特殊な線形射影を持つ射影多様体とその応用

野間　淳

ここでは，射影多様体の内点からの線形射影により，次数の低い定義方程式を構成する問題と線形射影の二重点因子の positivity についての問題を扱う．このような問題を扱う動機とこれらの応用についてもふれる．問題を考察する際に，特殊な線形射影を持つ射影多様体，すなわち 1 点からの線形射影が像と双有理とならない射影多様体と一般の内点からの線形射影が例外因子を持つ射影多様体の考察が必要になる．

1. 状況設定と問題設定

1.1. **状況設定.**

全体を通して，常に次を仮定する．

$X^n \subseteq \mathbb{P}^N$ は，代数閉体 $\Bbbk$ 上の N 次元射影空間 $\mathbb{P}^N$ の中で**非退化**な**射影多様体**で，次元 $(\dim X)$ n, 次数 $(\deg X)$ d, 余次元 $(\operatorname{codim} X)$ $e = N - n$ とする．さらに，$\Bbbk$ の標数は 0 であると仮定する．($\operatorname{char} \Bbbk = p$ の場合の結果についてもふれることがあります．)

ここで，N 次元射影空間 $\mathbb{P}^N := \{[a_0 : a_1 : \cdots : a_N] \neq \mathbf{0} | a_i \in \Bbbk\}$ の部分集合 X が**射影多様体** (projective variety) であるとは，同次多項式 $F_1, \ldots, F_m \in S := \Bbbk[T_0, T_1, \ldots, T_N]$ があって，$X = \{(a_0 : \cdots : a_N) | F_i(a_0 : \cdots : a_N) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, m\}$ と表せ，その斉次イデアル $I(X) := (\{F \in S | F$ 同次式 $, F(P) = 0 \ \forall P \in X\})$ が素イデアル (prime ideal) となることである．多項式環 S は $\mathbb{P}^N$ の座標環，剰余環 $S/I(X)$ は X の座標環になっている．さらに，射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が $\mathbb{P}^N$ で**非退化** (nondegenerate) であるとは，任意の超平面 H に X が含まれないことである．射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の**次元** $(\dim X)$ とは，一般の $(N-k)$-次元の線形部分空間（以下 $(N-k)$-plane という）と X との交わり $X \cap \Phi^{N-k}$ が有限個の点集合となる最小値 k のこと．$\dim X = \min\{k \in \mathbb{N} |$ 一般の $(N-k-1)$-plane Γ に対して $X \cap \Gamma^{N-k-1} = \emptyset\}$ でも定義できる．さらに，X の**次数** $(\deg X)$ とは，次元の定義の中で，一般の $(N-k)$-plane に対して有限点集合となったときのその個数 $\#(X \cap \Phi^{N-n})$ のことである．この次数は，一般の $(N-n-2)$-plane Λ^{e-2} からの線形射影 $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \to \mathbb{P}^{n+1}$ による X の像 $\pi_\Lambda(X)$ である超曲面 F の次数とも定義できるが，これは後で使われる．

1.2. **条件** A_m, B_m, C_m.

m を自然数として，射影多様体 $X (\subseteq \mathbb{P}^N)$ に対する次の 3 つの条件を考える．

(A_m) X に含まれない任意の直線 $L \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して次が成立する；

$$\ell(X \cap L) := \mathrm{length}\,(\mathcal{O}_{\mathrm{X \cap L}}) \leq \mathrm{m}.$$

(B_m) X を含む次数 m 以下の $\mathbb{P}^N$ の超曲面の共通部分を $\mathrm{E}_m(X)$ と表すとき，すなわち

$$\mathrm{E}_m(X) := \bigcap_{\substack{F \text{ hypersurface } \supseteq X \\ \deg F \leq m}} F$$

のとき，$X = \mathrm{E}_m(X)$ が成立する．ここで，“$=$” は，集合/スキーム/斉次イデアルとしてなどが考えられるが，どの意味であるかその都度断ることにする．

(C_m) X は Castelnuovo-Mumford の意味で m**-regular** である．すなわち，次の同値な条件 (i) または (ii) が成立する．((i) と (ii) が同値であることは例えば，[1], [15] を参照.)

(i) X のイデアル層 $\mathcal{I}_{X/\mathbb{P}^N}$ について，$H^i(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_{X/\mathbb{P}^N} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m-i)) = 0$ $(\forall\, i > 0)$ が成立する．

(ii) X の斉次イデアル $I(X)$ の座標環 $S := \Bbbk[T_0, T_1, \ldots, T_N]$ 上の次数付き極小自由分解

$$0 \to \bigoplus_i S\ \mathbf{e}_{i,N} \to \cdots \to \bigoplus_i S\ \mathbf{e}_{i,1} \to \bigoplus_i S\ \mathbf{e}_{i,0} \to I(X) \to 0$$

に対して，$\deg \mathbf{e}_{i,j} \leq m + j$ $(\forall i, \forall j)$ が成立する．

考えたい問題は，

問題. A_m, B_m, C_m が成り立つ最小の m は何か．

である．$e = 1$ の時は，X が超曲面であり，どの条件も成立する．従って以下ではつねに，$e \geq 2$ と仮定する．これらの条件に対して次に注意する．

注意. (1). B_m が斉次イデアルとして成立すれば，B_m がスキームとして成立する．また，B_m がスキームとして成立すれば，B_m が集合として成立する．

(2). $C_m \implies B_m \implies A_m$ が成り立つ．というのは，もし C_m が成立すれば，斉次イデアル $I(X)$ の極小生成元 $\mathbf{e}_{i,0}$ について $\deg \mathbf{e}_{i,0} \leq m$ が成立するので，$I(X)$ は m 以下の元で生成され，斉次イデアルとしての B_m が成立する．また，集合としての B_m が成立するとき，X に含まれない直線 L に対して $P \in L \setminus X$ を含まない m 次の超曲面 F がとれるから，この F と L との交わりについて，$\ell(X \cap L) \leq \ell(F \cap L) = m$ となり，A_m が成立する．

この注意により，C_m が成立すれば他の条件が成立するので，はじめに C_m についてみていく．そして A_m について，最後にここで主に考えたい条件 B_m についてみていく．

1.3. Castelnuovo-Mumford regularity C_m について.

条件 C_m については次の予想がある．

Regularity 予想=Eisenbud-Goto 予想. (Gruson, Lazarsfeld, Peskine [11], Eisenbud, Goto [8]) 任意の射影多様体 X は $(d-e+1)$-regular であろう．すなわち，任意の射影多様体 X に対して C_{d-e+1} が成立する．

この予想については，以下の結果が知られているが，$n \geq 3$ のとき未解決である．

定理. 状況設定のもとで考える．

(1) C_{d-e+1} が次の場合に成立する．

- **曲線** $(p \geq 0)$．すなわち，既約かつ被約な**曲線** X は $(d-e+1)$-regular である (Gruson, Lazarsfeld, Peskine [11])．
- $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}(d = e+1)$ $(p \geq 0)$．すなわち，最小次数の多様体 $(d = e+1)$ は 2-regular である (Eisenbud, Goto [8])．
- **非特異曲面** $(p = 0)$．すなわち，非特異な曲面は $(d-e+1)$-regular である (Pinkham [21], Lazarsfeld [14])．

(2) $\varepsilon = (n-2)(n-1)/2$ に対して $C_{d-e+1+\varepsilon}$ が次の場合に成立する．

- **非特異 3-fold** $(p = 0)$．すなわち，非特異な 3 次元射影多様体は $(d-e+1+\varepsilon)$-regular である (Kwak [13])．
- **非特異 n-fold** $(n \leq 14)$ $(p = 0)$．すなわち，非特異な n 次元 $(n \leq 14)$ 射影多様体は $(d-e+1+\varepsilon)$-regular である (Chiantini,Chiarli,Greco [6])．

(3) **任意の非特異射影多様体** $(p = 0)$ に対して，

- $C_{(n+1)(d-2)+2}$ が成立する．すなわち， 任意の非特異射影多様体は $((n+1)(d-2)+2)$-regular である (Bayer, Mumford [1])．
- $C_{e(d-1)+1}$ が成立する．すなわち， 任意の非特異射影多様体は $(e(d-1)+1)$-regular である (Bertram, Ein, Lazarsfeld [4])．

上の結果 (1), (2) のうち Eisenbud, Goto [8] 以外のものは，大雑把にいって，Lazarsfeld [14] のアイディアをもとに，線形射影のファイバーのある性質を使って示された．この性質が一般に成立する場合が $n \leq 14$ であることが知られている（[6],[13] 参照）．他方で，Bayer, Mumford [1] の結果は，$\mathcal{O}_X(d-n-2) \otimes \omega_X^{\vee}$ の base-point-freeness と $\mathbb{P}^n$ 上の Koszul 複体，小平消滅定理を使って示された．Bertram, Ein, Lazarsfeld [4] の結果は，B_d:$\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$ が globally generated と Kawamata-Viehweg 消滅定理を使って示された．

1.4. Secant Length A_m について．

Regularity 予想=Eisenbud-Goto 予想 が正しいと考えられるので，注の $C_m \implies A_m$ により，任意の射影多様体 X に対して A_{d-e+1} が成立することが予想される．実際，次の議論により，A_{d-e+1} が成立しそうである．$L \subseteq \mathbb{P}^N$ を X に含まれない直線とし，$l(X \cap L) = m$ が成立しているとする．このとき，X の一般の点 $x_1, \ldots, x_{e-1} \in X$ があって，

- $\ell(\langle L, x_1, \ldots, x_{e-1} \rangle \cap X) = d = \deg X$

が成立していると仮定する．このとき，$\ell(L \cap X) + (e-1) \leq \ell(\langle L, x_1, \ldots, x_{e-1} \rangle \cap X) = d$, となるので，$\ell(L \cap X) \leq d-e+1$ が成立する．

事実． (Bertin [2]) $X \cap L \subseteq \operatorname{Sm} X$（特に X が非特異）なら，上の仮定が成立し，従って A_{d-e+1} が成立する．(超平面切断を取る方法もある）

問題点は，**仮定**は一般には成立しないことである．

問題. A_{d-e+1} は任意の射影多様体について成立するか？(これについては，Bertin の結果 ([2],[3]) も参照.)

1.5. Hypersurfaces cut out X, B_m について.

C_{d-e+1} や A_{d-e+1} を示すことが難しそうなので，方針を転換して B_m について考える．まず，B_d がほぼ成立していることが次の結果によってわかっている.

事実. (Mumford [16]) 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して，

(1) 集合として B_d が成立；

(2) さらに X が非特異ならば，スキームとして B_d が成立.

Mumford による証明のアイディア. （詳細は [16] を参照）．一般の $(e-2)$-平面 $\Lambda^{e-2} \subseteq \mathbb{P}^N$ を取ると，$\Lambda \cap X \neq \emptyset$ であるので，Λ を中心とする射影 $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \to \mathbb{P}^{n+1}$ は，X 上で定義される．このとき，X の像 $\bar{X}_\Lambda := \pi_\Lambda(X)$ が，$\mathbb{P}^{n+1}$ で d 次超曲面となる．これを $\mathbb{P}^N$ へ引き戻したもの F_Λ は $\mathbb{P}^N$ の d 次超曲面となる.

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda & \subseteq & \mathbb{P}^N & \supseteq & X & \subseteq & F_\Lambda := \mathrm{Cone}(\Lambda, \pi_\Lambda(X)) := \bigcup_{\bar{x} \in \pi_\Lambda(X)} \langle \Lambda, \bar{x} \rangle \\ & & \pi_\Lambda \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathbb{P}^{n+1} & \supseteq & \bar{X}_\Lambda := \pi_\Lambda(X) & & \end{array}$$

鍵となるのは $\Lambda^{e-2} \subseteq \mathbb{P}^N$ をいろいろ動かして F_Λ の共通部分を取ると，X となることである．これを示すには，

(1) X の外の点 $w \in \mathbb{P}^N \setminus X$ と X を分離する $F_\Lambda = \mathrm{Cone}(\Lambda, \pi_\Lambda(X))$ の構成

(2) X の非特異点 $u \in \mathrm{Sm}\, X$ での接空間 $T_u(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ と, $T_u(X)$ の外の点 $w \in \mathbb{P}^N \setminus T_u(X)$ を分離する超曲面 F_Λ の構成

を行えばよい．考え方を使うため，以下でこれらがどのように構成されるかを見ていく.

(1) X の外の点 $w \in \mathbb{P}^N \setminus X$ と X を分離する超曲面 $F_\Lambda = \mathrm{Cone}(\Lambda, \pi_\Lambda(X))$ の構成.
w を頂点とする X 上の錐 $\mathrm{Cone}(w, X) := \bigcup_{x \in X} \langle w, x \rangle$ に対して，$(e-2)$-平面 $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^N$ を $\Lambda \cap \mathrm{Cone}(w, X) = \emptyset$ と取る．すると，$\pi_\Lambda(w) \notin \pi_\Lambda(X) =: \bar{X}$ となる．実際，もし，$\pi_\Lambda(w) \in \pi_\Lambda(X)$ であれば，$\pi_\Lambda(w) = \pi_\Lambda(x)$ となる X の点 x に対して，直線 $\langle w, x \rangle$ が $\langle \Lambda, w \rangle$ に含まれることになり，$\langle \Lambda, w \rangle$ の超平面 Λ と $\langle w, x \rangle$ は必ず交わるので，$\Lambda \cap \mathrm{Cone}(w, X) = \emptyset$ に矛盾する．$\pi_\Lambda(w) \notin \pi_\Lambda(X)$ なので，$w \notin F_\Lambda$ が成立し，この F_Λ が，X を含むが w を含まない超曲面となる.

(2) X の非特異点 $u \in \mathrm{Sm}\, X$ での接空間 $T_u(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ と，$T_u(X)$ の外の点 $w \in \mathbb{P}^N \setminus T_u(X)$ を分離する超曲面 $F_\Lambda = \mathrm{Cone}(\Lambda, \pi_\Lambda(X))$ の構成.
$u \in X$ を頂点とする X 上の錐 $\mathrm{Cone}(u, X)$ を，$\bigcup_{x \in X \setminus \{u\}} \langle u, x \rangle$ のザリスキー閉包として定義する．また，w と $T_u(X)$ の線形閉包 $\langle w, T_u(X) \rangle$ も考える．これらに対して，$(e-2)$-平面 $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^N$ を $\Lambda \cap (\mathrm{Cone}(u, X) \cup \langle w, T_u(X) \rangle) = \emptyset$ と取る．すると，$\langle u, \Lambda \rangle$ は X と接することなくただ一点 u で交わるので，その像 $\pi_\Lambda(X)$ の中で $\pi_\Lambda(u)$ は非特異な点となる.（このことにより，X と $\pi_\Lambda(X)$ は双有理となり，$\pi_\Lambda(X)$ は $\mathbb{P}^{n+1}$ の $\deg X$ 次の超曲面となっていることがわかる.）さらに，$\Lambda \cap \langle w, T_u(X) \rangle = \emptyset$ より，$\pi_\Lambda(w) \notin T_{\pi_\Lambda(u)}(\pi_\Lambda(X))$ ともなっている．従って，Λ を頂点集合とする $\pi_\Lambda(X)$ 上の錐 F_Λ は，u で非特異となり，その接空間

$T_u(F_\Lambda)$ は $\langle \Lambda, T_{\pi_\Lambda(u)}(\pi_\Lambda(X))\rangle$ である．$\pi_\Lambda(w) \notin T_{\pi_\Lambda(u)}(\pi_\Lambda(X))$ より，$w \notin T_u(F_\Lambda)$ となり，F_Λ が X を含み u で非特異で w を含まない超曲面となる．

2. 内点からの線形射影を用いて B_{d-e+1} を示せるか？

この章では，射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して，X の一般の内点からの線形射影により，B_{d-e+1} の成立を示せるかどうかを検討する．

アイデア. 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して，X の一般の点 $x_1, \ldots, x_{e-1} \in X$ が張る $(e-2)$-平面 $\Lambda^{e-2} := \langle x_1, \ldots, x_{e-1}\rangle \subseteq \mathbb{P}^N$ を中心とする射影 $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \to \mathbb{P}^{n+1}$ を考える．X の像の閉包 $\bar{X}_\Lambda := \overline{\pi_\Lambda(X \setminus \Lambda)}$（以下単に X の像という）が，$\mathbb{P}^{n+1}$ で $(d-e+1)$ 次超曲面となる．この超曲面を $\mathbb{P}^N$ へ引き戻したもの $F_\Lambda := \mathrm{Cone}(\Lambda, \bar{X}_\Lambda)$ は $\mathbb{P}^N$ の $(d-e+1)$ 次超曲面となる．

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Lambda^{e-2} & \subseteq & \mathbb{P}^N & \supseteq & X & \subseteq & F_\Lambda \\
 & & \pi_\Lambda \downarrow & & & \swarrow & \\
 & & \mathbb{P}^{n+1} & \supseteq & \bar{X}_\Lambda := \overline{\pi_\Lambda(X \setminus \Lambda)} & &
\end{array}
$$

そこで，$(e-1)$ コの点 $x_1, \ldots, x_{e-1}$ を X 上の点としていろいろと動かしてできる F_Λ により，X が切り取られるかどうかをを検討する．

問題. 上の F_Λ のみで X が切り出せるか？

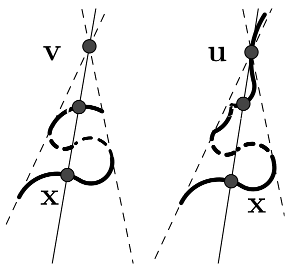
答えは，No で，その理由を以下で見ていく．

2.1. 非双有理中心点の集合 $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$.

次に定義する**非双有理中心点集合**と X とを，F_Λ 型の超曲面によっては分離できない．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(X) &:= \{v \in \mathbb{P}^N \setminus X \mid \text{一般の点 } x \in X \text{ に対して } l(X \cap \langle v, x\rangle) \geq 2\} \\
\mathcal{C}(X) &:= \{u \in \mathrm{Sm}\, X \mid \text{一般の点 } x \in X \text{ に対して } l(X \cap \langle u, x\rangle) \geq 3\}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{B}(X)$ を**非双有理外中心点の集合**，$\mathcal{C}(X)$ を**非双有理内中心点の集合**と呼ぶ（下図参照）．（$e \geq 2$ として考えているが，これらを特に $e = 1$ のとき，すなわち X が超曲面のときに考えると，$d \geq 2$ のとき $\mathcal{B}(X) = \mathbb{P}^N \setminus X$ であり，$d \geq 3$ のとき $\mathcal{C}(X) = \mathrm{Sm}\, X$ である．）$\mathcal{B}(X)$ は $\mathbb{P}^N \setminus X$ の閉集合であり，$\mathcal{C}(X)$ は $\mathrm{Sm}\, X$ の閉集合となっていることがわかる．さらに，$\mathcal{B}(X)$ の閉包 $\overline{\mathcal{B}(X)}$ は B.Segre によって研究されており，Segre ローカスとも呼ぶ（以下の節 2.6 参照）．



2.2. 非双有理中心点の集合が F_Λ 型の超曲面によっては分離できない理由.

次に $\mathcal{B}(X),\mathcal{C}(X)$ が F_Λ 型の超曲面によっては分離できない理由を見ていく.

補題. 射影多様体 $X(e \geq 2)$ の一般の $x_1,\ldots,x_{e-1}$ に対し，

(1) $X \cup \mathcal{B}(X) \subseteq F_{\langle x_1,\ldots,x_{e-1}\rangle}$ が成立する.

(2) $u \in \mathcal{C}(X)$ は，超曲面 $F_{\langle x_1,\ldots,x_{e-1}\rangle}$ の特異点である.（u で $T_u(X)$ を分離する $F_{\langle x_1,\ldots,x_{e-1}\rangle}$ 型の超曲面は存在しない.）

証明. (1). $v \in \mathcal{B}(X)$ を任意の点とする．このとき，X の一般の $x_1,\ldots,x_{e-1} \in X$ に対し，$(e-2)$-平面 $\Lambda^{e-2} := \langle x_1,\ldots,x_{e-1}\rangle \subseteq \mathbb{P}^N$ を中心とする射影 $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \to \mathbb{P}^{n+1}$ を考える．v は $\mathcal{B}(X)$ の点なので $\langle x_1, v\rangle \cap \overline{(X \setminus \{x_1\})} \neq \emptyset$ となるのでその像 $\pi_\Lambda(v)$ は $\pi_\Lambda(X \setminus \Lambda) \subseteq \bar{X}_\Lambda$ に含まれる．従って，v は $\bar{X}_\Lambda$ の $\mathbb{P}^N$ への引き戻し F_Λ に含まれる.

(2). u を $\mathcal{C}(X)$ の点とする．定義より $\langle x_1, u\rangle \cap \overline{(X \setminus \{x_1, u\})} \neq \emptyset$ となるので, 射影による像 $\pi_\Lambda(u)$ は X の像 $\bar{X}_\Lambda$ の特異点となる．従って，u はその引き戻しである超曲面 F_Λ の特異点となる. $\square$

2.3. B_{d-e+1} 型の結果.

次の定理により，非双有理中心点の集合 $\mathcal{B}(X),\mathcal{C}(X)$ を除くと，X を F_Λ 型の超曲面で分離できることがわかる.

定理. ([17]) 射影多様体 X について $e \geq 2$ と仮定する.

(1) 集合として $X \subseteq \mathrm{E}_{d-e+1}(X) \subseteq X \cup \mathcal{B}(X)$ が成立する.
（この部分は，既に Calabri,Ciliberto [5] と Sommese, Verschelde, Wampler [23] によって知られていた.）

(2) スキームとして $X = \mathrm{E}_{d-e+1}(X)$ が $\mathbb{P}^N \setminus (\mathcal{B}(X) \cup \mathcal{C}(X) \cup \operatorname{Sing} X)$ 上で成立する.

証明のためには次の事実が重要である

補題. 射影多様体 X について $e \geq 3$ と仮定する.

(1) 与えられた $v \notin \mathcal{B}(X)$ に対して, $x \in \mathrm{Sm}(X)$ を一般の点とする．このとき，$\pi_x(v) \notin \mathcal{B}(\overline{\pi_x(X \setminus \{x\})})$ が成立する.

(2) 与えられた $u \in \mathrm{Sm}(X) \setminus \mathcal{C}(X)$ に対して, $x \in \mathrm{Sm}(X)$ が一般の点とする．このとき，$\pi_x(u) \in \mathrm{Sm}(\overline{\pi_x(X \setminus \{x\})}) \setminus \mathcal{C}(\overline{\pi_x(X \setminus \{x\})})$ が成立する.

2.4. B_{d-e+1} へ向けての問題.

B_{d-e+1} 型の定理が得られたので，B_{d-e+1} の成立を調べるため，次の問題を設定し調べる.

問題.

(1) $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が空である X はあるか？

(2) $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が空でないとき，その次元はどのくらいで，その閉包はどのような性質を持つか？

(3) $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が空でない X はどのような特徴を持つか？特に，つぎの (4) を見据えて何か特徴を抽出できないか？

(4) 線形射影以外の方法で X を含む $(d-e+1)$ 次の超曲面を見つけることができるか？

それぞれの問いに対して，現在までにわかっていることを以下で見ていく.

2.5. $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ **の問題 (1).** $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が空である X はあるか？

第一歩として $\mathcal{B}(X) = \mathcal{C}(X) = \emptyset$ となる X をなるべくたくさん見つけたい．そうすればそのような多様体に対しては B_{d-e+1} は成立するからである．これに対して，次がわかる.

命題. 次の場合は $\mathcal{B}(X) = \mathcal{C}(X) = \emptyset$ となる．従って，次の場合に対して，集合として B_{d-e+1}，非特異な X に対してスキームとして B_{d-e+1} が成立する.

(1) X がある射影空間のベロネーゼ埋め込み $v_l(\mathbb{P}^m)(l \geq 2)$ に含まれるとき.

(2) $\Delta(X) = 0$ $(d = e+1)$ の射影多様体のとき.

(3) X が曲線上のスクロールで，$n-2$ 次元の頂点を持つ cone ではなく，R_1(regular in codimension 1) が成立するとき.

ほかにも沢山ありそうなので，$\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ をもつ射影多様体 X を特徴付けるための次のステップへ進む.

2.6. $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ **の問題 (2).** $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ の次元と形状.

$\mathcal{B}(X)$ の閉包 $\overline{\mathcal{B}(X)}$ については，既に Beniamino Segre による次の事実が知られている.

事実. (Beniamino Segre [22],[5]) 余次元 $e \geq 2$ の射影多様体 X に対し，$\mathcal{B}(X)$ の閉包 $\mathcal{B}(X)^-$ の既約成分 Γ について次が成立する.

- Γ は線形部分集合で $\dim \Gamma \leq n-1$ である.
- $\dim \overline{\pi_\Gamma(X \setminus \Gamma)} = \dim X - \dim \Gamma$ が成立する．特に，X は Γ を頂点とする $\overline{\pi_\Gamma(X \setminus \Gamma)}$ 上の錐 $\mathrm{Cone}(\Gamma, \overline{\pi_\Gamma(X \setminus \Gamma)})^{n+1}$ 上の余次元 1 の部分集合すなわち "因子" となっている.

注. 上の事実は $\mathrm{char}\, \mathbb{k} = 0$ の場合であるが，$\mathrm{char}\, \mathbb{k} = p > 0$ のときは Furukawa [10] の結果がある.

Segre の結果の証明のアイデアを使うと次がわかる.

定理. ([17]) X を余次元 $e \geq 2$ の射影多様体とする.

(1) $\mathcal{B}(X)$ の閉包 $\overline{\mathcal{B}(X)}$ の既約成分 Γ について $\dim(X \cap \Gamma) = \dim \Gamma - 1$ かつ $X \cap \Gamma \subseteq \mathrm{Sing}\, X$ が成立する．従って，$\dim \Gamma \leq \min\{n-1, \dim \mathrm{Sing}\, X + 1\}$ が成立する.

(2) $\mathcal{C}(X)$ の閉包 $\overline{\mathcal{C}(X)}$ の既約成分 Ψ は線型部分空間で，
$\dim\Psi \leq \min\{n-1, \dim \operatorname{Sing} X + 2\}$ が成立する．さらに
$\dim \overline{\pi_\Psi(X \setminus \Psi)} = \dim X - \dim \Psi$ が成立する．

特に X が非特異の場合には，$\dim\emptyset = -1$ である（と定義される）ので，次がわかる．

系. ([17]) X は非特異で $n \geq 2$ かつ $e \geq 2$ のとき，$\mathcal{B}(X)$ は高々有限集合で，$\mathcal{C}(X)$ は高々有限個の点と直線の和集合である．従って，これらを除くと，B_{d-e+1} が集合として，さらにスキームとして成立する

2.7. $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ **の問題 (3)．** $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ が空でない X はどのような特徴を持つか

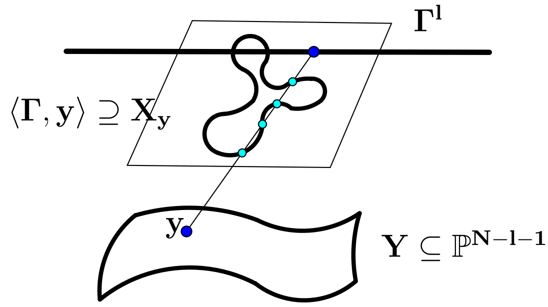
この節では，問題 (3) について得られた結果を述べる．その前に，まず概略を述べる．

Γ を $\bar{\mathcal{B}(X)}$ または $\bar{\mathcal{C}(X)}$ の既約成分とすると，X は $\operatorname{Cone}(\Gamma, \overline{\pi_\Gamma(X \setminus \Gamma)})$ の "因子" になっている．$\operatorname{Cone}(\Gamma, \overline{\pi_\Gamma(X \setminus \Gamma)})$ を非特異多様体上の射影束として実現するとその因子型がわかる．逆に，空集合でない $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ を持つ X の存在もわかる．

$\mathcal{C}(X)$ についてはさらに 2 つの type に分かれて，$\overline{\mathcal{C}(X)}$ の既約成分 Γ 上の Gauss map $\gamma : \Gamma \cap \operatorname{Sm} X \to \operatorname{Grass}(n, \mathbb{P}^N)$ が constant か non-constant かで構造が異なる．

特に，X が smooth のとき，$\mathcal{C}(X)$ に line 含まれる X の構造がわかるので，その line に沿った normal bundle の様子が分かる．この事実は，応用上で重要な役割をはたす．

以下の図は，Γ が直線で，X が $(n-1)$ 次元射影多様体 Y によってパラメトライズされた平面曲線 $X_y \subseteq \langle\Gamma, y\rangle \cong \mathbb{P}^2$ $(y \in Y)$ の族で，$\Gamma \subseteq \mathcal{B}(X)$ となっている．



定義. ([18]) $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ となる X の構成 (その 1) —Scroll divisor type $(\mu, 1)$

$n > l \geq 0$, $\mu \geq 2$ を任意の整数とする．Y を $(n-l)$ 次元非特異射影多様体で，次を満たすものを取る：

(1) 像と双有理な射 $\nu : Y \to \mathbb{P}^{N-l-1}$ が存在する，このとき $\mathcal{O}_Y(1) := \nu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-l-1}}(1)$ とおく；

(2) $H^0(Y, \mathcal{L}) \neq 0$ と $(\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_Y(1)^{n-l-1}) = 1$ を満たす直線束 $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} Y$ が存在する；

$\mathbf{F}_Y^\Gamma$ と $\tilde{\Gamma}$ を，Y 上の射影束 $\mathbf{F}_Y^\Gamma := \mathbb{P}_Y(\mathcal{O}_Y^{\oplus l} \oplus \mathcal{O}_Y(1)) \supseteq \tilde{\Gamma} := \mathbb{P}_Y(\mathcal{O}_Y^{\oplus l})$ と定義する．
$\varphi : \mathbf{F}_Y^\Gamma \to \mathbb{P}^N$ を，$|\mathcal{O}_{\mathbf{F}_Y^\Gamma}(1)|$ の部分線形束で定まり像と双有理な射と取る．

$\tilde{X} \in |\mathcal{O}_{\mathbf{F}_Y^\Gamma}(\mu) \otimes \tau^*\mathcal{L}|$ を，$G_{\tilde{X}} \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{F}_Y^\Gamma}(\mu) \otimes \tau^*\mathcal{L})$ で定まり $\tilde{\Gamma}$ と異なる既約かつ被約な因子で，ある $t \neq 0 \in H^0(Y,\mathcal{L})$ と $h \neq 0 \in H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(\mu))$ があって $G_{\tilde{X}}|\tilde{\Gamma} = t \cdot h \neq 0$ が成立し，さらに像 $\varphi(\tilde{X})$ と双有理となっているものを取る．このとき，像 $X := \varphi(\tilde{X})$ を **scroll divisor type**$(\mu, 1)$ と呼ぶ．$\Gamma := \varphi(\tilde{\Gamma})$ とおく．

$$
\begin{array}{ccccc}
\tilde{\Gamma} := \mathbb{P}_Y(\mathcal{O}_Y^{\oplus l}) & \subseteq & \mathbf{F}_Y^\Gamma := \mathbb{P}_Y(\mathcal{O}_Y^{\oplus l} \oplus \mathcal{O}_Y(1)) & \overset{\varphi}{\to} & \mathbb{P}^N \\
 & \swarrow \tau & \cup & & \cup \\
Y & & \tilde{X} & \overset{\mathrm{bir}}{\to} & X := \varphi(\tilde{X})
\end{array}
$$

命題. ([18]) 上の定義のもとで，$t \in H^0(Y,\mathcal{L})$ が Y 上の既約かつ被約な因子を定めるならば，$\Gamma \cap \mathrm{Sm}\, X = \Gamma \setminus V_+(h) \neq \emptyset$ で $\Gamma \cap \mathrm{Sm}\, X \subseteq \mathcal{C}(X)$ となる．

定義. ([18]) $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ となる X の構成 (その２) -Rational scroll divisor type $(\mu, 1)$

$n > l \geq 0$,$\mu \geq 2$ を任意の整数とする．$\mathcal{E} := \oplus_{i=l+1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ を $\mathbb{P}^1$ 上の階数 $n-l$ の ample ベクトル束とする．$\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma$ と $\tilde{\Gamma}$ を $\mathbb{P}^1$ 上の射影束 $\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus l} \oplus \mathcal{E}\right)$，$\tilde{\Gamma} := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus l}\right)$ とする．$\psi : \mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma \to \mathbb{P}^N$ を $|\mathcal{O}_{\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma}(1)|$ の部分線形束で定まり像と双有理な射とする．
$\tilde{X} \in |\mathcal{O}_{\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma}(\mu) \otimes \tau^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)|$ を $G_{\tilde{X}} \in H^0(\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma, \mathcal{O}_{\mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma}(\mu) \otimes \tau^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ で定まり既約かつ被約で ψ による像と双有理な因子とする．このとき，$X := \psi(\tilde{X})$ を **rational scroll divisor type**$(\mu, 1)$ と呼ぶ．直ちに $\deg X = \mu c_1(\mathcal{E}) + 1$ がわかる．

$$
\begin{array}{ccccc}
\tilde{\Gamma} := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus l}\right) & \subseteq & \mathbf{E}_\mathcal{E}^\Gamma := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus l} \oplus \mathcal{E}\right) & \overset{\psi}{\to} & \mathbb{P}^N \\
 & \swarrow \tau & \cup & & \cup \\
\mathbb{P}^1 & & \tilde{X} & \overset{\mathrm{bir}}{\to} & X := \psi(\tilde{X})
\end{array}
$$

命題. ([18]) 上の定義のもとで考える．$W_0, W_1, \ldots, W_l$ を Γ の斉次座標，s, t を $\mathbb{P}^1$ の斉次座標とする．$\tilde{\Gamma} \cong \Gamma \times \mathbb{P}^1$ なので，
$G_{\tilde{X}}|\tilde{\Gamma} \in H^0(\mathcal{O}_\Gamma(\mu)) \otimes_\Bbbk H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) (\cong H^0(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}(\mu) \otimes \tau^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)))$ と見なし，
$G_{\tilde{X}}|\tilde{\Gamma} = G_1 s + G_2 t$ $(G_1, G_2 \in H^0(\mathcal{O}_\Gamma(\mu)))$ と表すと $\Gamma \cap \mathrm{Sm}\, X = \Gamma \setminus V_+(G_1, G_2)$ が成立する．従って，$G_{\tilde{X}}|\tilde{\Gamma} \neq 0$ であることと $\Gamma \cap \mathrm{Sm}\, X \neq \emptyset$ は同値であり，この条件が満たされるとき $\Gamma \cap \mathrm{Sm}\, X \subseteq \mathcal{C}(X)$ が成り立つ．さらに，$\deg \mathrm{GCD}(G_1, G_2) < \mu$ であることと，ガウス写像 $\gamma : X \to \mathrm{Grass}(n, \mathbb{P}^N)$, $u \mapsto T_u(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ の Γ への制限 $\gamma|\Gamma$ が non-constant であることは同値である．

構造定理. 上の様に $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ となる射影多様体 X が構成されることがわかったが，逆に $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ となる射影多様体 X はこれしかないことが以下のようにわかる．ただし，$\gamma : X \to \mathrm{Grass}(n, \mathbb{P}^N), u \mapsto T_u(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ を Gauss map とする．

定理. ([18]) $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ と仮定し，Γ を $\overline{\mathcal{C}(X)}$ の既約成分とする．

- $\gamma|\Gamma$ が constant ($\dim \Gamma = 0$ を含む) ならば，X は scroll divisor type $(\mu, 1)$ で，$\dim \Gamma \leq \dim \mathrm{Sing}\, X + 1$ が成立する．
- $\gamma|\Gamma$ が non-constant (特に，$\dim \Gamma > 0$) ならば，X は rational scroll divisor type $(\mu, 1)$ で，$\dim \Gamma \leq \dim \mathrm{Sing}\, X + 2$ が成立する．

注. Y が rational scroll のときの scroll divisor type $(\mu, 1)$ から，rational scroll divisor type $(\mu, 1)$ へは，双有理写像があり，このときの X は，どちらの構成でも得られる．

注. 同様にして，$\mathcal{B}(X) \neq \emptyset$ となる射影多様体 X の構造定理が得られる ([18] 参照).

$\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{C}(X)$ の次元についての定理と構造定理により，非特異で $\dim \mathcal{C}(X) \geq 1$ となる射影多様体 X の特徴付けが得られる．

定理. ([18]) X を非特異で $e \geq 2$ かつ $\dim \mathcal{C}(X) \geq 1$ となる射影多様体と仮定する．このとき，$\dim \mathcal{C}(X) = 1$ であり，X は直線を頂点集合に持つ有理スクロール
$\mathbf{E}^{\Gamma}_{\mathcal{E}} := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{E}) \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1$ （$\mathcal{E}$ は，$\mathbb{P}^1$ 上の階数 $n-1$ の ample ベクトル束）の $(\mu, 1)$-型の因子 $(\mu \geq 2)$ である．

定義. (BoIlic [12]) 上の X で $(\mu \geq 1)$ となっているものを，**Roth 多様体**という．

2.8. $\mathcal{B}(X), \mathcal{C}(X)$ の問題 (4).

$\mathcal{B}(X)$ や $\mathcal{C}(X)$ を持つ射影多様体に対して，線形射影以外の方法で $(d-e+1)$ 次の超曲面を見つけられるか？

この問題については，まだほとんどよくわかっていない．しかし，非特異で $\dim \mathcal{C}(X) \geq 1$ として特徴づけられる Roth 多様体については部分的に次がわかる．

定理. ([20]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を **Roth 多様体**で，$e < a = c_1(\mathcal{E})$ を満たすと仮定する．このとき，X は $(d - e + ((1-e)\mu + a - 1))$-regular である．

注. $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を Roth 多様体で，$e < a = c_1(\mathcal{E})$ を満たし，さらに，$(1-e)\mu + a - 1 \leq 1$ の場合, C_{d-e+1} と B_{d-e+1} 成立が成立する．しかし，$(1-e)\mu + a - 1 \geq 2$ の場合これらが成立するかは今のところわからない．

2.9. 非双有理中心点の研究の応用.

この節では，常に X **は非特異**と仮定する．

定理. ([18]) $\mu : \tilde{\mathbb{P}}^N := \mathrm{Bl}_X(\mathbb{P}^N) \to \mathbb{P}^N$ を X を中心とするブローアップ，E を μ の例外因子，A を引き戻し $\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ とする．このとき，$(d-e+1)A - E$ は semiample 特に nef である．

上に， Bertram, Ein, Lazarsfeld [4] の論法を用いると, Bayer, Mumford [1] や Bertram, Ein, Lazarsfeld [4] の regularity 上限の改良が得られる．

系. ([18]) 非特異な射影多様体 X は，$(e(d-e)+1)$-regular である. すなわち，非特異な射影多様体に対して $C_{e(d-e)+1}$ が成立する．

注. 上の系は，Bertram, Ein, Lazarsfeld [4] の結果「X は $(ed - e + 1)$-regular である」の改良になっている．

任意の自然数 a に対して $\mathcal{I}_X^a$ が m-regular となる最小の整数 m を $\mathrm{reg}(\mathcal{I}_X^a)$ とおく．

系. ([18])(Asymptotic regularity 上限の改良) $\lim_{a \to +\infty} \dfrac{\mathrm{reg}(\mathcal{I}_X^a)}{a} \le d - e + 1$ が成立する.

注. 上の系は，Bertram, Ein, Lazarsfeld [4] の結果「$\lim_{a \to +\infty} \dfrac{\mathrm{reg}(\mathcal{I}_X^a)}{a} \le d$」の改良になっている.

3. 内点からの線形射影の二重点因子の POSITIVITY

前章では，射影多様体の内点からの線形射影を用いて定義方程式を構成したが，ここでは，射影多様体の内点からの線形射影の二重点因子について考察し，その応用を述べる.

3.1. 射影多様体の外点からの線形射影の二重点因子.

はじめに，射影多様体の外点からの線形射影の二重点因子についての Mumford の結果について再吟味する.

事実. (Bayer, Mumford [1]) X が非特異でその標準束を ω_X とする．このとき，直線束 $\mathcal{O}_X(d-n-2) \otimes \omega_X^{\vee}$ （これを**二重点因子**と呼ぶ）は大域的切断で生成される (spanned) である.

Mumford は，非特異射影多様体 X に対して，射影空間の一般の $(e-2)$-plane Λ を中心とする射影 $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^N \setminus \Lambda \to \mathbb{P}^{n+1}$ による像 $\bar{X} = \pi_\Lambda(X)$ と X との非同型集合 (non-isomorphic locus)$\mathbb{D}(\pi_\Lambda)$ について考察した．ただし，$\omega_{\bar{X}}^{\circ}$ は $\bar{X}$ の dualizing sheaf で，今の場合に $\bar{X}$ が超曲面なので，直線束になっている.

(1) $\mathbb{D}(\pi_\Lambda)$ は Λ の取り方によらず $|\mathcal{O}_X(d-n-2) \otimes \omega_X^{\vee}| = |\pi_{\Lambda,X}^{*}\omega_{\bar{X}}^{\circ} \otimes \omega_X^{\vee}|$ のメンバー，

(2) 任意の点 $x \in X$ に対し，一般の Λ を取れば射影 π_Λ は x で同型となる．すなわち，$x \notin \mathbb{D}(\pi_\Lambda)$ である.

が成立するので，上の**事実**が証明される.

ここでは，一般の内点からの線形射影を考えることで,「ある正の整数 ε に対して，$\mathcal{O}_X(d-n-2-\varepsilon) \otimes \omega_X^{\vee}$ は spanned が示せないか」考える．別の言い方をすれば，非特異射影多様体 X に対し，次の問題が考えられる.

問題. 直線束 $\mathcal{O}_X(d-n-2) \otimes \omega_X^{\vee}$ はより強い "positivity" を満たすか？

この方向の研究は，Bo Ilic により行われている.

事実. (Bo Ilic [12]) もし，$e \ge 2$ かつ，X が Roth 多様体でなければ，X の線形束 $|\mathcal{O}_X(d-n-2) \otimes \omega_X^{\vee}|$ は X 上の任意の異なる 2 点を分離する．特に，$\mathcal{O}_X(d-n-2) \otimes \omega_X^{\vee}$ は ample である.

注. (Bo Ilic [12]) で注意されているように，X が Roth 多様体のとき，直線 $L := \psi(\mathbb{P}(\mathcal{O}^{\oplus 2})) \subseteq X$ に対して，$\mathcal{O}_X(d-n-2) \otimes \omega_X^{\vee}|L \cong \mathcal{O}_L$ となる．従って，$\mathcal{O}_X(d-n-2) \otimes \omega_X^{\vee}$ のより強い positivity のためには，Roth 多様体を除いて考えなければならない.

3.2. 内点からの線形射影の二重点因子.

一般の内点からの線形射影を考えることで，$\bar{X}$ の次数は $d-e+1$ となるので，$\mathcal{O}_X(d-n-2)\otimes\omega_X^\vee$ ではなく，$\mathcal{O}_X((d-e+1)-n-2)\otimes\omega_X^\vee$ が spanned かどうかを考える．そのため，$x_1,\ldots,x_{e-1}$ を X の一般の点とし，それらの線形包 $\Lambda^{e-2}:=\langle x_1,\ldots,x_{e-1}\rangle$ からの線形射影を $\pi_\Lambda:\mathbb{P}^N\setminus\Lambda\to\mathbb{P}^{n+1}$，これによる X の像 $\pi_\Lambda(X\setminus\Lambda)$ の閉包を $\overline{\pi_\Lambda(X\setminus\Lambda)}$ とする．

$$\begin{array}{rccc}\pi_\Lambda: & \mathbb{P}^N\setminus\Lambda & \to & \mathbb{P}^{n+1}\\ & \cup & & \cup\\ \pi_{\Lambda,X}: & X\setminus\Lambda & \to & \overline{\pi_\Lambda(X\setminus\Lambda)}\end{array}$$

このとき，線形射影の X への制限 $\pi_{\Lambda,X}:X\setminus\Lambda\to\overline{\pi_\Lambda(X\setminus\Lambda)}$ について，次がわかる：

(1) $\pi_{\Lambda,X}$ の例外因子 $\mathrm{Exc}(\pi_{\Lambda,X})$ （すなわち，$\pi_{\Lambda,X}$ で次元の下がる因子の和) が空ならば，$\pi_{\Lambda,X}$ の同型でないローカスの閉包 $\mathbb{D}(\pi_{\Lambda,X})$ は effective 因子で $|\mathcal{O}_X((d-e+1)-n-2)-K_X|$ のメンバーである．

(2) 非双有理内中心点でない X の点 x （すなわち $x\in X\setminus\mathcal{C}(X)$）が与えられたとき，$x_1,\ldots,x_{e-1}$ を十分一般に選べば，$\pi_{\Lambda,X}$ は x で定義され局所的に同型となる．従って特に，$x\notin\mathbb{D}(\pi_{\Lambda,X})$ となる．(既に B_{d-e+1} 型の結果の補題でこの事実をみた)

これらを合わせると，中間的な結果として次が得られる．

命題. ([19]) X は非特異で $e\geq 2$ とする．$\pi_{\Lambda,X}$ の例外因子 $\mathrm{Exc}(\pi_{\Lambda,X})(\subseteq X)$ が空であると仮定する．このとき，$\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_X(d-e-n-1)\otimes\omega_X^\vee|\subseteq\mathcal{C}(X)$ となる．従って特に，$|\mathcal{O}_X(d-e-n)\otimes\omega_X^\vee|$ は $X\setminus\mathcal{C}(X)$ 上 very ample．さらに $\dim\mathcal{C}(X)\leq 0$ を仮定すると，$\mathcal{O}_X(d-e-n-1)\otimes\omega_X^\vee$ は semiample で，$\mathcal{O}_X(d-e-n)\otimes\omega_X^\vee$ は ample である．

上の命題により，

(1) $\dim\mathcal{C}(X)\geq 1$ となる射影多様体

(2) $\pi_{\Lambda,X}$ の例外因子 $\mathrm{Exc}(\pi_{\Lambda,X})(\subseteq X)$ が空でない射影多様体

を調べることが次の問題となる．(1) は 2.7 節で示したように **Roth 多様体**になることがわかっているので，残された問題は，(2) の多様体について調べることである．

3.3. $\pi_{\Lambda,X}$ の例外集合 $\mathrm{Exc}(\pi_{\Lambda,X})$ が空集合でない射影多様体.

(2) の多様体について調べるために次を定義をする．

定義. ([19]) 射影多様体 X **が条件** (E_m) **を満たす**とは，X の十分に一般の m 点 $(1\leq m\leq e-1)$ $x_1,\ldots,x_m$ に対して，その線形包 $\Lambda:=\langle x_1,\ldots,x_m\rangle$ からの線形射影 $\pi_{\Lambda,X}:X\setminus\Lambda\to\pi_{\Lambda,X}(X\setminus\Lambda)$ が例外因子（$\pi_{\Lambda,X}$ で次元の下がる因子）を持つことである．

例. 上で定義した，条件 (E_m) を満たす射影多様体には次のようなものがある．

- 曲線上のスクロールは (E_1) を満たす．
- ベロネーゼ曲面 $v_2(\mathbb{P}^2)\subseteq\mathbb{P}^5$ は (E_2) を満たす．

次の定理が示すように，$1 \leq m \leq e-1$ に対して (E_m) を満たす射影多様体は本質的に上の例以外に存在しない．

定理． ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ は**非特異とは限らない**射影多様体とする．

(1) $e \geq 2$ で，X は (E_1) を満たすと仮定する．このとき，X は線形部分空間 $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^N$ で覆われる．更に，X が非特異ならば，X は曲線上の射影束と射影同値となる．

(2) $e \geq 3$ で，X は (E_2) を満たし (E_1) は満たさないと仮定する．このとき，X は $(n-3)$-plane を頂点にもつ，２次ベロネーゼ曲面 $v_2(\mathbb{P}^2)$ 上の cone と射影同値となる．従って特に，X が非特異ならば，X は $v_2(\mathbb{P}^2)$ と射影同値となる..

(3) 整数 m $(3 \leq m \leq e-1)$ に対して，X が (E_m) を満たすことと，X が (E_1) を満たすことは同値である．

3.4. 内点からの線形射影の二重点因子の positivity.

上の結果をあわせると，内点からの線形射影の二重点因子の positivity について次の結果が得られる．

定理． ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ は非特異で，次の (1)-(3) とも射影同値でないと仮定する：

(1) $e \geq 2$ のときの，曲線上のスクロール ;

(2) $e = 3$ のときの，２次ベロネーゼ曲面 $v_2(\mathbb{P}^2)$;

(3) Roth 多様体.

このとき，$\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_X(d-n-e-1) \otimes \omega_X^\vee| \subseteq \mathcal{C}(X)$ となり，高々有限集合である．従って特に，$\mathcal{O}_X(d-n-e-1) \otimes \omega_X^\vee$ は semiample （すなわち十分ひねると spanned）で，$\mathcal{O}_X(d-n-e) \otimes \omega_X^\vee$ は ample である.

注． 上の定理において，(2) と (3) は結論が成立するために本当に除かなければならないが，(1) はすべて除く必要あるかどうかはわかっていない．

3.5. 二重点因子の positivity の応用.

3.4 の定理の系として，次がわかる．

系． ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を非退化な非特異射影多様体で，曲線上のスクロールと射影同値でないと仮定する．このとき，構造層 $\mathcal{O}_X$ は $(d-e)$-regular である．すなわち，$H^i(X, \mathcal{O}_X(d-e-i)) = 0$ $(\forall i > 0)$ が成立する．

注． regularity 予想「X は $(d-e+1)$-regular である」が成立することは，$\mathcal{O}_X$ が $(d-e)$-regular かつ $H^1(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d-e)) = 0$ が成立することと同値である．従って，上の系はその一部がいえたことになる．しかし，$H^1(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d-e)) = 0$ を示すことの方が難しいと思われている．

系． ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を非退化な非特異射影多様体で，3.4 の定理の (1) とも (3) とも射影同値でないと仮定する．このとき，

(1) $\Delta(X, \mathcal{O}_X(1)) \le n$ ならば，$\mathrm{Bs}\,|\omega_X^\vee|$ は高々有限集合である；

(2) $\Delta(X, \mathcal{O}_X(1)) < n$ ならば，$\omega_X^\vee$ は $X \setminus \mathcal{C}(X)$ 上で very ample であり，$\omega_X^\vee$ は ample on X である．

系. ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ は非退化な非特異射影多様体で次元 $n \ge 2$ で，3.4 の定理の (1) とも (3) とも射影同値でないと仮定する．このとき，

(1) $\kappa(X) \ge 0$ (i.e., $H^0(X, \omega_X^{\otimes l}) \ne 0\ \exists l > 0$) ならば $\Delta(X, \mathbb{P}^N) \ge n$ が成立する；

(2) $\Delta(X, \mathbb{P}^N) \ge \frac{2}{d}(g(X, \mathcal{O}_X(1)) - 1) + 1$ が成立する．

注. 上に関連して，Fukuma [9] によって，「$\dim_{\Bbbk} H^0(X, \omega_X) > 0$ のとき $\Delta(X, \mathcal{O}_X(1)) \ge \frac{n}{n+1}(\mathcal{O}_X(1)^n - 1)$ が成立する」ことが知られている．

系. ([19]) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ は非退化な非特異射影多様体で次元 $n \ge 2$ で，3.4 の定理の (1)-(3) と射影同値でないと仮定する．このとき，$\mathcal{O}_X(k)$ は，(N_{k-d+e})-property を満たす．特に，$\mathcal{O}_X(d-e)$ は，projectively normal である．

注. 上の系は，Ein,Lazarsfeld [7] の結果「$\mathcal{O}_X(k)$ は，(N_{k-d+1})-property を満たす」の改良になっている．

謝辞. この講演の機会を与えていただいたことに対してシンポジウム委員の先生方へ感謝いたします．本研究は JSPS 科研費 26400041 の助成を受けたものです．

References

[1] Dave Bayer and David Mumford. What can be computed in algebraic geometry? In *Computational algebraic geometry and commutative algebra (Cortona, 1991)*, Sympos. Math., XXXIV, pages 1–48. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[2] Marie-Amélie Bertin. On the regularity of varieties having an extremal secant line. *J. Reine Angew. Math.*, 545:167–181, 2002.

[3] Marie-Amélie Bertin. On singular varieties having an extremal secant line. *Comm. Algebra*, 34(3):893–909, 2006.

[4] Aaron Bertram, Lawrence Ein, and Robert Lazarsfeld. Vanishing theorems, a theorem of Severi, and the equations defining projective varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3):587–602, 1991.

[5] Alberto Calabri and Ciro Ciliberto. On special projections of varieties: epitome to a theorem of Beniamino Segre. *Adv. Geom.*, 1(1):97–106, 2001.

[6] L. Chiantini, N. Chiarli, and S. Greco. Bounding Castelnuovo-Mumford regularity for varieties with good general projections. *J. Pure Appl. Algebra*, 152(1-3):57–64, 2000. Commutative algebra, homological algebra and representation theory (Catania/Genoa/Rome, 1998).

[7] Lawrence Ein and Robert Lazarsfeld. Syzygies and Koszul cohomology of smooth projective varieties of arbitrary dimension. *Invent. Math.*, 111(1):51–67, 1993.

[8] David Eisenbud and Shiro Goto. Linear free resolutions and minimal multiplicity. *J. Algebra*, 88(1):89–133, 1984.

[9] Yoshiaki Fukuma. On the sectional geometric genus of quasi-polarized varieties. II. *Manuscripta Math.*, 113(2):211–237, 2004.

[10] Katsuhisa Furukawa. Defining ideal of the Segre locus in arbitrary characteristic. *J. Algebra*, 336:84–98, 2011.

[11] L. Gruson, R. Lazarsfeld, and C. Peskine. On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves. *Invent. Math.*, 72(3):491–506, 1983.

[12] Bo Ilic. Geometric properties of the double-point divisor. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(4):1643–1661, 1998.
[13] Sijong Kwak. Castelnuovo regularity for smooth subvarieties of dimensions 3 and 4. *J. Algebraic Geom.*, 7(1):195–206, 1998.
[14] Robert Lazarsfeld. A sharp Castelnuovo bound for smooth surfaces. *Duke Math. J.*, 55(2):423–429, 1987.
[15] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series.
[16] David Mumford. Varieties defined by quadratic equations. In *Questions on Algebraic Varieties (C.I.M.E., III Ciclo, Varenna, 1969)*, pages 29–100. Edizioni Cremonese, Rome, 1970.
[17] Atsushi Noma. Hypersurfaces cutting out a projective variety. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(9):4481–4495, 2010.
[18] Atsushi Noma. Projective varieties with nonbirational linear projections and applications. *Preprint*, 2011.
[19] Atsushi Noma. Generic inner projections of projective varieties and an application to the positivity of double point divisors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(9):4603–4623, 2014.
[20] Atsushi Noma. Regularity of projected roth varieties. *Preprint*, 2014.
[21] Henry C. Pinkham. A Castelnuovo bound for smooth surfaces. *Invent. Math.*, 83(2):321–332, 1986.
[22] Beniamino Segre. On the locus of points from which an algebraic variety is projected multiply. *Proceedings of the Phys.-Math. Soc. Japan*, 18(1):425–426, 1936.
[23] Andrew J. Sommese, Jan Verschelde, and Charles W. Wampler. Numerical irreducible decomposition using projections from points on the components. In *Symbolic computation: solving equations in algebra, geometry, and engineering (South Hadley, MA, 2000)*, volume 286 of *Contemp. Math.*, pages 37–51. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

Department of Mathematics, Yokohama National University, Yokohama 240-8501 Japan

E-mail address: noma@ynu.ac.jp