# 一般型代数曲面の多重標準写像と標準環

今野 一宏

大阪大学大学院理学研究科

## はじめに

代数学シンポジウムが記念すべき第 60 回を迎えた今年 (2015 年) は，小平邦彦先生の生誕 100 年にもあたり，二重の意味で喜ばしい年になりました．日本数学会では小平先生の業績を称えるために様々な事業が行われています．だからというわけではありませんが，小平先生のお仕事に少しだけ関係する話題を取り上げてみようと考えました．小平先生が一般型代数曲面の多重標準写像の研究に着手なさったのは，有名なコンパクト複素解析曲面の分類が完成したあとのことですから，先生の数多い著作や講義録から関連する文献を探してみても，次の 3 つくらいしか見つかりません．

[1] K. Kodaira, Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 170–192.

[2] 小平邦彦，代数曲面論，東大数学教室セミナリー・ノート 20, Tokyo, 1968（山島成穂 記）

[3] K. Kodaira, Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type II（飯高茂先生のホームページにあった）

[3] は結局出版されていませんし，[2] は [1] の解説であるとみなせば，[1] のみだと言ってよいのかも知れません．

以下では，[1] や [3] で証明された定理に加えて，一般型代数曲面の多重標準写像や標準環について現在までに知られている結果を紹介したいと思います．もちろん，すべてを網羅することはできません．例えば，正標数の話題には全く触れません．

## 1　復習：代数曲線の場合

代数曲面の話に入る前に，代数曲線の場合の諸結果を簡単に振り返る．2012 年に開催された第 57 回代数学シンポジウムの報告集に，大渕朗さん（徳島大）のすばらしい解説があるので，詳しくはそちらを参照されたい．

$C$ を種数 $g$ のコンパクト・リーマン面（非特異既約射影代数曲線 $/\mathbb{C}$）とすれば良く知られているように，

- $g = 0 \Leftrightarrow C$ はリーマン球面（射影直線 $\mathbb{P}^1$）
- $g = 1 \Leftrightarrow C$ は 1 次元複素トーラス（楕円曲線）

である．多重標準写像の立場からは，これらのケースは考えても意味が無いので，以下では常に $g \geq 2$ と仮定する．

$C$ から $\mathbb{P}^1$ への次数 2 の射 $\varphi : C \to \mathbb{P}^1$ があるとき，$C$ を**超楕円曲線**という．このような射は（存在するとしても）$\varphi$ と $\mathbb{P}^1$ の正則自己同型写像（一次分数変換）との合成を法として唯ひとつである．Riemann-Hurwitz の公式から，$\varphi$ は $\mathbb{P}^1$ 上の相異なる $2g+2$ 点で分岐することがわかる．$\mathbb{P}^1$ は単連結なので，その分岐 2 重被覆は分岐点によって決まる．一次分数変換によって，$\mathbb{P}^1$ 上の任意の異なる 3 点を $0, 1, \infty$ に写すことができるから，超楕円曲線の同型類は $2g+1$ 個の分岐点のうち残る $2g-1$ 個の点のもつ任意性に相当する自由度をもち，すなわち $2g-1$ 個の有効パラメータに依存する．他方，Teichmüler 理論によれば，種数 $g$ の代数曲線全体は $3g-3$ 個のパラメータに依存するので，$g \geq 3$ のときには超楕円曲線は（種数 $g$ の曲線全体の中で）極めて「稀な」曲線であることが了解される．（注：種数 2 の曲線は常に超楕円的である．）超楕円曲線でない大多数の曲線を**非超楕円曲線**と呼ぶ．

多重標準写像に関する結果を紹介しよう．いつものように $K_C$ によって $C$ 上の**標準直線束**または**標準因子**を表す．正則余接束であると言っても良い．どのテキストにも書いてあることだが，<u>$K_C$ が自由である</u> という事実は非常に重要である．ここに，直線束 $L$ が自由であるとは，任意の点 $p \in C$ に対して制限写像 $H^0(C, L) \to \mathbb{C}_p$ が全射であるとき（つまり $p$ で零にならないような $L$ の大域正則切断が見つかるとき）をいうのだった．すると，任意の正整数 $m$ に対して $mK_C$ $(= K_C^{\otimes m} = K_C$ の $m$ 個のテンソル積）も自動的に自由になる．$p \in C$ で零にならない $s \in H^0(C, K_C)$ をとって $s^m \in H^0(C, mK_C)$ を考えれば，$s^m$ も $p$ で零にならないからである．

$H^0(C, mK_C)$ の基底をひと組選び，それを一列に並べることによって定義される，射影空間への正則写像

$$\Phi_m : C \to \mathbb{P}^{P_m - 1}, \quad P_m = h^0(C, mK_C),$$

を $m$-標準写像といい，それらを総称して**多重標準写像**という．ここに $h^0(C, \mathcal{F}) = \dim H^0(C, \mathcal{F})$ である．$\Phi_m$ を通して $C$ がいつ $\mathbb{P}^{P_m - 1}$ の複素部分多様体になるか，すなわち，どんな $m$ に対して $\Phi_m$ が正則埋め込みになるか，という問題については次が知れれている．

- 標準写像 $\Phi_1$ が埋め込みである $\Leftrightarrow$ $C$ は非超楕円曲線である．（このとき任意の $m \geq 1$ に対して $\Phi_m$ は埋め込み．）
- $C$ が超楕円曲線のとき，$\Phi_1$ は分岐 2 重被覆 $C \to \mathbb{P}^1$ を経由し，像である $g-1$ 次有理正規曲線 ($\mathbb{P}^1$ の $g-1$ 次 Veronese 埋め込み) への 2 重被覆を与える．
- $C$ が種数 $g \geq 3$ の超楕円曲線ならば，$m \geq 2$ に対して $\Phi_m$ は埋め込みである．
- $C$ の種数が 2 のとき，$m \geq 3$ に対して $\Phi_m$ は埋め込みである．$\Phi_2$ は非特異平面 2 次曲線への 2 重被覆を与える．

$m$-標準写像が埋込みであるか否かは，代数的には $C$ の**標準環**，すなわち次数付き $\mathbb{C}$ 代数

$$R(C, K_C) := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(C, mK_C)$$

の極小生成系の次数を求める問題に翻訳される．

$C$ が超楕円曲線であるとき，$R(C, K_C)$ は

$\begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$ 次以下の元から成る生成系をもち，生成元の間の関係式は $\begin{cases} 6 & (g = 2) \\ 4 & (g \geq 3) \end{cases}$ 次以下である．

他方，$C$ が非超楕円曲線の場合には次が知られている．

- (M. Noether) $R(C, K_C)$ は 1 次部分で生成される．
- (Enriques-Babbage, Petri) 生成元の間の関係式は $\begin{cases} 4 & (g = 3) \\ 3 & (g \geq 4) \end{cases}$ 次以下である．
  もし 3 次以上の原始的関係式があれば，$C$ は**トリゴナル曲線**または非特異平面 5 次曲線である．ここに，$\mathbb{P}^1$ への次数 3 の射をもつとき，非超楕円曲線 $C$ をトリゴナル曲線という．ちなみに，種数 3 と 4 の非超楕円曲線はトリゴナルである．$g \geq 5$ のときには，超楕円曲線の場合と同様に，トリゴナル曲線は「稀な」曲線である．

従って，種数が 5 以上の「一般」の曲線に対して，$R(C, K_C)$ は 1 次で生成され，2 次の関係式をもつことになる．こういう事実をさらに一般化すれば，次のようになる．

- (Green's conjecture) 標準環の "余分な syzygies" と曲線の "特殊性" は密接に関係している．

(注) Federigo Enriques と Dennis William Babbage は，標準像 $\Phi_1(C)$ が集合論的に 2 次超曲面で切り取られることを示し，Max Noether の弟子である Karl Petri は，イデアル論的にそうであることを示した．Green 予想は，まだ完全には解決されていないようである．

## 2 一般型代数曲面 (before and around Kodaira's time)

この節からは代数曲面に話題を転じ，代数曲線に対する諸結果がどのように拡張されたのか (或いは，できなかったのか) を論じる．以下の記号を断りなしに用いる．

- $S$ は非特異既約な射影代数曲面 $/\mathbb{C}$,
- $K = K_S$ は $S$ の標準束あるいは標準因子,
- $p_g = p_g(S) := h^0(S, K)$ （幾何種数）, $q = q(S) := h^1(S, \mathcal{O}_S)$（不正則数）,
- 正整数 $m$ に対して $P_m(S) := h^0(S, mK_S)$（$m$-種数）.

19 世紀末から 20 世紀初頭にかけてのイタリア学派の活躍を抜きにして代数曲面論は語れない．Enriques が完成した代数曲面の双有理不変量による分類は，Guido Castelnuovo の有理性判定法 ($q = P_2 = 0 \Leftrightarrow S$ は有理曲面) がその発端であり，直接には Enriques の定理 ($P_{12} = 0 \Leftrightarrow S$ は線織面) に繋がる．もうひとつの重要な発見は，Castelnuovo の縮約定理であり，双有理的な分類を考える限りにおいて，曲面は**極小**であると仮定して良いことになる．ここで，$S$ が極小とは，$S$ 上に自己交点数が $-1$ であるような $\mathbb{P}^1$（$(-1)$ 曲線という）が存在しないことである．縮約定理は $S$ 上に $(-1)$ 曲線があれば，それを非特異点に縮約して $S$ と双有理同値な代数曲面が得られることを保証する．

約 100 年前 (1914 年) に発表された Enriques の分類は，大雑把には次の表に見られる通りである．これは約 50 年後に Shafarevich らのモスクワ学派によって現代的で厳密な証明を与えられ，小平邦彦によってコンパクト複素解析曲面全体にまで拡張されることになる．

| $P_{12}$ | $K^2$ | 名前 |
|---|---|---|
| 0 | | 有理曲面, 線織面 |
| 1 | 0 | K3 曲面, Enriques 曲面, 双楕円曲面, アーベル曲面 |
| $> 1$ | 0 | 楕円曲面 |
| $> 1$ | $> 0$ | 一般型曲面 |

この表にはいろいろな名前をもった曲面が現れるが，一番最後の行にある**一般型曲面**という呼称は他とは質が違う．つまり，特別に与えられた名誉の称号ではなく十把一絡げの代数曲面たちの総称である．代数曲線で言えば種数が 2 以上のものに相当する．

以下では，とくに断らない限り $S$ は 極小な一般型代数曲面 を表す．$(-1)$ 曲線をもたないことは言うまでもないが，数値的には $K_S^2 > 0$ かつ $\chi(\mathcal{O}_S) := p_g - q + 1 > 0$ で特徴づけられる．さらに，次のような不等式，等式が成立する．

- (Noether)　$K^2 \geq 2\chi - 6$.
- (Bogomolov-Miyaoka-Yau)　$K^2 \leq 9\chi$.
- (Pluri-genus formula)

$$P_m(S) := h^0(S, mK_S) = \binom{m}{2} K_S^2 + \chi \qquad (m \geq 2)$$

最初の Noether 不等式は古典だが，2 番めの不等式は 1977 年に証明された．最後の**多重種数公式**は [1] において厳密な証明が与えられた．

$H^0(S, mK_S)$ の基底を並べて定義する有理写像 $\Phi_m : S \dashrightarrow \mathbb{P}^{P_m - 1}$ を $m$ 標準写像と呼ぶのは，曲線の場合と同様である．Enriques 後の多重標準写像の組織的な研究は，人類史上最悪の不幸な出来事を挟んで Shafarevich らによって引き継がれた．次いで小平，Bombieri と連なる．代数曲線の場合と異なり一般型代数曲面の場合には $K_S$ は必ずしも自由ではなく，これが物事を煩雑にする大きな要因である．そこで，まず $mK_S$ が自由になるような $m$ の値を確定しなければいけない．また，いくら $m$ を大きくしても $\Phi_m$ は必ずしも埋め込みにはならないことにも注意が必要である．$S$ は極小な一般型曲面なので，$K_S$ はネフであるが，一般には交点数 $K_S C = 0$ となる既約曲線 $C$ が存在する．$K_S^2 > 0$ だから Hodge の指数定理より $C^2 < 0$ でなければならず，さらに $2p_a(C) - 2 = K_S C + C^2$ は $-2$ 以上の偶数なので $C^2 = -2$ かつ $C \simeq \mathbb{P}^1$ であることがわかる．すなわち $C$ は $(-2)$ 曲線である．このような既約曲線からなる連結集合は $\Phi_m$ によって 1 点に縮約されてしまうが，生じる特異点は Artin によって研究された有理 2 重点に他ならない．いずれにせよ，$\Phi_m$ に期待できる最良の性質は「双有理正則写像」である．

小平 [1] の主結果は次の通りである．

**定理 2.1** (Kodaira, 1968)**.** $m \geq 4$ ならば $mK_S$ は自由である．$m \geq 6$ ならば $\Phi_m$ は（像への）双有理正則写像である．

例 2.2 ($3K_S$ が自由でない例)．$Y = \{x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ を Fermat 型の 5 次曲面とする．$\epsilon = e^{2\pi\sqrt{-1}/5}$ とおき，$\mathbb{P}^3$ への $\mathbb{Z}_5$ 作用

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon^2 x_2 : \epsilon^3 x_3)$$

を考えると，これは $Y$ の正則自己同型を誘導し，$Y$ 上に固定点を持たないことがわかる．そこで $S = Y/\mathbb{Z}_5$ とおけば，これは $p_g = q = 0$, $K^2 = 1$ をみたす極小一般型曲面であり，発見者の名前を冠して **Godeaux 曲面**と呼ばれている．超曲面であることを利用すれば，$Y$ 上の $m$-標準形式は

$$\frac{F_m(x,y,z)}{(\partial f/\partial z)^m}(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)^m,$$

のように書くことができる．ここに，$(x,y,z) = (x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0)$, $F_m$ は $\deg F_m \leq m$ なる多項式で $f(x,y,z) = 1 + x^5 + y^5 + z^5$ は $Y$ の定義方程式である．これら $Y$ 上の $m$-標準形式のうちで $\mathbb{Z}_5$ 不変なものが $S$ 上の $m$-標準形式に相当する．従って $H^0(S, mK_S)$ の基底は $m + i + 2j + 3k \equiv 0 \pmod 5$ かつ $0 \leq i + j + k \leq m$ をみたす単項式 $x^i y^j z^k$ 全体と同一視される．それを $x_0, x_1, x_2$ の斉次単項式の形で与えると，簡単な計算から次のようになることがわかる．

- $m = 2$: $x_1x_2$, $x_0x_3$
- $m = 3$: $x_0x_1^2$, $x_0^2x_2$, $x_2^2x_3$, $x_1x_3^2$
- $m = 4$: $x_0^3x_1$, $x_1^3x_3$, $x_1^2x_2^2$, $x_0x_1x_2x_3$, $x_0x_2^3$, $x_0^2x_3^2$, $x_2x_3^3$

従って $3K_S$ は自由でなく 2 つの基点をもつ．実際，$m = 3$ の場合の基底は $x_0 = x_3 = 0$ および $x_1 = x_2 = 0$ を共通零点とするが，これらは $S$ 上の相異なる 2 点を定める．

よって，定理 2.1 における最初の主張は最適である．しかし，2 番めの $\Phi_m$ の双有理性に関する条件にはまだ改善の余地があった．これが多重標準写像の研究を継続し [3] を執筆する動機になったものと想像される．小平 [3] では次が示されている．

**定理 2.3** (Kodaira)**.** $m \geq 5$ ならば $\Phi_m$ は像の上への双有理正則写像である．さらに $K^2 \geq 2$ ならば $\Phi_4$ は双有理正則写像である．$K^2 \geq 3$ かつ $p_g \geq 3$ ならば $\Phi_3$ も双有理正則写像である．

筆者にはプレプリント [3] が書かれた年を特定できないが，数理解析研究所講究録 78 (1969), 66–75, に拠れば，1969 年 10 月には既に上記の結果が得られていたようである．Enrico Bombieri の論文

> [4] E. Bombieri, Canonical models of surfaces of general type, Publ. Math. I.H.E.S. 42 (1973), 171–219.

が世に出たのは，[3] が書かれた少し後なのだろう．序文で [3] の結果に言及している．

[4] の主定理を述べるために，記号と用語を少し補充する．$m$ 標準写像 $\Phi_m : S \dashrightarrow \mathbb{P}^{P_m-1}$ に対してその像を $X_m = \Phi_m(S)$ とおく．David Mumford は Oscar Zariski の論文 (The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Ann. of Math. **76** (1962), 560–615) の Appendix において，標準環

$$R(S, K_S) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(S, mK_S)$$

が有限生成であることを示した．$X = \mathrm{Proj}(R(S, K_S))$ を $S$ の**標準モデル**という．これは正規代数曲面であって，その特異点は既に注意したように高々有理 2 重点である．構成の仕方から，どんな正整数 $m$ に対しても自然な有理写像 $X \dashrightarrow X_m$ がある．

**定理 2.4** (Bombieri)**.** 極小一般型代数曲面 $S$ の標準モデル $X$ と $m$ 標準像 $X_m$ に対して次が成立する．

(1) $m \geq 5$ のとき $X \to X_m$ は同型射である．

(2) $K^2 \geq 2$ ならば $X \to X_4$ は同型射である．

(3) 次の場合を除けば，$m \geq 3$ に対して $X \to X_m$ は双有理写像である．

(i) $K^2 = 1$, $p_g = 2$, $m = 3, 4$.

(ii) $K^2 = 2$, $p_g = 3$, $m = 3$.

(iii) $K^2 = 1$, $p_g = 0$, $m = 3, 4$; $K^2 = 2$, $p_g = 0$, $m = 3$.

(4) $K^2 \geq 10$, $p_g \geq 6$ であって $S$ が種数 2 曲線のペンシルをもたなければ $X \to X_2$ は双有理写像である．

[1] と [3] における小平の証明は，多重標準因子の鎖連結性とコホモロジー群の消滅定理を用いたものだが，[4] における Bombieri の道具は，ネフかつ巨大な有効因子の数値的連結性および Ramanujam の消滅定理という，より洗練されたものであった．が，アイディア自体に本質的な差異はない．

数年後 (1976?) に，定理 2.4 の (3-iii) は除外されることになる．すなわち (3-iii) のような曲面についても「$m \geq 3$ ならば $X \dashrightarrow X_m$ は双有理である」ことが示された．$K^2 = 1$ は宮岡洋一，$K^2 = 2$ は Bombieri-Catanese による．しかし，(3-i) や (3-ii) を除外することはできない．これを見ておこう．

例 2.5 ($K^2 = 1, p_g = 2$). 極小一般型代数曲面 $S$ で $K^2 = 1$, $p_g = 2$ をみたすものを考える．このとき $q = 0$ である．多重種数公式を頼りに調べると，$H^0(S, mK_S)$ は次のような元をもつことがわかる．

- $m = 1$: $\boxed{x_0}$, $\boxed{x_1}$
- $m = 2$: $\mathrm{Sym}^3\{\vec{x}\}$, $\boxed{y}$
- $m = 3$: $\mathrm{Sym}^3\{\vec{x}\}$, $x_0 y$, $x_1 y$
- $m = 4$: $\mathrm{Sym}^4\{\vec{x}\}$, $\mathrm{Sym}^2\{\vec{x}\}y$, $y^2$
- $m = 5$: $\mathrm{Sym}^5\{\vec{x}\}$, $\mathrm{Sym}^3\{\vec{x}\}y$, $x_0 y$, $x_1 y$, $\boxed{z}$

  $\vdots$
- $m = 10$: $\mathrm{Sym}^{10}\{\vec{x}\}$, $\mathrm{Sym}^8\{\vec{x}\}y$, $\mathrm{Sym}^6\{\vec{x}\}y^2$, $\mathrm{Sym}^5\{\vec{x}\}z$, $\mathrm{Sym}^4\{\vec{x}\}y^3$, $\mathrm{Sym}^3\{\vec{x}\}yz$, $\mathrm{Sym}^2\{\vec{x}\}y^4$, $x_0 y^2 z$, $x_1 y^2 z$, $y^5$, $z^2$

ここに，四角で囲んだ元はその次数 $m$ で初めて現れるものを表し，$\mathrm{Sym}^k\{\vec{x}\}$ は $x_0, x_1$ の $k$ 次の斉次単項式全体を表す．$m = 10$ のとき，波下線を付した $z^2$ を除く元は 1 次独立であって $H^0(S, 10K_S)$ の基底をなす．従って，

1. $3K_S$ は自由でない．[$K^2 = 1$ なので $x_0, x_1$ は共通零点をもつから]
2. $\Phi_3$ と $\Phi_4$ は双有理ではない．[$m = 3, 4$ には $z$ がまだ現れないから]
3. 標準モデルは $\mathbb{P}(1, 1, 2, 5)$ の 10 次曲面である．[$m = 10$ において，$z^2$ は他の元の一次結合．以降の $m$ について調べても関係式はこれだけ]

例 2.6 ($K^2 = 2, p_g = 3$). 極小一般型代数曲面 $S$ で $K^2 = 2$, $p_g = 3$ をみたすものを考える．このとき $q = 0$ であり，多重種数公式を頼りに調べると $H^0(S, mK_S)$ は次のような元をもつことがわかる．

- $m = 1$: $\boxed{x_0}$, $\boxed{x_1}$, $\boxed{x_2}$
- $m = 2$: $\mathrm{Sym}^2\{\vec{x}\}$
- $m = 3$: $\mathrm{Sym}^3\{\vec{x}\}$
- $m = 4$: $\mathrm{Sym}^4\{\vec{x}\}$, $\boxed{y}$

$\vdots$

- $m = 8$: $\mathrm{Sym}^8\{\vec{x}\}$, $\mathrm{Sym}^4\{\vec{x}\}y$, $y^2$

四角の囲みなどが意味するところは，前の例と同じである．従って，$\Phi_3$ の像は，$\Phi_1$ の像である $\mathbb{P}^2$ の 3 次 Veronese 像に他ならない．とくに $\Phi_3$ は双有理ではない．$m = 8$ において，$y^2$ は他の元の一次結合で表せる．このことから，標準モデルは $\mathbb{P}(1,1,1,4)$ の 8 次曲面であることがわかる．

よって，$\Phi_m$ $(m \geq 3)$ に関する限り，次が最良の結果である．

**定理 2.7.** 極小一般型代数曲面に対して，次が成立する．

(1) $m \geq 5$ のとき $X \to X_m$ は同型である．

(2) $K^2 \geq 2$ ならば $X \to X_4$ は同型である．

(3) 次の場合を除けば，$m \geq 3$ に対して $X \to X_m$ は双有理写像である．

(i) $K^2 = 1$, $p_g = 2$, $m = 3, 4$.

(ii) $K^2 = 2$, $p_g = 3$, $m = 3$.

*注意 2.8.* $S$ が種数 2 曲線のペンシル $\{D\}$ をもてば $X \to X_2$ は双有理にならない．$D$ は種数 2 なので，$K_S|_D$ は次数 2 以下の特殊因子である．よって $2K_S|_D$ は埋込みを与えず，実際に $D$ の像は $\mathbb{P}^1$ である．この場合には，従って，$X_2$ は無数の有理曲線を含むことになり，一般型曲面である $S$ とは双有理になり得ない．同様のことは，基点がある種数 3 曲線のペンシル $\{D\}$ をもつ $S$ に対しても言える．

$X \to X_2$ が双有理でないような $S$ は，20 世紀末からヨーロッパを中心に精力的に研究されており，現在では分類がほぼ完成している．中心的なメンバーは Rita Pardini, Margarida Mendes Lopes, Ciro Ciliberto, Fabrizio Catanese とその弟子たちである．

## 3 一般型代数曲面 (after Kodaira, Bombieri)

一般型代数曲面全般に関して言えば，1970 年代には目覚ましい進展を見せた．堀川穎二による Noether 直線付近に不変量をもつ曲面の構造研究，David Gieseker によるモジュライ空間の構成，宮岡洋一による Miyaoka-Yau の不等式の確立など，枚挙にいとまがない．80 年代に入ると Ulf Persson によって「一般型曲面の地誌学」の考え方が導入され，Xiao Gang がそれを強力に推進した．Xiao は一般型代数曲面の正則自己同型群の位数に上限を与えた直ぐ後に，代数幾何学の研究をやめてしまった．その後，$\Phi_2$ が双有理

でない曲面の分類に力が注がれたことは，既に触れた通りである．

話を多重標準写像や標準環に限定すれば，小平・Bombieri の定理がほぼ決定的だったため，定理 2.7 のような改良や $\Phi_2$ が非双有理な曲面の決定問題はあったものの，残された課題はそう多くはない．しかし，歩みが完全に止まってしまったわけではない．

多重標準写像の双有理性の代数的対応物は標準環の生成元である．これに関しては，期待される通りの結果が証明された：

**定理 3.1** (Ciliberto, 1983)**.** 高々有限個の族に属する $S$ を除いて，標準環 $R(S, K_S)$ は 5 次以下の元で生成される．

また $mK_S$ がいつ自由になるかについては，より精密な結果が得られた：

**定理 3.2** (Francia, Reider)**.** 次が成立する．

(1) $p_g = 0$ かつ $K_S^2 \leq 4$ である場合を除き，$2K_S$ は自由である．

(2) $K_S^2 \geq 2$ ならば $3K_S$ は自由である．

とりわけ Igor Reider のアプローチは画期的であった．彼はベクトル束に関する Bogomolov instability theorem を巧みに用いることによって，[5] において次の定理を証明した．さらに，それを適用して小平・Bombieri の定理に別証明を与えたのである．

**定理 3.3** (Reider, 1988)**.** $L$ を非特異既約射影代数曲面 $S$ 上のネフ直線束とする．

(1) $L^2 \geq 5$ のとき，$p$ が $|K_S + L|$ の基点ならば，つぎのような有効因子 $E \ni p$ が存在する．

(i) $LE = 0$ かつ $E^2 = -1$, または

(ii) $LE = 1$ かつ $E^2 = 0$.

(2) $L^2 \geq 10$ のとき，2 点 $p$ と $q$ が $|K_S + L|$ によって分離されなければ，つぎのような有効因子 $E \ni p, q$ が存在する．

(i) $LE = 0$ かつ $E^2 = -1, -2$，または

(ii) $LE = 1$ かつ $E^2 = -1, 0$，または

(iii) $LE = 2$ かつ $E^2 = 0$.

定理を $L = (m-1)K_S, m \geq 2$ に対して適用する．$K_S C + C^2$ は常に偶数なので，(1) における例外的な $E$ は許されない．(2) の $E$ として許されるのは (i) 有理 2 重点の基本サイクル，または (ii) $m = 2$ で $E$ は $(-1)$ 楕円尾，または (iii) $m = 2$ で $E$ は算術種数

2，の場合だけである．(2-iii) は小平・Bombieri の定理における「種数 2 曲線のペンシル」を一般化したものと言える．実は，後者 2 つは Paolo Francia による $2K_S$ の研究において既に障害を引き起こす曲線として扱われていた．そういう事情で，現在では **Francia cycle** と呼ばれている．Reider の定理が出現したので，Francia は自身の結果を暫くの間公表しなかった．周囲のすすめに応じて彼が論文を世に出したのは 1991 年のことである．

[5] I. Reider, Vector bundles on rank 2 and linear systems on algebraic surfaces, Ann. of Math. **127** (1988), 309–316.

[6] P. Francia, On the base points of the bicanonical system, in: Problems in the theory of surfaces and their classification (Cortona, 1988), pp. 141–150, Sympos. Math., XXXII, Academic Press, London, 1991.

Francia と Reider の結果 (定理 3.2) を考慮すれば，最初から $2K_S$ が自由だと仮定してもそれほど大きな損失はない．この仮定のもと，Ciliberto の定理 (定理 3.1) は少しだけ精密にできる：

**定理 3.4** (K, 2008)**.** $S$ を極小な一般型代数曲面で $2K_S$ が自由なものとする．このとき，次が成立する．

(1) $R(S, K_S)$ は 5 次以下の元で生成され，関係式は 10 次以下である．

(2) $q(S) = 0$ のとき，$(p_g, K^2) = (2, 1), (0, 3)$ の場合を除けば $R(S, K_S)$ は 4 次以下の元で生成され，関係式は 8 次以下である．

既に例 2.6 で見たように，(2) において $(p_g, K^2) = (2, 1)$ は良く知られた例外で，$R(S, K_S)$ には 5 次の生成元と 10 次の関係式があった．他方，$(p_g, K^2) = (0, 3)$ のほうは実際に除かなければいけないのかどうかはっきりしない．この場合 $R(S, K_S)$ の生成元は 4 次までに取れるのだが，9 次の関係式は必要かも知れない．

定理 3.4 は，Mark Green が構築した Koszul cohomology の一般論に乗せて次の 2 つの補題を示し，それで取り逃がした曲面についてはさらに $\Phi_2$ の様子を詳しく調べることによって証明される．詳細は

[7] K. Konno, Relations in the canonical algebras on surfaces, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **120** (2008), 227–261

にある．

**補題 3.5** (generators)**.** $2K_S$ が自由のとき，かけ算写像

$$H^0(S,2K_S)\otimes H^0(S,(m-2)K_S)\to H^0(S,mK_S)$$

は，次の場合に全射である．

(1) $m>7$.

(2) $m=7$ かつ $K_S^2+p_g(S)-q(S)\geq 3$.

(3) $m=6$ かつ $K_S^2\geq q(S)+2$.

(4) $m=5$, $q(S)=0$ かつ $\Phi_2$ の像は最小次数の曲面ではない．

**補題 3.6** (relations)**.** $2K_S$ が自由のとき，Koszul 複体

$$\begin{aligned}\bigwedge^2 H^0(S,2K_S)\otimes H^0(S,(m-4)K_S)\to\\ H^0(S,2K_S)\otimes H^0(S,(m-2)K_S)\to H^0(S,mK_S)\end{aligned}$$

は，次の場合に（中間項で）完全である．

(1) $m>9$,

(2) $m=9$ かつ $K_S^2+p_g(S)-q(S)\geq 4$,

(3) $m=8$ かつ $K_S^2\geq q(S)+3$.

# 4　Francia サイクルと 1-2-3 問題

小平・Bombieri の定理を眺めていると，次のことが証明できそうに思えてくる．

問題 4.1 (1-2-3 問題). 有限個の族に属する $S$ を除けば，$R(S,K_S)$ は 3 次以下の元で生成され，関係式は 6 次以下である．

3 次の生成元が必要になる最大の理由は，$K_S$ が通常は自由でないことにある．$K_S$ が自由ではなくて $2K_S$ や $3K_S$ は自由であるという状態が普通であることは，定理 3.2 から容易に想像できよう．このとき，かけ算写像

$$H^0(S,K_S)\otimes H^0(S,2K_S)\to H^0(S,3K_S)$$

は，明らかに全射になり得ない．$K_S$ が自由でないので像は必ず共通零点をもつが，$3K_S$ は自由だからである．また，第 1 節で見たように，種数 2 曲線の標準環には 3 次の生成元と 6 次の関係式があった．従って，仮に $K_S$ が自由であっても，$S$ が種数 2 曲線をファ

イバーとするファイバー曲面の場合には，$R(S, K_S)$ にはやはり 3 次の生成元が必要になる．こういった曲面の実例は，Noether 直線上に大量に見出すことができる．そういうわけで，上の問題は考え得る最良の結果を問うていると言うことができる．

実は，局所的な場合や半大域的な場合（2 次元正規特異点や代数曲線束の場合）には，対応する問題への解答が既にあって，ほぼ肯定的である．この辺りは，1999 年の第 44 回代数学シンポジウム報告集に報告した通りである．よって尚更，大域的な場合にも同様の結論が成り立つかどうかに興味を惹かれるわけだが，話はそう簡単ではない．

定義 4.2. 次のいずれかをみたす数値的連結な有効因子 $D$ をFrancia cycle という．

- $K_S D = 1$ かつ $D^2 = -1$ (すなわち $(-1)$ 楕円尾).
- $K_S D = 2$ かつ $D^2 = 0$.

Reider の定理の直後に言及した曲線である．

$K_S$ の大域正則切断が全て，ある Francia cycle 上で恒等的に零になってしまうと，3 次までの生成元では足りなくなる．すなわち：

**主張 4.3.** Francia cycle $D \subset \mathrm{Bs}|K_S|$ ならば，$R(S, K_S)$ は 4 次の生成元をもつ．

*Proof.* そうでなければ，$\mathrm{Sym}^2 H^0(2K_S) \to H^0(4K_S)$ および $H^0(K_S) \otimes H^0(3K_S) \to H^0(4K_S)$ という 2 つのかけ算写像の像は $H^0(S, 4K_S)$ 全体を生成するはずである．$D$ に制限する．$D \subset \mathrm{Bs}|K_S|$ だから $H^0(K_S)$ は $D$ 上零である．よって $\mathrm{Sym}^2 H^0(2K_S)|_D \to H^0(4K_S)|_D$ が全射でなければならないが，$\Phi_4$ は $(-2)$ 曲線を縮約するだけなので，容易にわかるようにこれは不可能である． □

こういう困った現象が起こらなければ良いのだが，$(-1)$ 楕円尾が標準系の固定部分に入ってくるような実例は割合簡単に構成できてしまう．例えば：

[8] K. Konno and M. Mendes Lopes, On a question of Miles Reid, Manuscripta Math. **100** (1999), 81–86.

そこで，問題を若干修正する．

問題 4.4. もし標準系の固定部分が Francia cycle を含まなければ，$R(S, K_S)$ は 1-2-3 property をもつか？（もちろん有限個の族を除いて）

要するに，悪さをするのは Francia cycle だけだと言いたいのだが，残念ながらこの問題への解答はまだ得られていない．既知の結果の中で最も一般的なものでも，次の程度で

ある．

**定理 4.5** (K)**.** $S$ を $p_g(S) \geq 2$, $q(S) = 0$ かつ $K_S^2 \geq 3$ をみたす極小一般型代数曲面とする．また，$|K_S| = |M| + Z$ を標準系の可動部分 $|M|$ と固定部分 $Z$ への分解とするとき，$|M|$ は既約なメンバーを含むものとする．このとき，以下の条件 (1), (2) のいずれかがみたされれば，$R(S, K_S)$ は 3 次以下の元で生成され，関係式は 6 次以下である．

(1) $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ （$Z = 0$ でも可）.

(2) $Z$ は 2 次元正規特異点の基本サイクルの非交和であって，$(-1)$ 楕円尾を含まない．

注意 4.6. $p_g \geq 3$ のとき $|M|$ が既約なメンバーを含むことと $|M|$ が定める有理写像の像が曲面であることは同値である．従って，この部分は「標準写像が像の上に generically finite である」と言い換えても良い．特異点との関連で言えば (1) が成り立つための十分条件は「$Z$ が有理特異点の解消の例外集合にサポートをもつ」ことである．そういうわけで，定理の主張は「固定部分 $Z$ 上の交点形式が半負定値で，$Z$ は Francia cycle を含まない」という条件下で成立するのではないかと思われる．

$Z$ が有理 2 重点の解消の例外集合にサポートをもつ場合（標準モデルの標準系が高々基点しかもたない場合）は，Miles Ried によって証明された．上の定理はその拡張にあたる．

注意 4.7. 一般型代数曲面の標準系の固定部分について一般的に言えることは，ほとんど何もない．この問題についても，正規特異点の解消空間や代数曲線束の場合には解答がわかっていて，相対標準系の固定部分は

- (正規特異点)　有理特異点に縮約できる．
- (代数曲線束)　有理特異点または弱楕円型特異点に縮約できる．後者は重複ファイバーにおいてのみ起こる．

これらに関する文献はそれぞれ：


[9] K. Konno, On the fixed loci of the canonical systems over normal surface singularities, Asian J. of Math. **12** (2008), 449–464.

[10] K. Konno, Canonical fixed parts of fibred algebraic surfaces, Tohoku Math. J. **62** (2010), 117–136.