak{M}_α が smooth symplectic になるものが存在する.

2. π は semismall, つまり $\text{codim}_{\mathfrak{M}_0} \{x \in \mathfrak{M}_0 \mid \dim \pi^{-1}(x) \geq d\} \geq 2d$ が任意の $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して成立する.
3. $H^{\text{odd}}(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) = 0$

上に現れる \mathfrak{M}_α を \mathfrak{M}_0 の symplectic leaf と呼ぶ. 奇数次のコホモロジーが消えるという主張は先述の Springer fiber に対する DeConcini-Lusztig-Procesi の結果の conical symplectic resolution への一般化になっている.

2.2 Quantization of conical symplectic resolutions

ω により $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ は Poisson 代数の構造を持つ. \mathfrak{M}_0 の smooth locus 上にある symplectic form を用いると, smooth locus 上の Poisson 構造が定まるが, \mathfrak{M}_0 が normal であることからこれは \mathfrak{M}_0 全体に延びる.

Definition 11 (quantization). (\mathfrak{M}, ω) の量子化とは

1. $\mathcal{Q} : \mathfrak{M}$ 上の結合的な平坦 $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -代数の (Zariski 位相に関する) 層であって \hbar -進位相に関して完備なもの
2. $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$: 代数の同型

の組であって $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q}$ が可換になることから誘導される Poisson 代数の構造が同型 $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ と compatible になるようなものを言う.

$Q(\mathfrak{M}, \omega)$ で (\mathfrak{M}, ω) の量子化の同型類の集合を表すことにする. このとき次の結果が知られている.

Theorem 12 (Bezrukavnikov-Kaledin [1]). 自然な全単射 (noncommutative period map と呼ばれる)

$$\text{Per} : Q(\mathfrak{M}, \omega) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C})[[\hbar]]$$

が存在する.

$\text{Per}(\mathcal{Q}) = 0$ となる量子化を canonical な量子化と呼ぶ. \mathbb{S} 作用を用いると \mathbb{S} 同変な量子化の概念を定義することができる. ただし \hbar の \mathbb{S} -weight は ℓ とする. $Q(\mathfrak{M}, \omega)^{\mathbb{S}}$ で \mathbb{S} 同変な量子化の同型類の集合を表すことにする. このとき次が知られている.

Proposition 13 (Losev [18]). Per は次の全単射を誘導する

$$Q(\mathfrak{M}, \omega)^{\mathbb{S}} \xrightarrow{\sim} H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$$

$\mathcal{Q} \in Q(\mathfrak{M}, \omega)^{\mathbb{S}}$ とする. $\mathcal{D} := \mathcal{Q}[\hbar^{-1/\ell}]$ とおき, $\mathcal{D}(m) \subset \mathcal{D}$ を $\mathcal{D}(0) := \mathcal{Q}[\hbar^{1/\ell}]$, $\mathcal{D}(m) := \hbar^{-m/\ell} \mathcal{D}(0)$ により定める. $A := \Gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{D})^{\mathbb{S}}$ とするとこれは filtration $A(0) \subset A(1) \subset \dots \subset A(m) := \Gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{D}(m))^{\mathbb{S}}$ を持ち, $\text{gr } A$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ と次数付き Poisson 代数として同型になる.

2.3 Springer resolutions

代表的な conical symplectic resolution の例としては例えば Springer resolution がある. G を \mathbb{C} 上の半単純代数群, B をその Borel 部分群, U を B の冪単根基, $T \subset B$ を Cartan 部分群, $\mathcal{N}_G \subset \mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$ を冪零錐とする.

$$\tilde{\mathcal{N}}_G := \{(gB, X) \in G/B \times \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(g)^{-1}X \in \text{Lie}(U)\}$$

を Springer resolution と呼ぶ. \mathfrak{g} 上の G 不変で非退化な内積を固定し, \mathfrak{g} と \mathfrak{g}^* を同一視すると $\tilde{\mathcal{N}}_G$ は $T^*(G/B)$ と同型になり, 従って smooth かつ symplectic form を持つ. さらに第 2 成分への射影 $\pi : \tilde{\mathcal{N}}_G \rightarrow \mathcal{N}_G$ は projective かつ birational である. $\tilde{\mathcal{N}}_G$ への \mathbb{S} 作用は $s \cdot (gB, X) = (gB, s^{-2}X)$ により与える.

Proposition 14. 1. $\tilde{\mathcal{N}}_G$ は conical symplectic resolution で, その affinization は \mathcal{N}_G .

2. \mathcal{N}_G の symplectic leaf は G の adjoint 作用に関する軌道で与えられる.

3. $\lambda \in H^2(\tilde{\mathcal{N}}_G, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{t}^*$ に対応する $\mathbb{C}[\mathcal{N}_G]$ の量子化は $U(\mathfrak{g})/(\text{Ker } \chi_\lambda)$. ここで $U(\mathfrak{g})$ は \mathfrak{g} の普遍包絡環であり, $Z(\mathfrak{g})$ をその中心とすると $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ は highest weight $\lambda - \rho$ の Verma 加群の中心指標である.

2.4 Slodowy varieties

Springer resolution を冪零軌道の slice に制限することで別の conical symplectic resolution が得られる. $e \in \mathcal{N}_G$ を冪零元, (e, h, f) を e を含む \mathfrak{sl}_2 -triple とする. $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)$ を \mathfrak{g} 中での f の centralizer とする. このとき $S_e := (e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)) \cap \mathcal{N}_G$ を Slodowy slice と呼び, そこへの Springer resolution の制限を $\pi : \tilde{S}_e \rightarrow S_e$ と書く. \tilde{S}_e を Slodowy variety と呼ぶ. \tilde{S}_e への \mathbb{S} 作用は $s \cdot (gB, X) = (s^h gB, s^{-2} \text{Ad}(s^h)X)$ により定める. $e \in S_e$ は S_e の唯一の \mathbb{S} 固定点になる.

Proposition 15. 1. \tilde{S}_e は conical symplectic resolution で, その affinization は S_e .

2. S_e の symplectic leaf は G の adjoint 軌道と $e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)$ の共通部分.

3. $\lambda \in H^2(\tilde{S}_e, \mathbb{C})$ が $H^2(\tilde{\mathcal{N}}_G, \mathbb{C})$ から来ているとき, 対応する $\mathbb{C}[S_e]$ の量子化は有限 W -代数の central quotient.

Remark 16. 一部の例外を除いて (特に G が simply-laced ならいつでも) $H^2(\tilde{S}_e, \mathbb{C}) \simeq H^2(\tilde{\mathcal{N}}_G, \mathbb{C})$ (cf. [5], [16])

2.5 Cotangent bundle of partial flag varieties

$B \subset P \subset G$ を放物型部分群とする. Springer resolution は $T^*(G/B)$ と同一視できたが, 一般に $T^*(G/P)$ もまた conical symplectic resolution となり, 例えば A 型の場合にはその affinization も具体的に与えられる. 簡単のためここでは $G = \mathrm{SL}_n$ とする. P を放物型部分群, L_P をその Levi 部分群, U_P を P の冪単根基とする. L_P の block の大きさをみることで分割 $\lambda \vdash n$ が定まる. $\mathcal{N}_P := \mathrm{Ad}(G) \mathrm{Lie}(U_P) \subset \mathcal{N}_G$ とおく. このとき

$$T^*(G/P) \simeq \{(gP, X) \in G/P \times \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}X \in \mathrm{Lie}(U_P)\}$$

であり, 第 2 成分への射影は $\pi : T^*(G/P) \rightarrow \mathcal{N}_P$ という射を与える. $T^*(G/P)$ への \mathbb{S} 作用は Springer resolution の場合と同じく $s \cdot (gP, X) = (gP, s^{-2}X)$ で与える.

Proposition 17. 1. $\mathcal{N}_P = \bar{O}_{\lambda^T}$.

2. $T^*(G/P)$ は conical symplectic resolution で, その affinization は \mathcal{N}_P .

3. \mathcal{N}_P の symplectic leaf は G の adjoint 軌道.

Remark 18. A 型以外では一般に π は generically finite で, π が birational でも \mathcal{N}_P (これは Richardson orbit と呼ばれる冪零軌道の閉包になる) は normal とは限らない.

2.6 Other examples

他にも

- S3-variety : Slodowy variety の放物版 (特に \tilde{S}_e や $T^*(G/P)$ を含む)
- hypertoric variety : \mathbb{C}^{2n} のトーラスによる Hamiltonian reduction であって smooth なもの
- \mathbb{C}^2 上の n 点の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$, あるいはより一般に \mathbb{C}^2/Γ の crepant resolution 上の n 点の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^n(\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma})$ ($\Gamma \subset \mathrm{SL}_2$: 有限部分群)
- \mathbb{P}^2 上の framed torsion-free sheaf の moduli 空間
- affine Grassmannian $G((\epsilon))/G[[\epsilon]]$ の $G[[\epsilon]]$ -軌道の閉包の中での別の $G[[\epsilon]]$ -軌道の transversal slice の resolution (存在すれば)
- 籠多様体

などが conical symplectic resolution の例になっている.

2.7 Poisson deformation

既に述べたように \mathfrak{M} の非可換方向への変形のパラメータは $\check{\mathfrak{t}} := H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ で与えられていたが, 同様に可換な方向への変形のパラメータも $\check{\mathfrak{t}}$ で与えられることが知られている. ここでの変形は Poisson 構造のデータ込みで考えている.

$(X, \{, \})$ を Poisson スキームとする. $\text{Art}_{\mathbb{C}}$ を局所 Artin \mathbb{C} -代数 (A, \mathfrak{m}_A) であって $A/\mathfrak{m}_A \simeq \mathbb{C}$ となるもののなす圏とする. $(A, \mathfrak{m}_A) \in \text{Art}_{\mathbb{C}}$ に対して, $(X, \{, \})$ の $S = \text{Spec}(A)$ 上無限小 Poisson 変形とは, 平坦射 $\mathcal{X} \rightarrow S$ と S 上 relative な Poisson 構造 $\{, \} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \times \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ の組であって \mathfrak{m}_A に対応する点に制限したとき $(X, \{, \})$ と一致するようなものを言う. PD_X で (A, \mathfrak{m}_A) に対して S 上の Poisson 変形全体の集合を対応させる $\text{Art}_{\mathbb{C}}$ から集合の圏への関手を表す. このとき, \mathfrak{M} や \mathfrak{M}_0 の Poisson 変形に関して例えば次のような結果が知られている.

Theorem 19 (Namikawa [21], [22], [23]). 以下の性質を満たす可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}_0 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \check{\mathfrak{t}} & \xrightarrow{h} & \check{\mathfrak{t}}/W \end{array}$$

1. W は有限群 (Namikawa Weyl 群と呼ばれる) で, W は $\check{\mathfrak{t}}$ に作用する.
2. $\mathcal{M} \rightarrow \check{\mathfrak{t}}$, $\mathcal{M}_0 \rightarrow \check{\mathfrak{t}}/W$ の原点での formal completion は $\text{PD}_{\mathfrak{M}}$, $\text{PD}_{\mathfrak{M}_0}$ を pro-represent する. 特に $f^{-1}(0) \simeq \mathfrak{M}$ かつ $g^{-1}(h(0)) \simeq \mathfrak{M}_0$.
3. $\check{\mathfrak{t}}$ の有限個の余次元 1 の線型部分空間 $\check{\mathcal{H}} = \{H\}$ が存在して, $t \in \check{\mathfrak{t}}$ に対し, $f^{-1}(t) \cong g^{-1}(h(t))$ であることと, $t \in \cup_{H \in \check{\mathcal{H}}} H$ となることは同値.

2.8 Grothendieck simultaneous resolutions

$\mathfrak{M} = \tilde{\mathcal{N}}_G$ の場合, 上の定理に現れる可換図式は Grothendieck simultaneous resolution としてよく知られたものになる. このとき $\check{\mathfrak{t}} \simeq \mathfrak{t}^* \simeq \mathfrak{t}$ となり, Namikawa Weyl 群は通常 Weyl 群と一致する. $\mathcal{M}_0 \simeq \mathfrak{g}$ であり, 射 $\mathcal{M}_0 \rightarrow \check{\mathfrak{t}}/W$ は自然な射 $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/G \simeq \mathfrak{t}/W$ により与えられる. \mathcal{M} は

$$\tilde{\mathfrak{g}} := \{(gB, X) \in G/B \times \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(g)^{-1}X \in \mathfrak{b}\}$$

で与えられ, 射 $\mathcal{M} \rightarrow \check{\mathfrak{t}}$ は $\text{Ad}(g)^{-1}X$ の $\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \simeq \mathfrak{t}$ での像を対応させることで得られる. $\pi_{\mathfrak{g}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_0$ は第 2 成分への射影とする. このとき, $\check{\mathcal{H}}$ は coroot が定める hyperplane ($\subset \mathfrak{t}^*$) と一致する. したがって一般の conical symplectic resolution に対する $\check{\mathcal{H}}$ は coroot hyperplane の類似とみなせる.

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{N}}_G & \longrightarrow & \mathcal{N}_{G_{\mathbb{C}}} & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & \tilde{\mathfrak{g}} & & \mathfrak{g} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \{0\}_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \{0\}_{\mathbb{C}} & & \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & & \mathfrak{t} & \longrightarrow & \mathfrak{t}/W \end{array}$$

2.9 Weyl group action

Grothendieck simultaneous resolution を用いると Springer fiber のコホモロジーへの Weyl 群作用が以下のように構成できる.

Proposition 20. $\pi_{\mathfrak{g}} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ は small, つまり $\text{codim}_{\mathfrak{g}}\{X \in \mathfrak{g} \mid \dim \pi_{\mathfrak{g}}^{-1}(X) \geq d\} > 2d$ が任意の $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して成り立つ.

このことから $\pi_{\mathfrak{g}*} \mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \simeq \text{IC}(\mathfrak{g}^{\text{rs}}, (\pi_{\mathfrak{g}*} \mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})|_{\mathfrak{g}^{\text{rs}}})$ となることがわかる. ここで \mathfrak{g}^{rs} は regular semisimple 元からなる locus であり, IC は intermediate extension である. $\pi_{\mathfrak{g}}$ の \mathfrak{g}^{rs} への制限は W -covering になっていることから $(\pi_{\mathfrak{g}*} \mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})|_{\mathfrak{g}^{\text{rs}}}$ には W が作用する. IC を取る操作は functorial であるから $\pi_{\mathfrak{g}*} \mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ にも W が作用する. $e \in \mathfrak{g}$ でのファイバーを取ると $H(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ への W 作用が得られる.

同様にして $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ には Namikawa Weyl 群が作用することもわかる.

3 Conjectures

3.1 Category \mathcal{O}

Braden-Licata-Proudfoot-Webster により提唱された symplectic duality では conical symplectic resolution に別の良い $\mathbb{T} := \mathbb{C}^*$ 作用が入る状況を考える. 以下, conical symplectic resolution とそこへの \mathbb{T} 作用の組 $(\mathfrak{M}, \mathbb{S}, \mathbb{T})$ に次の条件を仮定する.

1. \mathbb{T} の \mathfrak{M} への作用は Hamiltonian であり, \mathbb{S} の作用と可換.
2. $\mathfrak{M}^{\mathbb{T}}$ は有限集合.
3. \mathfrak{M}_0 の minimal symplectic leaf は $\{o\}$.

$\mathcal{Q} \in Q(\mathfrak{M}, \omega)$ から §2.2 で述べたように \mathcal{D} や代数 A を構成すると, A には \mathbb{T} が作用する. その weight への分解を $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ と書く. \mathcal{O}_a を有限生成 A 加群であって $A^{\geq 0}$ が locally finite に作用するものからなる圏とする. また \mathcal{O}_g を “good” な \mathbb{S} -同変 \mathcal{D} -加群であって support が $\mathfrak{M}^+ := \{p \in \mathfrak{M} \mid \lim_{\mathbb{T} \ni t \rightarrow 0} t \cdot p \text{ exists}\}$ に入るものからなる圏とする (詳細は [3] を参照).

例えば $\mathfrak{M} = \tilde{\mathcal{N}}_G$ で量子化のパラメータが regular, つまり Weyl 群の作用に関する stabilizer が自明になるとき, \mathcal{O}_a は通常の BGG category \mathcal{O} と圏同値になる. 従って \mathcal{O}_a は category \mathcal{O} の一般化とみなせる. Beilinson-Bernstein 型の局所化定理の類似として, 多くのパラメータで $\mathcal{O}_a \simeq \mathcal{O}_g$ が成り立つことが知られている ([4]). 局所化定理が成り立つとき, \mathcal{O} でその category \mathcal{O} を表すことにする. また 2 つの量子化のパラメータが $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{Z})$ だけ異なるとき, 対応する \mathcal{O}_g は圏同値になることも知られている ([3]).

Theorem 21 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3]). \mathcal{O}_g は highest weight category.

Conjecture 22 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3]). \mathcal{O} は (standard) Koszul.

3.2 Symplectic duality

$(\mathfrak{M}, \mathbb{S}, \mathbb{T})$ を上のとおりとする. G を \mathbb{S} と可換な \mathfrak{M} の Hamiltonian symplectomorphism のなす群とする. これは簡約代数群になる. $\mathbb{T} \subset G$ を \mathbb{T} を含む (唯一の) 極大トーラス (cf. [3]), \mathbb{W} を G の Weyl 群とする. \mathfrak{M} に対する coroot (正確にはそれが定める hyperplane) の概念は既に述べたが, \mathfrak{M} に対する root の概念も, $\mathfrak{M}^{\mathbb{T}} = \mathfrak{M}^{\mathbb{T}} \subset \mathfrak{M}$ の normal bundle に現れる \mathbb{T} -weight として定義することができる (例えば [20]). \mathcal{H} を \mathfrak{M} の root が定める \mathfrak{t} の hyperplane の集合とする.

Conjecture 23 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3]). 別の conical symplectic resolution と良い \mathbb{C}^* 作用の組 $(\mathfrak{M}^!, \omega^!, \mathbb{S}^!, \mathbb{T}^!)$ (symplectic dual と呼ばれる) が存在して, $\mathfrak{M}^!$ に対応する記号には ! を付けることにすると

1. \mathcal{O} と $\mathcal{O}^!$ は Koszul dual. ここで量子化のパラメータは “integral” なものを取る (詳細は [3] を参照).
2. $W \simeq W^!$ かつ $\mathbb{W} \simeq \mathbb{W}^!$.
3. $\check{\mathfrak{t}} \simeq \mathfrak{t}^!$ かつ $\mathfrak{t} \simeq \check{\mathfrak{t}}^!$, つまり変形パラメータと同変パラメータが入れ替わる.
4. $\check{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^!$ かつ $\mathcal{H} = \check{\mathcal{H}}^!$, つまり coroot hyperplane と root hyperplane が入れ替わる.
5. etc.

Remark 24. $(\mathfrak{M}^!, \omega^!, \mathbb{S}^!, \mathbb{T}^!)$ の symplectic dual は $(\mathfrak{M}, \omega, \mathbb{S}, \mathbb{T})$.

例としては以下の様なペアが symplectic dual であると考えられている.

- \mathcal{N}_G と $\mathcal{N}_{\check{G}}$ は symplectic dual (\check{G} は G の Langlands 双対).
- A 型 S3 variety は別の A 型 S3 variety と symplectic dual.
- hypertoric variety は別の (Gale dual な) hypertoric variety と symplectic dual.
- $\text{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ ($\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の閉部分多様体であって台の重心が原点になる locus) は $\text{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ と symplectic dual.
- $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2/\widetilde{(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})})$ は \mathbb{P}^2 上の rank r , $c_2 = n$ の framed torsion free sheaf の moduli と symplectic dual.
- ADE 型 quiver variety (であって良い \mathbb{C}^* 作用を持つもの) はある affine Grassmannian の slice (であって resolution を持つもの) と symplectic dual.

3.3 Conjectures

本題に戻り symplectic duality と DeConcini-Procesi-Tanisaki の定理との関係について説明する. そのためにまずこの定理の symplectic dual 版と言える命題を述べる.

再び $G = \text{GL}_n$ とする. $P = L_P U_P \subset G$ を放物型部分群とする. $e \in \mathfrak{l}_P = \text{Lie}(L_P)$ を Levi の中で regular になるような冪零元とする. $\lambda \vdash n$ を P に対応する分割とすると, e の Jordan type は λ である. e を含む \mathfrak{sl}_2 -triple (e, h, f) を取る.

Remark 25. \check{S}_e と $T^*(G/P)$ は symplectic dual.

Proposition 26 ([13]). 次数付き代数として

$$H^*(G/P, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[(e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{t}_P}(f)) \cap S_e].$$

ここで右辺の次数は S 作用から定まるもの.

Remark 27. 両辺の各次数ごとの次元が一致することは例えば [19] から読み取れる.

Proposition 17 を用いて DeConcini-Procesi-Tanisaki の定理を言い換えると

$$H^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap \mathcal{N}_P]$$

となる. これらを比較すると $T^*(G/P)$ の central fiber のコホモロジー環が \tilde{S}_e の affinization を用いて書け, 逆に \tilde{S}_e の central fiber のコホモロジー環が $T^*(G/P)$ の affinization を用いて書けていることが見て取れる. Proposition 9 より central fiber のコホモロジー環は全体のコホモロジー環と同型であるから, 一般に conical symplectic resolution のコホモロジー環がその symplectic dual の座標環を用いて書けることが期待される.

スキーム論的な共通部分 $\mathfrak{t} \cap \mathcal{N}_P$ や $(e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{t}_P}(f)) \cap S_e$ の一般化を述べるために記号を準備する. H を \mathbb{C} 上定義されたトーラスとし, $X = \text{Spec}(R)$ を \mathbb{C} 上のスキームであって H が作用するものとしたとき, その固定点スキーム X^H ([11]) を H 作用に関する weight が 0 でない homogeneous な元全体で生成されるイデアルで定義される閉部分スキームとする. すると $\mathfrak{t} \cap \mathcal{N}_P = \mathcal{N}_P^T$, $(e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{t}_P}(f)) \cap S_e = S_e^{Z(L_P)}$ と書けることがわかる. これを一般化して次の予想を得る.

Conjecture 28 ([13]). \mathfrak{M} と $\mathfrak{M}^!$ が symplectic dual のとき, 次数付き代数として

$$\begin{aligned} H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0^!)^{\mathbb{T}}], \\ H^*(\mathfrak{M}^!, \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0)^{\mathbb{T}}]. \end{aligned}$$

ここで右辺の次数は $S^!$, S 作用から定まるもの.

Theorem 29 ([13]). この予想は A 型 S3 variety, hypertoric variety, $\text{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ の場合に正しい.

証明は各々の場合に知られているコホモロジー環の記述を用いて明示的に同型を作ることにより得られる. コホモロジー環の記述としては A 型 S3 variety の場合は [6], hypertoric variety の場合は [12] や [15], $\text{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ の場合は [17] や [25] で知られている.

すでに述べたように $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ には Namikawa Weyl 群 W が自然に作用する. 一方で W が $\mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0)^{\mathbb{T}}]$ に自然に作用することもすぐにわかる. 従って次のように予想することは自然であると思われる.

Conjecture 30. 予想の同型は $W \simeq W^!$, $W^! \simeq W$ 作用と compatible.

また, symplectic duality においては変形パラメータと同変パラメータが入れ替わることを思い出すと次の予想が得られる.

Conjecture 31. 次数付き代数として

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{C}^!}^*(\mathfrak{M}^!, \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C}[\mathcal{M}_0^{\mathbb{T}}], \\ H_{\mathbb{T}^!}^*(\mathfrak{M}^!, \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C}[(\check{\mathfrak{t}} \times_{\mathfrak{t}/W} \mathcal{M}_0)^{\mathbb{T}}]. \end{aligned}$$

上では symplectic form を保つ群作用に関する同変コホモロジーを考えたが, symplectic form を保たない S 作用に関する同変コホモロジーに関しても次のように予想することができる. A を canonical な量子化から定まる $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ の量子化とする. A は filtration を持つので, その Rees 代数 A_{\hbar} を考えることができる. ここで \hbar は Rees 代数を取るときに付け加えられるパラメータである. A_{\hbar}^k を \mathbb{T} -weight が k の部分とする.

Conjecture 32. 次数付き代数として

$$H_{S^1}^*(\mathfrak{M}^!, \mathbb{C}) \simeq A_{\hbar}^0 / \left(\sum_{k>0} A_{\hbar}^{-k} A_{\hbar}^k \right).$$

ただし $H_{S^1}^*(\text{pt}) \simeq \mathbb{C}[\hbar]$ とみなす.

References

- [1] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin, Fedosov quantization in algebraic context, *Mosc. Math. J.* 4 (2004), no. 3, 559–592
- [2] R. Bezrukavnikov, I. Mirković, Representations of semisimple Lie algebras in prime characteristic and the noncommutative Springer resolution, *Ann. of Math.* (2) 178 (2013), no. 3, 835–919
- [3] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions II: category \mathcal{O} and symplectic duality, arXiv:1407.0964
- [4] T. Braden, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions I: local and global structure, arXiv:1208.3863
- [5] A. Braverman, D. Maulik, A. Okounkov, Quantum cohomology of the Springer resolution, *Adv. Math.* 227 (2011), no. 1, 421–458
- [6] J. Brundan, V. Ostrik, Cohomology of Spaltenstein varieties, *Transform. Groups*, 16 (2011), 619–648
- [7] J. Carrell, Orbits of the Weyl group and a theorem of DeConcini and Procesi *Compositio Math.* 60 (1986), no. 1, 45–52
- [8] N. Chriss, V. Ginzburg, Representation theory and complex geometry, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997
- [9] C. DeConcini, G. Lusztig, C. Procesi, Homology of the zero-set of a nilpotent vector field on a flag manifold, *J. Amer. Math. Soc.* 1 (1988), no. 1, 15–34
- [10] C. DeConcini, C. Procesi, Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety, *Invent. Math.*, 64 (1981), 203–219
- [11] J. Fogarty, Fixed point schemes, *Amer. J. Math.*, 95 (1973), 35–51
- [12] T. Hausel, B. Sturmfels, Toric hyperKähler varieties, *Doc. Math.*, 7 (2002), 495–534

- [13] T. Hikita, An algebro-geometric realization of the cohomology ring of Hilbert scheme of points in the affine plane, arXiv:1501.02430
- [14] D. Kaledin, Symplectic singularities from the Poisson point of view, *J. Reine Angew. Math.* 600 (2006), 135–156
- [15] H. Konno, Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds, *Internat. J. Math.*, 11 (2000), 1001–1026
- [16] M. Lehn, Y. Namikawa, C. Sorger, Slodowy slices and universal Poisson deformations, *Compos. Math.* 148 (2012), no. 1, 121–144
- [17] M. Lehn, C. Sorger, Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes, *Duke Math. J.*, 110 (2001), 345–357
- [18] I. Losev, Isomorphisms of quantizations via quantization of resolutions, *Adv. Math.* 231 (2012), no. 3-4, 1216–1270
- [19] G. Lusztig, Bases in equivariant K -theory. II, *Represent. Theory.*, 3 (1999), 281–353
- [20] D. Maulik, A. Okounkov, Quantum Groups and Quantum Cohomology, arXiv:1211.1287
- [21] Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties, *Duke Math. J.* 156 (2011), no. 1, 51–85
- [22] Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties, II, *Kyoto J. Math.* 50 (2010), no. 4, 727–752
- [23] Y. Namikawa, Poisson deformations and birational geometry, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 22 (2015), no. 1, 339–359
- [24] T. Tanisaki, Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups, *Tôhoku Math. J. (2)*, 34 (1982), 575–585
- [25] E. Vasserot, Sur l’anneau de cohomologie du schéma de Hilbert de \mathbf{C}^2 , *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332 (2001), 7–12
- [26] J. Weyman, The equations of conjugacy classes of nilpotent matrices, *Invent. Math.*, 98 (1989), 229–245