Realizing stable categories as derived categories

山浦 浩太

多元環の表現論では多元環から構成される三角圏の構造研究が一つのテーマとなっている．三角圏の研究における主要な研究対象は多元環上の加群圏の導来圏と自己入射多元環上の加群圏の安定圏である．本稿では「これら二つの三角圏がいつ三角圏同値になるか」という問題について考察する．

1 節では準備として, 導来圏, 安定圏等の記号の設定をする．2 節では上で述べた問題を考察する動機となった結果を紹介する．3 節では問題を解決する為の強力な道具である傾理論について述べる．4 節では問題への解答を与える主結果を述べる．

1 準備

本節では, 用語と記号の準備をする．本稿では体 K を一つ固定し, K 上の有限次元多元環を単に多元環ということにする．多元環上の加群は全て有限生成な右加群を扱うものとする．体 K による標準的双対を $D := \mathrm{Hom}_K(-, K)$ とおく．本稿では三角圏におけるシフト関手を [1] によって表す．

アーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して, その有界導来圏を $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ と書く．特に本稿ではアーベル圏 $\mathcal{A}$ として, 多元環 Λ 上の有限生成加群圏 $\mathrm{mod}\Lambda$ をとり, 導来圏 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\Lambda)$ を考える．また, 多元環 Λ 上の有限生成射影加群の有界複体のホモトピー圏を $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\Lambda)$ とする．これらの圏は三角圏であり, 忠実充満である自然な三角関手

$$\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\Lambda) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\Lambda)$$

が存在する．この関手の稠密性と多元環 Λ のホモロジー的性質には次の関係がある．

命題 1.1. 多元環 Λ に対して, 以下は同値である．

(a) Λ の大域次元は有限である．
(b) 自然な埋め込み $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\Lambda) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\Lambda)$ は三角圏同値である．

本節の残りで, Frobenius 圏とその安定圏について述べる．以下に述べる事実の詳細は [7] を参照されたい．

定義 1.1. $\mathcal{A}$ をアーベル圏とし, $\mathcal{B}$ を拡大で閉じた $\mathcal{A}$ の充満部分加法圏とする．

(1) $\mathcal{B}$ の対象 X が $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, \mathcal{B}) = 0$ をみたすとき、**相対射影的**であるという．

(2) $\mathcal{B}$ の対象 X が $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, X) = 0$ をみたすとき、**相対入射的**であるという.

(3) $\mathcal{B}$ が次の条件をみたすとき, **Frobenius 圏**という.

(a) $\mathcal{B}$ の任意の対象 X に対し, 各項が $\mathcal{B}$ の対象である完全列

$$0 \to Y \to P \to X \to 0, \quad 0 \to X \to I \to Z \to 0$$

で, P が相対射影的, I が相対入射的であるものが存在する.

(b) $\mathcal{B}$ の相対射影対象と相対入射対象は一致する.

定義 1.2. Frobenius 圏 $\mathcal{B}$ の安定圏 $\underline{\mathcal{B}}$ を次のように定める.

- 対象は $\mathcal{B}$ の対象と同じとする.
- $\mathcal{B}$ の対象 X, Y に対し, $\underline{\mathcal{B}}$ における X から Y への射の集合を

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{B}}(X, Y) := \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y)}{\{\text{ 相対射影対象を通過する射 }\}}$$

とする.

Frobenius 圏の安定圏は自然な三角圏構造をもつ (cf. [7]). 三角圏 $\mathscr{T}$ がある Frobenius 圏の安定圏と三角圏同値であるとき, $\mathscr{T}$ を**代数的三角圏**という.

本稿で扱う代数的三角圏の例を二つ挙げる. 一つ目の例は既に記号を導入したホモトピー圏である.

例 1.1 (代数的三角圏の例 1)**.** 環 Λ に対して, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\Lambda)$ は代数的三角圏である (cf. [7]).

二つ目の例は自己入射多元環上の加群の安定圏である. 本稿では次数付き加群の安定圏を考えるので, 先に次数付き多元環と次数付き加群について記号を設定しておく. 次数付き多元環の表現論については [4, 5] を参照されたい.

定義 1.3. $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ を $\mathbb{N}$ 次数付き多元環とする. ここで A_i は A の次数 i の部分加法群を表す. 同様に $\mathbb{Z}$ 次数付き A 加群 X に対し, 次数 i の部分加法群を X_i によって表す.

以下により, $\mathbb{Z}$ 次数付き有限生成 A 加群の圏 $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A$ を定める.

- 対象は $\mathbb{Z}$ 次数付き有限生成 A 加群とする.
- 対象 X, Y に対し, X から Y への射の集合を

$$\mathrm{Hom}_A(X, Y)_0 := \{f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y) \mid \forall i \in \mathbb{Z},\ f(X_i) \subset Y_i\}$$

とする.

この圏は十分に射影対象と入射対象をもつアーベル圏である.

圏 $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A$ は次数に関するシフト関手をもつ. 整数 k に対して, 次数に関するシフト関手

$$(k) : \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A \to \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A$$

が次で定められる.

- A 加群としては, $X(k) = X$ とする.
- 次数付けを $X(k)_i = X_{i+k}$ とする.

この関手は自己同型であり, その逆は $(-k)$ によって与えられる.

多元環が自己入射的であるとき, 上で定めた次数付き加群の圏は Frobenius 圏となる.

定義 1.4. 多元環 A に対し, A が加群として入射的であるとき, **自己入射多元環**という. 例えば, 体上の有限群の群環や 0 次元可換 Gorenstein 多元環が自己入射多元環である.

例 1.2 (代数的三角圏の例 2). A を $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射的多元環とする. このとき, A の自己入射性から $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}} A$ における射影対象と入射対象は一致する. 従って $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}} A$ は Frobenius 圏であり, その安定圏 $\underline{\operatorname{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ には三角圏構造が入る.

2　目的とその動機

本節では本稿の目的を, 動機となった定理を紹介しながら説明する

2.1　Beilinson の定理と BGG 対応

1978 年に射影空間に関する驚くべき二つの圏同値が提出されている. この小節では $K = \mathbb{C}$ とし, $\operatorname{coh} \mathbb{P}^n$ を n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ の連接層の圏とする.

一つ目の圏同値は Beilinson の定理と呼ばれる射影空間と多元環の間の導来圏同値である.

定理 2.1. [2] 三角圏同値

$$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{coh} \mathbb{P}^n) \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} \Lambda^{(n)})$$

が成立する. ここで $\Lambda^{(n)}$ は次のクイバーと関係式で定義される多元環である.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
0 \arrow[r, shift left=4, "x_0^0"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1^0"] \arrow[r, phantom, shift right=1, "\vdots"] \arrow[r, shift right=4, "x_n^0"'] & 1 \arrow[r, shift left=4, "x_0^1"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1^1"] \arrow[r, phantom, shift right=1, "\vdots"] \arrow[r, shift right=4, "x_n^1"'] & 2 \arrow[r, shift left=4, "x_0^2"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1^2"] \arrow[r, phantom, shift right=1, "\vdots"] \arrow[r, shift right=4, "x_n^2"'] & \cdots\cdots \arrow[r, shift left=4, "x_0^{n-2}"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1^{n-2}"] \arrow[r, phantom, shift right=1, "\vdots"] \arrow[r, shift right=4, "x_n^{n-2}"'] & n-1 \arrow[r, shift left=4, "x_0^{n-1}"] \arrow[r, shift left=1.5, "x_1^{n-1}"] \arrow[r, phantom, shift right=1, "\vdots"] \arrow[r, shift right=4, "x_n^{n-1}"'] & n
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} x_i^k x_i^{k+1} = 0 & (0 \le k \le n-2,\ 0 \le i \le n) \\ x_i^k x_j^{k+1} + x_j^k x_i^{k+1} = 0 & (0 \le k \le n-2,\ 0 \le i, j \le n). \end{cases}$$

二つ目の圏同値は Bernstein-Gel'fand-Gel'fand 対応と呼ばれる, 導来圏と安定圏の間の圏同値である. $n+1$ 変数の外積代数を

$$A^{(n)} = \frac{K\langle x_0, x_1, \cdots, x_n \rangle}{(x_i x_j + x_j x_i, x_i^2 \mid 0 \le i, j \le n)}.$$

とする．今, 全ての i に対して $\deg x_i = 1$ と定めることにより, 外積代数を次数付き多元環とみなす．外積代数は $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環である．この設定の下, 次の定理が示された.

定理 2.2. [3] 三角圏同値

$$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{coh}\mathbb{P}^n) \simeq \underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A^{(n)}$$

が成立する.

以上の定理において, 代数幾何学と環の表現論を結びつける興味深い二つの圏同値が示されている．本稿では代数幾何学と環の表現論の結びつきはさておき, 二つの圏同値を繋げることによって得られる圏同値

$$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda^{(n)}) \simeq \underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A^{(n)} \tag{2.1}$$

に注目する．この圏同値は異なる多元環同士の表現論的結びつきを与えており, 双方の研究に役立つと考えられる．圏同値 (2.1) から次の問題を考えることは自然だろう.

問題 2.1. 一般に多元環上の加群圏の導来圏と次数付き自己入射多元環上の次数付き加群の安定圏が, いつ三角圏同値になるだろうか.

次小節では, この問題に導来圏の立場から解答を与える Happel の定理を紹介する.

2.2 Happel の定理

与えられた多元環から自己入射多元環を構成する方法として, 入射余生成子による自明拡大環を作る操作がある．1980 年代から多元環とその自明拡大環の表現論的関係が調べられており, 様々な性質の対応が明らかにされてきた (例えば [6, 8, 9, 12])．その中で特に重要であるのが, 導来圏と安定圏の観点から両者の関係を与えた, Happel による定理である．本節では, この Happel の定理について述べる.

まず, 自明拡大環の定義を復習する.

定義 2.1. 多元環 Λ に対して, 両側 Λ 加群 $D\Lambda$ による**自明拡大環** $\mathrm{T}(\Lambda)$ を次で定める.

- 加法群として $\mathrm{T}(\Lambda) := \Lambda \oplus D\Lambda$ と定める.
- 積を $a, b \in \Lambda$, $f, g \in D\Lambda$ に対し, $(a, f) \cdot (b, g) := (ab, ag + fb)$ によって定める.

この定義により, $\mathrm{T}(\Lambda)$ は多元環となる．さらに, $\mathrm{T}(\Lambda)$ は自己入射的であることが容易に確かめられる.

自明拡大環は

$$\mathrm{T}(\Lambda)_i := \begin{cases} \Lambda & (i = 0) \\ D\Lambda & (i = 1) \\ 0 & (i \geq 2) \end{cases}$$

と定めることにより, $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環となる.

次が自明拡大環に関する Happel の定理である.

定理 2.3. [6, 8] 多元環 Λ に対して, 以下は同値である.

(a) Λ の大域次元は有限である.
(b) 三角圏同値 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda) \simeq \underline{\operatorname{mod}}^{\mathbb{Z}}\mathrm{T}(\Lambda)$ が存在する.

この定理は多元環 Λ に対し, 「ある $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環 A が存在して, 三角圏同値 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda) \simeq \underline{\operatorname{mod}}^{\mathbb{Z}}A$ が成立する」為の必要十分条件を与えており, 問題 2.1 に対する部分的解答を与えている. さらに次の問題を解決すれば, 問題 2.1 に完全な解答を与えたことになる.

問題 2.2. $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環 A に対し, ある多元環 Γ が存在して三角圏同値

$$\underline{\operatorname{mod}}^{\mathbb{Z}}A \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Gamma)$$

が成立するのは, A がどのような条件をみたすときか？

本稿の目的は問題 2.2 を解決し, 問題 2.1 に解答を与えることである. 問題 2.2 は次節で述べる傾理論を用いて, 幾分か考察し易い別の問題に帰着することで解決される.

3 傾理論

本節では傾理論について述べる. 傾理論とは, 与えられた三角圏を環上の加群圏の導来圏と比較する理論である. 傾理論は多くの研究者の寄与によって発展してきた歴史ある理論である (例えば [6, 10, 11], cf. [1, 7]) が, 以下では本稿に必要な結果を紹介するのみに留める.
傾理論で重要な役割を果たすのが, 次に定義する傾対象である.

定義 3.1. 三角圏 $\mathscr{T}$ の対象 T が次の条件を満たすとき, **傾対象**という.

(1) $\operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(T, T[i]) = 0$ $(i \neq 0)$.
(2) 直和因子で閉じ, T を含む $\mathscr{T}$ の最小の部分三角圏は $\mathscr{T}$ 自身である.

傾対象の例を挙げる.

例 3.1. Λ を環とする. このとき, 複体

$$\Lambda = (\cdots\cdots \to 0 \to 0 \to \Lambda \to 0 \to 0 \to \cdots\cdots)$$

は $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\Lambda)$ の傾対象である.

上の例より, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\Lambda)$ は傾対象を有する代数的三角圏である. 逆に傾対象を有する代数的三角圏は $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\Lambda)$ という形の三角圏に限る.

定理 3.1. [10] $\mathscr{T}$ を代数的三角圏とし, さらに $\mathscr{T}$ の冪等射は必ず分裂すると仮定する. もし $\mathscr{T}$ が

傾対象 T をもてば, 三角圏同値

$$\mathscr{T} \simeq \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{End}_{\mathscr{T}}(T))$$

が存在する.

命題 1.1 と定理 3.1 より, 問題 2.2 を考察し易い次の問題に置き換えることができる.

問題 3.1. $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環 A に対し,

(1) $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ が傾対象を有する為の必要十分条件は何か？
(2) $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ が傾対象を有するとき, その準同型環の大域次元は有限か？

4 主結果

本節では問題 2.2 及び問題 3.1 に解答を与える主結果を述べ, いくつかの例に適用する. 次の定理が本稿の主結果である.

定理 4.1. [13] $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環 $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ に対し, 以下の条件は同値である.

(a) A_0 の大域次元は有限である.
(b) $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ は傾対象を有する.
(c) ある多元環 Γ が存在して, 三角圏同値 $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\Gamma)$ が成立する.

ここでは定理 4.1 (a) ⇒ (b) (c) の証明の概略として, 特に (b) における $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ の傾対象と, (c) における多元環 Γ の構成法を一つ与える. 構成は非常に簡単である.

$$\ell := \max\{i \mid A_i \neq 0\}$$

とおく.

まず, 截断関手を定義する. 截断関手

$$(\ \ )_{\geq i} : \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A \to \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A,$$

を, $X \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A$ に対して, $X_{\geq i} := \bigoplus_{k \geq i} X_k$ とすることで定める. $X_{\geq i}$ は X の $\mathbb{Z}$ 次数付き部分 A 加群である. さらに別の截断関手

$$(\ \ )_{\leq i} : \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A \to \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A$$

を, $X \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A$ に対して, $X_{\leq i} := X/X_{\geq i+1}$ とすることで定める. $X_{\leq i}$ は X の $\mathbb{Z}$ 次数付き剰余 A 加群である.

截断関手を用いて, $\mathbb{Z}$ 次数付き A 加群 T を

$$T := \bigoplus_{i=0}^{\ell-1} A(i)_{\leq 0} \tag{4.1}$$

によって定義し, 安定圏における T の準同型環を

$$\Gamma := \underline{\mathrm{End}}_A(T)_0$$

とおく. このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 4.2. A_0 の大域次元が有限ならば, 以下が成立する.

(1) T は $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ における傾対象である.
(2) Γ の大域次元は有限である.

命題 1.1, 定理 3.1, 命題 4.2 より, 三角圏同値

$$\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A \simeq \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\Gamma) \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\Gamma)$$

を得る. このようにして定理 4.1 (a) ⇒ (b) (c) が証明される. □

定理 4.1 により問題 2.2 及び問題 3.1 が解決し, 最初の疑問である問題 2.1 に対する解答を与えることができた.

本稿の最後に定理 4.1 を具体例に適用する. まず, 傾対象の準同型環を計算する為に少し便利な補題を与えておく.

定義 4.1. A を $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環とする. ある $\ell \in \mathbb{Z}$ が存在して $\mathrm{Soc}(A_A) \subset A_\ell$ をみたすとき, ℓ を A の **Gorenstein パラメータ**という.

注意 4.1. Gorenstein パラメータに関する注意を与える.

(1) 一般に $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環が Gorenstein パラメータをもつとは限らない.
(2) 局所的な $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環は単純ソークルをもつので, Gorenstein パラメータをもつ.

$\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環が Gorenstein パラメータをもつならば, (4.1) で構成した T の準同型環が次のように表示される.

補題 4.3. A を $\mathbb{N}$ 次数付き自己入射多元環とし, T を (4.1) で構成した $\mathbb{Z}$ 次数付き A 加群とする. もし A が Gorenstein パラメータをもち, その値が ℓ であるならば, 環同型

$$\underline{\mathrm{End}}_A(T)_0 = \mathrm{End}_A(T)_0 \simeq \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{\ell-2} & A_{\ell-1} \\ & A_0 & \cdots & A_{\ell-3} & A_{\ell-2} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & A_0 & A_1 \\ 0 & & & & A_0 \end{pmatrix}$$

が成立する.

以上の準備の下, 例を与える.

例 4.1. n を正の整数とし, $A = K[x]/(x^{n+1})$ とする．A は自己入射的であり, $\deg x = 1$ とすることにより $\mathbb{N}$ 次数付き多元環となる．この A に定理 4.1 を適用してみる．

まず $A_0 = K$ であるから $\mathrm{gl.dim}(A_0) = 0 < \infty$ である．従って定理 4.1 より, $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ は傾対象を有する．命題 4.2 から (4.1) で構成した $T = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A(i)_{\leq 0}$ が $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ における傾対象の一つとなり, $\Gamma = \underline{\mathrm{End}}_A(T)_0$ とおくと三角圏同値

$$\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\Gamma)$$

が成立する．ここで A は Gorenstein パラメータをもち, その値は n である．補題 4.3 より, Γ は K 上の n 次上半三角行列環と環同型であることがわかる．

例 4.2. 定理 4.1 を用いて三角圏同値 (2.1) を証明する．以下では 2.1 節で導入した記号を用いる．

まず $\left(A^{(n)}\right)_0 = K$ より, $\mathrm{gl.dim}\left(A_0^{(n)}\right) = 0 < \infty$ である．従って定理 4.1 より, $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A^{(n)}$ は傾対象を有する．命題 4.2 から (4.1) で構成した $T = \bigoplus_{i=0}^{n} \left\{A^{(n)}(i)\right\}_{\leq 0}$ が $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A^{(n)}$ における傾対象の一つとなり, $\Gamma = \underline{\mathrm{End}}_{A^{(n)}}(T)_0$ とおくと三角圏同値

$$\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A^{(n)} \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\Gamma)$$

が成立する．ここで $A^{(n)}$ は Gorenstein パラメータをもち, その値は $n+1$ である．補題 4.3 を用いて Γ のクイバーと関係式を求めると, $\Lambda^{(n)}$ のクイバーと関係式と一致することが確かめられる．以上より三角圏同値 (2.1) を得る．

例 4.3. 定理 4.1 を用いて定理 2.3 を証明する．Λ を多元環とし, $A := \mathrm{T}(\Lambda)$ とする．

定理 2.3 (a) $\Rightarrow$ (b) を示そう．$\mathrm{gl.dim}\Lambda < \infty$ を仮定する．$A_0 = \Lambda$ であるから, 定理 4.1 より $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ は傾対象を有する．命題 4.2 から (4.1) で構成した $T = A_{\leq 0} = \Lambda$ が $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A$ における傾対象の一つとなり, $\Gamma = \underline{\mathrm{End}}_A(T)_0$ とおくと三角圏同値

$$\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}} A \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\Gamma)$$

が成立する．ここで A は Gorenstein パラメータをもち, その値は 1 である．補題 4.3 より環同型 $\Gamma \simeq \Lambda$ を得る．以上より定理 2.3 (b) の三角圏同値が得られた．

定理 2.3 (b) $\Rightarrow$ (a) は定理 4.1 (c) $\Rightarrow$ (a) から従う．

謝辞. 第 58 回代数学シンポジウムにて, 講演の機会を頂きましたことに感謝します．

参考文献

[1] L. Angeleri Hügel, D. Happel and H. Krause, *Handbook of tilting theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 332. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[2] A. A. Beilinson, *Coherent sheaves on* $\mathbb{P}^n$ *and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12 (1978), no. 3, 68–69.

[3] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, *Algebraic vector bundles on $\mathbb{P}^n$ and problems of linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12 (1978), no. 3, 66–67.

[4] R. Gordon and E. L . Green, *Graded Artin algebras*, J. Algebra 76 (1982), no. 1, 111–137.

[5] R. Gordon and E. L . Green, *Representation theory of graded Artin algebras*, J. Algebra 76 (1982), no. 1, 138–152.

[6] D. Happel, *On the derived category of a finite-dimensional algebra*, Comment. Math. Helv. 62 (1987), no. 3, 339–389

[7] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[8] D. Happel, *Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite-dimensional algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 3, 641–648.

[9] D. Hughes, J. Waschbüsch, *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) 46 (1983), no. 2, 347–364.

[10] B. Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 27 (1994), no. 1, 63–102.

[11] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 3, 436–456.

[12] H. Tachikawa, *Representations of trivial extensions of hereditary algebras*, Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp. 579–599, Lecture Notes in Math., 832, Springer, Berlin, 1980.

[13] K. Yamaura, *Realizing stable categories as derived categories*, Adv. Math. 248 (2013), 784–819.

山梨大学 医学工学総合研究部
〒400-8510 山梨県甲府市武田 4-3-11
E-mail address：kyamaura@yamanashi.ac.jp