単純特異点上の ULRICH 加群と ULRICH イデアル

吉田健一

1. Ulrich 加群と Ulrich イデアルの定義

この講演を通じて, A を可換ネーター局所環 (commutative Noetherian local ring, しばしば, 整域) とし, $\mathfrak{m}$ を A のただ一つの極大イデアル, $k = A/\mathfrak{m}$ をその剰余体とする. I を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. また, M は有限生成 A 加群とする. $\ell_A(M)$, $\mu_A(M)$, $\operatorname{rank}_A M$, $e_A(M)$ をそれぞれ, M の (組成列の) **長さ**, **極小生成系の個数**, **階数**, $\mathfrak{m}$ に関する**重複度**を表すものとする.

$d = \dim A$ を A の Krull 次元 (Krull dimension), $v = \operatorname{emb}(A) = \ell_A(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ を A の埋没次元 (embedding dimension) とする. このとき, $d \le v$ が成立し, 等号が成立するのは A が**正則局所環**の場合に限られる. $e = e^0_{\mathfrak{m}}(A)$ は A の $\mathfrak{m}$ に関する重複度 (multiplicity) を表す. ここで, イデアル I に関する Hilbert 関数 $\ell_A(A/I^{n+1})$ は十分大きな n に関して d 次の多項式になることが知られており, その最高次の係数を正規化したものをイデアル I に関する重複度という. すなわち,

$$e^0_I(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell_A(A/I^{n+1})}{n^d} \times d!$$

である. 勝手なパラメーターイデアル (次元個で生成された $\mathfrak{m}$ 準素イデアル)Q に対して, $e^0_Q(A) \le \ell_A(A/Q)$ が成立し, 等号が成立するとき, A は Cohen-Macaulay 環であるという. 同様に, 有限生成 A 加群 M の次元, 重複度, Cohen-Macaulay 性などが定義される. 特に, A が整域の場合は, M の I に関する重複度 $e^0_I(M)$ は

$$e^0_I(M) = e^0_I(A) \cdot \operatorname{rank}_A M$$

により計算することができる.

さて, Ulrich 加群の概念を思い出しておこう. この概念は先の後藤四郎氏の講演でも説明されていたように, Ulrich などにより研究された (古典的な) Ulrich 加群の自然な一般化である.

以下, A は正則局所環の準同型像であるような Cohen-Macaulay 局所環 (例えば, 完備 Cohen-Macaulay 局所環) とし, 剰余体 $k = A/\mathfrak{m}$ は無限体であると仮定しよう. このとき, I に含まれるパラメータイデアル Q で, $I^{n+1} = QI^n$ をみたすものが存在する. このような Q を I の極小節減 (minimal reduction) と呼ぶ.

Definition 1.1 (Ulrich 加群). M を有限生成 A 加群とする. M が次の 3 条件をみたすとき, I **に関する Ulrich** A **加群**であるという:

This work was partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 22540054.

(1) M は極大 Cohen-Macaulay A 加群 (以下, MCM A 加群という) である. すなわち, 任意の $i < d$ に対して, $\mathrm{Ext}_A^i(k, M) = 0$ が成り立つ.
(2) $QM = IM$ となる I の極小節減 Q が取れる.
(3) M/IM は A/I 上自由加群である.

Remark 1.2. 上の定義の (2) は,

(2)' 等式 $\mathrm{e}_I^0(M) = \ell_A(M/IM)$ が成り立つ.

に置き換えることができる. また, (3) も

(3)' 等式 $\ell_A(M/IM) = \mu_A(M) \cdot \ell_A(A/I)$ が成り立つ.

に置き換えることができる. これらの等式は, 通常は左辺の方が小さい不等式であるから, 「I に関する Ulrich A 加群」は直和や直和因子に遺伝することが容易にわかる.

古典的な Ulrich 加群の定義を思い出しておこう. これは, 極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する Ulrich 加群に他ならない. まず, M が MCM A 加群であるとき,

$$\mathrm{rank}_A M \leq \mu_A(M) \leq e_{\mathfrak{m}}^0(M)$$

が成り立つことに注意しておこう.

Definition 1.3 (Brenner-Herzog Ulrich)**.** MCM A 加群 M は, $\mu_A(M) = e_{\mathfrak{m}}^0(M)$ をみたすとき, (古典的な) **Ulrich A-加群**であるという.

Ulrich は次の予想を与えた.

Conjecture 1.4 (**Ulrich**)**.** 任意の Cohen-Macaulay 局所環は Ulrich A 加群を持つ.

次数付き完全交叉, minimal degree を持つ Cohen-Macaulay 局所環, 2 次元整域などは Ulrich 加群を持つことが知られている. 特に, [GOTWY1] では minimal degree を持つ Cohen-Macaulay 局所環の Ulrich 加群の性質をモデルケースとして, その一般化を与えた.

Theorem 1.5. *A を Cohen-Macaulay 局所環 ($d = \dim A \geq 1$) とするとき, 次は同値である :*

(1) $v = e + d - 1$, すなわち, A は minimal degree をもつ.
(2) 任意の $i \geq d$ に対して, $\mathrm{Syz}_A^i(A/\mathfrak{m})$ は Ulrich A 加群である.

このとき, 任意の MCM A 加群 M に対して, $\mathrm{Syz}_A^1(M)$ と $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, K_A)$ は Ulrich A 加群である. ここで, K_A は標準加群 (canonical module) を表す.

I を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. このとき, いつ I に関する Ulrich A 加群 M が存在するか? 1 つの十分条件が Ulrich イデアルである. その定義を思い出しておこう.

Definition 1.6 (**Ulrich イデアル**)**.** パラメータイデアルでない $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I が, 極小節減 Q に対して, $I^2 = QI$ をみたし, I/I^2 が自由 A/I 加群であるとき, **Ulrich イデアル**であると言う. A の Ulrich イデアル全体を χ_A と表す.

多くの Fermat 型の超曲面は Ulrich イデアルを持つことが容易にわかる. もちろん, $k[[x, y]]/(x^3 + y^5)$ のように Ulrich イデアルを持たない超曲面も存在する.

Example 1.7. $A = k[[x_0, x_1, \ldots, x_d]]/(x_0^{n_0} + \cdots + x_d^{n_d})$ とおく. $n_0 = 2m$ が偶数と仮定すると, 各 $1 \leq k_i \leq \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$ $(1 \leq i \leq d)$ に対して, $I = (x_0^m, x_1^{k_1}, \ldots, x_d^{k_d})$ は $Q = (x_1^{k_1}, \ldots, x_d^{k_d})$ を極小節減に持つ Ulrich イデアルである.

次の定理により, I が Ulrich イデアルであることは, I に関する Ulrich 加群が存在するための十分条件であることがわかる.

Theorem 1.8. *A を Cohen-Macaulay 局所環 $(d = \dim A \geq 1)$ とする. このとき, 次は同値である :*

(1) *I は Ulrich イデアルである.*
(2) *任意の $i \geq d$ に対して, $\mathrm{Syz}_A^i(A/I)$ は I に関する Ulrich A 加群である.*

また, syzygy, dual に関しては次が成り立つ.

Theorem 1.9 (Syzygy, [GOTWY1])**.** *I を Ulrich イデアルとする. M が I に関する Ulrich A 加群であるならば, $\mathrm{Syz}_A^1(M)$ もそうである.*

Theorem 1.10 (Dual, [GOTWY1])**.** *A が Gorenstein 局所環のとき, M が I に関する Ulrich A 加群であることと, $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ が I に関する Ulrich A 加群であることとは同値である.*

I に関する Ulrich 加群 M が存在しても, I は Ulrich イデアルとは限らない. ただし, 超曲面の場合は次のような制限がある.

Theorem 1.11. *A が超曲面整域で, I が $\mathfrak{m}$-準素 good イデアル (後述参照) であるとき, I に関する Ulrich A 加群が存在することと, I が Ulrich イデアルであることとは同値である.*

Example 1.12. $A = k[[t^e, t^{e+1}]]$ を $e = e_{\mathfrak{m}}^0(A) \geq 3$ を考える. 極大イデアル $\mathfrak{m} = (t^e, t^{e+1})$ に対して, $M = \mathfrak{m}^{e-1}$ は ($\mathfrak{m}$ に関する) Ulrich 加群であるが, $\mathfrak{m}$ 自身は Ulrich イデアルではない.

Ulrich ideal に関する基本的な問として,
Question 1.13.

(1) Ulrich イデアルはどんな環に対して存在するか.
(2) χ_A はいつ有限集合であるか. もしくは, χ_A の濃度は?
(3) Ulrich ideal を分類せよ.

が考えられる. 本講演の目標は,

(1) 単純 (超曲面) 特異点における Ulrich イデアルの分類
(2) 2 次元有理二重点の Ulrich 加群の分類

である.

2. 単純特異点における Ulrich イデアル

以下この節では, k を標数 0 の代数的閉体とし, $S = k[[x_0, x_1, \dots, x_d]]$ とおく. $\mathfrak{m}_S = (x_0, x_1, \dots, x_d)S$ を S のただ 1 つの極大イデアルを表すものとする. $0 \neq f \in \mathfrak{m}_S^2$ とし, 超曲面 $A = S/(f)$ を考える.

Definition 2.1. $c(f) = \{I \mid I$ は S のイデアル, $f \in I^2\}$ とおく. $c(f)$ が有限集合であるとき, A は**単純特異点**であるという.

高々有限個の直既約な MCM A 加群の同型類を持つとき, A は**有限CM表現型**であるという.

Gorenstein 局所環 A に対して, A が単純特異点であることと, A が有限CM表現型になることとが同値であることが知られている ([Yos]). 一方, 次が知られている.

Theorem 2.2 ([GOTWY1])**.** *A が有限CM表現型であれば, χ_A は有限集合である.*

すると, 次の問題を考えたくなる.

Question 2.3. χ_A と $c(f)$ の間には関係があるのだろうか.

これに関して得られた結果が次の定理である.

Theorem 2.4. *$A = S/(f)$ を超曲面とする.*

$$\chi_A^* = \{J \mid J \text{ は } S \text{ のイデアル}, \ J/(f) \in \chi_A\}$$

とおくと, $\chi_A^* \subset c(f)$ が成り立つ.

一般に, $c(f)$ はイデアル論的に比較的計算しやすいことに注意する.

定理の証明の前に系を 1 つ与えておく. 特に, 二重点においては, $J \not\subset \mathfrak{m}^2$ を示すことができる.

Corollary 2.5. *$A = S/(f)$ の重複度を $e = e_{\mathfrak{m}}^0(A) \geq 2$ とする. もし, $I = J/(f) \in \chi_A$ ならば, $J \not\subset \mathfrak{m}_S^{\lceil \frac{e+1}{2} \rceil}$ が成り立つ.*

Proof. $e = \operatorname{ord}(f) = \max\{n \mid f \in \mathfrak{m}_S^n\}$ に注意する. もし, $J \subset \mathfrak{m}_S^{\lceil \frac{e+1}{2} \rceil}$ ならば, $f \in J^2 \subset \mathfrak{m}_S^{e+1}$. これは矛盾である. $\square$

$<$ *Theorem* 2.4 の証明$>$. $I = J/(f) \in \chi_A$ と仮定する. このとき, $M = \operatorname{Syz}_A^d(A/I)$ は I に関する Ulrich A 加群である. 超曲面上の行列式分解 (matrix factorization) の理論により, $M = \operatorname{Cok}(\varphi, \psi)$ と書くことができる. ここで, $\varphi, \psi \in \operatorname{End}_S(S^{\oplus n})$ は, $fE_n = \varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ をみたし, 極小自由分解

$$\cdots \to A^{\oplus n} \xrightarrow{\psi} A^{\oplus n} \xrightarrow{\varphi} A^{\oplus n} \to M \to 0 \quad \text{(ex)}$$

を構成することができる. 特に, $M \cong \operatorname{Syz}_A^2(M) \subset A^{\oplus n}$ とできる. ここで, 次の Lemma により, $I_1(\varphi) \subset J$ を得る.

Lemma 2.6. *I が Ulrich イデアルならば, $I_1(\varphi) \subset J$ が成り立つ.*

さらに, $\mathrm{Syz}^1_A(M)$ も I に関する Ulrich A 加群なので, φ と ψ の役割を入れ替えて, $I_1(\psi) \subset J$ を得る. このとき, $f \in I_1(\varphi) \cdot I_1(\psi) \subset J^2$. ゆえに, $J \in c(f)$ を得る. $\square$

単純特異点 $A = S/(f)$ に対して, f は次のいずれかとしてよい.

$$
\begin{array}{lll}
(A_n) & x^2 + y^{n+1} + \underline{z}^2 & (n \geq 1) \\
(D_n) & x^2 y + y^{n-1} + \underline{z}^2 & (n \geq 4) \\
(E_6) & x^3 + y^4 + \underline{z}^2 & \\
(E_7) & x^3 + xy^3 + \underline{z}^2 & \\
(E_8) & x^3 + y^5 + \underline{z}^2 &
\end{array}
$$

ただし, $\underline{z}^2 = z_2^2 + \cdots + z_d^2$ を意味する.

単純特異点の場合, 我々の定理は χ_A を完全に決定する.

Theorem 2.7. $A = S/(f)$ が単純特異点で, $d \geq 2$ ならば, $\chi_A^* = c(f)$ が成立する.

$$
\begin{array}{ll}
(A_n) & c(f) = \{(x, y^k, \underline{z}) \,|\, k = 1, \ldots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor\}. \\
(D_{2m}) & c(f) = \{(x, y^k, \underline{z}) \,|\, k = 1, \ldots, m-1\} \cup \{(x \pm \sqrt{-1} y^{m-1}, y^m, \underline{z})\} \cup \{(x^2, y, \underline{z})\} \\
(D_{2m+1}) & c(f) = \{(x, y^k, \underline{z}) \,|\, k = 1, \ldots, m-1\} \cup \{(x, y^m, \underline{z})\} \cup \{(x^2, y, \underline{z})\} \\
(E_6) & c(f) = \{(x, y, \underline{z}), (x, y^2, \underline{z})\} \\
(E_7) & c(f) = \{(x, y, \underline{z}), (x, y^2, \underline{z}), (x, y^3, \underline{z})\} \\
(E_8) & c(f) = \{(x, y, \underline{z}), (x, y^2, \underline{z})\}.
\end{array}
$$

Remark 2.8. $d = 1$ のとき, $c(f)$ は $d \geq 2$ のときと同じ形のイデアルからなる集合であり,

$$
\begin{array}{ll}
(A_n) & c(f) = \chi_A^* \\
(D_{2m}) & c(f) = \{(x, y^k) \,|\, k = 1, \ldots, m-1\} \cup \chi_A^* \\
(D_{2m+1}) & c(f) = \{(x, y^k) \,|\, k = 1, \ldots, m-1\} \cup \chi_A^* \\
(E_6) & c(f) = \{(x, y, \underline{z})\} \cup \chi_A^* \\
(E_7) & c(f) = \{(x, y, \underline{z}), (x, y^2, \underline{z})\} \cup \chi_A^* \\
(E_8) & c(f) = \{(x, y, \underline{z}), (x, y^2, \underline{z})\} \cup \chi_A^*.
\end{array}
$$

が成り立つ.

一般には, χ_A^* と $c(f)$ がどれくらい異なるだろうか？

Question 2.9. $A = S/(f)$ に対して, A が有限ＣＭ表現型であることと, χ_A が有限集合であることとは同値である.

Example 2.10. $f = x^3 + y^6 + z^2$ のとき, $A = k[[x, y, z]]/(f)$ は単純楕円型特異点であり, 有限ＣＭ表現型ではない. また,

$$
\begin{aligned}
\chi_A^* = c(f) \;&=\; \big\{(x, y, z), (x, y^2, z), (x, y^3, z), \\
&\qquad (x - \epsilon y^2, y^3, z)(\epsilon \in k^\times), \quad (x - \omega y^2, y^4, z)(\omega^3 = 1)\big\}.
\end{aligned}
$$

3. 2 次元有理特異点の SPECIAL IDEAL の分類

この節では, 2 次元有理特異点の Ulrich イデアルの幾何学的意味付けについて考えてみたい. 前節との関係について触れると, 2 次元単純特異点は, 2 次元 Gorenstein 有理特異点に他ならない.

以下では, A は 2 次元完備局所整域で, 標数 0 の代数的閉体 k を含むと仮定する.

Definition 3.1. 特異点解消 $\varphi\colon X \to \operatorname{Spec} A$ が存在し, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ をみたすとき, A は**有理特異点** (rational singularity) であると言う.

Definition 3.2 (Goto-Iai-Watanabe [GIW])**.** A は Gorenstein 局所環とし, I を $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとする. 極小節減 Q に対して $I^2 = QI$ が成り立ち, $I = Q : I$ (すなわち, $e_I^0(A) = 2 \cdot \ell_A(A/I)$) が成立するとき, I は **good イデアル**であると言う.

Gorenstein 局所環の場合, Ulrich イデアルは good イデアルの特別な場合である.

Proposition 3.3 ([GOTWY1])**.** *A を Gorenstein 局所環とし, I を $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとする. このとき, 次は同値である :*

(1) *I は Ulrich イデアルである.*
(2) *I は good ideal で, $\mu_A(I) = d+1$ が成り立つ.*
(3) *I は good ideal で, A/I は Gorenstein である.*

A を 2 次元の有理特異点と仮定する. good イデアルの幾何学的特徴付けを述べよう. 勝手な整閉 $\mathfrak{m}$ 準素 ideal I に対して, ある特異点解消 $\varphi\colon X \to \operatorname{Spec} A$ と X 上の anti-nef cycle Z が存在して, $I\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z)$ が可逆で, $I = H^0(X, \mathcal{O}_X(-Z))$ (I_Z と書く) が成り立つ. このとき, I は X **上で表現される**, という.

Theorem 3.4 (Goto-Iai-Watanabe [GIW])**.** *A を 2 次元有理二重点と仮定する. このとき, 次は同値である :*

(1) *I は good イデアルである.*
(2) *I は整閉で, 最小特異点解消上で表現される.*

Remark 3.5. (-1)-curve を含まない特異点解消を**最小特異点解消**と呼ぶ.

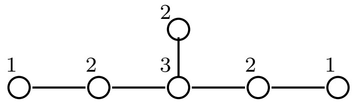
Remark 3.6. Non-Gorenstein case の good ideal については, 奥間氏, 渡辺氏と共同研究中である.

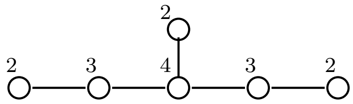
Ulrich ideal は good ideal の特別な場合であるから, 次のような特徴付けが得られる.

Corollary 3.7 ([GOTWY2])**.** *A は 2 次元有理二重点と仮定する. このとき, 次は同値である :*

(1) *I は Ulrich イデアルである.*
(2) *I は整閉で, 最小特異点解消上で表現される. また, 基本 cycle Z_0 に対して, $-ZZ_0 = 2$ である.*

E_6 型の有理二重点の場合を例に挙げると,

$Z_0 =$  $I_{Z_0} = (x, y, z)$

$Z_1 =$  $I_{Z_1} = (x, y^2, z)$

Ulrich イデアルを分類するために, Special McKay 対応を用いて定まる special Cohen-Macaulay 加群を少し一般化し, special イデアルの概念を導入しよう. 有理特異点においては, Ulrich イデアルは special イデアル になる. 特に, 有理二重点においては両者の概念は一致する.

Special ideal は幾何学的に特徴づけることができる. そのために, Special McKay 対応を思いだそう. $\varphi\colon X \to \operatorname{Spec} A$ を最小特異点解消とし, $E = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}) = \bigcup_{j=1}^{r} E_j$ を例外因子 E の既約成分への分解とする. MCM A 加群 M に対して, $\widetilde{M} = \varphi^*(M)/\mathrm{torsion}$ とおく.

Theorem 3.8 (Wunram による Special McKay 対応)**.** *各 i に対して, ただ 1 つの直既約 MCM A 加群 M_i が同型を除いて一意的に存在し,*

$$H_1(\widetilde{M_i^{\vee}}) = 0, \quad c_1(\widetilde{M_i})E_j = \delta_{i,j}\ (\forall i, j), \quad \operatorname{rank}_A M_i = n_i,$$

が成り立つ. ここで, $Z_0 = \sum_{j=1}^{r} n_j E_j$ は基本サイクルを表す.

Proposition 3.9 (Iyama-Wemyss)**.** *A を 2 次元有理特異点とし,M は MCM A 加群で, 自由因子を含まないものとする. このとき, 次は同値である :*

(1) $\mathrm{Syz}_A^1(M) \cong M^*(= \operatorname{Hom}_A(M, A))$ *が成立する.*

(2) M *は* M_i *達の有限直和である.*

この条件をみたす MCM A 加群 M を **special CM** A **加群**と呼ぶ*.*

Definition 3.10 (special CM 加群 [GOTWY2])**.** *A を 2 次元有理特異点とする. M が special Cohen-Macaulay A 加群で, M/IM が自由 A/I 加群のとき, M は I* **に関する special CM** A **加群**であると言う*.*

Definition 3.11 (special ideal [GOTWY2])**.** *A を 2 次元有理特異点とする. A の $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I が最小特異点解消上の反ネフサイクル Z により表現される good イデアル $I = I_Z$ であり, I に関する special Cohen-Macaulay A 加群が存在するとき,* **special イデアル**であると言う*.*

次の結果は, それぞれの判定法を得た後に証明される. 判定法については, ここでは触れない.

Proposition 3.12 ([GOTWY2])**.** *A は 2 次元有理特異点とする. I が Ulrich イデアルならば, special イデアルである.*

special イデアルの (幾何学的) 特徴付けを与えよう. 以下, $\varphi\colon X_0 \to \operatorname{Spec} A$ を有理特異点上の最小特異点解消とし, 例外因子の既約成分への分解を $E = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}) = \bigcup_{j=1}^{r} E_j$ とおく.

正サイクル Y に対して,

$$p_a(Y) = \frac{Y^2 + KY}{2} + 1$$

は Y の**算術的種数**と呼ばれる. これは, $KE_i = -E_i^2 - 2$ により計算できる. さらに, 次の公式が知られている.

$$(\text{公式})\quad p_a(Y + Y') = p_a(Y) + p_a(Y') + YY' - 1.$$

また, Artin により, A が 2 次元有理特異点のとき, $Y > 0$ ならば, $p_a(Y) \leq 0$ であることも知られている.

Lemma 3.13. $Z \neq Z_0$ を X_0 上の反ネフサイクルとすると,

$$\begin{aligned}
&0 < Y_s \leq Y_{s-1} \leq \cdots \leq Y_1 \leq Z_0,\\
&Z = Z_s,\\
&Z_k = Z_{k-1} + Y_k \ (k = 1, \ldots, s).
\end{aligned}$$

をみたすような反ネフサイクル $Z_1, \ldots, Z_s$ と正サイクル $Y_1, \ldots, Y_s$ が取れる.

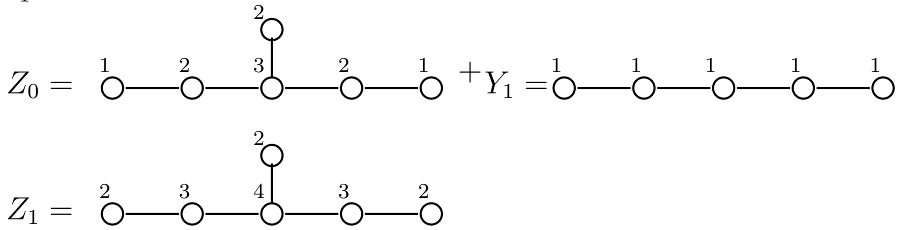
Theorem 3.14 (special ideal の特徴付け, [GOTWY2])**.** $Z = \sum_{j=1}^{r} a_j E_j \neq Z_0 = \sum_{j=1}^{r} n_j E_j$ を X_0 上の反ネフサイクルとし, $I = I_Z$ とおく. 各 $1 \leq i \leq r$ に対して, 次は同値である:

(1) M_i は I に関する *special CM A* 加群である.
(2) $a_i = n_i \cdot \ell_A(A/I)$ が成り立つ.
(3) 上記の *Lemma* の記号の下で, 各 $k = 1, 2, \ldots, s$ に対して,

$$Z_{k-1} Y_k = p_a(Y_k) = 0,\ \operatorname{coeff}_{E_i} Y_k = n_i$$

が成り立つ.

(E_6) 型有理二重点の special サイクルを調べよう. まず, $Z_0 Y_1 = 0$, $p_a(Y_1) = 0$ となる Y_1 を探す.



ここで, 反ネフサイクル性が崩れてしまうので, $Y_2 = E_2 + E_3 + E_4 \subset Y_1$ は付け加えられない！

Theorem の証明のアイデアを述べよう. キーになるのは次の結果である.

Theorem 3.15 (Riemann-Roch の公式)**.**
M を MCM A 加群とするとき, $I = I_Z$ に対して,

$$\begin{aligned}\ell_A(M/IM) &= \operatorname{rank}_A M \cdot \ell_A(A/I) + c_1(\widetilde{M})Z \\ \ell_A(A/I) &= -\frac{Z^2+KZ}{2} = 1 - p_a(Z)\end{aligned}$$

が成り立つ.

＜Theorem 3.15 の証明のアイデア＞ Riemann-Roch の公式から,

$$\begin{aligned}\ell_A(M_i/IM_i) &= \operatorname{rank}_A M_i \cdot \ell_A(A/I) + c_1(\widetilde{M_i})Z \\ &= n_i \cdot \ell_A(A/I) + a_i.\end{aligned}$$

M_i は special CM A 加群なので, 完全列

$$0 \to M_i^* \to A^{\mu_A(M_i)} \to M_i \to 0.$$

を得る. よって, $\mu_A(M_i) = 2{\cdot}n_i$. ゆえに, $\ell_A(M_i/IM_i) \le \mu_A(M_i){\cdot}\ell_A(A/I) = 2n_i{\cdot}\ell_A(A/I)$. 比較すると. $a_i \le n_i \cdot \ell_A(A/I)$ を得る. また, 等号が成立するのは, M_i/IM_i は A/I 上自由加群, すなわち, M_i は I に関する special CM A 加群である場合に限る.

- 後半は, 先の Lemma を用いて, s に関する帰納法を用いる.

4. 2 次元有理二重点上の Ulrich 加群の分類

この節では, 2 次元有理二重点の Ulrich 加群と special CM 加群との関係を調べ, 前節における special CM 加群の分類結果を利用して, Ulrich 加群の分類結果を述べたい.

Theorem 4.1 ([GOTWY2])**.** *I を 2 次元有理二重点 A の $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとし, M を MCM A 加群とするとき, 次は同値である :*

(1) *M は I に関する Ulrich A 加群である.*
(2) *M は I に関する special CM A 加群である.*
(3) *M/IM は A/I 上自由加群で, M は自由因子を含まない.*

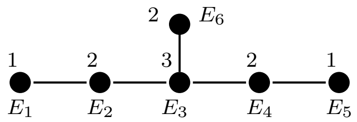
また, このとき, I は Ulrich イデアルである.

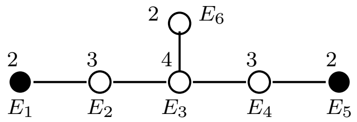
(注) 高次元の Gorenstein 局所整域に対しても, 'special' を $\mu_A(M) = 2 \cdot \operatorname{rank}_A M$ に取り換えて, 類似の結果が成り立つ.

Corollary 4.2 ([GOTWY2])**.** *A を 2 次元有理二重点, $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ とするとき, 次は同値である :*

(1) *I は Ulrich イデアルである.*
(2) *I は special イデアルである.*
(3) *I に関する Ulrich A 加群が存在する.*

(E_6) 型有理二重点の Ulrich 加群 ($f = x^3 + y^4 + z^2$ の場合) を例にあげて説明しよう.

$Z_0 =$ 

$Z_1 =$ 

$$
\begin{aligned}
M_i \text{ は } I_{Z_1} \text{ に関する Ulrich 加群} &\iff M_i \text{ は } I_{Z_1} \text{ に関する special CM 加群} \\
&\iff a_i = n_i \cdot \ell_A(A/I) = 2n_i. \\
&\iff i = 1, 5.
\end{aligned}
$$

ゆえに, I_{Z_1} に関する Ulrich 加群の一般的な形は, $M_1^{\oplus k_1} \oplus M_5^{\oplus k_5}$ である.

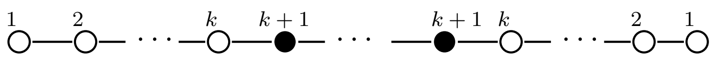
有理特異点における Ulrich 加群に関する問題点を整理しておこう.

Problem 4.3. (1) 2 次元有理二重点における Ulrich 加群は, ある Ulrich イデアルに対する special Cohen-Macaulay 加群に対応しており, 先の (E_6) 型の例のように完全に分類することができる ([GOTWY2]).

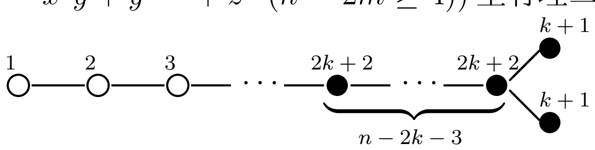
(2) 2 次元 non Gorenstein 有理特異点に対しては, 「Ulrich イデアルの幾何学的特徴づけ」, 「special イデアルの幾何学的特徴づけ」はなされているが, 「Ulrich 加群の分類」はなされていない.

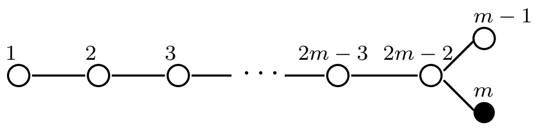
(3) 高次元の単純特異点に対しては, 「Ulrich イデアル」= 「special イデアル」の分類を先に与えた. これらのイデアルに関する Ulrich 加群は, Knörrer の周期性定理を用いることにより分類可能である. しかし, 一般のイデアル I に関する Ulrich 加群の分類については未解決である.

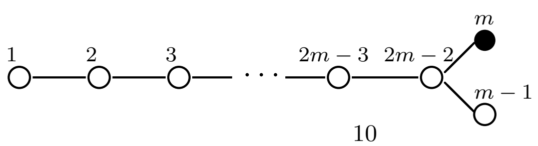
- (A_{2m}) $(f = x^2 + y^{2m+1} + z^2)$ 型有理二重点における Ulrich イデアル

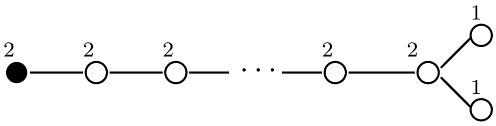
$Z_k =$  $(k = 0, 1, \cdots, m-1)$

- (D_n) $(f = x^2y + y^{n-1} + z^2$ $(n = 2m \geq 4))$ 型有理二重点における Ulrich イデアル

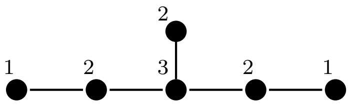
$Z_k =$  $(k = 0, 1, \ldots, m-2)$

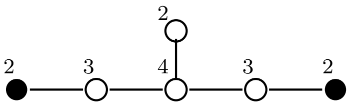
$Z_{m-1} =$ 

$Z_m =$ 

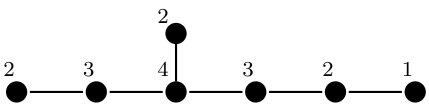
$Z_{m+1} =$ 

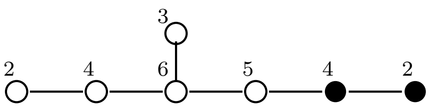
- (E_6) ($f = x^3 + y^4 + z^2$ 型有理二重点における Ulrich イデアル

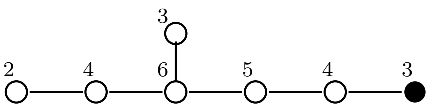
$Z_0 =$ 

$Z_1 =$ 

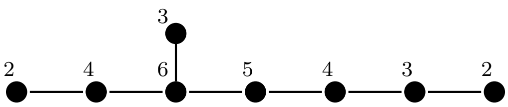
- (E_7) ($f = x^3 + xy^3 + z^2$ 型有理二重点における Ulrich イデアル

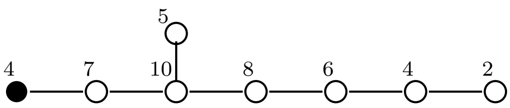
$Z_0 =$ 

$Z_1 =$ 

$Z_2 =$ 

- (E_8) ($f = x^3 + y^5 + z^2$ 型有理二重点における Ulrich イデアル

$Z_0 =$ 

$Z_1 =$ 

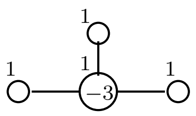
5. 例

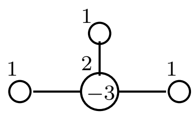
Example 5.1. $A = k[[s^7, s^4t, st^2, t^7]] = k[[x,y]]^G$ は巡回群 $G = \left\langle \begin{pmatrix} \epsilon_7 & \\ & \epsilon_7^3 \end{pmatrix} \right\rangle$ による商特異点である．最小特異点解消の双対グラフは $E_1 - E_2 - E_3$, (ただし，$E_1^2 = -3$, $E_2^2 = E_3^2 = -2$) の形をしている．

- 各整数 $a = 0, \dots, 6$ に対して，$M_a = (s^it^j \mid i + 3j \equiv a \pmod 7)$ とおくと，M_a は special CM 加群 (resp. Ulrich 加群) $\Leftrightarrow a = 1, 2, 3$ (resp. $4, 5, 6$) である．
- Special サイクルは $Z_0 = E_1 + E_2 + E_3$ と $Z_1 = E_1 + 2E_2 + E_3$ であり，I_{Z_1} に関する直既約な Special CM 加群は M_2 のみである．
- Ulrich イデアルは $\mathfrak{m}$ のみであるが，(直既約) Ulrich 加群はまだ分類されていない．

Example 5.2.

$A = k[[T, sT^2, s^{-1}T^2, (s+1)^{-1}T^2]] \cong k[[t,x,y,z]]/(xy - t^4,\ xz - t^4 - zt^2,\ yz - yt^2 - zt^2)$ は 2 次元の有理三重点である．$I = (x, y - z, t^2, z)$, $Q = (x, y - z)$ とおくと，I は Ulrich ideal である．この例では，Ulrich ideal = special ideal を示すことができる．

$Z_0 =$ 

$Z_1 =$ 

重複度が $e \geq 4$ 以上の場合には，Special CM 加群でも Ulrich 加群でもない (直既約)MCM 加群が存在する，

Example 5.3. $A = k[[s^4, s^3t, s^2t^2, st^3, t^4]]$ ($e = 4$ の商特異点)．を考える．その双対グラフは，E_1 (ただし，$E_1^2 = -4$) のみである．

Special McKay correspondence により，E_1 に対応する唯一の直既約 MCM 加群 M_1 が存在する．

	generators	rank M	$\mu_A(M)$	$e(M)$	
M_0	A	1	1	4	free
M_1	$As + At$	1	2	4	special
M_2	$As^2 + Ast + At^2$	1	3	4	
M_3	$As^3 + As^2t + Ast^2 + At^3$	1	4	4	Ulrich

References

[BHU] J. Brennan, J. Herzog, and B. Ulrich, *Maximally generated Cohen-Macaulay modules*, Math. Scand. **61**, 1987, 181–203.

[BH] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, revised edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[GIW] S. Goto, S. Iai, and K. Watanabe, *Good ideals in Gorenstein local rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **353** 2000, 2309–2346.

[GOTWY1] S. Goto, K. Ozeki, R. Takahashi, K.-i.Watanabe and K. Yoshida, *Ulrich ideals and modules*, to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

[GOTWY2] S. Goto, K. Ozeki, R. Takahashi, K.-i.Watanabe and K. Yoshida, *Ulrich ideals and modules over two-dimensional rational singularities*, submitted

[GW] S. Goto and K.-i. Watanabe, *On graded rings*, I, J. Math. Soc. Japan, **309**(1978), 179–213.

[HKuh] J. Herzog and M. Kühl, *Maximal Cohen-Macaulay modules over Gorenstein rings and Bourbaki-sequences*, Commutative algebra and combinatorics (Kyoto, 1985), 65–92, Adv. Stud. Pure Math., **11**, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[HKun] J. Herzog and E. Kunz, Der kanonische Modul eines Cohen–Macaulay–Rings, Lecture Notes in Mathematics 238, Springer–Verlag,1971.

[Li1] J. Lipman, *Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Publ. Math. IHES **36** (1969), 195–279.

[Li2] J. Lipman, *Desingularization of two-dimensional schemes*, Ann. of Math. **107** (1978), 151–207.

[S1] J. Sally, *Cohen–Macaulay local rings of maximal embedding dimension*, J. Algebra, **56** (1979), 168–183.

[U] B. Ulrich, *Gorenstein rings and modules with high numbers of generators*, Math. Z. **188** (1984), no. 1, 23–32.

[V] W. V. Vasconcelos, *Ideals generated by regular sequences*, J. Algebra, **6** (1967), 309–316.

[WY] K.-i.Watanabe and K.Yoshida, *Hilbert-Kunz multiplicity, McKay correspondence and good ideals in two-dimensional rational singularities*, manuscripta math. 104 (2001), 275–294.

[Yos] Y. Yoshino, Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings, London Mathematical Society Lecture Note Series, 146, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

K. Yoshida: Department of Mathematics, College of Humanities and Sciences, Nihon University, 3-25-40 Sakurajosui, Setagaya-Ku, Tokyo 156-8550, Japan

E-mail address: `yoshida@math.chs.nihon-u.ac.jp`