数論的 $\mathscr{D}$ 加群と関数体のラングランズ対応

阿部 知行

1. 序説

X を（解析的）複素多様体とする．このとき次の圏同値があることはよく知られている：

$$\{X \text{ 上の局所系}\} \leftrightarrow \{X \text{ 上の積分可能接続付きベクトル束}\}$$

ここで“ $\rightarrow$ ”は V という局所系に対して $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} V$ というベクトル束に $\mathcal{O}_X$ の標準的な接続から定まる接続を入れる関手で，“ $\leftarrow$ ”は水平切断を取る関手である．

次に X を有限体（もっと一般に正標数の体）上の滑らかなスキームとする．このとき上記の対応の左辺の類似物はエタール・コホモロジーの理論になっていることが知られている．p 進コホモロジー論は右辺の類似物であると考えられる．p 進コホモロジー論は Grothendieck によるクリスタリン・コホモロジー論と Monsky と Washnitzer によるコホモロジー論から始まっているが，事実，いずれも技術的な条件を満たした積分可能接続付きのベクトル束（アイソクリスタルと呼ばれる）の理論といえる．これらの理論は Berthelot によるリジッド・コホモロジー論の登場で統一化され，様々な人の努力により絶対コホモロジー論として十分満足な枠組みが打ち立てられることとなった．

一方でエタール・コホモロジー論においては絶対コホモロジーと同じように相対コホモロジー論，または 6 つの関手の存在が極めて重要な役割を果たしている．そのため，p 進コホモロジー論でも 6 つの関手の存在を期待するのは自然なことである．複素数体上の理論に立ち戻ってみれば，ド・ラーム・コホモロジー論を含む 6 つの関手の理論として $\mathscr{D}$ 加群の理論があることは広く知られている．Berthelot は [Be1] で $\mathscr{D}$ 加群の理論の類似物を p 進コホモロジーの世界でも導入した．本論説の趣旨はこの数論的 $\mathscr{D}$ 加群の理論と呼ばれる理論の最近の進展について解説することにある．理論の重要な応用として，p 進コホモロジーに対するラングランズ対応，そして曲線の場合の Deligne による小同志予想の解決を紹介したい．

2. リジッド・コホモロジー論とアイソクリスタル

リジッド・コホモロジー論は言わば正標数体上の多様体のド・ラーム・コホモロジー理論である．ここでは最も基本的なアイディアの解説にとどめて，詳細はリジッド・コホモロジー論の数々の先駆的研究をなさってきた都築暢夫先生による啓発的な論説 [T] を参照いただきたい．

> 以後，標数 $p > 0$ の完全体 k，完備離散付置環 R で剰余体として k を持つもの，その分数体 K を固定する．

X を k 上の滑らかな代数多様体とする．このとき X 上のコホモロジー理論を展開したい．そのため理想的な状況として持ち上げが存在する場合，つまり

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathscr{X} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k) & \hookrightarrow & \mathrm{Spf}(R) \end{array}$$

というデカルト図式が存在して，右の垂直な射も滑らかな時を考える．最も単純なアイディアは $\mathscr{X}$ 上の可積分接続付きベクトル束の圏 $\mathrm{MIC}(\mathscr{X})$ をもって X 上の係数理論と考えるものであろう．これには主に 2 つの問題点がある

1. 別の持ち上げ $\mathscr{X}'$ を取ってくると $\mathrm{MIC}(\mathscr{X})$ と $\mathrm{MIC}(\mathscr{X}')$ の間に圏同値が期待できない．つまり X のみならず持ち上げに依ってしまう．

2. $\mathcal{E} \in \mathrm{MIC}(\mathscr{X})$ に対して有理係数のド・ラーム・コホモロジー $H^*(\mathscr{X}, \mathcal{E} \otimes \Omega^\bullet_{\mathscr{X}}) \otimes \mathbb{Q}$ を取ると必ずしも K 上有限次元とは限らない．

1 に対処するために $\mathrm{MIC}(\mathscr{X})$ という圏を狭めることを考える．具体的には全ての積分可能接続を考えるのではなく，“テーラー級数” の収束域が十分大きい物のみ考えるのである．これを簡単に解説するため

$$\nabla \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$$

を積分可能接続とする．局所的な性質を議論したいので，座標系が存在するとしてよく，固定する．対応する微分作用素を $\partial_1, \dots, \partial_d$ とし，$\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ に対して，$\underline{\partial}^{[\underline{k}]} := \prod_{i=1}^d (k_i!)^{-1} \partial_i^{k_i}$ とおく．$e \in \mathcal{E}$ という局所切断に対して，

$$\sum_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]}(e) \otimes T^{\underline{k}} \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}[\![T]\!], \qquad (T^{\underline{k}} := T_1^{k_1} \dots T_d^{k_d})$$

をテイラー級数という．この級数の収束半径が 1 より大きい（つまり >1）とき $(\mathcal{E}, \nabla)$ を収束アイソクリスタルという．収束アイソクリスタルのみを考えると圏が標準的な同値を除いて X のみに依ることが知られている．また，この圏を貼り合わせて一般に持ち上げがない X に対しても圏が定義出来る．

2 は様々な問題が絡まっている．まず，$\mathscr{X}$ が固有で滑らかな場合は実は有限性は成立している．問題は $\mathscr{X}$ が固有的でないときに起こる．すると $\mathcal{E}$ として自明な接続付きの構造層を考えた場合でさえ有限性は崩れてしまう．これを解決するために Berthelot は Monsky と Washnitzer のアイディアに習い，$\mathcal{E}$ を境界方向にほんの少しだけ大きくすることを考えた（例えば [Be2] 参照）．正確な定義はリジッド空間上で行う必要があり，多少込み入ってくるので略すが，この延長可能なアイソクリスタルを**過収束アイソクリスタル**と呼び，X 上の過収束アイソクリスタルのなす圏を $\mathrm{Isoc}^\dagger(X)$ と書く．また，Berthelot は過収束アイソクリスタル $\mathcal{E}$ に対してそのコホモロジー $H^*_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{E})$ とコンパクト台コホモロジー $H^*_{\mathrm{rig,c}}(X, \mathcal{E})$ を定義し**リジッド・コホモロジー**と呼んだ．

次に p 進のリュービル数に起因する問題があり，一般の過収束アイソクリスタルで考えると簡単にコホモロジーが有限にならない例を構成できてしまう．そこで，“フロベニウス構造” と呼ばれる，数論幾何学的な条件を過収束アイソクリスタルに課すことによって有限性が担保されるのではないかと観察されていたが，証明は極めて困難であった．X が曲線の場合は，p 進微分方程式論の最も深い定理の一つである p 進局所モノドロミー定理が証明されることによって有限性が証明され，現在では X が一般の場合も Kedlaya [K1] によって示されている．

3. 数論的 $\mathscr{D}$ 加群

今回の主定理の一つは K 係数の 6 つの関手の枠組みが存在するということである．詳しくは以下のようになる：

3.1 定理 ([A2])**.** — X を分離的で k 上有限型なスキームとする．このとき三角圏 $D(X)$（正確に書きたいときは $D(X/K)$）と $f \colon X \to Y$ に対して次の関手

$$f_*, f_! \colon D(X) \to D(Y), \qquad f^*, f^! \colon D(Y) \to D(X)$$

があって，次の性質を持っている．

1. $D(X)$ には単位対象 K_X とテンソルと呼ばれる二項関手 $\otimes$ があって，閉モノイド圏を成している，つまり，モノイド圏で $\otimes$ の右随伴関手 $\mathcal{H}om$ が存在する．

2. f^* はモノイド関手である，つまり単位対象を保存しテンソルと可換である．

3. (f^*, f_*), $(f_!, f^!)$ は随伴組である．

4. 自然変換 $f_! \to f_*$ が存在し，f が固有射なら同型となる．

5. f が相対次元 d の平坦射なら跡射 $\mathrm{Tr}_f\colon f_!f^*[2d] \to \mathrm{id}$ という自然変換が存在し，f がさらに滑らかならその双対 $f^*[2d] \to f^!$ は同型である．

6. 次のデカルト図式を考える：
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$
すると自然な同型 $g^! \circ f_* \cong f'_* \circ g'^!$ がある．

7. $D(\mathrm{Spec}(k)) \cong D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{fin}}(K)$ というモノイド三角圏の同値がある．ここで右辺は K 線形空間の有界な導来圏で各コホモロジーが有限次元になっている三角圏である．

これだけではただの抽象論が存在していると言っているに過ぎないが，重要なのは次に示すリジッド・コホモロジー論との関係である：

8. X が**滑らか**なとき，特殊化関手 $\mathrm{sp}\colon \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \to D(X/K)$ が存在して忠実充満である．

9. $p\colon X \to \mathrm{Spec}(k)$ が滑らかなとき，$\mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ に対して，自然な同型
$$H^*_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{E}) \cong \mathcal{H}^*\bigl(p_*\,\mathrm{sp}(\mathcal{E})\bigr), \qquad H^*_{\mathrm{rig,c}}(X, \mathcal{E}) \cong \mathcal{H}^*\bigl(p_!\,\mathrm{sp}(\mathcal{E})\bigr)$$
が存在する．ただし，両同型の右辺では 7 を用いて点上の三角圏とベクトル空間の導来圏と同一視している．

3.2 注. — (i) 上記の定理の形は [A2] によるが，部分的な結果は Berthelot, Caro を中心に様々な形で知られており，それらの結果も上の定理の証明で多分に用いられている．重要な部分のみ記しておくと，Berthelot は固有で滑らかな形式的スキームに対して $\mathscr{D}$ 加群の理論を構成することにより，上の定理を構築するプログラムを初めて提起しており（[Be1, Be3, Be4, Be5] など），上記の定理を得る上で最も本質的かつ大きな貢献をしている．しかし，このプログラムは多くの困難な問題を抱えており，これらの問題の一部は Caro によって克服された．それにより，Caro は以下で定義する“ 埋め込み可能な ”多様体に対して定理（の一部）を得た．Caro のこれらの結果の多くは Kedlaya により解決された志甫予想 [K3] に強く依存していることを付け加えておきたい．筆者の定理に対する最大の貢献はより一般の多様体に対してもこの枠組みを広げたことにある．

(ii) 隣接輪体関手に関しても [AC2] による部分的な結果はある．基本的なアイディアは出ていると思うが，SGA 7 のような完全な理論は構築されておらず，これから成されるべきものである．

(iii) 上記の定理を合わせると X が滑らかなときのリジッド・コホモロジーの有限性が導かれるが，志甫予想を用いているため，別証というより一般化ととらえた方が正確である．

上記の定理は種々の結果をまとめて書いたもので，証明はとても大変だが，三角圏 $D(X)$ の構成のアイディアを紹介したいと思う．完備離散付置環 R 上に滑らかな形式的スキーム $\mathscr{X}$ があったとき $\mathscr{X}$ 上の環の層 $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ が Berthelot によって定義された．これは局所的には
$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}} = \Bigl\{ \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \partial^{[\underline{k}]} \,\Big|\, \text{級数 } \textstyle\sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} T^{\underline{k}} \text{ の収束半径は} > 1 \Bigr\}$$
と書かれる環である．$f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ という射が与えられたとき
$$f_+\colon D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \to D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}), \qquad f^!\colon D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \to D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$$

という二つの関手が普通の $\mathscr{D}$ 加群の理論と多かれ少なかれ同じように構成できる．詳しい話は割愛するが，古典論からも想像できるとおり，開移入に関する押し出しでは連接性が保存されない．開移入に対してもコホモロジー関手が期待通り振る舞うために古典論ではホロノミック加群という特殊な連接加群を導入した．数論的 $\mathscr{D}$ 加群でもこれの類似として“ 過ホロノミック加群 ”というものが Caro によって定義されている [C]．各コホモロジーが過ホロノミックな複体から構成される $D^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ の忠実充満部分圏を $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ovhol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ と書く．

3.3 定義. — k 上のスキーム X が**埋め込み可能**であるとは R 上の**固有で滑らかな**形式的スキーム $\mathscr{P}$ と以下の水平射が**移入**（必ずしも開移入または閉移入になる必要はない）になっている可換図式が存在することをいう：

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathscr{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k) & \hookrightarrow & \mathrm{Spf}(R). \end{array}$$

X が埋め込み可能である時三角圏 $D(X)$ を次のように定義する．まず埋め込み $X \hookrightarrow \mathscr{P}$ を取ってくる．このとき

$$D(X \hookrightarrow \mathscr{P}) := \Big\{\mathscr{C} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ovhol}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{P},\mathbb{Q}}) \,\Big|\, \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\overline{X}}(\mathscr{C}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}, \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{\overline{X}\setminus X}(\mathscr{C}) = 0\Big\}.$$

すると標準的な同型をのぞいて $D(X \hookrightarrow \mathscr{P})$ は X のみに依ることが Caro によって示された．この三角圏を $D(X)$ と定義するのである．

この枠組みを一般のスキームに拡張したい．鍵となるのは次の定理である：

3.4 定理. — X を埋め込み可能とする．すると $D(X)$ の t 構造が存在して次の自然な同型が存在する：

$$D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ovhol}(X)) \xrightarrow{\sim} D(X).$$

ここで $\mathrm{Ovhol}(X)$ はその t 構造の核である．

この定理を用いることで以下のように一般的に埋め込み可能ではない分離的で k 上有限型なスキーム X に対しても $D(X)$ が定義できる：まず，埋め込み可能な開部分スキームによる X の被覆 $\{U_i\}$ を取ってくる．貼り合わせ条件を課すことにより $\mathrm{Ovhol}(U_i)$ からアーベル圏 $\mathrm{Ovhol}(X)$ を構成することが出来る．そこで

$$D(X) := D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ovhol}(X))$$

と**定義**する．定理 3.4 は X が埋め込み可能なときはこの三角圏と以前定義した三角圏とが一致すると主張しているのである．

3.5 注. — (i) 分離的でない場合は単体的スキームのテクニックを用いて $D(X)$ を定義する必要がある．

(ii) $\mathrm{Ovhol}(X)$ は ℓ 進コホモロジーの偏屈層の圏に対応するものである．

三角圏は構成できたので，次の課題は 6 つの関手を構成することである．この構成は少々複雑なので詳しくは割愛するがアイディアは以下の通りである．例えば $f\colon X \to Y$ という射があるとき f_+ を構成したいとする．f が有限射であったと仮定する．すると Y のアファイン開被覆 $\{V_i\}$ とその引き戻しの X のアファイン開被覆 $\{U_i\}$ ができ，$f_i\colon U_i \to V_i$ を誘導する．f が有限射なので f_{i+} は上で定義した t 構造に関して完全関手になることが証明できる．そのため $f_{i+}\colon \mathrm{Ovhol}(U_i) \to \mathrm{Ovhol}(V_i)$ を貼り合わせて $f_+\colon \mathrm{Ovhol}(X) \to \mathrm{Ovhol}(Y)$ が定義でき，これも完全関手であることから自然に $f_+\colon D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ovhol}(X)) \to D^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ovhol}(Y))$ に延長でき，これが我々の欲しかったものである．

完全関手の場合はこれで良いが，一般の場合はどうすれば良いだろうか．同じく f が有限射の場合，$f^!$ を構成することを考える．$f^!_i\colon D(V_i) \to D(U_i)$ は左完全関手である．そこで $\mathcal{H}^0$ を取ること

によって $f_i^{!0}\colon \mathrm{Ovhol}(V_i) \to \mathrm{Ovhol}(U_i)$ が定義でき，貼り合わせにより $f^{!0}\colon \mathrm{Ovhol}(Y) \to \mathrm{Ovhol}(X)$ が定義できる．これは左完全関手である．ここで $(f_+, f^!)$ が随伴対であることと f_+ が完全であることを用いると X, Y が埋め込み可能の時，$f^!$ は $f^{!0}$ の右導来関手であることを証明できる．そこで埋め込み可能と限らない場合も $f^!$ を $f^{!0}$ の右導来関手として定義するのである．ここで，$\mathrm{Ovhol}(X)$ は十分な単射的対象を有していないことに注意しなくてはならない．そのため Ind 圏の理論を用いて $\mathrm{Ind}(\mathrm{Ovhol}(X))$ を考えることにより対象を増やし定義する必要がある．

一般の射の場合は $X \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{p} Y$ と標準的に分解する．i は有限射なので上記の構成を用い，p に関しても若干複雑であるが同様の構成をすることにより f_+ 等の関手が構成される．

4. 重さの理論

講演では紹介しなかったが数論的 $\mathscr{D}$ 加群の理論には重さの理論も確立されているので紹介しておく．そのためにフロベニウス構造を導入する必要がある．重さの理論を構築したいので，簡単のため，この節では k を $q = p^s$ 個の元を持つ有限体とする．

4.1 定義. — X を分離的な k 上の有限型スキームとする．$\mathscr{E} \in \mathrm{Ovhol}(X)$ の（s **階**）**フロベニウス構造**とは同型 $\Phi\colon \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathscr{E}$ であり，$(\mathscr{E}, \Phi)$ という組を F-$\mathscr{D}$ **加群**という．ここで $F\colon X \to X$ は X の s 階フロベニウス射である．F-$\mathscr{D}$ 加群の圏を F-$\mathrm{Ovhol}(X)$ と表記する．

4.2 注. — フロベニウス構造の定義の背景の一つと考えられるものに ℓ 進コホモロジー論におけるヴェイユ層（[D] 参照）の概念がある．X を $\mathbb{F}_q$ 上の多様体とする．$\mathrm{Ovhol}(X)$ は $X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ 上の ℓ 進構成可能層（正確には偏屈層）を考えるのと同等である．この観点で言えば F-$\mathrm{Ovhol}(X)$ を考えるのは X そのものの ℓ 進構成可能層（正確には $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ の位相を考えたくないのでヴェイユ層，またはヴェイユ偏屈層とするべきである）を考えることの類似であると言える．

4.3 例. — F-$\mathrm{Ovhol}(\mathrm{Spec}(k))$ の記述は簡単である．この圏は (V, Φ) という組の圏と同値である．ここで V は有限次元 K 線形空間で Φ は V の自己同型である．$\mathscr{E} = (V, \Phi) \in F$-$\mathrm{Ovhol}(\mathrm{Spec}(k))$ に対して Φ のモニックな固有多項式を $\mathrm{char}(\mathscr{E}, t)$ と書く．

4.4 定義. — 以後，体の同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ を一つ固定する．$\mathscr{E} \in F$-$\mathrm{Ovhol}(\mathrm{Spec}(k))$ が**重さ** $\leq w$ (resp. $\geq w$) **である**とは任意の $\mathrm{char}(\mathscr{E}, t) = 0$ の解 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ に対して，$|\iota(\alpha)| \leq q^{w/2}$ (resp. $\geq q^{w/2}$) となることを言う．$\mathscr{C} \in F$-$D^{\mathrm{b}}(X)$ が**重さ** $\leq w$ (resp. $\geq w$) **である**とは任意の整数 i に対して $\mathcal{H}^i(\mathscr{C})$ が重さ $\leq w + i$ (resp. $\geq w + i$) であることをいう．

重さが $* \in \{\leq w, \geq w\}$ の複体のなす部分圏を $D_*(\mathrm{Spec}(k))$ と書く．

4.5 定理 ([AC1, 4.1.3] p 進コホモロジーの重さ)**.** — 重さの枠組みが存在する．つまり $w \in \mathbb{R}$ に対して $D(X_0)$ の充満忠実部分圏 $D_{\geq w}$, $D_{\leq w}$ が存在して以下の性質を満たす．$f\colon X \to Y$ を分離的な k 上有限系スキームの射とする．

1. $D_*(\mathrm{Spec}(k))$ は上で定義した物である．
2. $f_!$ と f^* は $D_{\leq w}$ を保つ．
3. f_* と $f^!$ は $D_{\geq w}$ を保つ．
4. $\otimes$ は $D_{\geq w} \times D_{\geq w'}$ を $D_{\geq w+w'}$ に移す．
5. 双対関手 $\mathbb{D}$ は $D_{\geq w}$ と $D_{\leq -w}$ を交換する．

記号として $D_{\mathrm{m}}(X) := \bigcup_w D_{\geq w}(X) = \bigcup_w D_{\leq w}(X)$ と書いて ι **混複体**と呼ぶ．

4.6 注. — リジッド・コホモロジーの枠組みでは交叉コホモロジーは定義されていないが，数論的 $\mathscr{D}$ 加群を使っているので交叉コホモロジーが簡単に定義出来る．さらに，交叉コホモロジーの

純性定理も示すことが出来，ラングランズ対応の構成において重要な役割を果たす．詳細は [AC1, 4.2] を参照いただきたい．

5. ラングランズ対応

この節では p と異なる素数 ℓ と同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する．主定理は Deligne の予想 [D, 1.2.10 (vi)] の曲線の場合である：

5.1 定理 ([A2, 4.1.3] 曲線の小同志予想)**.** — X を幾何学的に連結で滑らな $\mathbb{F}_q$ 上の曲線とする．次の二つの集合を考える：

- $\mathcal{G}_r$ を階数 r の滑らかな既約 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 層 $\mathscr{F}$ で判別式が有限になっている，つまり $(\bigwedge^r \mathscr{F})^{\otimes n} = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ となる $n \neq 0$ が存在するものの集合．
- $\mathcal{I}_r$ を階数 r の滑らかな既約な $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 過収束 F アイソクリスタル $\mathcal{E}$ で判別式が有限になっている，つまり $(\bigwedge^r \mathcal{E})^{\otimes n} = \overline{\mathbb{Q}}_p$ となる $n \neq 0$ が存在するものの集合．

このときこれら二つの集合の間の 1:1 対応が存在して，各閉点でのフロベニウス固有多項式が一致している．

注. — 証明は $\mathcal{G}_r$ と $\mathcal{I}_r$ の対応を直接構成するのではなく，p 進係数のラングランズ対応，つまり $\mathbb{A}$ を X のアデール環としたとき，$\mathcal{I}_r$ と $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現との対応を示す．方針は Drinfeld と Lafforgue によるシュトゥカの相対コホモロジーを計算することであり，Lafforgue により既に“ モチーフ ”は構成されていたことから，最も難しいのはスタックに対する 6 つの関手の枠組みを p 進コホモロジーに対してどのように構成するかであった．この構成は §3 で解説したとおりである．

この定理には標準的な応用がいくつかある(*)：

5.2 定理. — X を $\mathbb{F}_q$ 上の曲線とすると $D_{\mathrm{m}}(X) = D(X)$ である．

5.3 定理. — Čebotarev 稠密定理が成立する．つまり，X を $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかな曲線とし，$\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ という二つの過収束 F アイソクリスタルが与えられており，各閉点での特性多項式が一致していると仮定する．すると $\mathcal{E}^{\mathrm{ss}} \cong \mathcal{E}'^{\mathrm{ss}}$ となる．ここで $(\cdot)^{\mathrm{ss}}$ は半単純化を意味する．

6. これからの課題

良い機会なのでこれからの p 進コホモロジー論の課題を筆者の個人的な観点からまとめておきたい．

6.1. 滑らかでない多様体のリジッド・コホモロジー論

滑らかとは限らない代数多様体 X に対しても過収束アイソクリスタルの圏 $\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ とそのリジッド・コホモロジーが Berthelot によって構成されている．その場合，現状では，特殊化関手 $\mathrm{sp}\colon \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \to D(X/K)$ は構成されていない．当然，存在が期待され，さらにそのリジッド・コホモロジーは $D(X/K)$ の押し出し関手によって計算されるはずである．これが出来ればリジッド・コホモロジー論は完全に数論的 $\mathscr{D}$ 加群の範疇で語られることになる．これらの枠組みが出来たら志甫淳先生による相対リジッド・コホモロジーの枠組みとの比較も問題になってくるであろう．

(*)講演では高次元多様体もある程度扱えると主張したが，終了後にギャップを発見したので，現状では主張が弱まっている．この場を借りてお詫びしたいと思います．

6.2. 高次元の小同志予想

高次元の場合の小同志予想は未だに示されていない．これは $\mathrm{Isoc}^\dagger(X)$ の構造が ℓ 進層のようには分からないことに起因しており，例えばベルティーニの定理（またはレフシェッツ型の定理）といわれる結果が成立するかは分かっていない：

> X を滑らかな多様体とし，$x \in X$ を閉点とする．$\mathcal{E}$ を X 上の与えられた既約な過収束アイソクリスタルとする．このとき次の性質を持つような x を通る曲線 C が存在するだろうか：$\mathcal{E}$ を C に制限した過収束アイソクリスタルは既約である．

このような定理は志甫淳先生などにより研究されている $\mathrm{Isoc}^\dagger(X)$ の基本群の性質と関わりがあるはずであり，高次元の小同志予想は目指すべき一つの目標である．

6.3. 特性多様体と分岐理論

$\mathscr{D}$ 加群には特性多様体と呼ばれる余接空間のサイクルが定義できる．特性多様体には $\mathscr{D}$ 加群の分岐の情報が多く含まれている．一方で斎藤毅先生を中心とした分岐の極めて研究の多くは 6 つの関手の枠組みや Kedlaya らによるアイソクリスタルの局所理論（[K2] 等）のアイディア用いれば p 進コホモロジーにも解釈することが出来るはずである．これらの理論と $\mathscr{D}$ 加群に元からある特性多様体の関係は興味深い研究課題である．

6.4. 整係数コホモロジー理論とフロベニウス傾き

X が固有で滑らかとすると，クリスタリン・コホモロジー $H^*_{\mathrm{cris}}(X/W(k))$ は $W(k)$ 上有限となっている．代数サイクルや L 関数の特殊値の研究などには整係数コホモロジー論は不可欠で，有理コホモロジー理論としてほぼ完全なリジッド・コホモロジー論があるにもかかわらず，未だにクリスタリン・コホモロジー論の重要性は低下していない．

有理コホモロジー論としてリジッド・コホモロジーを復元し，X が固有で滑らかならクリスタリン・コホモロジーと一致するような整係数コホモロジー論の構築は，野心的な研究目標かもしれないが，極めて重要な課題である．多様体 X 上に F アイソクリスタル $\mathcal{E}$ があると，各閉点でのフロベニウス傾きを考えることが出来る．これらの挙動は謎に満ちており，まとまった理論が多くは存在しない．整係数コホモロジー理論はこれらにも何らかの説明を与えるものと思う．

6.5. 混標数離散付置環上の $\mathscr{D}$ 加群の理論

数論的 $\mathscr{D}$ 加群によって，全ての完全体上に $\mathscr{D}$ 加群の理論が存在していることが分かる．自然な疑問としてはそれらの間の関係である．これはエタール・コホモロジー論では離散付置環上の理論の特殊化や一般化として説明される．$\mathscr{D}$ 加群ではそれに当たる理論の構築は興味深い．この理論の一つの方向性は坂内健一先生による論説 [Ba] が分かりやすい．また p 進 Hodge 理論の比較定理をこの観点から説明するのもおもしろいはずである．

References

[A1] Abe, T.: *Explicit calculation of Frobenius isomorphisms and Poincaré duality in the theory of arithmetic $\mathscr{D}$-modules*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova **131**, p.89–149 (2014).

[A2] Abe, T.: *Langlands program for p-adic coefficients and the petits camarades conjecture*, preprint, available at arxiv.org/abs/1111.2479.

[AC1] Abe, T., Caro, D.: *Theory of weights in p-adic cohomology*, preprint, available at arxiv.org/abs/1303.0662.

[AC2] Abe, T., Caro, D.: *On Beilinson's equivalence for p-adic cohomology*, preprint, available at arxiv.org/abs/1309.4517.

[AM] Abe, T., Marmora, A.: *On p-adic product formula for epsilon factors*, to appear in J. Inst. Math. Jussieu, doi:10.1017/S1474748014000024.

[Ba] 坂内 健一: *Rigid syntomic cohomology* **と** *p*-**進** *polylogarithm*, 数理解析研究所講究録 **1154**, p.22–32 (2000).

[Be1] Berthelot, P.: *Cohomologie rigide et théorie des $\mathscr{D}$-modules*, Lecture Notes in Math. **1454**, p.80–124, Springer (1990).

[Be2] Berthelot, P.: *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, première partie, Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).

[Be3] Berthelot, P.: *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 29, p.185–272 (1996).

[Be4] Berthelot, P.: *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius*, Mém. Soc. Math. Fr. 81 (2000).

[Be5] Berthelot, P.: *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules*, Astérisque 279, p.1–80 (2002).

[C] Caro, D.: *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **42**, p.141–192 (2009).

[D] Deligne, P.: *La conjecture de Weil.II*, Publ. Math. de I.H.E.S. **52**, p.313–428 (1981).

[K1] Kedlaya, K.S.: *Finiteness of rigid cohomology with coefficients*, Duke Math. J. **134**, p.15–97 (2006).

[K2] Kedlaya, K.S.: *Swan conductors for p-adic differential modules, I: A local construction*, Algebra and Number Theory **1**, p.269–300 (2007).

[K3] Kedlaya, K. S.: *Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals, IV: local semistable reduction at nonmonomial valuations*, Compos. Math. **147**, p.467–523 (2011).

[T] 都築 暢夫: **リジッド・コホモロジー**, 数学 **61**, p.64–82 (2009).

阿部知行：
東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構（WPI）
277-8583 千葉県柏市柏の葉 5-1-5
e-mail: `tomoyuki.abe@ipmu.jp`