エンリケス曲面の自己同型について[1]

大橋 久範（東京理科大学 理工学部 数学科）

1 イントロ

以下、代数多様体は複素数 $\mathbb{C}$ 上定義されているとし、特に断らない限り非特異とする。射影代数曲面 S がエンリケス曲面であるとは、条件

$$2K_S \sim 0, \quad H^i(S, \mathcal{O}_S) = 0 \ (i = 1, 2)$$

が満たされているときにいう。ここで K_S は標準因子、$\sim$ は線型同値、$\mathcal{O}_S$ は構造層を表している。特に、一つ目の条件は「S が至る所退化しない大域的な正則二重二形式を持つ」と言い換えられる。

エンリケス曲面は定義から極小代数曲面、即ち K_S がネフとなる代数曲面であり、これらは一般型の場合を除きかなり詳しく分類されている。エンリケス曲面の基本的性質は以下の通り。

(1) エンリケス曲面は互いに微分同相だが、複素構造は 10 個の有効パラメータ（モジュライ）を持つ。

(2) $\mathrm{Aut}(S) = \{\varphi\colon S \to S \mid$ 双正則な同型写像 $\}$ は有限または無限位数の離散群となり、この群の構造は変形との相性が悪い。

(3) $\pi\colon X \to S$ を普遍被覆とすると、これは二重被覆であり X は $K3$ 曲面である。即ち、X は次の二条件を満たす：

$$K_X \sim 0, \quad H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

π の被覆変換は X に固定点を持たない位数 2 の正則自己同型 (自由対合）として作用する。逆に、ある $K3$ 曲面 X の上に自由対合 ε が存在していたとすると、それで割って得られる曲面 $S = X/\varepsilon$ はエンリケス曲面の一例になる。つまり、

$$\{(X, \varepsilon) \mid \ K3\text{ 曲面と自由対合のペア}\} \longleftrightarrow \{S \mid \text{エンリケス曲面}\}.$$

[1] 2015 年代数学シンポジウムの報告集

例 1.1. $K3$ 曲面の基本的な例は、$\mathbb{P}^3$ 内の 4 次曲面である。

$$X = \{(x_0 : \cdots : x_3) \in \mathbb{P}^3 \mid F_4(x_0, \ldots, x_3) = 0\},$$

ここで $F_4(x_0, \ldots) = a_0 x_0^4 + \cdots + a_m x_3^4$ は 4 次斉次式で、パラメータとなる係数 (a_i) は一般とする。4 次単項式の個数を数えることで $m = {}_7C_4 - 1 = 34$ となる。

例 1.2. 上の $K3$ 曲面からエンリケス曲面を作るには工夫がいる。X の上に自由対合 ε を構成すればよいわけだが、すぐに思いつく線型変換などでは、例えば

$$\varepsilon\colon (x_0 : \ldots) \mapsto (x_0 : x_1 : -x_2 : -x_3)$$

を考えると $\varepsilon \curvearrowright \mathbb{P}^3$ の固定点集合が

$$\begin{aligned} &\{x_0 = x_1 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3 \\ =&（直線）\cup （直線） \end{aligned}$$

となり、これは常に X と共有点を持つ。これはつまり ε が X に作用したとしても固定点を持つということになり、所望の自由対合ではないことがわかる。

例 1.3. 次のようにするとエンリケス曲面が作れる。$X = \{F_4(x_0, \ldots, x_3) = 0\}$ を 4 次曲面とし、定義方程式 F_4 を次の条件を満たすようにとる：

(1) $(x_0 \cdots x_3)^2 F_4(x_0^{-1}, \ldots, x_3^{-1}) = F_4(x_0, \ldots, x_3)$,

(2) $F_4(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \neq 0$　　($\pm$ は全ての組み合わせを動く)

すると、条件 (1) から X は各座標点 $(1 : 0 : 0 : 0), \ldots, (0 : 0 : 0 : 1)$ において特異点を持つが、これが有理二重点である限りは最小解消 $\tilde{X} \to X$ をとればこれが $K3$ 曲面になる。ε をクレモナ変換 $(x_0 : \cdots : x_3) \mapsto (x_0^{-1} : \cdots : x_3^{-1})$ が $\tilde{X}$ に誘導する自己同型とすれば、これが自由対合になり、$S = \tilde{X}/\varepsilon$ がエンリケス曲面である。

この講演で紹介する定理は、この例の特殊化に関するものである。多項式 F_4 を特別な形にとり、

$$X = \{(x_0 x_1 + \cdots + x_2 x_3)^2 = k x_0 x_1 x_2 x_3\} \quad (k \neq 0, 4, 36)$$

とする（左辺の括弧内は、2 次の基本対称式である。）この場合、各座標点における特異点は D_4 型となり、有理二重点であるから、例 1.3 によりエンリケス曲面 $S = \tilde{X}/\varepsilon$ が構成できる。

定理 1.4 (向井-O)**.** このエンリケス曲面 S に対して、

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{*4} \rtimes \mathfrak{S}_4$$

である [2]。ここで、$*$ は自由積を、$\rtimes$ は半直積を表す。また、各生成元は次のように具体的に記述できる。

- $\mathfrak{S}_4$ は 4 次対称群であり、座標 $x_0, \ldots, x_3$ の置換として S に作用する。
- 各 $i = 0, 1, 2, 3$ に対し、$\mathbb{Z}/2$ の生成元 σ_i は X に次のように作用する。例えば $i = 0$ として、

  $$\sigma_0 \colon (x_0 : \ldots) \mapsto \left(\frac{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2}{x_0(x_1 + x_2 + x_3)^2} : x_1 : x_2 : x_3 \right).$$

  この作用は、代数的には、F_4 を x_0 に関する二次方程式と見たときにその二つの根を入れ替える作用である。幾何的には、座標点 $(1 : 0 : 0 : 0)$ から X を射影して $\mathbb{P}^2$ の二重被覆とみなした時にその被覆変換が S に誘導する自己同型である。

この定理の証明は、エンリケス曲面 S 上の有理曲線配置、楕円曲線束の分類といった幾何的な考察をもとに、自己同型群を双曲空間に作用する鏡映群と捉えることで行う。重要なステップとして、S 上の低種数曲線の分類が以下のようにできる。

定理 1.5. [同上] 上と同じエンリケス曲面 S を考える。$\mathcal{F}$ を自己同型群の自由積部分 $\mathcal{F} = (\mathbb{Z}/2)^{*4}$ とする。

(1) $\mathcal{F}$ の作用を法として、S 上にはちょうど 16 個の非特異有理曲線が存在する。これらは（定理の証明中に現れる）$10A + 6B$ 配置で代表される。

(2) $\mathcal{F}$ の作用を法として、S 上にはちょうど 29 個の楕円曲線束が存在する。特異ファイバーの性質に関してこれらは 5 種類に分かれ、それぞれの性質は以下の通り。

[2] 話を単純にするため $\mathbb{C}$ 上としているが、奇数標数の代数閉体においても定理は成り立つ。証明も同じである。

	特異ファイバー	Mordell-Weil 階数	個数
1)	$\tilde{E}_7 + \tilde{A}_1$	0	12
2)	$\tilde{E}_6 + \tilde{A}_2$	0	4
3)	$\tilde{D}_6 + \tilde{A}_1$	1	6
4)	$\tilde{A}_7 + \tilde{A}_1$	0	3
5)	$2\tilde{A}_5 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_1$	0	4

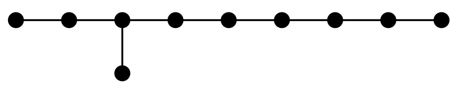
次のセクションで、定理の証明の概略を説明する。

2 定理の証明の概略

エンリケス曲面 S に対し、コホモロジー群 $H^2(S,\mathbb{Z})_f := H^2(S,\mathbb{Z})/(\text{torsion})$（あるいは、同じことだが、ネロンセベリ群 $NS(S)_f := NS(S)/(\text{torsion})$）は階数 10、符号 $(1,9)$ の偶ユニモジュラー格子であり、同型

$$H^2(S,\mathbb{Z})_f \simeq U \oplus E_8 \simeq T_{2,3,7}$$

が成り立つ。ここで、U はグラム行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で定義される双曲格子、E_8 はその型のルート格子（の符号を負定値にしたもの）、$T_{2,3,7}$ は次のグラフから（ルート格子と同様に）定義される双曲格子である。



これをもとに、自然な表現 $r\colon \mathrm{Aut}(S) \to O(H^2(S,\mathbb{Z})_f)$ について見ていく。

Step 1: S 上には以下の非特異有理曲線がある。

(1) X 上の 4 つの D_4 特異点と、4 つの trope[3] から定まる、S 上の 10 本の非特異有理曲線

(2) 対称な平面切断、例えば $X \cap \{x_0 + x_1 = 0\}$、から定まる 6 本の非特異有理曲線

[3]即ち、切断 $X \cap \{x_i = 0\}$ から決まる X 上の二次曲線

これらについて通常の双対グラフ[4]を描くと、次のようになる。以下ではこれらを $10A$ **配置**、$6B$ **配置**と呼ぶことにする。$10A+6B$ 配置と言ったときには A 部分と B 部分の間の交点関係も表すこととするが、この部分は図にすると複雑になるため省略する。

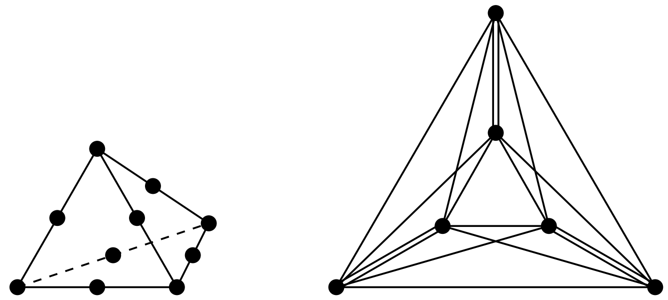


図 1: 非特異有理曲線の $10A$ 配置（左）と $6B$ 配置（右）

δ をこれら非特異有理曲線の基本類とすると、$\delta \in H^2(S,\mathbb{Z})_f$ は $(\delta^2)=-2$ を満たしていて、従ってコホモロジー格子のピカール・レフシェッツ変換

$$\begin{aligned} s_\delta\colon H^2(S,\mathbb{Z})_f &\to H^2(S,\mathbb{Z})_f \\ x\ &\mapsto x+(x,\delta)\delta \end{aligned}$$

を誘導することに注意する。これにより、$H^2(S,\mathbb{Z})_f$ から定まる 9 次元の双曲空間 Λ に作用する鏡映群 $W(10A+6B)$ が定まるが、上の双対グラフはこの鏡映群の基本領域を表すコクセター図形と（ほとんど）一致する。[5]

この双対グラフから、S は多くの楕円曲線束を持つことがわかる。特に、定理 1.5 中の表の 5) に対応する楕円曲線束と有理曲線を詳しく調べることで、次もわかる。

補題 2.1. r は単射である。

Step 2: S 上の自己同型 σ_i $(i=0,1,2,3)$ に対応してコホモロジー類 G_i が存在し、$(G_i^2)=-2$ かつ σ_i のコホモロジー作用は G_i に関する鏡映作用と一致する。

この命題は、イントロで説明した σ_i の幾何的描像と、そこから導かれるエンリケス曲面の「二次ひねり」構造（[1, 5]）を調べることで説明される。このように、コホモロジー作用が鏡映となるような自己同型は「数値的鏡映な対合」と呼ばれている [4]。

[4]既約曲線を頂点とし、交点数により頂点間の辺の本数を定めたグラフ

[5]双対グラフの二重線が、コクセター図形では太線に置き換わる。

鏡映の中心 G_i $(i=0,1,2,3)$ の双対グラフは、4 頂点の完全二重グラフ $K_4^{[2]}$ となり、この部分は S 上の $4C$ **配置**と呼ばれる。$4C$ 配置には S 上の曲線は対応しないことに注意しておく。一方、コクセター図形としての $10A+6B+4C$ 配置には Λ に作用する鏡映群 $W=W(10A+6B+4C)$ の基本領域という幾何的な意味があり、例えば $\mathcal{F}=\langle\sigma_i\rangle$ が $\mathbb{Z}/2$ の自由積になることはここから直ちにわかる。

Step 3: 上で定義した $10A+6B+4C$ 配置のコクセター図形は、Vinberg の判定条件を満たし、従って基本領域の体積が有限、あるいは同じことだが W は $O(H_f^2,\mathbb{Z})$ の中で有限指数を持つ。この事実により、$\mathcal{F}$ を法として低種数の曲線を分類する手がかりが得られる。

命題 2.2. $\mathcal{F}$ を法とすると、S 上の非特異有理曲線は $10A+6B$ 配置で代表される。

Proof. H を、$10A$ 配置の曲線の和として定義されるネフで巨大な因子とする。E を任意の非特異有理曲線とし、軌道 $\mathcal{F}.E$ の中で H に関する次数を最小にするような元 E_0 をとると、E_0 が G_i とは非負で交わることから、E_0 は $10A+6B$ 配置のどれかの曲線と負で交わることになり、主張が従う。 □

系 2.3. $N(W(10A+6B))$ を、$10A+6B$ 配置から定義される部分鏡映群 $W(10A+6B)$ を含むような W の最小の正規部分群とすると、これは S の非特異有理曲線のピカール・レフシェッツ変換から生成されるワイル群 $W(S)$ と一致する。

Proof. これは、コクセター図形において $10A+6B$ と $4C$ を結ぶ辺の重複度が偶数であり、従って同型写像 $W/N(W(10A+6B))\to W(4C)=\mathcal{F}$ が存在することからわかる。 □

同様の議論で S 上の楕円曲線束の分類も得られ、定理 1.5 の証明が完了する。

Step 4: 最後に、r が同型 $\mathrm{Aut}(S)\to\mathcal{F}\rtimes\mathfrak{S}_4$ を誘導することを示す。単射性は Step 1 で得られているので、像を記述するのが主目標になるが、これは非特異有理曲線全体の双対グラフにおいて各頂点を楕円曲線束を用いて特徴づけするという議論を経由する。詳細は略すが、ここから、各自己同型が因子 H を（因子として）保つことがわかり、従って $\mathrm{im}\ r$ は $\mathcal{F}$ と基本領域 P の対称群 $\mathrm{Sym}(P)\simeq\mathfrak{S}_4$ から生成されていることがわかる。これで、定理の証明が完成する。

注意 2.4. 今回現れたコクセター図形 $10A + 6B + 4C$ は、金銅 [2] における V 型曲面の非特異有理曲線の双対図形と一致している。実際、$k \to 0$ の極限において適切なモデルに取り換えることにより、S は V 型曲面に変形する。

参考文献

[1] K. Hulek and M. Schütt, Enriques surfaces and Jacobian elliptic $K3$ surfaces, Math. Z., **268** (2011), 1025-1056.

[2] Kondo, S., Enriques surfaces with finite automorphism groups, Japan. J. Math., **12** (1986), 191–282.

[3] Kondo, S., The automorphism group of a generic Jacobian Kummer surface, J. Algebraic Geometry **7** (1998), 589609.

[4] S. Mukai, Kummer's quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces, J. Math. Soc. Japan, **64** (2012), 231–246.

[5] S. Mukai and H. Ohashi, Enriques surfaces of Hutchinson-Göpel type and Mathieu automorphisms, in *Arithmetic and Geometry of $K3$ surfaces and Calabi-Yau threefolds*, Fields Institute Communications **67**, 2013, pp. 429–454.