CYLINDERS IN DEL PEZZO FIBRATIONS

岸本　崇 (埼玉大学・理学部)

Abstract. 与えられた射影多様体に含まれるシリンダーの存在は，その射影多様体上の適当なアフィン錐への１次元ユニポテント代数群 $\mathbb{G}_a$ の有効作用の存在に翻訳されることが知られている．この報告では，(任意次元の)del Pezzo fibration $\pi : V \to W$ について，どのような状況下で V は π に垂直なシリンダーを含むのかという問題についての結果を述べる．尚この報告での結果は，Adrien Dubouloz 氏 (Université de Bourgogne) との共同研究によるものである．

1. 動機と問題

1.1. タイトルにもあるシリンダー (cylinder) とは，適当な代数多様体 Z を用いて $Z \times \mathbb{A}^1$ という形状をしているものである．このような非常にシンプルな幾何学的対象を敢えて考える１つの理由・動機付けをまずは述べたいと思う．

1.2. Flenner-Zaidenberg の問題. Flenner-Zaidenberg は 2003 年に次の具体的な問題を提起した (cf. [FZ]):

問題 1.1. アフィン代数多様体:

$$\{\, x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0 \,\} \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[x, y, z, u]),$$

には有効な $\mathbb{G}_a$-作用が存在するか？

もともと問題 1.1 は特異点の視点から提起された．より正確に述べると，[FZ, Theorem 0.3] に於いて次の事柄が示された:

定理 1.2. (cf. [FZ, Theorem 0.3]) V を複素数体 $\mathbb{C}$ 上に定義された代数多様体とし，$v \in V$ を孤立 Cohen-Macaulay 特異点とする．この $v \in V$ が次の性質 $(*)$ を満たしているとする:

$(*)$　V の Zariski 開集合 $U \subseteq V$ が存在して，U の一般の点 $u \in U$ に対して，V の中で閉な有理曲線 $C_u \subseteq V$ で $u \in C_u$ かつ $v \notin C_u$ を満たすものが存在する．

このとき，$v \in V$ は有理特異点である．

1.3. 問題 1.1 に挙げたアフィン代数多様体:

$$X := \{\, x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0 \,\} \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[x, y, z, u]),$$

に立ち戻ってみる．仮に X に有理的ではない特異点が存在したとすると，上述した定理 1.2 によって X は有効 $\mathbb{G}_a$-作用を持たないことが分かる．しかし X は原点 $\mathbf{o}$ でのみ特異点をもち，しかも $\mathbf{o} \in X$ は標準特異点，特に有理特異点であることが分かる．従って，問題 1.1 を考察するにあたって別のアプローチを模索する必要がある．ところで，X は Fermat 型３次曲面:

$$Y := \{\, x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0 \,\} \subseteq \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}} = \mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[x, y, z, u]),$$

上の反標準偏極なアフィン錐に同型，つまり:

$$X \cong \mathrm{Spec}\Big(\bigoplus_{m \geqq 0} H^0(Y, m(-K_Y)) \Big)$$

と見なすことができる．この視点を考慮して一般に次の定義をする．

1.4. H-偏極シリンダーの存在と H-偏極アフィン錐への $\mathbb{G}_a$-作用の存在.

定義 1.3. (V, H) を正規射影多様体 V とその上の豊富 $\mathbb{Q}$-因子 H の対とする．V のアフィン開集合 $U \subseteq V$ は次の条件 $(**)$ を満たすときに **H-偏極シリンダー (H-polar cylinder)** と呼ぶ:

$(**)$　適当な有効 $\mathbb{Q}$-因子 $\Delta \in \mathbb{Q}_+[H] \subseteq \mathrm{Pic}(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が存在して，$U = V \backslash \mathrm{Supp}(\Delta) \cong Z \times \mathbb{A}^1$ となっている[1]．

この研究は科学研究費補助金・基盤研究 (C):15K04805 の援助を受けて行った．

[1]ここで H は豊富であるので，Z はアフィン代数多様体である．

わざわざ定義 1.3 を準備した理由は，次の結果にある:

定理 1.4. (cf. [KPZ$_2$]) (V,H) を正規射影多様体 V とその上の豊富 $\mathbb{Q}$-因子 H の対とする．$A_m := H^0(V,\lfloor mH\rfloor)$ $(m \geqq 0)$ として，$A^{(e)} := \bigoplus_{m\geqq 0} A_{em}$ とおく．このとき，適当な $e \geqq 1$ が存在して $\mathrm{Spec}\,(A^{(e)})$ が有効 $\mathbb{G}_a$-作用を持つための必要十分条件は V が H-偏極シリンダーを含むことである．

1.5. del Pezzo 曲面内の反標準偏極シリンダーについて． 定理 1.4 によって，問題 1.1 は Fermat 型３次曲面 (次数３の del Pezzo 曲面) Y 内の $(-K_Y)$-偏極シリンダーの存在に帰着されることになる．この方向の結果，より一般に次数の低い del Pezzo 曲面内の反標準偏極シリンダーの存在について次の結果が知られている．

定理 1.5. (cf. [KPZ$_3$], [CPW]) S を次数が $(-K_S{}^2) \leqq 3$ である非特異 del Pezzo 曲面とする．このとき，S は $(-K_S)$-偏極シリンダーを含まない．

注意 1.6. 標数ゼロの代数閉体上に定義された次数が４以上の del Pezzo 曲面は反標準偏極シリンダーを含む (cf. [KPZ$_1$])．しかし代数閉体でない場合には，たとえ有理点を持っていたとしても必ずしも反標準偏極シリンダーを含むとは限らない (cf. 定理 2.1)．

注意 1.7. 次数が３以下であっても，特異点を持っているような del Pezzo 曲面である場合には反標準偏極シリンダーを含む場合がある．例えば，

$$Y = \{\, yu^2 + z(xz + y^2) = 0 \,\} \subseteq \mathbb{P}^3$$

を考えると，Y は $[1:0:0:0]$ で E_6-型の特異点を持つ次数３の del Pezzo 曲面であるが，

$$\Delta := \{\, u = 0 \,\}|_Y \sim -K_Y$$

の補集合は $Y\backslash\Delta \cong \mathbb{A}^2$ であるので Y は $(-K_Y)$-偏極シリンダーを含む．

1.6. 定理 1.4 と定理 1.5 によって，次数が３以下の任意の非特異 del Pezzo 曲面 S と正整数 $\forall e \geqq 1$ に対して，その上の反標準偏極アフィン錘:

$$\mathrm{Spec}\Big(\bigoplus_{m\geqq 0} H^0(S, me(-K_S))\Big)$$

は有効 $\mathbb{G}_a$-作用を持たないことが分かる．特に，問題 1.1 のアフィン代数多様体:

$$\{\, x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0 \,\} \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[x,y,z,u])$$

は有効 $\mathbb{G}_a$-作用を有さないことが帰結される．

1.7. 上述した問題 1.1 の解決へのアプローチ方法にあるように，ある種のアフィン代数多様体 (アフィン錘) へのユニポテント代数群作用の存在を，付随する偏極多様体に含まれる偏極シリンダーの存在に帰着することができる．ここで定理 1.4 について幾つか注意をする:

注意 1.8. Y を非特異射影多様体とする．

(1) 一般には Y の偏極 (Y,H) の選び方に応じて，H-偏極シリンダーは存在したり存在しなかったりする．例えば定理 1.5 により次数が $d = (-K_Y{}^2) \leqq 3$ の非特異 del Pezzo 曲面 S は $(-K_Y)$-偏極シリンダーは含まない．一方，Y 上のコニック $C \subseteq S$ を１つとってくるとそれは基底点自由な線形束 $|C|$ を与え，一般ファイバーが $\mathbb{P}^1$ であるファイブレーション:

$$\varphi = \Phi_{|C|} : Y \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

を与える．φ は $(8-d)$ 個の特異ファイバー $F_1, \cdots, F_{8-d}$ を持っていて，それぞれ横断的に交差する２つの (-1)-曲線から構成される．一方，Tsen の定理により φ はセクションを持つのでその１つを Γ とする．各特異ファイバー F_i の Γ と交わる成分を L_i とする．また F を非特異ファイバーとしてとってくる．このとき:

$$\Gamma \cup F \cup L_1 \cup \cdots \cup L_{8-d}$$

に台をもつような豊富因子 Δ を見つけることができる．構成方法より Y は Δ-偏極シリンダーをもつ．

(2) Y のピカール数 $\varrho(Y)$ が１であるときには，Y 上の全ての有効 $\mathbb{Q}$-因子は $\mathbb{Q}$-線形同値で同一視して互いに定数倍であるので，Y 上の適当な偏極アフィン錘に有効 $\mathbb{G}_a$-作用が存在するかどうかはもっぱら Y に関する性質である．つまり，Y が１つでもシリンダーを含むかどうかが問題となる．

(3) Y を $\varrho(Y)=1$ の Fano 多様体とする．$\dim(Y)=2$ のときには，$Y\cong\mathbb{P}^2$ であり，Y は明らかにシリンダー (というかアフィン平面 $\mathbb{A}^2$) を含む．$\dim(Y)=3$ のときには状況は複雑になるが，シリンダーとして最も理想的な３次元アフィン空間 $\mathbb{A}^3$ を含む場合には，そのような Y と補集合 $Y\backslash\mathbb{A}^3$ の分類は知られている (cf. [Fur], [FN_1, FN_2], [Pro])．一方，$\mathbb{A}^3$ ではないようなシリンダーを含む $\varrho(Y)=1$ の３次元 Fano 多様体の完全な分類は知られていない．ただし，以下のような $\mathbb{A}^3$ ではないシリンダーを含む族は知られている:

定理 1.9. (cf. [KPZ_4]) Y を $\varrho(Y)=1$ で Fano 指数が１の３次元非特異 Fano 多様体とし，その種数:

$$g(Y)=\frac{1}{2}(-K_Y^3)+1$$

は９または１０とする．もしも Y 上の直線をパラメトライズする Hilbert スキームの成分が非特異でなければ[2]，Y は ($\mathbb{A}^3$ と同型でないような) シリンダーを含む．さらに，このように非特異でない直線の Hilbert スキームを持つような $\varrho=1$, Fano 指数１，種数９または１０の３次元 Fano 多様体は，それぞれのモジュライの中で余次元１である．

(4) たとえ $\dim(Y)=2$ の場合でも，ピカール数 $\varrho(Y)$ が２以上であるときには Y に含まれるシリンダーを分類することは難しい．例えば，$\varrho(Y)=2$ の場合を考えてみる．Y がシリンダーを含むとすると Y は森ファイバー空間でないといけないので，Y は非特異射影曲線 C 上の $\mathbb{P}^1$-束:

$$\pi : Y \longrightarrow C$$

の構造がある．Tsen の定理によって π はセクションを持つ．$\Gamma\subseteq Y$ を１つのセクションとする．このとき，必要に応じて π のファイバー $l_1,\cdots,l_r$ を選んで:

$$Y\backslash(\Gamma\cup l_1\cup\cdots\cup l_r)$$

をシリンダーとすることができる．C が非有理であれば，Y 内のシリンダーはすべてこのようにして得られることは Lüroth の定理によって容易に分かるが，一方，$C\cong\mathbb{P}^1$ のとき，つまり Y が Hirzebruch 曲面であるときには Y に含まれるシリンダーは必ずしも上記のようにして得られるとは限らない (cf. [Bre], [FI])．

1.8. 注意 1.8, (4) で述べたように，２次元の森ファイバー空間の例である Hirzebruch 曲面 $\pi:\Sigma_m\to\mathbb{P}^1$ の場合であっても，Σ_m 内のアフィン平面 $\Sigma_m\supseteq U\cong\mathbb{A}^2$ で制限 $\pi|_U$ が $\mathbb{A}^1$-ファイブレーションを与えないものが存在する．従って Σ_m に含まれるシリンダーを分類するということは既に複雑な問題である．しかし，π と両立できる，つまり π の制限が $\mathbb{A}^1$-ファイブレーションを与えるようなシリンダーは容易に記述できる．この状況を考慮して，ピカール数が２以上の高次元の森ファイバー空間の場合であっても，例えば del Pezzo ファイブレーションの場合にそのファイブレーション構造と両立するようなシリンダーであればある程度明示的に記述できるのではないかと期待できる．ここでファイブレーション構造と両立するシリンダーということの意味をはっきりさせておく．これについてはより一般的な設定で定義できるが，ここでは del Pezzo ファイブレーションの場合に限定をして定義をする:

定義 1.10. V を $\mathbb{Q}$-分解的な端末特異点のみを持つ射影多様体として，V には del Pezzo ファイブレーション:

$$\pi : V \longrightarrow W$$

の構造があるとする[3]．V の開集合 $U\subseteq V$ が π に関して**垂直な $\mathbb{A}^1$-シリンダー**であるとは次の２つの条件 (i), (ii) を満たしているときに言う:

(i) U は $\mathbb{A}^1$-シリンダー $U\cong Z\times\mathbb{A}^1$ である，

[2] Y 上の曲線 $l\subseteq Y$ は $(-K_Y\cdot l)=1$ を満たすとき**直線**と呼ばれる．Y 上の直線 $l\subseteq Y$ は (a) $\mathscr{N}_{l/Y}\cong\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ または (b) $\mathscr{N}_{l/Y}\cong\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ を満たすが，l に対応する Hilbert スキームの点が非特異であることと l が (a) のタイプであることは同値である．

[3] つまり π は $\overline{\mathrm{NE}}(V)$ の単射線の収縮として得られ，π の一般閉ファイバーは非特異 del Pezzo 曲面である．

(ii) 一般閉ファイバーが既約な曲線であるような射 $g: Z \longrightarrow W$ が存在して:

$$\pi|_U = g \circ \mathrm{pr}_Z$$

と分解される.

一方, V の開集合 $U \subseteq V$ が π に関して**垂直な $\mathbb{A}^2$-シリンダー**であるとは次の 2 つの条件 (i)', (ii)' を満たしているときに言う:

(i)' U は $\mathbb{A}^2$-シリンダー $U \cong Z \times \mathbb{A}^2$ である,

(ii)' Z は W の開集合であり, $\pi|_U = \mathrm{pr}_Z$ が成り立つ.

この定義 1.10 の用語に従えば, Hirzebruch 曲面 $\pi : \Sigma_m \to \mathbb{P}^1$ の場合, π に関して垂直な $\mathbb{A}^1$-シリンダーは存在して, それは π の適当なセクション Γ と適当なファイバー $l_1, \cdots, l_r$ の補集合として得られる. このような考察を一般次元の del Pezzo ファイブレーションに置き換えるとどうなるのか？という問題が今回のメインテーマである. つまり次の問題である:

問題 1.11. $\pi : V \to W$ を (任意次元の)del Pezzo ファイブレーションとする. このとき, どのような状況下で V は π に関して垂直な $\mathbb{A}^n$-シリンダー $(n = 1, 2)$ を含むのか？

2. 主結果

2.1. 問題 1.11 に関する結果を述べる.

定理 2.1. (cf. [DK$_2$]) $\pi : V \to W$ を del Pezzo ファイブレーションとし, $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ を π の次数とする[4]. $\eta \in W$ を生成点, $K = \mathbb{C}(\eta)$ を W の有理関数体, そして π の生成ファイバーを $V_\eta = \pi^*(\eta) \subseteq V$ とおく. このとき:

(1) $d \leqq 4 \implies$ V は π に垂直な $\mathbb{A}^n$-シリンダーを含まない.

(2) $d = 5, 6 \implies$ V は π に垂直な $\mathbb{A}^2$-シリンダーを含まない.

(3) $d = 5, 6$ であり, V_η が K-有理点を持っている $\implies$ V は π に垂直な $\mathbb{A}^1$-シリンダーを含む.

(4) $d = 8, 9$ であり, V_η が K-有理点を持っている $\implies$ V は π に垂直な $\mathbb{A}^2$-シリンダーを含む.

注意 2.2. 定理 2.1, (3), (4) に於いては V_η が K-有理点を持っているという条件を課している. しかし V が 3 次元の del Pezzo ファイブレーションである場合, つまり W が曲線である場合には, Tsen の定理により K は C_1-体であるので, V_η は自動的に K-有理点をもつ. 従って, 定理 2.1 の主張は必要十分条件になる. 結果的にこの場合には, del Pezzo ファイブレーション $\pi : V \to W$ が π に垂直なシリンダーを含むかどうかは, もっぱら π の次数で分かるということになる (cf. 定理 2.3).

注意 2.2 で言及したように, V が 3 次元の場合には定理 2.1 は次のように結果を改善することができる:

定理 2.3. (cf. [DK$_2$]) $\pi : V \to W$ を 3 次元の del Pezzo ファイブレーションとし, $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ を π の次数とする. このとき:

(1) $d \leqq 4 \iff$ V は π に垂直な $\mathbb{A}^n$-シリンダーを含まない.

(2) $d = 5, 6 \iff$ V は π に垂直な $\mathbb{A}^2$-シリンダーを含まないが, 一方, V は π に垂直な $\mathbb{A}^1$-シリンダーを含む.

(3) $d = 8, 9 \iff$ V は π に垂直な $\mathbb{A}^2$-シリンダーを含む.

2.2. 定理 2.1, 2.3 は $\pi : V \to W$ に関して垂直なシリンダーに関する結果であり, 特に π の次数が 4 以下の場合にはそのようなシリンダーは含まないことが分かるが, 一方, π に関して垂直ではないようなシリンダーについては次数が 4 以下であっても存在する可能性はある. しかしたとえ V が 3 次元の場合であっても π に関して垂直でないようなシリンダーを分類することは非常に難しいと思われる. それは Hirzebruch 曲面へのアフィン平面 $\mathbb{A}^2$ の埋め込みを分類することが既に難しいことよりも想像はできる.

[4] π の一般閉ファイバーの del Pezzo 曲面の次数 d のことを π の次数ということにする. または, π の生成ファイバー V_η を考えると V_η は $K := \mathbb{C}(W) = \mathbb{C}(\eta)$ 上に定義された del Pezzo 曲面になるが, その次数 $(-K_{V_\eta}^2)$ が d であると言っても同じことである. 今の場合, π は単射線の収縮として得られているので, 生成ファイバーの K 上のピカール数は $\varrho_K(V_\eta) = 1$ であることに注意する. 特に V_η は K 上に極小であるので, $d \neq 7$ である (cf. [Ma]).

分類自体は困難であるが，次の結果は次数が 4 以下の 3 次元の del Pezzo ファイブレーションの場合であっても，垂直でないシリンダー (というか $\mathbb{A}^3$) を含むような例を構成できることを主張している．

定理 2.4. (cf. [DK$_1$]) 各 $d \in \{1,2,3,4\}$ に対して，次数 d の 3 次元 del Pezzo ファイブレーション $\pi : V \to \mathbb{P}^1$ で 3 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^3$ を (π に関して垂直でないように) 含むものが存在する．

例 2.5. 後に定理 2.9，命題 2.10 に於いてより一般的な結果を述べるが，例えば次数 $d = 1$ の del Pezzo ファイブレーション $\pi : V \to \mathbb{P}^1$ で $\mathbb{A}^3$ を含む例は次のようにして構成される．

$$S := \{\, xy^5 + z^3 + u^2 = 0 \,\} \subseteq \mathbb{P} := \mathbb{P}(1,1,2,3) = \mathrm{Proj}\,(\mathbb{C}[x,y,z,u])$$

なる次数 1 の正規 del Pezzo 曲面を考えて，$\mathscr{L}$ を S と $6H$ で生成される $\mathbb{P}$ 上の線形束とする．ここで H は $x = 0$ で定義される超平面である．このとき $\mathscr{L}$ の基底点集合 $\mathrm{Bs}\,\mathscr{L}$ は:

$$C := \mathrm{Bs}\,\mathscr{L} = \{\, x = z^3 + u^2 = 0 \,\}$$

で定義される特異有理曲線である．S は $[1:0:0:0]$ に於いて E_8-型の特異点をもっているが，これは C 上にはない．また，$\mathscr{L}$ の一般メンバーは次数 1 の非特異 del Pezzo 曲面であることは容易に確かめられる．さて，$\mathrm{Bs}\,\mathscr{L}$ は C 及びその無限小近傍曲線を中心とする 6 回のブローアップで解消される．それを:

$$\sigma : \widetilde{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

としておき，解消された線形束 $\widetilde{\mathscr{L}} := \sigma_*^{-1}\mathscr{L}$ によって定義される射:

$$\widetilde{\rho} : \widetilde{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

に相対的に極小モデルプログラムを実行する．その 1 つを:

$$\varphi : \widetilde{\mathbb{P}} \dashrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}'$$

としておく．σ は C およびその無限小近傍曲線に於けるブローアップの合成であるので，$\widetilde{\mathbb{P}}$ は $\mathbb{P}\backslash H \cong \mathbb{A}^3$ を含んでいる．自明ではないが，この構成で鍵となる次の事実を証明することができる．

補題 2.6. $\widetilde{\rho}$ に相対的などのような極小モデルプログラム $\varphi : \widetilde{\mathbb{P}} \dashrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}'$ を選択しても，3 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^3 \cong \widetilde{\mathbb{P}}\backslash\sigma^{-1}(H) \subseteq \widetilde{\mathbb{P}}$ は φ を経由して保たれる．つまり，φ の過程で起こる全ての因子収縮射とフリップは $\mathbb{A}^3$ の外側で起こる．

更に，$\widetilde{\rho}$ に相対的な極小モデルプログラムの最終地点 $\widetilde{\mathbb{P}}'$ は $\widetilde{\rho}$ により誘導される射:

$$\widetilde{\rho}' : \widetilde{\mathbb{P}}' \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad \widetilde{\rho}' \circ \varphi = \widetilde{\rho}$$

を備えているが，次の事実も証明することができる:

補題 2.7. $\widetilde{\rho}' : \widetilde{\mathbb{P}}' \to \mathbb{P}^1$ は次数 1 の del Pezzo ファイブレーションである．

[補題 2.7 の証明の概略]　補題 2.6 の証明の際にも必要となる情報であるが，σ の最後のブローアップの例外因子は $\widetilde{\rho}$ のファイバーには含まれないが，それ以外の σ-例外因子は全て $6H$ に対応する $\widetilde{\mathscr{L}}$ のメンバーに含まれる．そして，$\widetilde{\mathbb{P}}$ の特異点は全てそのメンバー内に含まれている．$S \in \mathscr{L}$ に対応する $\widetilde{\mathscr{L}}$ のメンバーを $\widetilde{S}$ としておく．S は C に沿って Cartier であるので，$\widetilde{S} \cong S$ である．特に，$\widetilde{S}$ のピカール数 $\varrho(\widetilde{S})$ は $\varrho(S)$ に等しくそれは 1 である．更に，非自明であるが，φ を経由して $\widetilde{S}$ は影響を受けない．従って固有変換 $\widetilde{S}' := \varphi_*(\widetilde{S})$ のピカール数も 1 である．いま仮に $\widetilde{\rho}'$ が del Pezzo ファイブレーションでないとすると，$\widetilde{\rho}'$ は:

$$\widetilde{\rho}' = h \circ g : \widetilde{\mathbb{P}}' \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{h} \mathbb{P}^1$$

と分解される．ここで，$g : \widetilde{\mathbb{P}}' \to Y'$ は森コニックバンドルである．すると $Q := \widetilde{\rho}'(\widetilde{S}') \in \mathbb{P}^1$ として，

$$\widetilde{S}' = g^*\big(h^*(Q)\big)$$

が成り立つが，$\varrho(\widetilde{S}') = 1$ であるのでこれは矛盾である．□

補題 2.6, 2.7 によって，3 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^3$ を含む次数 1 の del Pezzo ファイブレーション $\widetilde{\rho}' : \widetilde{\mathbb{P}}' \to \mathbb{P}^1$ を得ることができた．また，このシリンダーが $\widetilde{\rho}'$ に関して垂直でないことは定理 2.3 により分かる．

2.3. 例 2.5 では 3 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^3$ を含む次数 1 の del Pezzo ファイブレーションの例を挙げたが, 実はもっと一般的に $\mathbb{A}^3$ を含む次数 4 以下の del Pezzo ファイブレーションを系統的に構成することができる．結果を述べるために少しだけ記号と事実を準備しておく．

記号 2.8. S を次数 $d = (-K_S{}^2)$ が 3 以下の非特異 del Pezzo 曲面とする．よく知られているように, $d = 1$ のときには S は $\mathbb{P}(1,1,2,3)$ の中の次数 6 の超曲面, $d = 2$ のときには $\mathbb{P}(1,1,1,2)$ の中の次数 4 の超曲面, $d = 3$ のときには $\mathbb{P}^3$ の中の次数 3 の超曲面として実現される．記号の簡略化のために $\mathbb{P}$ という記号を:

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}(1,1,2,3) \quad (d=1), \quad \mathbb{P}(1,1,1,2) \quad (d=2), \quad \mathbb{P}^3 \quad (d=3)$$

の意味で用いる．また e を S の $\mathbb{P}$ の中での次数として:

$$e := 6 \quad (d=1), \quad 4 \quad (d=2), \quad 3 \quad (d=3)$$

とする．$H \in |\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1)|$ を超平面とし, $\mathscr{L}$ を S と eH で生成される $\mathbb{P}$ 上の線形束とする．このとき次の 3 つの性質を満たす $\mathscr{L}$ の基底点集合 $\mathrm{Bs}\,\mathscr{L} = H \cap S$ の解消:

$$\sigma : \widetilde{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathbb{P}$$

と解消された $\widetilde{\mathbb{P}}$ 上の線形束 $\widetilde{\mathscr{L}} := \sigma_*^{-1}\mathscr{L}$ で定義される射:

$$\widetilde{\rho} : \widetilde{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

が存在することが知られている:

(a) $\widetilde{\mathbb{P}}$ は高々$\mathbb{Q}$-分解的端末特異点を持つ．更に, $\widetilde{\mathbb{P}}$ の特異点の集合は eH に対応する $\widetilde{\mathscr{L}}$ のメンバー $\widetilde{\rho}^*(\infty)$ に含まれる．

(b) σ は $\mathrm{Bs}\,\mathscr{L}$ の各既約成分及びその無限小近傍曲線に於ける有限回のブローアップと必要に応じて $\mathbb{Q}$-分解化の合成として得られる．

(c) $\widetilde{\mathscr{L}}$ の $\widetilde{\rho}^*(\infty)$ 以外のメンバーに σ を制限したものは, その像との間の同型を与えている．

このとき, $\widetilde{\mathbb{P}}$ からスタートする極小モデルプログラムを $\widetilde{\rho} : \widetilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^1$ に相対的に実行して, その 1 つを:

$$(*) \quad \varphi : \widetilde{\mathbb{P}} \dashrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}'$$

とする．$(*)$ は $\widetilde{\rho}$ に相対的であるので, 帰結である $\widetilde{\mathbb{P}}'$ は $\widetilde{\rho}$ より誘導される射:

$$\widetilde{\rho}' : \widetilde{\mathbb{P}}' \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad \widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}' \circ \varphi$$

を備えている．

定理 2.9. (cf. [DK$_1$]) 記号・設定は上の通りとする．このとき次の事柄が成り立つ:

(1) $\widetilde{\rho}$ に相対的などのような極小モデルプログラム $\varphi : \widetilde{\mathbb{P}} \dashrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}'$ を経由しても, 3 次元アフィン空間 $\widetilde{\mathbb{P}} \backslash \sigma^{-1}(H) \cong \mathbb{P} \backslash H \cong \mathbb{A}^3$ は保たれる．従って, $\widetilde{\mathbb{P}}'$ は $\mathbb{A}^3$ を含む．

(2) もし $H \cap S$ が既約であるときには[5], $\widetilde{\rho}' : \widetilde{\mathbb{P}}' \to \mathbb{P}^1$ は次数が d の del Pezzo ファイブレーションである．

(3) もし $d = 2$ で $H \cap S$ が可約であれば, $\widetilde{\rho}' : \widetilde{\mathbb{P}}' \to \mathbb{P}^1$ は次数が $d + 1 = 3$ の del Pezzo ファイブレーションである．

(4) もし $H \cap S$ が 3 つの既約成分から構成されていれば[6], $\widetilde{\mathbb{P}}'$ はコニックバンドルの構造を備えている．

---

[5] $d = 1$ のときには, どのような $H \in |\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1)|$ であっても, $H \cap S$ は既約である．

[6] このような状況は $d = 3$ のときに限られる．

2.4. 上の定理 2.9 によって，各 $d \in \{1,2,3\}$ に対して次数が d の del Pezzo ファイブレーション:

$$\widetilde{\rho}' : \widetilde{\mathbb{P}}' \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

で $\widetilde{\rho}'$ に関して垂直でない 3 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^3$ を含むものを構成することができる．定理 2.4 を保証するには，残る $d=4$ の例を構成する必要がある．これは次の結果を用いて具体的に構成することができる:

命題 2.10. (cf. [DK$_1$]) 記号・設定は記号 2.8 の $d=3$ の場合とする．もし $\mathbb{P}$ 上の線形束 $\mathscr{L}$ の基底点集合 $\mathrm{Bs}\,\mathscr{L}$ が直線とコニックの和であるとすると，相対的極小モデルプログラム $\varphi : \widetilde{\mathbb{P}} \dashrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}'$ の最終地点 $\widetilde{\rho}' : \widetilde{\mathbb{P}}' \to \mathbb{P}^1$ は次数が 4 の del Pezzo ファイブレーションになっている．

定理 2.9, (1) と命題 2.10 を併せることにより，$\mathbb{A}^3$ を含む次数 4 の del Pezzo ファイブレーションも構成できることになる．

3. 定理 2.1 の証明の概略

3.1. ここでは定理 2.1 の証明の概略を述べる．ここで定理 2.1 の設定を振り返っておく:

$$\pi : V \longrightarrow W$$

を del Pezzo ファイブレーションとする．$\eta \in W$ を生成点，$K := \mathbb{C}(\eta) = \mathbb{C}(W)$ を W の有理関数体，そして $V_\eta := \pi^*(\eta) \subseteq V$ を π の生成ファイバーとする．また:

$$d = (-K_{V_\eta}^2) \in \{1,2,3,4,5,6,8,9\}$$

を π の次数とする．定理 2.1 を証明するにあたって，生成ファイバー V_η に関する次の結果が重要になる．

命題 3.1. (1) V が π に垂直な $\mathbb{A}^1$-シリンダーを含む為の必要十分条件は，V_η が $\mathbb{A}^1_K$-シリンダーを含むことである．

(2) V が π に垂直な $\mathbb{A}^2$-シリンダーを含む為の必要十分条件は，V_η がアフィン平面 $\mathbb{A}^2_K$ を含むことである．

命題 3.1 により，定理 2.1 は体 K 上 Picard 数が 1 の del Pezzo 曲面 V_η の幾何学に帰着される．以下 del Pezzo ファイブレーションの次数 d に応じて個別に議論する．

3.2. $d \leqq 3$ のケース. このケースは定理 1.5 と命題 3.1 を用いれば簡単に証明できる．実際に，もし V が π に垂直な $\mathbb{A}^1$-シリンダーを含んだとすると，命題 3.1 によって π の生成ファイバー V_η は $\mathbb{A}^1_K$-シリンダー:

$$V_\eta \supseteq U_\eta \cong Z_\eta \times \mathbb{A}^1_K$$

を含む．ここで，Z_η は K 上に定義されたアフィン代数曲線である．補集合:

$$\Delta_\eta := V_\eta \backslash U_\eta$$

は K 上に定義された因子である．一方，$\varrho_K(V_\eta) = 1$ であるので，

$$\mathrm{Pic}_K\,(V_\eta) \cong \mathbb{Z}[-K_{V_\eta}]$$

となっている．とくに:

$$\Delta_\eta \sim m(-K_{V_\eta}) \quad (m \geqq 1)$$

と表される．しかしこのとき K の代数閉包 $\overline{K}$ に係数拡大した $V_\eta \otimes \overline{K}$ は $(-K_{V_\eta \otimes \overline{K}})$-偏極シリンダー $U_\eta \otimes \overline{K}$ を含むので定理 1.5 に矛盾である．

3.3. $d=4$ のケース. 実は定理 2.1 の主張の中で最も面倒な部分は，$d=4$ のケースに V が $\pi : V \to W$ に垂直な $\mathbb{A}^1$-シリンダーを含まないことを示すところである．3.2 での $d \leqq 3$ の場合には本質部分は次数が 3 以下の非特異 del Pezzo 曲面は反標準偏極シリンダーを含まないという定理 1.5 である．一方，標数ゼロの**代数閉体**上に定義された次数 4 の非特異 del Pezzo 曲面は反標準偏極シリンダーを含む (cf. [KPZ$_1$])．従って，$d=4$ の場合に π に垂直な $\mathbb{A}^1$-シリンダーが存在しないことを証明するには，3.2 とは異なった議論をしなくてはならない．詳細はここでは述べないが，アイデアとしては代数閉体ではない $K = \mathbb{C}(\eta)$ 上の Sarkisov プログラムを用いる (cf. [DK$_2$])．

3.4. $d \geqq 5$ のケース. ここでは del Pezzo ファイブレーション $\pi : V \to W$ の次数は $d \geqq 5$ とし，生成ファイバー V_η は K-有理点をもっているとする．$d = 5, 6$ のときには，V_η に含まれる $(\mathbb{A}^1_*)_K \times \mathbb{A}^1_K$ を具体的に構成し，一方で $\mathbb{A}^2_K$ は含まないことを別の議論で示す．$d = 8, 9$ のときには，V_η に含まれる $\mathbb{A}^2_K$ を具体的に構成する．そして命題 3.1 によって定理 2.1 の (2), (3), (4) の証明は完了する．以下では $d = 5$ の場合に限定をして，どのようにして生成ファイバー V_η に含まれる $\mathbb{A}^1_K$-シリンダー $(\mathbb{A}^1_*)_K \times \mathbb{A}^1_K$ を構成するのかについてと，どのようにして V_η は $\mathbb{A}^2_K$ を含まないことを示すのかについて概略を説明する．

3.5. 次数５の del Pezzo 曲面 V_η に含まれる $\mathbb{A}^1_K$-シリンダーの構成.

3.5.1. $d = 5$ の場合を考える．このとき生成ファイバー V_η は K 上に定義された次数が５の非特異 del Pezzo 曲面であり，その Picard 数は $\varrho_K(V_\eta) = 1$ である．また仮定により V_η は K-有理点を少なくとも１つはもつので，その１つを $x_0 \in V_\eta$ としておく．

3.5.2. K の代数閉包 $\overline{K}$ に係数拡大した $V_\eta \otimes \overline{K}$ を考えると，よく知られているように $V_\eta \otimes \overline{K}$ は $\mathbb{P}^2_{\overline{K}}$ の一般の位置にある４点のブローアップとして得られる．それを:

$$\mu : V_\eta \otimes \overline{K} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\overline{K}}$$

として，ブローアップされる点を $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{P}^2_{\overline{K}}$ とする．E を $V_\eta \otimes \overline{K}$ 上の全ての (-1)-曲線の和集合としておく．E は μ の例外因子 $E_i := \mu^{-1}(x_i)$ と点 x_j, x_k を通過する直線の固有変換の合計１０本の (-1)-曲線の和集合である $(1 \leqq i \leqq 4,\ 1 \leqq j < k \leqq 4)$．このとき，$\varrho_K(V_\eta) = 1$，とくに V_η は K 上では極小であることに注意をすると $x_0 \notin E$ であることが分かる．

3.5.3. 次に:

$$g : V'_\eta \longrightarrow V_\eta$$

を x_0 を中心とするブローアップとし，E_0 をその例外因子とする．x_0 は K-有理点であるので，V'_η は K 上定義されている．E' を $V'_\eta \otimes \overline{K}$ 上の全ての (-1)-曲線の和集合とすると，E' は E の固有変換 $(g \otimes \overline{K})^{-1}_* E$，$E_0 \otimes \overline{K}$，点 $\mu(x_0)$ と x_i を通過する $\mathbb{P}^2_{\overline{K}}$ の直線の固有変換 L_i $(1 \leqq i \leqq 4)$，そして $\mathbb{P}^2_{\overline{K}}$ の５点 $\mu(x_0), x_1, \cdots, x_4$ を通過するコニックの固有変換 C の和集合である．これらのうち $E_0 \otimes \overline{K}$ は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用に関して不変である．また L_1, L_2, L_3, L_4, C は E' の成分の中で $E_0 \otimes \overline{K}$ と交差するものの全てである．従って，それらの和:

$$(*) \quad C + \sum_{i=1}^{4} L_i$$

は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用で不変であり，特に K 上で定義されている．更にこれら５本の (-1)-曲線は互いに交わらないので，$(*)$ は K 上で収縮することができる．この収縮射を:

$$h : V'_\eta \longrightarrow V''_\eta$$

とする．$\overline{K}$ 上の Picard 数を計算することにより，$V''_\eta \otimes \overline{K} \cong \mathbb{P}^2_{\overline{K}}$ であることが分かるので V''_η は K 上の Severi-Brauer 曲面である．しかし $E_0 \cong \mathbb{P}^1_K$ であり，h は K 上で定義されているので，V''_η は $E''_0 := h(E_0)$ 上に K-有理点をもつので，実際には $V''_\eta \cong \mathbb{P}^2_K$ となっている (cf. [Ro])．また，E''_0 はコニックである．

3.5.4. E''_0 上の K-有理点を１つとりそれを $Q \in E''_0$ とする．そして l_Q を E''_0 の点 Q に於ける接線とする．E''_0 も Q も K 上で定義されているので，l_Q もそうである．そこで V''_η 上の線形束:

$$\mathscr{L}_Q := \left\langle E''_0,\, 2l_Q \right\rangle \subseteq \left| \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_K}(2) \right|$$

を考える．$\mathscr{L}_Q$ が定義する有理写像:

$$\Phi_{\mathscr{L}_Q} : V''_\eta \dashrightarrow \mathbb{P}^1_K$$

を K 上に定義されたアフィン曲面 $X := V''_\eta \backslash (E''_0 \cup l_Q)$ に制限した射:

$$\varphi_Q : X \longrightarrow (\mathbb{A}^1_*)_K$$

を考える．構成方法から，φ_Q を $\overline{K}$ に係数拡大した:

$$\varphi_Q \otimes \overline{K} : X \otimes \overline{K} \longrightarrow (\mathbb{A}^1_*)_{\overline{K}}$$

は自明な $\mathbb{A}^1_{\overline{K}}$-バンドルになっている．一方，[KM] により $\mathbb{A}^1_{\overline{K}}$ の非自明な K-form は存在しないので，φ_Q は自明な $\mathbb{A}^1_K$-バンドルになっている．特に:

$$X \cong (\mathbb{A}^1_*)_K \times \mathbb{A}^1_K$$

となっている．

3.5.5. ここで g, h の構成方法に注意すると，V_η も X と同型な開集合を含むことが分かる．従って，V_η は $\mathbb{A}^1_K$-シリンダーを含むことが示された．

3.6. 次数 5 の del Pezzo 曲面 V_η がアフィン平面 $\mathbb{A}^2_K$ を含まないことの証明.

3.6.1. 仮に次数 5 の del Pezzo 曲面 V_η が K 上定義されたアフィン平面 $\mathbb{A}^2_K \cong U_\eta \subseteq V_\eta$ を含んだとする．$\varrho_K(V_\eta) = 1$ であり，$\mathrm{Pic}\,(\mathbb{A}^2_K) = 0$ であるので:

$$\mathrm{Pic}\,(V_\eta) \cong \mathbb{Z}[\,\Delta_\eta\,]$$

となっている．ここで，$\Delta_\eta := V_\eta \backslash U_\eta$ とする．

3.6.2. さて，K の代数閉包 $\overline{K}$ に係数拡大をする．このとき $\varrho(V_\eta \otimes \overline{K}) = 5$ であり $\mathrm{Pic}\,(\mathbb{A}^2_{\overline{K}}) = 0$ であるので，$\Delta_\eta \otimes \overline{K}$ は 5 個の既約因子から成っており，それらは $\mathrm{Pic}\,(V_\eta \otimes \overline{K})$ を自由に生成する．

$$\Delta_\eta \otimes \overline{K} = \sum_{i=1}^{5} a_i \Delta_i \quad (a_i \in \mathbb{N})$$

と表しておく．

$$5 = (-K^2_{V_\eta \otimes \overline{K}}) = \sum_{i=1}^{5} a_i(-K_{V_\eta \otimes \overline{K}} \cdot \Delta_i)$$

に注意すると，各 i について $a_i = 1$ であり Δ_i は (-1)-曲線であることが分かる．ところで Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ はこれら 5 つの (-1)-曲線の集合:

$$\{\,\Delta_1, \cdots, \Delta_5\,\}$$

に作用する．仮にこの作用が推移的でないとすると，$1 \leqq \exists a < 5$ が存在し適当に順番を付け換えることにより:

$$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K).\Delta_1 = \{\,\Delta_1, \cdots, \Delta_a\,\}$$

となっている．このとき:

$$\Delta_1 + \cdots + \Delta_a \quad (<\ \Delta_\eta \otimes \overline{K}\,)$$

は K 上で定義されている．しかしこれは Δ_η が $\mathrm{Pic}\,(V_\eta)$ を生成しているということに矛盾である．従って $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K)$ の作用は推移的である．

3.6.3.

$$\mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K)\ \curvearrowright\ \{\,\Delta_1, \cdots, \Delta_5\,\}$$

が推移的であるので，$\Delta_1 + \cdots + \Delta_5$ の図は対称性を持っている．一方で，補集合が:

$$(V_\eta \otimes \overline{K}) \backslash (\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_5) \cong \mathbb{A}^2_{\overline{K}}$$

であるので，$\Delta_1 + \cdots + \Delta_5$ は単連結である．従って，$\Delta_1, \cdots, \Delta_5$ は全て共通の 1 点でのみ交差している．

$$c :=\ \min_{i \neq j}\,\{\,(\Delta_i \cdot \Delta_j)\,\}\ \in \mathbb{N}$$

とする．このとき:

$$5 = (\Delta_1 + \cdots + \Delta_5)^2 = -5 + \sum_{i \neq j} (\Delta_i \cdot \Delta_j) \geqq -5 + 20c$$

を満たすので，$c \leqq 1/2$ となるがこれは矛盾である．

References

[Bre] L. Brenton, *A note on compactifications of* $\mathbb{C}^2$, Math. Ann., 206 (1973), 303–310.

[CPW] I. Cheltsov, J. Park and J. Won, *Affine cones over smooth cubic surfaces*, arXiv:1303.2648v4 [math.AG] 6 Jan2015. (to appear in Journal of Eur. Math. Soc.)

[DK_1] A. Dubouloz and T. Kishimoto, *Explicit biregular/birational geometry of affine threefolds: completions of* $\mathbb{A}^3$ *into del Pezzo fibrations and Mori conic bundles*, arXiv:1508.01792 [math.AG], 2015.

[DK_2] A. Dubouloz and T. Kishimoto, *Cylinders in del Pezzo fibrations*, in preparation.

[FZ] H. Flenner and M. Zaidenberg, *Rational curves and rational singularities*, Math. Z., 244 (2003), 549–575.

[Fur] M. Furushima, *The complete classification of compactifications of* $\mathbb{C}^3$ *which are projective manifolds with the second Betti number one*, Math. Ann., 297 (1993), 627–662.

[FI] M. Furushima and A. Ishida, *Hirzebruch surfaces and compactifications of* $\mathbb{C}^2$, Affine Algebraic Geometry, Proceedings of the Conference, Osaka, Japan 3-6 March 2011, World Scientific (Eds. K. Masuda, H. Kojima and T. Kishimoto), 2013, 42–51.

[FN_1] M. Furushima and N. Nakayama, *The family of lines of on the Fano threefolds* V_5, Nagoya Math. J., 116 (1989), 111–122.

[FN_2] M. Furushima and N. Nakayama, *A new construction of a compactification of* $\mathbb{C}^3$, Tôhoku Math. J., 41 (1989), 543–560.

[KM] T. Kambayashi and M. Miyanishi, *On flat fibrations by the affine line*, Illinois J. Math., 22 (1978), 662–671.

[KPZ_1] T. Kishimoto, Y. Prokhorov, M. Zaidenberg, *Group actions on affine cones.* Affine algebraic geometry, 123–163. Peter Russell's Festschrift, CRM Proc. Lecture Notes, 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[KPZ_2] T. Kishimoto, Y. Prokhorov, M. Zaidenberg, $\mathbb{G}_a$*-actions on affine cones*, Transformation Groups, 18 (2013), 1137–1153.

[KPZ_3] T. Kishimoto, Y. Prokhorov, M. Zaidenberg, *Unipotent group actions on del Pezzo cones*, Algebraic Geometry, 1 (2014), 46–56.

[KPZ_4] T. Kishimoto, Y. Prokhorov, M. Zaidenberg, *Affine cones over Fano threefolds and additive group actions*, Osaka J. Math., 51 (2014), 1093–1112.

[Ma] Yu.I. Manin, *Cubic forms: Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974.

[Pro] Yu. Prokhorov, *Fano threefolds of genus* 12 *and compactifications of* $\mathbb{C}^3$, St. Petersburg Math. J., 3 (1992), 855–864.

[Ro] P. Roquette, *On the Galois cohomology of the projective linear group and its application to the construction of generic splitting fields of algebras*, Ann. of Math., 150 (1963), 411–439.